

复杂网络上的合作演化——基于异质性网络的视角

梅庆宇*

北京大学 工学院

摘 要

合作行为在自然和社会系统中广泛存在，但传统博弈理论（如囚徒困境）预测背叛行为将主导群体策略动力学，这与现实观察形成鲜明对比。近年来，复杂网络理论的发展为解释合作的涌现提供了新视角。本文综述了三篇关键研究 ([1],[2],[3])，探讨了社会网络的异质性如何促进合作演化。研究发现，无标度网络的拓扑特性（如枢纽节点的存在、聚类、年龄相关性）能显著增强合作，使合作在囚徒困境、雪堆博弈和公共品博弈中成为主导策略。此外，个体贡献的多样性（如固定总成本 vs. 固定单次成本）进一步提升了合作水平。这些结果表明，社会结构的不均匀性为合作行为提供了自然选择优势，并为理解现实社会中的合作机制提供了理论框架。

关键词 群体博弈、复制动力学、无标度网络、空间结构、合作策略演化、异质性

*2022 级机器人工程专业，学号 2200011191

目录

1	引言	3
2	博弈模型与群体演化	4
2.1	博弈模型：囚徒困境 (PD)、雪堆博弈 (SG)、公共品博弈 (PGG)	4
2.2	群体博弈和演化动力学	5
2.2.1	复制动力学	6
2.2.2	模仿动力学	7
3	复杂网络理论与构建	8
3.1	规则图与 ER 随机网络	9
3.2	BA 无标度网络	9
3.3	把博弈部署在网络上	10
4	合作策略演化的现象与核心机制分析	12
4.1	无标度网络结构下合作得到充分促进	13
4.2	微观视角无标度网络的合作促进机制：波动策略者的作用	15
4.3	均分贡献：引入更多多样性	16
4.4	局限性与挑战	18
5	总结与展望	19
A	附录 1：PD 与 SG 博弈模拟算法	22
B	附录 2：PGG 模拟算法	23

1 引言

合作 (Cooperation), 行为广泛存在于人类社会和自然界的生物群体交互之中. 基因在基因组中合作, 单细胞生物到在细胞生物生物中合作, 生物间存在互利共生的合作形式. 对于人类, 合作是个体组成社团形成社会与国家的必要决策. 合作行为广泛存在于生物群体和人类社会, 从微生物的群体感应到人类的公共资源管理, 合作在维持群体稳定性和促进集体利益方面发挥着关键作用.

然而, 根据自然选择原理, 每个生物优先保证自己的生存和获利最大化, 乃至必要时牺牲对手. 传统的博弈理论 (例如囚徒困境) 也类似地指出, 在缺乏外部约束 (惩罚和声誉机制) 条件下, 相互背叛 (Defection) 是个体最优选择, 这与合作行为的常见形成对比 [4]. 图1给出了示例. 这种理论预测与自然界中普遍存在的合作现象之间的矛盾, 促使研究人员探索各种机制来解释合作的演化. 其中, 个体之间的互动模式, 即网络结构, 被认为是影响合作行为的关键因素之一

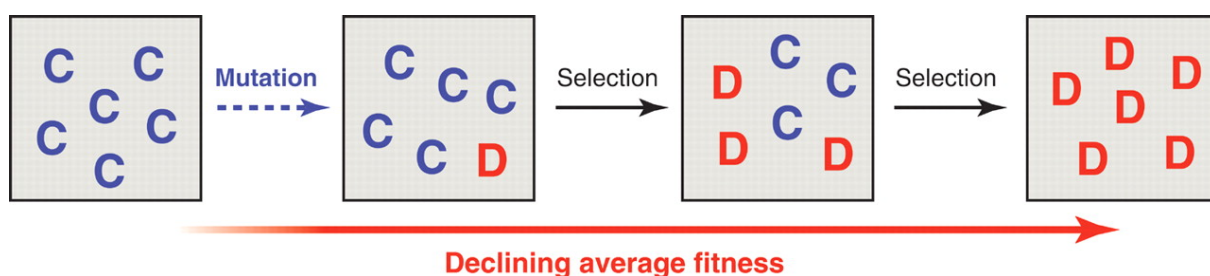


Figure 1: 自然选择导致群体中完全背叛. 在此博弈类型下, 背叛有更高适应度, 导致最终背叛占据全体.

近年来, 复杂网络理论的发展为理解合作行为提供了新的视角. 研究表明, 社会结构的异质性 (如无标度网络的幂律分布) 能够显著影响合作 [1]. 例如, 在无标度网络中, 高度连接的枢纽节点倾向于成为合作者, 并通过网络结构稳定合作集群 [2]. 此外, 公共品博弈 (PGG) 中的贡献多样性 (如个体在不同博弈中贡献不均等) 进一步增强了合作 [3]. 这些发现表明, 网络拓扑的异质性和个体行为的多样性共同促进了合作.

本文综述了三篇关键研究, 系统探讨社会网络如何促进合作. 首先, 我们回顾 Santos 与 Pacheco 的工作 [1], 揭示无标度网络在囚徒困境和雪堆博弈中的普适性作用; 其次, 分析 Gómez-Gardeñes et al. 的核与聚类的观点 [2], 探讨不同网络类型 (规则 vs. 无标度) 对合作组织的影响; 最后, 讨论 Santos et al. 关于公共品博弈的研究, 阐明贡献多样性如何进一步提升合作水平 [3]. 这些研究共同表明, 社会网络的异质性为合作行为提供了优势, 并为理解现实社会中的合作机制提供了重要启示. 不均匀和多样性促进了合

作的涌现.

文章有以下结构. 第二部分和第三部分介绍了模型基础与理论框架, 是三篇关键被引文章的理论前提. 第四部分是核心内容, 给出社会异质性和多样性促进合作演化的核心机制. 第五部分我们详细给出文章中所使用模拟程序的设计算法. 最后一部分总结并展望了后续研究可能的方向.

2 博弈模型与群体演化

我们对群体中合作行为演化的分析借助了群体博弈的分析方法. 群体博弈 (Population Games) 是博弈论的一个分支, 研究的是大量个体在群体中的互动行为. 群体博弈关注群体中个体的策略选择如何影响整个群体的动态演化, 我们给群体指定一种特定的博弈类型, 如雪堆博弈 (SG)、囚徒困境 (PD) 等, 在这个博弈类型框架下, 群体中个体有各自的策略选择和收益, 他们相互交互进行博弈, 在演化动力学指导下选择的策略发生动态变化.[5] 在经过一定的演化之后, 群体中个体策略 (包括合作和背叛) 趋于稳定, 此时估计群体内合作比例, 可以对合作的演化结果得到把握. 我们将在后面内容具体介绍如何在群体中建立空间网络结构, 并部署各种博弈类型进行演化动力学模拟.

下面我们具体介绍在群体博弈中最常使用的博弈模型, 包括 PD、SG、PGG. 前两种博弈类型常作为两个个体博弈的模型, 后一种博弈类型常作为多个个体博弈的模型.

2.1 博弈模型: 囚徒困境 (PD)、雪堆博弈 (SG)、公共品博弈 (PGG)

囚徒困境与雪堆博弈:

囚徒困境和雪堆博弈是演化博弈论中两个经典模型, 用来研究个体在合作与背叛之间的选择. 我们会在下面演化动力学部分介绍二者在 well-mixed (混合均匀) 群体中稳定状态, 这里仅以二人博弈为例.

