伊藤の公式

早川 知志

2018/7/23

1　確率積分

$\mathscr{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ をフィルトレーション, $B = B(t,\omega)$ を $\mathscr{F}$-Brown 運動とする.

定義 1.1　局所 2 乗可積分過程の集合 $\mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(\mathscr{F})$ を

$$\mathscr{L}^2 := \left\{ Y : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; Y \text{ は } \mathscr{F}\text{-発展的可測かつ} \int_0^t Y_s(\omega)^2\,ds < \infty,\ \forall t \geq 0,\ \text{a.s.} \right\}$$

で定め, この部分集合として次の 2 つを定める.

$$L^2 = L^2(\mathscr{F}) := \left\{ Y \in \mathscr{L}^2 \;\middle|\; E\left[\int_0^t Y_s^2\,ds\right] < \infty,\ \forall t \geq 0 \right\},$$

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{F}) := \left\{ Y \in \mathscr{L}^2 \;\middle|\; 0 = t_0 < t_1 < \cdots \to \infty \text{ なる } t_i \text{があって } Y(t,\omega) = Y(t_{i-1},\omega) \in L^2(\Omega,P),\ \forall t \in [t_{i-1},t_i) \right\}.$$

注 1.1　$\mathscr{S} \subset L^2 \subset \mathscr{L}^2$ であり, これらはすべて実線形空間. また L^2 はセミノルムの列

$$\|Y\|_n := E\left[\int_0^n Y_t^2\,dt\right]^{1/2} = \left(\int_{[0,n]\times\Omega} Y(t,\omega)^2\,dt \times dP(\omega)\right)^{1/2}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

に関して完備な線形位相空間. あるいは $d(Y,Z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \|Y-Z\|_n)$ が完備距離になるといってもよい.

命題 1.1　上の距離 d に関して, $\mathscr{S}(\mathscr{F})$ は $L^2(\mathscr{F})$ の稠密な部分集合となる.

証明： $Y \in L^2$ をとる. $Y_t^{(m)} := Y_t 1_{[-m,m]}(Y_t)$ とすると $Y_t^{(m)} \in L^2$ は明らかで, 優収束定理より各 n について $\|Y^{(m)} - Y\| \to 0$ $(m \to \infty)$ がわかる. これは $d(Y^{(m)},Y) \to 0$ を意味する.

次に $Y_t^{(m,\ell)} := \ell \displaystyle\int_{t-1/\ell}^t Y_s^{(m)}\,ds$ とすると $Y^{(m,\ell)}$ は有界連続過程となり L^2 に属し, $\forall\omega \in \Omega$ について $Y_t^{(m,\ell)}(\omega) \to Y_t^{(m)}(\omega)$, a.e.t $(\ell \to \infty)$ が Lebesgue の微分定理から従う. よって有界収束定理によりまた $d(Y^{(m,\ell)},Y^{(m)}) \to 0$ $(\ell \to \infty)$ が成り立つ.

最後に $Y_t^{(m,\ell,k)} = Y\left(\dfrac{[kt]}{k},\omega\right)$ とおくと, $Y^{(m,\ell,k)} \in \mathscr{S}$ で, 連続性より任意の $(t,\omega) \in [0,\infty)\times\Omega$ に対して $Y_t^{(m,\ell,k)}(\omega) \to Y_t^{(m,\ell)}(\omega)$ $(k \to \infty)$ となる. したがってまた有界収束定理により $d(Y^{(m,\ell,k)},Y^{(m,\ell)}) \to 0$ となる. ■

定義 1.2　$Y \in \mathscr{S}$ が $Y(t,\omega) = Y(t_{i-1},\omega)$, $\forall t \in [t_{i-1}, t_i)$ をみたすとき,

$$I_t(Y) := \sum_{i=1}^{\infty} Y(t \wedge t_{i-1})(B(t \wedge t_i) - B(t \wedge t_{i-1}))$$

を Y の B による**確率積分**という.

注 1.2　Y の表し方 (時区間の分割) が複数通りある場合も, それらの共通の細分を考えることで $I_t(Y)$ が Y の表示に依存しないことがわかる. また細分を考えれば $I_t : \mathscr{S} \to L^2(\Omega, P)$ が線形なのもよい.

