離散数学

佐藤謙成

April 13, 2025

目次

写像

写像

2 つの集合 A から B への関係のうち, 集合 A の各要素に, それぞれ B の要素がただ一つだけ対応している関係を A から B への写像という. この時, 集合 A を定義域と呼び, 集合 B を値域, 像と呼ぶ. f が A から B への写像ならば,

$$f : A \to B$$

と書く. ここで, a の対応先が b のとき $b = f(a)$ と書く. また, 関数 f の要素でもあるので順序対 (a, b) と書くことができる.

恒等写像

A を任意の集合とし, A の各要素 a に a を対応させれば, これも A から A への写像となる. この写像を恒等写像という.

単射

A から B への写像を f とする．定義域 A の異なる要素が異なる像を持つならば, 写像 f は単射という．$a_1, a_2 \in A$ について

$$a_1 \neq a_2 \text{ならば} f(a_1) \neq f(a_2)$$

全射

A から B への写像を f とする. 値域 B の各要素が A のある要素の像となっている時, 写像 f は全射という.

$$\forall b \in B, \exists a \in A, b = f(a) \tag{1}$$

全単射

f が単射かつ全射のとき, 全単射という. 1 対 1 対応という.

逆写像

写像 $f : A \to B$ の逆関係 $f^{-1} : B \to A$ が写像となるための必要十分条件は, f が A から B への全単射であることである. またそのときの f^{-1} は B から A への全単射となる. これを f の逆写像という.

写像の合成

A, B, C を 3 つの集合とし, A から B への写像を f, B から C への写像を g とする. ここで, A の各元 a に対して, f による像として B の元 $f(a)$ が定まり, さらに $f(a)$ の g による像として C の元, $g(f(a))$ が定まるので, すなわち a に $g(f(a))$ を対応させる A から C への写像 $h : A \to C$ を考えることができる. この写像 h を f と g との合成写像といい, $g \circ f$ または (gf) で表す.

合成写像の性質

A, B, C を 3 つの集合とし, $A \to B$ への写像を f , $B\ toC$ への写像を g とすると

1. f と g が共に全射なら, $g \circ f$ は全射である.
2. f と g が共に単射なら, $g \circ f$ は単射である.
3. f と g が共に全単射なら, $g \circ f$ は全単射である.

合成写像の性質.2

複数の写像を合成する場合, 合成した結果は順番に依存しない, つまり任意の写像 f, g, h について,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

鳩の巣原理 (部屋割り論法)

U, V が有限集合で $|U| > |V|$ のとき,U から V への単射[a]は存在しない.
言い換えると,$n+1$ 個以上のアイテムを n 個の箱に入れる場合、少なくとも 1 つの箱には 2 個以上のアイテムが入る

[a]始集合の任意の 2 つの要素が終集合の要素との関係で重複しないこと

鳩の巣箱の原理.2

問題例

6 個の異なる正の整数をどのように選んでも, それらの中に, 差が 5 で割り切れる 2 つの数が存在する.

鳩の巣箱の原理の証明例

$\mathbb{Z}^+$ の部分集合で要素数が 6 となる集合 U を任意に取る。集合 $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ とし、U から V への写像 f を $f(x) = x \mod 5$ と定める。
$|U| > |V|$ なので、鳩の巣原理より、V の要素 y で $|f^{-1}[\{y\}]| \geq 2$ となる要素が存在する. そのような要素を y_0 とする.
$f^{-1}[\{y_0\}]$ から異なる要素 x_1 と x_2 を任意に取る。逆像の定義と f の定義より、$f(x_1) = f(x_2)$、即ち、$x_1 \mod 5 = x_2 \mod 5$ が成り立つ。mod の定義より、$x_1 - 5\lfloor x_1/5 \rfloor = x_2 - 5\lfloor x_2/5 \rfloor$ が成り立つ。
$\mathbb{Z}$ の要素について、$x_1 - x_2 = 5(\lfloor x_1/5 \rfloor - \lfloor x_2/5 \rfloor)$ が成り立つ。即ち、x_1 と x_2 の差は 5 で割り切れる。ここで、U は任意の集合であったので、任意の異なる 6 個の正の整数からなる集合に対して、差が 5 で割り切れる 2 つの数が存在する。