囚徒困境设定如下情景:

参与者: 两名玩家, 分别称为 A 和 B;

决策: 两名玩家可以合作 (C) 或背叛 (D);

收益: 双方都合作时, 两人各得收益 R ; 双方都背叛时, 各得到收益 P ; 背叛时, 背叛者得收益 T , 被背叛者得收益 S , 且满足 $T > R > P > S$. 我们使用收益矩阵描述博弈收益:

$$\begin{bmatrix} R & S \\ T & P \end{bmatrix} \quad (1)$$

根据博弈论理论，囚徒困境下纳什均衡是双方都选择背叛，即双方都选择 D. 此时双方都获得收益 P . 对于每个个体他们都获得自身最优收益，但整体收益 P 小于双方都选择合作收益 R . 这里合作者与背叛者进行互动，合作者获得更大损失.

雪堆博弈与囚徒困境类似，但是设定收益如下： $T > R > S > P$. 我们对收益进行标准化，即 $R = b - \frac{c}{2}$, $S = b - c$, $T = b$, $P = 0$, 满足 $b > 1$. 令 $c = 1$, 有如下收益矩阵：

$$\begin{bmatrix} b - \frac{1}{2} & b - 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

雪堆博弈有着一个混合纳什均衡策略，此时合作与背叛共存.[1][6]

公共品博弈：

公共品博弈是一种多人博弈、收益均摊的博弈类型，是用来分析集体活动困境的核心理论模型，在经济社会、生态等多种领域有广泛的应用. 公共品博弈设置了如下情景：

参与者： n 个玩家，每个人初始持有 e 资源；

决策： 玩家 i 可以选择把 $g_i \in [0, e]$ 进行投资，自己有保留 $e - g_i$ ；

公共池： 所有玩家投资之和为 $G = \sum_{i=1}^n g_i$, 收益放大 $r(1 < r < n)$ 倍，均分给所有玩家.

因此，每个人有如下收益：

$$\pi_i = e - g_i + \frac{rG}{n} = e - g_i + \frac{r(g_i + G_{-i})}{n} \quad (3)$$

其中 G_{-i} 是排除自己外其他人的付出.

这里我们对 π_i 求导， $\frac{d\pi_i}{dg_i} = -1 + \frac{r}{n}$, 当收益放大比例 r 满足 $r \in (1, n)$ 时，个体收益 π_i 随着投入 g_i 增加反而减小. 但是对于社会而言，当 $r > 1$ 时，公共品博弈中社会的收益是增加的. 群体最优与个体最优的不一致会导致“搭便车”的出现. 上述理论表明，在没有惩罚、声誉机制等条件下，当收益放大比例 r 满足 $r \in (1, n)$ 时，公共品博弈中个体的最优策略是 0 投入，即背叛 (D). 公共品博弈是多人博弈，为简单起见不给出收益矩阵.

2.2 群体博弈和演化动力学

一旦我们选定了群体中个体相互博弈采用的博弈模型，我们可以考虑在足够大群体中分析某种合作策略的稳定状态. 我们采用复制动力学 [7] 和模仿动力学分别来分析群体博弈在 well-mixed 混合均匀种群和结构化种群的演化过程. 研究者常采用演化博弈论作为统一数学框架，并以囚徒困境 (PD) 和雪堆博弈 (SG) 等模型作为研究无亲缘个体

间合作的模型. 复制动力学可以分析足够大 well-mixed 群体中稳定策略的比例分布, 给出一般性的结论. 但是对于后续的计算机模拟, 由于种群建立在有限个体并具有一定结构, 需要使用模仿最优方法来进行理论分析.[8]

2.2.1 复制动力学

复制动力学用于描述无限大群体中不同策略的频率如何随时间演化. 假设一个群体由大量个体组成, 每个个体采用某种策略 (如合作或背叛). 其中, 个体策略的适应性 (fitness) 取决于群体中策略的分布 (即博弈的支付矩阵). 更成功的策略会在群体中扩散, 而表现较差的策略会逐渐减少. 策略的增长速率与其相对适应度成正比.

对于含有 n 种策略的群体, $x_i(t)$ 表示时间 t 时采用策略 i 的个体比例. 故 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. 我们定义采用策略 i 的适应度 $f_i(x)$, 在博弈中可以表示策略 i 的平均收益. 定义平均适应度 $\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x)$.

复制动力学方程可以表示为:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(f_i(x) - \bar{f}(x)) \quad (4)$$

由方程可以分析, 某种策略的适应度大于平均适应度时, 该策略占比将提高.

使用复制动力学对囚徒困境和雪堆博弈在无限混合均匀 (well-mixed) 群体中进行建模.

囚徒困境 根据收益矩阵 (1), 设囚徒困境中合作者 (C) 占比为 x , 合作者 (C) 的适应度为 $f_c = xR + (1-x)S$, 背叛者 (D) 适应度为 $f_d = xT + (1-x)P$. 平均适应度 $\bar{f}(x) = xf_c + (1-x)f_d$.

代入得:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)[(R-T)x + (S-P)(1-x)] \quad (5)$$

其中 $T > R > P > S$, 故 $\frac{dx}{dt} < 0$. 故囚徒困境中合作者占比 x 随时间 t 单调递减, 最终趋于 0, 背叛者占比 $1-x$ 趋于 1. 也就是说, 囚徒困境中背叛者占优, 合作者最终灭绝.

雪堆博弈 根据收益矩阵 (2), 设雪堆博弈中合作者 (C) 占比为 x , 与上面类似地, 有:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) \left[-\frac{1}{2}x + (b-1)(1-x) \right] \quad (6)$$

雪堆博弈的合作成本收益比 $r = \frac{c}{2R} = \frac{1}{2b-1}$, $r \in (0, 1)$. r 越接近 0, 合作收益相

对越大. 令 $\frac{dx}{dt} = 0$, 得出一个内部稳定点 $x^* = \frac{2b-2}{2b-1} = 1-r$, 雪堆博弈中合作者占比最终稳定在 $1-r$ 附近 [7].

2.2.2 模仿动力学

对于有限个个体的群体, 且群体可能具有一定的结构, 比如我们将个体按照一定的几何空间关系组织起来. 此时个体无法与群体内所有个体中随机一个个体进行互动, 我们规定只能与特定的一些个体 (比如个体附近的一些邻居) 进行互动. 与上面复制动力学类似引入适应度的概念, 但是对于互动后个体策略的更新, 我们采用模仿最优策略.[6]

模仿最优是指个体在与周围的邻居进行博弈后, 每一个个体都获得相应的收益值, 根据收益值差距的大小, 个体以一定概率选择邻居的策略作为下一时间步自身的策略.

具体的概率值一般可以由两种方式进行设定: 比例模仿和费米规则.

比例模仿 比例模仿的思想是, 首先个体与周围的邻居进行博弈, 获得相应的收益值. 当有邻居的收益大于自身收益值时, 个体按照收益差的比例概率模仿高收益邻居的策略. 可以模仿的邻居一定有更高的收益. 模仿概率是

$$P_{i \rightarrow j} = \begin{cases} \frac{f_j - f_i}{\phi} & \text{if } f_j > f_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

其中, f_i 和 f_j 分别是个体 i 和 j 的收益值, ϕ 是一个常数, 用于控制模仿的强度, 通常取收益矩阵中最大值与最小值的差. $P_{i \rightarrow j}$ 表示个体 i 模仿邻居 j 的概率.

采用此种方式, 个体严格模仿收益更高邻居策略, 且收益差越大, 模仿概率越大.

费米规则 与比例模仿相比, 模仿概率由费米函数决定, 收益差越大, 模仿概率越高, 但允许偶尔向收益低的邻居模仿, 使得效果更加真实. 模仿概率是

费米规则描述了个体 i 模仿个体 j 策略的概率:

$$P_{i \rightarrow j} = \frac{1}{1 + e^{-\beta(f_j - f_i)}} \quad (8)$$

其中: $\beta \geq 0$ 为选择强度,

- $\beta \rightarrow 0$ 时: 相当于完全随机模仿, 此时

$$P_{i \rightarrow j} \rightarrow \frac{1}{2}$$

- $\beta \rightarrow +\infty$: 确定性模仿更高收益者.