命題 1.2　$Y \in \mathscr{S}(\mathscr{F})$ に対して

$$\|I_t(Y)\|^2 = \|Y\|_t^2 \left(:= E\left[\int_0^t Y_s^2 \, ds\right]\right)$$

が成り立つ.

証明： 時間の分割をとり直すことである n について $t = t_n$ としてよい. $X_i = Y(t_i)$, $Z_i = B(t_i) - B(t_{i-1})$ とするとこれらはいずれも $\mathcal{F}_{t_i}$ 可測であり

$$\|I_t(Y)\|^2 = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}Z_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_{i-1}^2 Z_i^2\right] + 2\sum_{1 \le i < j \le n} E\left[X_{i-1}Z_iX_{j-1}Z_j\right]$$

とかけるが, 諸々の可測性と Z_i と $\mathcal{F}_{t_i}$ の独立性より, まず

$$E\left[X_{i-1}^2 Z_i^2\right] = E\left[X_{i-1}^2 E\left[Z_i^2 \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\right]\right] = (t_i - t_{i-1})E\left[X_{i-1}^2\right]$$

であり, 特に $X_{i-1}Z_i \in L^2(\Omega, P)$ である. したがって $X_{i-1}Z_iX_{j-1} \in L^1(\Omega, P)$ であり, ここで Z_j は $L^1(\Omega, P)$ に属し, かつ $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ と独立, またこれらの積も $L^1(\Omega, P)$ に属するので

$$E\left[X_{i-1}Z_iX_{j-1}Z_j\right] = E\left[X_{i-1}Z_iX_{j-1}E\left[Z_j \mid \mathcal{F}_{t_j}\right]\right] = 0$$

が成り立つ. したがって

$$\|I_t(Y)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})E\left[X_{i-1}^2\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} Y_s^2 \, ds\right] = E\left[\int_0^t Y_s^2 \, ds\right]$$

より従う. ■

注 1.3　したがって $I_t : \mathscr{S} \to L^2(\Omega, P)$ は, $\mathscr{S}$ にセミノルム $\|\cdot\|_t$ を入れたときの等長写像となる.

命題 1.3　I_t は $L^2(\mathscr{F}) \to L^2(\Omega, P)$ のセミノルム $\|\cdot\|_t$ に関する等長写像に拡張できる.

証明： $Y \in L^2$ に対して命題 1.1 より $\|Y^{(m)} - Y\|_t \to 0$ なる $Y^{(m)} \in \mathscr{S}$ がとれるので, $\{I_t(Y^{(m)})\}_{m=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega, P)$ は Cauchy 列となる. したがってその極限を $I_t(Y)$ とおけばよい. これが $\{Y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ のとり方に依存しないことは, 2 つの Cauchy 列を合わせられることからわかる. ■

命題 1.4　$Y \in L^2(\mathscr{F})$ に対して $I.(Y)$ は 2 乗可積分な $\mathscr{F}$-マルチンゲールとなる.

証明： 2 乗可積分性は明らか．$Y \in \mathscr{S}$ のときは Brown 運動の性質から明らかである．$Y \in L^2$ に対して近似列 $Y^{(m)} \in \mathscr{S}$ をとると，$I_t(Y^{(m)}) \to I_t(Y)$ in L^2 よりこれは $\mathcal{F}_t$ 可測となる．また $t > s$ のとき，任意の $A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$E\left[I_t(Y) - I_s(Y), A\right] = \lim_{m\to\infty} E\left[I_t(Y^{(m)}) - I_s(Y^{(m)}), A\right] = 0$$

が成り立つのでよい． ■

注 1.4 $I_t(Y)$ には P-零集合上での自由度があるので，近似列をうまくとることで各点収束先がいい性質をみたすことがある．

命題 1.5 任意の $Y \in L^2(\mathscr{F})$ に対し，$\{Y^{(m)}\}_{m=1}^\infty \subset \mathscr{S}(\mathscr{F})$ であって次をみたすものが存在する．

