Билет 19

Лемма Бореля-Кантелли

$\{A_i\}$ - совокуп. случ. событий; $A^+ = \overline{\lim} A_i = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overbrace{\bigcup\limits_{k\ge n} A_k}^{B_n}$

1) Если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty \Rightarrow P(A^+) = 0$

2) Если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) = +\infty$ и $\{A_i\}$ - незав., то $P(A^+) = 1$

Д-во:

1) $P(A^+) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) \overset{\text{полуаддит.}}{\le} \sum\limits_{k\ge n} P(A_k) \xrightarrow[\text{из сх-ти ряда}]{} 0$

2) $P(A^+) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - P\left(\bigcap\limits_{k\ge n} \bar{A}_k\right)\right) = 1 - \lim\limits_{\ell\to\infty} P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\ell} \bar{A}_k\right) = 1 - \lim\limits_{\ell\to\infty} \prod\limits_{k=n}^{\ell} P(\bar{A}_k) =$
$= 1 - \lim\limits_{n} \prod\limits_{k\ge n} (1 - P(A_k)) = 1$

∎

Точечные оценки. Несмещ. оценки и их св-ва. Сост. оценки

Опр. $\Theta^*(X_1, \dots, X_n)$ - несмещ. оценка для Θ, если $E\Theta^* = \Theta$

Св-ва:

1) Оценок может быть много
2) Несмещ. оценки могут не существовать

X_1 - выборка из $Pois(\Theta)$. $\nexists$ несмещ. оценки для $1/\Theta$

Д-во: От противного. $\exists\, \Theta^*(X_1)$ - несмещ. оценка $\Rightarrow E\Theta^*(X_1) = \frac{1}{\Theta}$, $\Theta > 0$

$E\Theta^* = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Theta^*(k) \frac{\Theta^k}{k!} e^{-\Theta} = \frac{1}{\Theta} \xrightarrow[\Theta\to 0]{} \infty \Rightarrow ?!$
(левая часть при $\Theta \to 0$ $\to \Theta^*(0)$)

3) Несмещ. оценки могут $\exists$, но быть бессмысл.
4) $\exists\, E\Theta^*(X_1, \dots, X_n) = \Theta$. Не $\forall$ непр. $f \Rightarrow Ef(\Theta^*) = f(\Theta)$

Пример: $\Theta = EX$, $\bar{X}$ - несмещ. оценка

$DX = E(X^2) - (EX)^2 = D\bar{X} + \Theta^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \Theta^2$ $\quad D\bar{X} = \frac{1}{n^2} n DX_1 = \frac{\sigma^2}{n}$ $\quad \sigma^2 = DX$

Опр. Оценка $\Theta^*(X_1, \dots, X_n) = \Theta^*_n$ наз-ся состоятельной, если $\Theta^*_n \xrightarrow{P} \Theta$ $\quad n \to \infty$

Св-ва:

1) Может быть много
2) Необяз. несмещ.
3) Могут быть бессмысленны