$f_j - f_i$ 是收益差，决定概率倾斜方向。

采用此种规则，个体大概率模仿高收益邻居策略，但也存在概率模仿低收益邻居的策略。

3 复杂网络理论与构建

群体博弈和复杂网络的结合是关键的理论突破。复杂网络为群体博弈提供了一个自然的框架，可以用来描述个体之间的交互结构，将博弈空间化。例如，在社交网络中，每一个节点代表参与的个体，个体之间的互动可以通过网络中的边来表示。类似的，群体博弈可以采用复杂网络描述这些个体在互动中的策略选择和行为演化。具体而言，网络中各个节点可以看作群体的各个个体，节点之间的连接关系则表示哪些个体进行博弈互动。

复杂网络的特定空间结构对群体的演化有明显的影响，根据假设的不同，可以选择规则网络、随机网络、无标度网络等作为描述群体结构的模型，利用模仿动力学，采用一定的策略更新规则，从而研究不同的网络空间结构如何影响群体博弈的均衡和动态行为。[9] 因此在进行后续的论述前，有必要介绍关键几种复杂网络，包括规则网络和异质网络。图2给出了三种网络的示例。

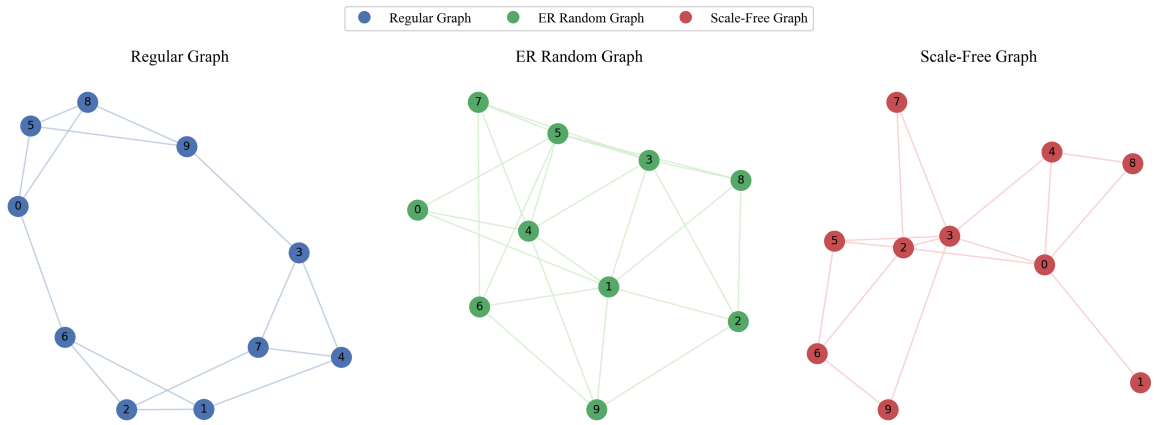


Figure 2: 10 个节点的规则网络、ER 随机网络和无标度网络。规则网络度数为 3。随机网络连接概率是 0.5。无标度网络采用 BA 模型生成。

3.1 规则图与 ER 随机网络

规则图是一种所有节点具有相同度数的图，即每个节点的邻居数量相同。在图论中，度分布 $p(k)$ 是用来描述图中节点度数的概率分布函数，表示在图中随机选择一个节点，其度数恰好为 k 的概率。环形图和网格图是两种常见的规则图。环形图中的节点按照环形排列，每个节点有固定的邻居数量。网格图中的节点按照矩形网格排列。如图3所示。规则图的度分布 $p(k)$ 是一个狄拉克函数，表示所有节点的度数相同。规则图有着较高的

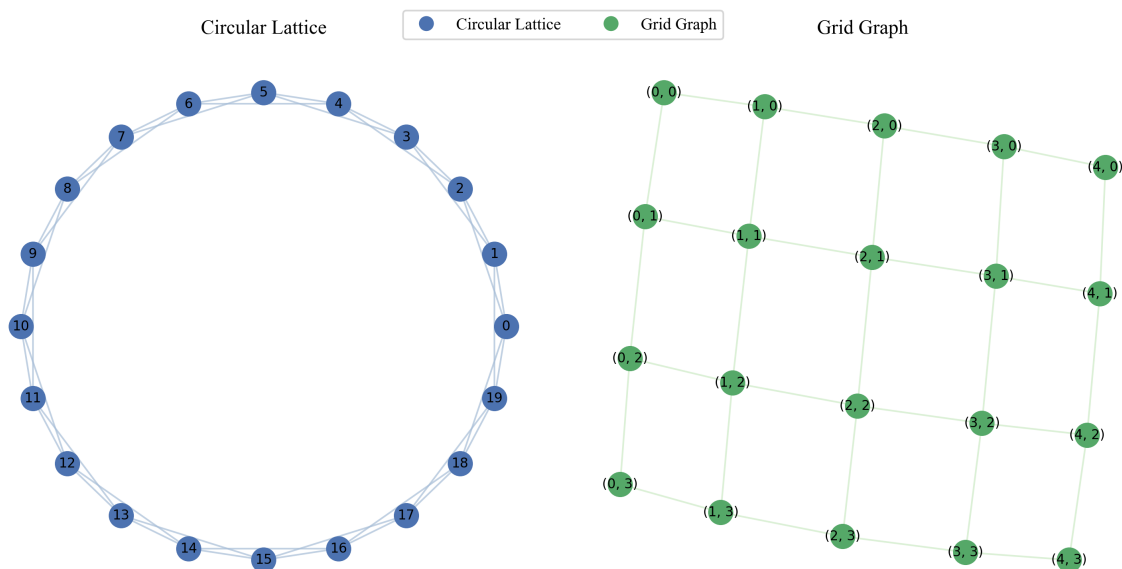


Figure 3: 环形的规则图和方格点阵的规则图.

聚类系数和较长的平均路径长度，高度理想对称。

ER 随机网络由 Paul Erdős 和 Alfréd Rényi 于 1959 年提出，是最经典的随机图模型之一。包括两种形式：给定节点数和每个节点连接的概率 $(G(n, p))$ 、给定 n 个节点随机选择 m 条边 $(G(n, m))$ 。ER 随机网络度分布 $p(k)$ 近似服从泊松分布，即 $p(k) \sim \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ ，其中 λ 是平均度数。ER 随机网络具有较低的聚类系数和较短的平均路径长度，适合描述随机连接的网络结构 [12]。

3.2 BA 无标度网络

BA 无标度网络 (scale-free network) 有着不同于上述两种网络的特点。BA 无标度网络是一种具有幂律分布的复杂网络，其节点度分布服从幂律分布，即 $p(k)$ 服从 $p(k) \sim k^{-\gamma}$ 的分布，其中 γ 是幂指数，一般情况下 $2 \leq \gamma \leq 3$ 。在无标度网络里，存在枢纽节点。少数枢纽节点连接了极多的边，而大多数节点连接的边数很少。这种网络结构在许多现

