Формула свертки.

Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют абс. непр. распр. с плот. $f_{\xi_1}(u)$ и $f_{\xi_2}(v)$, то плотность распр. $\xi_1+\xi_2$ $\exists$ и равна: $f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u) f_{\xi_2}(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(u) f_{\xi_1}(t-u)\,du$

Д-во:

Воспользуемся леммой ($\eta = g(\xi_1,\xi_2)$ $F_\eta = P(g(\xi_1,\xi_2)<x) = \iint_{D_x} f_{\xi_1\xi_2}(u,v)\,du\,dv$) для $g(u+v)=u+v$.

$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \iint_{D_x} f_{\xi_1}(u) f_{\xi_2}(v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x-u} f_{\xi_1}(u) f_{\xi_2}(v)\,dv\right)du = \left\{\begin{array}{l} v=t-u \\ v\in(-\infty,x-u) \\ t\in(-\infty,x) \quad dv=dt \end{array}\right\}$

$\Rightarrow F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(u) f_{\xi_2}(t-u)\,dt\,du = \int_{-\infty}^{x}\left(\int f_{\xi_1}(u) f_{\xi_2}(t-u)\,du\right)dt$ ∎

Точечные оценки. ~~Нес~~ Оптим. оценки. Теорема о ед. опт. оц.

Опр: Оценка $\theta^*_n = \theta^*(x_1,\dots,x_n)$ наз-ся оптимальной, если
1) она несмещ. ($E\theta^* = \theta$)
2) $\forall$ другой несмещ. оценки $T(x_1,\dots,x_n)$ имеет место $D\theta^*_n \le DT$ $\forall\theta$

Теорема

Если оптимальная оценка существует, то она единств.

Д-во:

От противного. Предположим, что T_1 и T_2 - оптим. оценки $\Rightarrow$

$\Rightarrow ET_1 = ET_2 = \theta$

$DT_1 = DT_2 = \sigma^2 - \min$. $\exists\, T = \frac{1}{2}(T_1+T_2) \Rightarrow ET = \theta$, $\sigma^2 \le DT$

$\Downarrow$

$4\sigma^2 \le 2DT = D(T_1+T_2) =$

$= 2\sigma^2 + 2\,cov(T_1,T_2) \Leftrightarrow \underset{\sqrt{DT_1 DT_2}}{\underset{\parallel}{\sigma^2}} \le cov(T_1,T_2) \mid : \sqrt{DT_1 DT_2}$

$\Downarrow$

$1 \le \rho(T_1,T_2)$ (Далее $=1$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow T_1$ и T_2 - лин. связ. ($\overset{=\theta}{T_1} = a\overset{=\theta}{T_2} + b$ п.н.)

$\Downarrow$

$\theta(1-a) = b$

$\sigma^2 = cov(T_1,T_2) = E(T_1-\theta)(T_2-\theta) = a\sigma^2 \Rightarrow a=1 \quad b=0$ ∎