(1) $d(Y^{(m)}, Y) \to 0$ $(m \to \infty)$,

(2) 確率 1 で $I_\cdot(Y^{(m)})$ は連続過程に広義一様収束する．

証明： $Y \in L^2$ に対して $Y^{(m)} \in \mathscr{S}$ を $\|Y^{(m)} - Y\|_m \le 2^{-(2m+1)}$ となるようにとる．各 n に対して，$m \ge n$ なら

$$\begin{aligned}\|Y^{(m+1)} - Y^{(m)}\|_n &\le \|Y^{(m+1)} - Y\|_n + \|Y^{(m)} - Y\|_n \\ &\le \|Y^{(m+1)} - Y\|_{m+1} + \|Y^{(m)} - Y\|_m \le 2^{-2m}\end{aligned}$$

となり，Doob の不等式より

$$P\left(\sup_{0\le t\le n} |I_t(Y^{(m+1)} - Y^{(m)})| \ge 2^{-m}\right) \le 2^{2m}\|I_n(Y^{(m+1)} - Y^{(m)})\|^2 = 2^{2m}\|Y^{(m+1)} - Y^{(m)}\|_n^2 < 2^{-2m}$$

となる．したがって Borel-Cantelli の補題より $\{I_t(Y^{(m)})\}_{m=1}^\infty$ は $t \in [0,n]$ において確率 1 で一様収束する．この事象を Ω_n として，$\Omega_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \Omega_n$ 上で考えればよい． ■

定義 1.3 命題 1.5 によって a.s. で保証される連続過程 $I_\cdot(Y)$ を Y の確率積分と呼び，$I_t(Y) = \int_0^t Y_s\, dB(s)$ とかく．

定理 1.1 $Y \in L^2(\mathscr{F})$ に対する確率積分 $I_t(Y) = \int_0^t Y_s\, dB(s)$ は次の性質をみたす．

(1) 確率積分は t に関して連続，Y に関して a.s. 線形で，二乗可積分な $\mathscr{F}$-マルチンゲールとなる．

(2) $Z \in L^2(\mathscr{F})$ について，$E\left[I_t(Y)I_t(Z)\right] = E\left[\int_0^t Y_s Z_s\, ds\right]$ であり，特に $\|I_t(Y)\|_{L^2(\Omega,P)} = \|Y\|_t$.

(3) $\tilde{Y} \in L^2(\mathscr{F})$ と $t \ge 0$ に対し，$A = \left\{Y_s = \tilde{Y}_s,\ \forall s \in [0,t]\right\}$ とすると $P\left(A \cap \left\{I_t(Y) \ne I_t(\tilde{Y})\right\}\right) = 0$.

証明： (1) は既に示した．(2) の後半も既に示されているが，I_t は L^2 の時間を $[0,t]$ に制限してできる Hilbert 空間から $L^2(\Omega,P)$ への等長写像とみなせるので，内積も保つ．したがって前半の式も出る．

(3) を示す．命題 1.1 の証明で出てくる近似 $Y^{(m\ell,k)}, \tilde{Y}^{(m,\ell,k)} \in \mathscr{S}$ を考えると，これらの作り方から A 上では $I_t\left(Y^{(m,\ell,k)}\right) = I_t\left(\tilde{Y}^{(m,\ell,k)}\right)$ a.s. が成り立つ．うまく (m,ℓ,k) の組の列をとることでこれらを $I_t(Y)$ と $I_t(\tilde{Y})$ に概収束させられるので，A 上では $I_t(Y) = I_t(\tilde{Y})$ a.s. が成り立つ． ■

注 1.5　上の性質は時間を平行移動することで $I_{s,t}(Y) = \int_s^t Y_r d\,B(r)$ の話に一般化できる．

命題 1.6　B^1, B^2 を独立な $\mathscr{F}$-Brown 運動, $f, g \in L^2(\mathscr{F})$, $X_t = \int_0^t f_s\, dB^i(s)$, $Y_t = \int_0^t g_s\, dB^j(s)$ とするとき,

$$M_t = X_t Y_t - \delta_{ij} \int_0^t f_s g_s\, ds \quad (i, j \in \{1, 2\})$$

は連続な $\mathscr{F}$-マルチンゲール．特に f, g が $[0, t] \times \Omega$ 上で有界な場合は M_t は 2 乗可積分となる．