实世界的网络中都能观察到，如互联网、社交网络和生物网络等。

BA 网络得名于 Albert-László Barabási 和 Réka Albert 提出的一种生成无标度网络的机制：增长和优先连接机制 [10]，增长指网络规模随时间扩大，新节点不断加入。优先连接指新节点倾向于连接已有高度数节点。为了引入网络的增长特性，从少量 (m_0) 顶点开始，每一步添加一个新顶点，该顶点具有 $m \leq m_0$ 条边，将新顶点与系统中 m 个不同的已有顶点连接起来。为了引入优先连接，假设新顶点连接到顶点 i 的概率 Π 依赖于该顶点的连接度 k_i ，即 $\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$ 。经过 t 步后，该模型产生一个具有 $t + m_0$ 个顶点和 mt 条边的随机网络。该网络符合无标度网络特性，其中顶点具有 k 条边的概率遵循幂律。此外，也有其它非增长和优先连接机制的无标度网络生成方法 [11]，这里不做详细讨论。

无标度网络相比规则网络和 ER 随机网络，能更好描述现实世界网络真实关系。少数节点起到枢纽作用，随机移除节点对网络连通性影响较小。但是移除枢纽节点会导致网络迅速崩溃。在 BA 网络中，节点的年龄与其度数相关，即 BA 网络中较老的节点往往具有更高的度数。[1][12]

3.3 把博弈部署在网络上

上面我们论述了各种博弈类型以及可用的复杂网络，下面我们介绍如何将博弈部署在网络上。

如图4所示，网络上有若干节点，每个节点有一个确定的策略。中心节点与它的所有邻居节点进行博弈，每个节点的总收益是多次博弈收益之和。根据总收益的差值，可以使用上文提到的策略更新规则，更新节点的策略。这是对于一个时间步之内的博弈进行的更新。所有节点更新完毕后，进入下一个时间步，此时所有节点的累积收益清零，重新开始博弈。PD 和 SG 博弈的部署方式类似。PGG 博弈相比 PD、SG，是一种多人博弈，部署方式不同。

对于 PGG，在网络上以每个节点为中心，与邻居组成公共池，公共池里的个体根据当前策略（C 或 D）选择投入或者不投入。为获得一个时间步内各个节点的总收益，节点需要参与所有包含它的公共池博弈。总收益是所有公共池博弈收益之和减去个体在所有公共池内投入的差值。如图5所示。对于一个节点 k ，首先 k 与 k 的所有邻居组成一个公共池进行 PGG 博弈。 k 节点它的所有邻居也会形成以自身为中心节点的公共池，都包含 k 节点。因此， k 节点需要参与 $d(k) + 1$ 个 PGG 博弈， $d(k)$ 指 k 的度数。节点的最

Prisoner's Dilemma on a Network

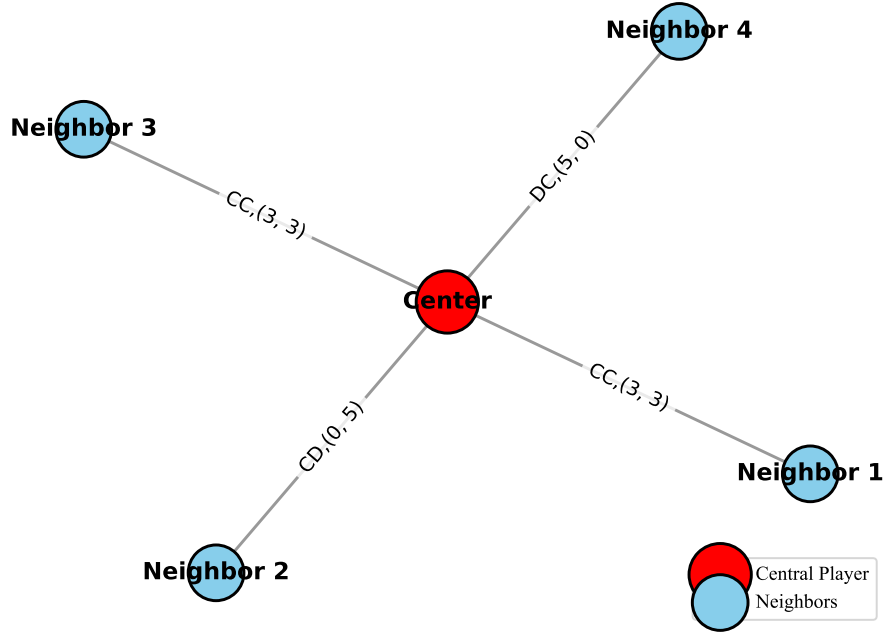


Figure 4: 网络上 PD、SG 博弈的部署示例.

PGG clusters of central node

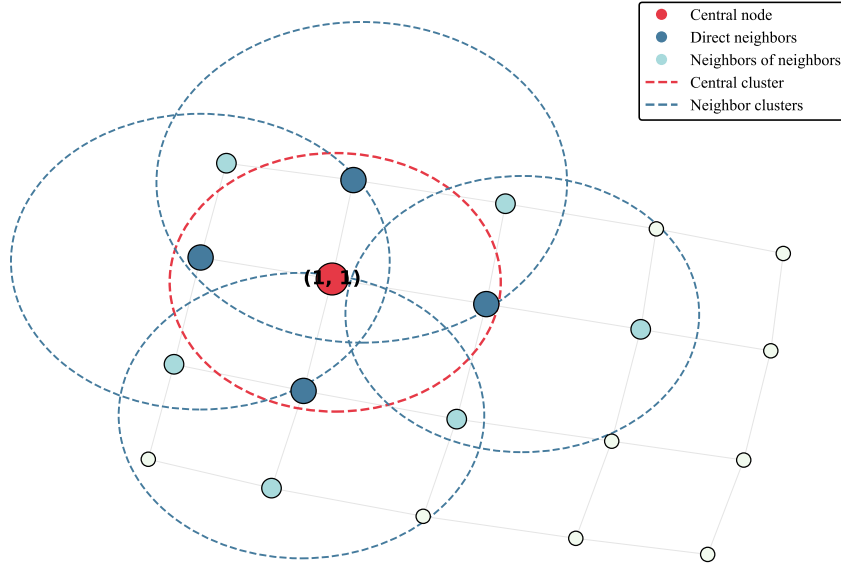


Figure 5: 网络上 PGG 博弈的部署示例. 图中红色中心节点有四个邻居, 红色节点需要参加五个圈住的 PGG 博弈.

终收益 $W(k)$ 为所有公共池博弈收益之和减去所有公共池内投入的差值, 即

$$W(k) = \sum_{i=1}^{d(k)+1} W_i - \sum_{i=1}^{d(k)+1} I_i \quad (9)$$

获得收益后，可以采用上文给出的更新方式进行节点策略的更新 [3][13]. 投入分配的方式可以是每个公共池投入相同成本，也可以是总成本固定，每个公共池平均投入.

具体数学推导如下：

设个体 x 为中心的 PGG 组, 组规模是 $k_x + 1$ (k_x 为 x 的邻居数, 也就是度数, 见图5). n_C 为 x 邻域内合作者 (C) 的数量. r 为收益放大倍数.

按社交关系比例贡献 (a)

所有合作者在每个公共池贡献固定成本 c (总贡献成本与邻居数成正比), 其中背叛者 (D) 收益: $P_D = \frac{crn_C}{k_x + 1}$, 合作者 (C) 收益: $P_C = P_D - c$.

均摊贡献 (b)

合作者每局贡献成本 $\frac{c}{k_x + 1}$ (总贡献恒为 c , 与邻居数无关), 其中背叛者和合作者收益同上.

则个体 y (策略 s_y : 1=C, 0=D) 在 x 为中心的 PGG 中收益 [3] 为:

$$\Pi_{y,x} = \frac{cr}{k_x + 1} \sum_{i=0}^{k_x} \frac{s_i}{k_i + 1} - \frac{c}{k_y + 1} \cdot s_y \quad (10)$$

其中:

- $i = 0$ 代表中心个体 x , s_i 为 x 邻居 i 的策略, k_i 是邻居 i 的度数.

