# ① Лемма Брэмбла-Гильберта

] $\Omega$ - открытая, выпуклая, ограниченная область в $E^n$ с диаметром

$$d = \sup_{x,y\in\Omega} \rho(x,y) \qquad x=(x_1,\ldots,x_n)\quad y=(y_1,\ldots,y_n)$$

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

] $l(u)$ - линейный ограниченный функционал в $W_2^m(\Omega)$, где $0<m=\bar{m}+\lambda$, $\bar{m}$ - ~~целое~~ $\in Z^+\cup\{0\}$, $\lambda\in(0;1]$

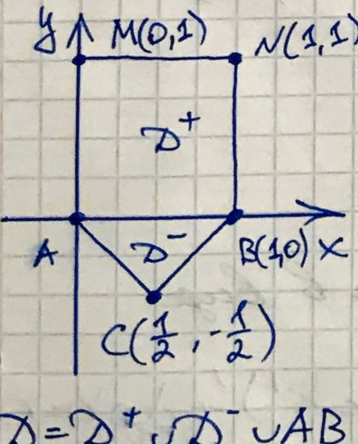
т.е. $$|l(u)| \le M\left(\sum_{j=0}^{\bar{m}} d^{2j}|u|^2_{W_2^j(\Omega)} + d^{2m}|u|^2_{W_2^m(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Если $l(u)$ обращается в нуль на многочленах степени $\bar{m}$ по переменным $x_1,\ldots,x_n$ $\Longrightarrow$

$\exists\ \bar{M}(\Omega)$, не зависящая от $u(x)$:

$$|l(u)| \le M\bar{M}\, d^m\, |u|_{W_2^m(\Omega)}$$

# ② Формулировка задачи Трикоми-Неймана для параболо-гиперболического уравнения




$D = D^+\cup D^-\cup AB$

$$\begin{cases} u_x - u_{yy} = g(x,y),\ y>0 \\ u_{xx}-u_{yy} = g(x,y),\ y>0 \end{cases} \qquad ①$$

$$g\in C(D^+\cup D^-)$$

$$\begin{cases} u(x,y)\big|_{CA} = \psi(y)\in C[-\frac{1}{2},0] \\ u(x,y)\big|_{AM} = f(y)\in C[0,1] \\ u_y(x,y)\big|_{MN} = \varphi(x)\in C[0,1] \\ \psi(0)=f(0), \end{cases} \qquad ②$$

Задача:

Найти $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap C^2(D^+\cup D^-)$, удовлетворяющую ① и ②. и $u_y(x,y)\in C(D\cup MN)$

③ Задача о нагруженной струне и соответствующая спектральная задача.

$x = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$

$M_i$ – сосредоточенные массы, $F_i$ – сосредоточенные силы

$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t)$

$k u_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = -F_i(t)$, где $k$ – модуль Юнга

Сила инерции из II-го закона Ньютона:

$F_i(t) = -M_i u_{tt}(x_i, t)$

Получаем задачу:

Найти решение $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, которое удовлетворяет граничным условиям

$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$

условиям сопряжения в точках $x = x_i$

$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t)$

$M_i u_{tt}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} \quad (i = \overline{1, n})$

и начальным условиям

$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$

Найдем решение поставленной задачи в виде

$u(x,t) = X(x) T(t)$

$T'' + \lambda T = 0$ и $\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(k \frac{dX}{dx}\right) + \lambda \rho X = (k X')' + \lambda \rho X = 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases}$

Условия сопряжения: $\begin{cases} X(x_i - 0) = X(x_i + 0) \\ M_i X(x_i) T'' = k X' \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} T \end{cases}$

Тогда $k X' \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} = -\lambda M_i X(x_i)$

Таким образом для $X(x)$ получается спектральная задача:

$\frac{d}{dx}(k X') + \lambda \rho X = 0,\ k(x) > 0,\ \rho(x) > 0$

$X(0) = 0,\ X(l) = 0$

$\begin{cases} X(x_i - 0) = X(x_i + 0) \quad (i = \overline{1, N}) \\ k X'(x_i + 0) - k X'(x_i - 0) + \lambda M_i X(x_i) = 0 \end{cases}$

④ Неравенство Гёльдера

Если $p>1$, число $q$ связано с числом $p$ по формуле $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f(x)\in L_p(E)$, $g(x)\in L_q(E)$, то ф-ция $f(x)g(x)$ суммируема на $E$ и справедливо неравенство Гёльдера

$$\int_E |f(x)g(x)|\,dx \le \|f(x)\|_{L_p(E)}\,\|g(x)\|_{L_q(E)}$$

Док-во:

1) Введём в рассмотрение на множестве $x>0$ функцию $\varphi(x)=x^\alpha-\alpha x$, $\alpha\in(0,1)$

$$\varphi'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\ \begin{matrix} >0, \text{ при } x\in(0,1) \\ <0, \text{ при } x>1\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ $\varphi(x)$ достигает максимума при $x=1$

2) Запишем $\varphi(x)\le\varphi(1)$ в виде $x^\alpha\le\alpha x+1-\alpha$ и $\exists$ $x=\frac{a}{b}$, $a\ge 0$, $b>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a^\alpha\cdot b^{1-\alpha}\le\alpha a+(1-\alpha)b$ $\forall a\ge0, b\ge0$.

Если $\alpha=\frac{1}{p}$, то $1-\alpha=\frac{1}{q}$

Получаем нер-во Юнга: $a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$ (*)

3) При $f(x)\sim0$ или $g(x)\sim0$ нер-во Гёльдера очевидно.

При $f(x)\not\sim0$, $g(x)\not\sim0$ $\exists$ $a=\frac{|f(x)|^p}{\|f(x)\|^p}$, $b=\frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|_q^q}$

Тогда из (*) $|f(x)g(x)|\le\|f(x)\|_p\,\|g(x)\|_q\cdot$

$$\cdot\left(\frac{|f(x)|^p}{p\,\|f(x)\|_p^p}+\frac{|g(x)|^q}{q\,\|g(x)\|_q^q}\right) (**)$$

Правая часть соотношения суммируема на $E$ и из мажорантного признака следует, что левая часть также суммируема на $E$ т.е. $f(x)g(x)$. Интеграл от (**) равен 1.

Отсюда следует нер-во Гёльдера. ЧТД.

Определение сопряжённого оператора в линейных нормированных пространствах

$\exists$ $A$ - линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства $X$ в линейное нормированное пространство $Y$ ($y=Ax$). Если $\varphi(y)$ - любой линейный функционал, определённый на $Y$, то $f=\varphi(Ax)$ - линейный функционал, определённый на $X$.

$|f(x)| = |\varphi(Ax)| \le \|\varphi\| \, \|Ax\| \le \|\varphi\| \|A\| \|x\|.$

Таким образом $\forall \; \varphi \in Y^*$ ставится в соответствие $f \in X^*$, т.е. построен оператор, определённый на $Y^*$ со значениями в $X^*$. Этот оператор $A^*$ называется сопряжённым $f = A^* \varphi$