4 合作策略演化的现象与核心机制分析

合作现象是自然界中常见且重要的一种生物相处机制, 在人类社会中也广泛存在. 但是, 按照生物进化论“适者生存”的理论, 生物之间为生存进行相互竞争是常态, 反而对合作现象的解释遇到困难. 借助上文论述的理论基础, 我们把个体间交互的机制使用前文的几种博弈类型进行抽象, 将个体抽象为节点, 个体相互关系以复杂网络代替, 群体结构得以量化, 为数学量化和寻找合作的产生机制提供了方便.

在众多的网络结构中, 无标度网络因其独特的拓扑特性而备受关注. 无标度网络的度分布遵循幂律分布, 枢纽节点拥有极高的连接数, 而大多数节点则只有少数连接. 这种异质的连接模式在各种现实世界的系统中普遍存在. 鉴于合作在这些系统中也广泛存在, 一个核心问题自然而然地产生: 无标度网络的独特拓扑结构是如何影响互动实体之间合作行为的出现、维持和演化的?

我们下面从无标度网络对合作促进的现象开始, 针对不同的博弈类型分析异质性和多样性对合作的关键促进作用, 从而获取到无标度网络枢纽节点作为网络互惠 [4] 的核

心对合作的维持的核心作用.

4.1 无标度网络结构下合作得到充分促进

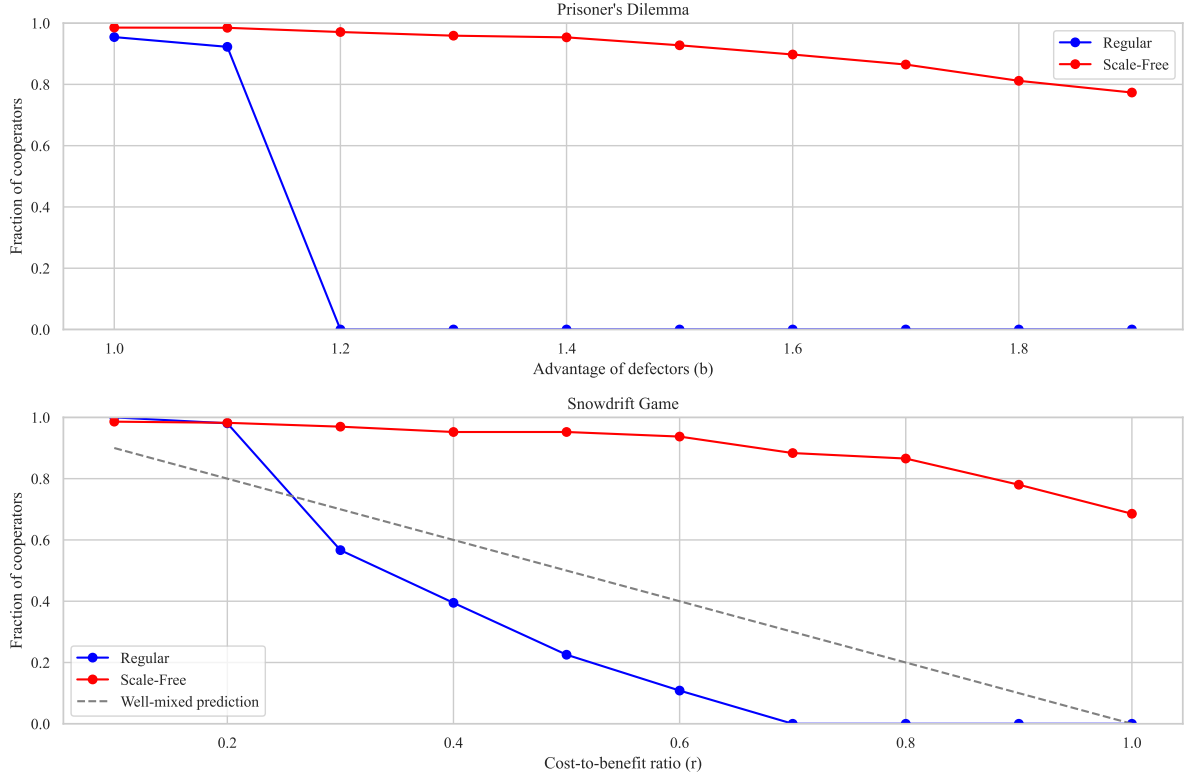


Figure 6: 采用无标度网络, PG、SF 博弈类型下, 所有合作策略个体占比的变化. 此处群体大小 $N = 10000$, 平均连接度 $z = 4$, 采用 10000 轮迭代, 每轮迭代 1000 次模拟, 取平均值.

首先在文 [1] 中, 展现了部署在无标度网络和普通规则网络上两种典型博弈类型 (包括 PD、SG 博弈) 下, 合作策略个体占比的变化. 设定囚徒困境中参数 b 代表背叛的收益, 则 b 越大, 背叛者获得的收益越大, 合作者获得的收益越小, 合作者越倾向于背叛. r 是雪堆博弈中收益成本比的参数, 已在前文定义, r 越大, 合作越受到抑制. 图6, 7展示了采用无标度网络和普通规则网络下, 囚徒困境和雪堆博弈博弈中合作策略个体占比的变化, 由图像可以清晰看出, 无标度网络下, 群体内合作策略占比对于两种博弈类型中 b 和 r 参数的全取值范围 ($1 \leq b \leq 2, 0 \leq r \leq 1$) 上都有明显的提高. 模拟算法我们在附录 A 给出.

在前文我们指出, 在无限大群体进行充分的 PD 和 SG 博弈时, 对于 PD 博弈, 群体内合作者比例会趋于 0, 而在 SG 博弈里, 合作者比例会稳定在 $1 - r$ 左右. 实验结果

也证实了这一点，在图7中，随着平均连接度 z 的增大，规则图 SG 稳态结果越趋近理论值 $1 - r$ 。

在文 [9] 里作者首次向群体博弈里引进了规则网络，对博弈的稳态结果产生一定影响，启发了后续的思路。

承接上面思路，在引入无标度网络和规则网络进行比较后，文章指出，无标度网络对于合作的促进作用和无标度网络自身的异质性显著相关。这个异质性有两种体现，首先是网络中度分布的异质性，主要体现在无标度网络中含有枢纽节点。无标度网络度分布服从幂律分布，而枢纽节点就是有很高连接度的少数节点。高度连接的个体倾向于成为合作者，并通过互连形成稳定的合作集群。其次是无标度网络中节点年龄的异质性。前文指出 BA 网络采用增长和优先机制进行生成，产生了年龄相关性，即早期加入网络的节点更易成为枢纽，从而实现长期维持合作。

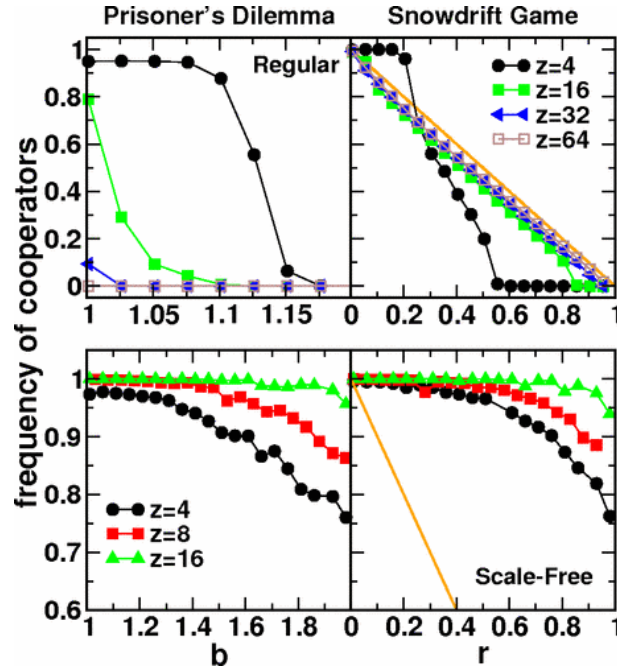


Figure 7: 在两种博弈下，合作策略占比随 b , r 参数的变化. 针对不同的平均连接度 z .

研究另作了控制变量实验，在无标度网络、与无标度网络有相同度分布的随机网络（取消了枢纽节点等）、使用均匀连接替代 BA 网络的生长和优先连接（取消了年龄相关性）的三种网络进行对比模拟，随着抑制由于增长和优先连接引起的年龄相关性，合作显著受到抑制。但是与常规网络上获得的结果相比，合作仍然得到了极大的增强，充分体现了度分布异质性的关键作用。结论是无标度网络的生长和优先连接确保了其在两种博弈中促进合作。这是网络异质性的作用。

4.2 微观视角无标度网络的合作促进机制：波动策略者的作用

针对无标度网络对于合作策略的促进作用，文 [2] 进一步从微观层面分析群体合作的演化，得到稳态群体微观结构的特点。作者对比了规则网络和 SF 网络上的 PD 博弈，通过微观动态分析，将个体策略分为三类：纯合作者 (Pure Cooperators)：始终合作，在 SF 网络中集中于枢纽节点。纯背叛者 (Pure Defectors)：始终背叛，多存在于低连接节点。波动策略者 (Fluctuating Players)：策略随时间变化，构成合作与背叛的边界。由于群体在演化若干代时，当其中合作比例稳定时，系统仍是动态的，部分个体的策略仍可能发生变化，但保持总体比例的稳定。这就意味着存在一部分波动策略者，在不同的代际中，可能会选择合作或背叛策略。波动策略者的存在使得群体内的合作和背叛之间形成了动态平衡。

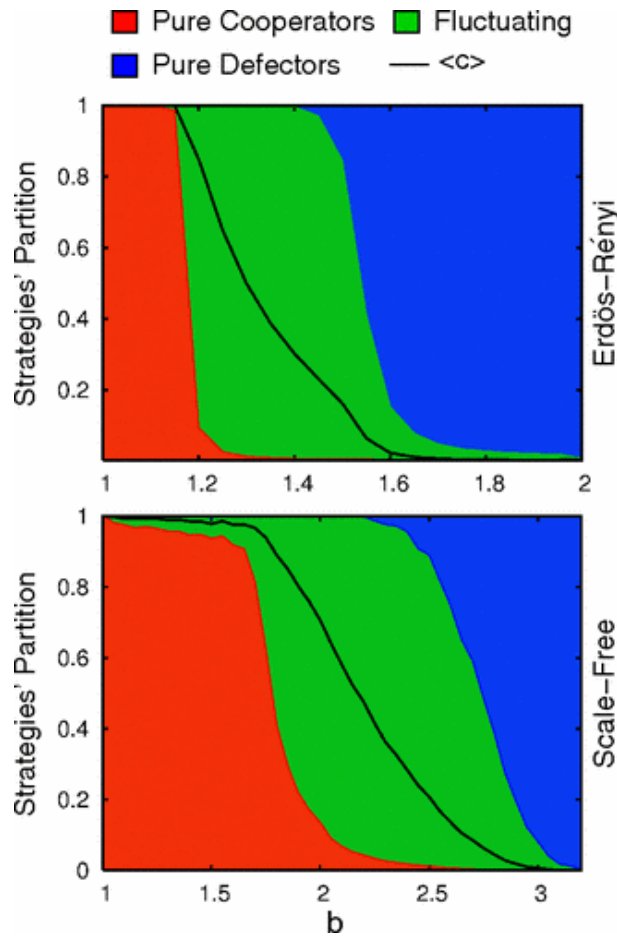


Figure 8: 在囚徒困境博弈下，三种策略者在 SF 网络和 ER 随机网络上随 b 参数稳定比例分布。

模拟算法与附录 A 提供的算法类似。由模拟结果图8可知，SF 上合作者比例比 ER 上高出很多，且 ER 波动策略者在一部分 b 范围内几乎占据了所有个体，意味着此时合

作者与背叛者之间几乎没有区别，合作几乎无法维持。

文中引入了一个新的概念：集群（或者核，Cluster），即网络中由纯策略个体（纯合作者或纯背叛者）组成的连通子图。对于纯合作者成为合作核心（CC），定义为： $P(s_i(t) \neq 1, \forall t > t_0) = 0, \forall i \in CC$ 。在足够大时间步后，CC 中所有个体的策略都不再变化。同理也可定义 DC。CC 与 DC 之间的过渡个体都是波动策略者。

研究发现在无标度网络上演化稳定后，纯合作者形成一个单一的超级大集群（含枢纽节点），暴露在波动策略者的合作个体相比很少，然而背叛者分散于外围，且背叛者无法形成单一集群，仅能以少量几个背叛者形成多个很小的背叛者核心。但是在规则网络（如 ER 随机网络上），合作者却分散为多个小集群，纯合作者分裂成几个 CC，这些 CC 处于波动策略者洪流中，暴露在波动策略者中的合作者非常多，最终使纯合作者更容易受到入侵因此易被背叛者入侵。这可以从图9中看出。

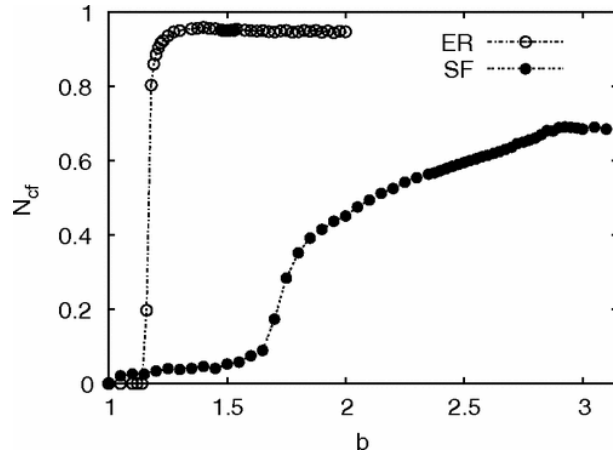


Figure 9: N_{cf} 占总个体的比例在两种网络中随 b 参数的变化。 N_{cf} 定义为至少与一个波动策略者有联系的纯合作者的数量，可看作 CC 暴露在 FP 的表面积。

研究从合作者集群的角度解释了为何 SF 网络中合作更稳定，即 CC 集群的内部凝聚力维持了更大值的合作，这归功于枢纽节点的互连性抑制了背叛策略的扩散，这充分展示了无标度网络异质性（即存在枢纽节点、年龄相关性）在群体微观角度促进合作维持的机理。

4.3 均分贡献：引入更多多样性

文 [1][2] 是从无标度网络固有的结构异质性角度解释了网络中合作策略的维持，研究重点放在 PD 和 SG 博弈等两个体博弈，在文 [3] 中，研究者引入了公共品博弈 (PGG) 这一多个体博弈，并进一步引入了两种贡献模式：固定单次成本，即个体在每个博弈中

贡献相同，此情况下合作水平随网络异质性提升. 还有固定总成本，即个体总贡献恒定，分摊到参与的多个博弈中. 由于无标度网络节点度的异质性，个体能够参与的公共池数目不同（式9），这种策略进一步增加了贡献的多样性，合作显著增强. 具体的收益计算方式见式10，模拟算法在附录 B 中给出.

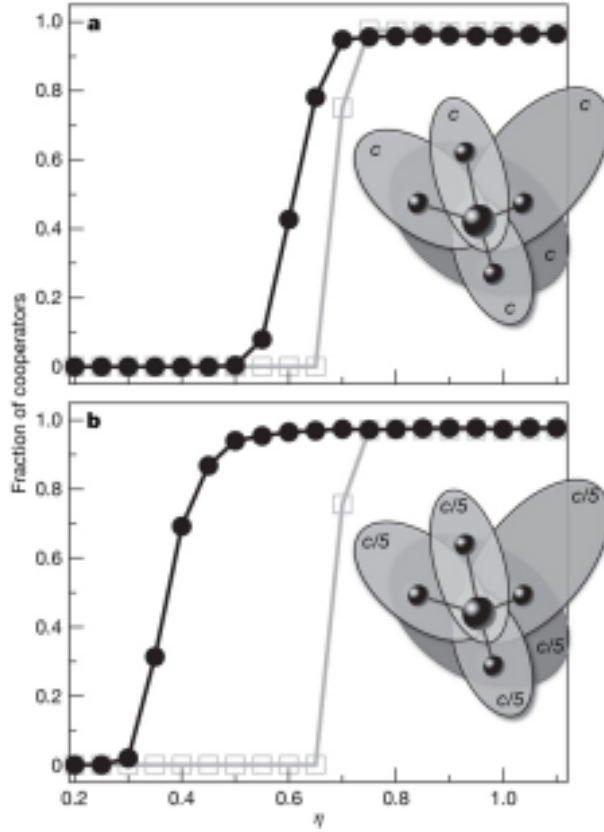


Figure 10: 黑线和实心圆圈显示 SF 的结果; 灰线和空心方块显示规则图的结果. $z = 4$. 对 a 图，每个公共池投入相同成本 c . 对 b 图，固定总投入成本 c ，均分为每个公共池 $\frac{c}{5}$.

由图10固定总投入成本在 SF 网络上合作者比例相比每个公共池投入相同成本的模式下，合作比例显著提高. 研究指出，SF 的异质性特点（幂律分布）使得采用固定总投入成本情况下，由于个体度数不同，个体对每个公共池的贡献不同，导致个体间的贡献差异化，增进了多样性，进而促进了合作. 除此外还进一步发掘了 SF 网络中存在枢纽节点这一关键特性，枢纽节点存在适应性优势，它有相对很高的连接度，而高度连接的个体在固定总成本模式下收益更高，更易成为合作者，如此便与文 [2] 相呼应.

具体而言，无标度网络上，对于单一 PGG，C 和 D 之间的适应度差异从同质图形的恒定且与 c 成正比变为现在取决于个体周围网络环境.

假设现有一个简单网络，中心节点都有 $N - 1$ 个邻居，没有形成回路. 仅有中心节点采用合作策略，其他节点都采用背叛策略. 中心节点收益（适应度）为 $\Pi(h) =$

$\frac{rc}{N^2} + (N-1)\frac{rc}{2N} - c$, 邻居节点 (D) 适应度为 $\Pi(l) = \frac{rc}{N^2} + \frac{rc}{2N}$. 合作策略能够传播, 由 $\Pi(h) - \Pi(l) > 0$, 得到 $r > \frac{2}{1 - \frac{2}{N}}$. 乘法因子 r 的临界值随着邻居数量的增加而减小. 结果表明, C 策略传播的可行性随着 C 所在节点的连通性增大而增加.

由上, 高连接度节点 (枢纽节点) 转变合作最为迅速. 在这种贡献模型下, 单个合作者的相对适应度随着其连接性的增加而增加 [3]. 因此, 异质性赋予了枢纽节点自然优势.

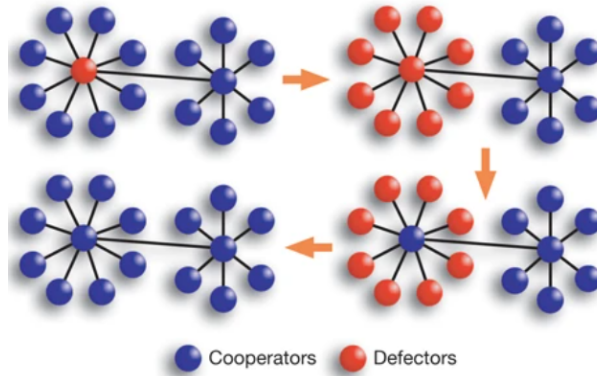


Figure 11: 负反馈机制图示. 侵入合作中心的背叛者适应度高, 快速传播背叛策略. 一旦形成背叛者群体, 中心背叛者反而适应度降低, 容易被外界侵入的合作者取代, 最终形成稳定的合作者集群.

同时网络中也存在负反馈机制, 成功的背叛者会降低周围个体的收益, 反而加速合作策略的传播, 如图11. 这也是此策略促进合作的一个微观原因, 进一步发展了文 [2].

总的来看, 设计博弈策略时, 增加贡献的多样性, 结合无标度网络的结构特点, 进一步放大了网络异质性对合作的促进作用.

4.4 局限性与挑战

无标度网络对合作策略的促进作用并非始终有效, 在一些特定外部条件下, 可能无法起到促进作用. 如对特定的博弈参数范围 (PD 中相对高的 b), 还包括对特定的策略更新规则. 研究表明博弈的动态和特定的更新规则起着重要作用, SF 对合作的促进效果受内在结构的异质性和外部条件的设定双重因素影响.

从内在结构的异质性来看, 无标度网络中的合作容易受到针对枢纽节点的定向攻击. 一旦移除高连接度的节点, 会破坏合作结构, 可能导致合作崩溃 [14]. 无标度网络对异种策略随机侵入具有一定抵抗能力, 但对枢纽节点高度依赖, 在枢纽节点被针对攻击

时，合作变得相对脆弱。如果背叛者能够战略性地针对攻击这些合作节点，可能会对整个网络的合作产生连锁反应的负面影响。

从众行为（模仿大多数行为的倾向 [15]）或有限的结合能力（节点可以建立的互动数量的限制 [16]）等因素也会影响无标度网络中的合作水平。从众行为在无标度网络中这种高度异质性的网络，可能会导致枢纽节点更容易受到攻击力不高但数量多的背叛者的影响，阻碍合作。

无标度网络中的枢纽节点与许多低度节点相连。背叛策略要是在这些低度节点中普遍存在，则具有从众行为的枢纽节点可能会变为背叛。限制互动数量可以在特定条件下增强无标度网络中的合作，说明枢纽节点的高连接度在合作促进方面是相对的 [16]。在具有合作成本的博弈中（如 PGG），高连接度节点因与邻居过多产生过高成本。限制互动可以减少合作者的付出成本，并可能提高整体合作水平。此外，一些研究表明，在某些情况下，其他网络结构可能更有利于合作 [17]。

合作的促进与多重因素相关，除去网络的异质性外，网络生成过程的具体细节、博弈的动态以及合作的定义都可能显著影响结果。

5 总结与展望

本文综述了无标度网络等异质性网络促进合作的机制，并分析了相关的理论、局限性等。综述展示了无标度网络通过枢纽节点的高连接度以及内部的如幂律、年龄相关等异质性结构，成为促进合作的普适框架。同时社会多样性（网络异质性、贡献差异）为合作提供自然选择优势。异质性和多样性是合作得以存在和维持的内生动力和重要因素。研究表明，无标度网络结构可以通过网络互惠、枢纽节点的影响以及合作性集群的形成等机制，在一定程度上促进合作行为的出现和维持。

合作的演化不仅受到网络拓扑结构的影响，还受到具体的博弈规则以及个体行为模式的制约。无标度网络在许多情况下有利于合作，但其促进合作的能力并非普遍适用。在特定的博弈参数、策略更新规则或外部干扰下，无标度网络可能无法有效促进合作。未来的研究可以进一步探索动态演化的网络结构对合作的影响，研究更高阶互动在异质性网络中的作用。

参考文献

- [1] F. C. Santos and J. M. Pacheco, Scale-Free Networks Provide a Unifying Framework for the Emergence of Cooperation, *Phys. Rev. Lett.* 95, 098-104 (2005), DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.09810
- [2] J. Gómez-Gardeñes, M. Campillo, L. M. Floría, and Y. Moreno, Dynamical Organization of Cooperation in Complex Topologies, *Phys. Rev. Lett.* 98, 108103 (2007), DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.108103
- [3] Santos, F., Santos, M. & Pacheco, J. Social diversity promotes the emergence of cooperation in public goods games. *Nature* 454, 213–216(2008), DOI:10.1038/nature06940
- [4] Martin A. Nowak, Five Rules for the Evolution of Cooperation. *Science* 314, 1560-1563(2006). DOI:10.1126/science.1133755
- [5] Martin A. Nowak, Karl Sigmund, Evolutionary Dynamics of Biological Games. *Science* 303, 793-799(2004). DOI:10.1126/science.1093411
- [6] Hauert, C., Doebeli, M. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game. *Nature* 428, 643–646 (2004). DOI:10.1038/nature02360
- [7] Hofbauer, J. & Sigmund, K. *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1998)
- [8] Nowak Martin A., Tarnita Corina E. and Antal Tibor. Evolutionary dynamics in structured populations. *Phil. Trans. R. Soc. B* 365:19–30 (2010) . DOI:10.1098/rstb.2009.0215
- [9] Nowak, M., May, R. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature* 359, 826–829 (1992). DOI:10.1038/359826a0
- [10] Albert-László Barabási, Réka Albert, Emergence of Scaling in Random Networks. *Science* 286, 509-512(1999). DOI:10.1126/science.286.5439.509
- [11] Lynn CW, Holmes CM, Palmer SE. Emergent scale-free networks. *PNAS Nexus*;3(7):pgae236(2024). DOI:10.1093/pnasnexus/pgae236

-
- [12] Réka Albert, Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74(1):47–97, 2002. DOI:10.1103/RevModPhys.74.47
- [13] Miller, S., Knowles, J. The Emergence of Cooperation in Public Goods Games on Randomly Growing Dynamic Networks. In: Squillero, G., Burelli, P. (eds) *Applications of Evolutionary Computation. EvoApplications 2016. Lecture Notes in Computer Science*, vol 9597. Springer, Cham(2016). DOI:10.1007/978-3-319-31204-0_24
- [14] Ichinose, Genki, Yuto Tenguishi, and Toshihiro Tanizawa. "Robustness of cooperation on scale-free networks under continuous topological change." *Phys. Rev. E* 88, no. 5 (2013): 052808. DOI:10.1103/PhysRevE.88.052808
- [15] Peña, Jorge, Henri Volken, Enea Pestelacci, and Marco Tomassini. .Conformity hinders the evolution of cooperation on scale-free networks. *Phys. Rev. E* 80, no. 1 (2009): 016110. DOI:10.1103/PhysRevE.80.016110
- [16] Poncela J, Gómez-Gardeñes J, Moreno Y. Cooperation in scale-free networks with limited associative capacities. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys.* 2011 May;83(5 Pt 2):057101. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.057101.
- [17] Xie F, Shi J, Lin J (2017) Impact of interaction style and degree on the evolution of cooperation on Barabási–Albert scale-free network. *PLoS ONE* 12(8): e0182523. DOI:10.1371/journal.pone.0182523

A 附录 1: PD 与 SG 博弈模拟算法

Algorithm 1 有限种群 PD、SG 复制动力学合作策略演化模拟算法

Input: 种群规模 N , 平均连接度 z , 博弈参数 $(T, S, P$ 或 $T, P)$, 最大代数 $G_{\max} = 11000$

Output: 合作者均衡频率

初始化:

- 构建网络结构 (规则环形网络/无标度网络), N 个节点, 平均连接度 z
- 随机分配策略: 50% 合作者 (C), 50% 背叛者 (D)

for 每代 $g \in \{1, \dots, G_{\max}\}$ do

博弈阶段: for 每对直接连接的个体 (x, y) do

 进行单轮博弈

 累计收益: $P_x \leftarrow P_x + \pi(s_x, s_y)$, $P_y \leftarrow P_y + \pi(s_y, s_x)$

策略更新阶段: for 每个个体 x do

 随机选择邻居 $y \in \mathcal{N}_x$

 计算最大度数 $k_{>} = \max(k_x, k_y)$

 if $P_y > P_x$ then

 以概率 $W = \frac{P_y - P_x}{D \cdot k_{>}}$ 接受 y 的策略: $s_x \leftarrow s_y$

 其中 $D = T - S$ (囚徒困境) 或 $D = T - P$ (雪堆博弈)

 else

 保持策略不变

 if $g > 10000$ then

 记录合作者频率 $f_C(g)$

结果计算:

- 舍弃前 10000 代瞬态数据
- 计算最后 1000 代的平均合作频率:

$$\bar{f}_C = \frac{1}{1000} \sum_{g=10001}^{G_{\max}} f_C(g)$$

统计:

对每个参数点重复 100 次实验, 报告 \bar{f}_C 的平均值

对算法1, 策略更新阶段的接受概率 W 也可以用前文指出的费米规则式8来确定.

B 附录 2: PGG 模拟算法

Algorithm 2 基于复杂网络的公共品博弈模拟演化算法

初始化:

- 构建网络结构 (规则网络/无标度网络), $N = 10^3$ 个节点, 平均连接度 $z = 4$
- 随机分配策略: 50% 合作者 (C), 50% 背叛者 (D)

for 每代 $g \in \{1, \dots, 10^5 + 2000\}$ do

公共品博弈阶段: for 每个个体 $x \in V(G)$ do

 for 以 x 为中心的 PGG 组 (包含 $k_x + 1$ 个成员) do

 计算组内合作者数量 n_C

 if x 是合作者 then

 if 均匀成本模式 then

 支付 $P_x \leftarrow P_x + \frac{crn_C}{k_x + 1} - c$

 else

 支付 $P_x \leftarrow P_x + \frac{crn_C}{k_x + 1} - \frac{c}{k_x + 1}$

 else

 支付 $P_x \leftarrow P_x + \frac{crn_C}{k_x + 1}$

策略更新阶段 (同步更新): for 每个个体 $x \in V(G)$ do

 随机选择邻居 $y \in \mathcal{N}_x$

 计算最大可能收益差 $M = \max(P_y^{\max} - P_x^{\min})$

 if $P_y > P_x$ then

 以概率 $W = \frac{P_y - P_x}{M}$ 采纳 y 的策略:

$s_x \leftarrow s_y$

 else

 保持策略不变

if $g > 10^5$ then

 记录合作者频率 $f_C(g)$

数据分析:

-
- 舍弃前 10000 代瞬态数据
 - 计算后 2000 代的平均合作频率:

$$\bar{f}_C = \frac{1}{2000} \sum_{g=10001}^{12000} f_C(g)$$

- 对每类网络进行 10 次独立实现, 每次 100 次重复实验
- 对无标度网络 ($z = 4$) 额外计算 50 次的适应度分布

算法2是文章 [3] 中 PGG 在网络上博弈所使用到的, 策略更新阶段的接受概率 W 也可以用前文指出的费米规则式8来确定.