証明： $0 \le s < t$ とする．まず $f, g \in L^2$ の可測性より

$$E\left[\int_0^t f_r g_r\, dr \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t f_r g_r\, dr \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]$$

である．また X, Y のマルチンゲール性より $E[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] = E[Y_t - Y_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$ であるので,

$$\begin{aligned}
E[X_t Y_t \mid \mathcal{F}_s] &= E[((X_t - X_s) + X_s)((Y_t - Y_s) + Y_s) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= E[(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) \mid \mathcal{F}_s] + X_s E[Y_t - Y_s \mid \mathcal{F}_s] + Y_s E[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] + X_s Y_s \\
&= E[(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) \mid \mathcal{F}_s] + X_s Y_s
\end{aligned}$$

となる．ただし途中で $X_s, X_t, Y_s, Y_t \in L^2(\Omega, P)$ であることを用いた．したがって,

$$E[(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) \mid \mathcal{F}_s] = \delta_{ij} E\left[\int_s^t f_r g_r\, dr \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]$$

を示せばよい．

まず $i \neq j$ のとき, 右辺は 0 なので左辺も 0 になることを示せばよい．このとき, まず $f, g \in \mathscr{S}$ と仮定して示そう．$[s, t]$ の分割 $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ を考えて, $f_r = f_{t_{k-1}}$, $g_r = g_{t_{k-1}}$ $(t_{k-1} \le r < t_k)$ とかける．このとき, 各 $1 \le k, \ell \le n$ に対して $E\left[f_{t_{k-1}} \left(B^i(t_k) - B^i(t_{k-1})\right) g_{t_{\ell-1}} \left(B^j(t_\ell) - B^j(t_{\ell-1})\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = 0$ を示せばよいが, この左辺は $k \le \ell$ と仮定して,

$$E\left[f_{t_{k-1}} g_{t_{\ell-1}} E\left[\left(B^i(t_k) - B^i(t_{k-1})\right)\left(B^j(t_\ell) - B^j(t_{\ell-1})\right) \mid \mathcal{F}_{t_{\ell-1}}\right] \mid \mathcal{F}_s\right]$$

となるが, この中身の条件付き期待値は $B^j(t_\ell) - B^j(t_{\ell-1})$ と $\mathcal{F}_{t_{\ell-1}}$, $B^j(t_\ell) - B^j(t_{\ell-1})$ の独立性より 0 となる．一般には $f, g \in L^2$ を $\mathscr{S}$ の元でそのまま近似すれば, その確率積分たちは X_t, Y_t に $L^2(\Omega, P)$ の意味で収束する．したがって, $(X_t - X_s)(Y_t - Y_s)$ を L^1 近似できることになり, 任意の $A \in \mathcal{F}_s$ 上での積分が 0 となることがわかるのでよい．

最後に $i = j$ のとき, $B = B^i = B^j$ とする．$A \in \mathcal{F}_s$ を任意にとって考える．定理 1.1(3) より, $[s, t]$ での確率積分を考える上では

$$1_A \int_s^t f_r\, dB(r) = \int_s^t 1_A f_r\, dB(r), \qquad 1_A \int_s^t g_r\, dB(r) = \int_s^t 1_A g_r\, dB(r) \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ ($A \in \mathcal{F}_s$ なので f, g の発展的可測性が保たれている)．したがって, 定理 1.1(2) より,

$$E[(X_t - X_s)(Y_t - Y_s), A] = E\left[\left(\int_s^t 1_A f_r\, dB(r)\right)\left(\int_s^t 1_A g_r\, dB(r)\right)\right] = E\left[\int_s^t 1_A f_r g_r\, dr\right] = E\left[\int_s^t f_r g_r\, dr, A\right]$$

となり示された．■

定義 1.4 $Y \in \mathscr{L}^2(\mathscr{F})$ に対して $Y_t^{(n)} = Y_t 1_{[0,n]}\left(\int_0^t Y_s^2\,ds\right)$ で定まる $Y^{(n)} \in L^2(\mathscr{F})$ を考え,

$$\int_0^t Y_s\,dB(s) := \lim_{n\to\infty}\int_0^t Y_s^{(n)}\,dB(s) \quad \text{a.s.}$$

で Y の確率積分を定める.

注 1.6 $\int_0^t Y_s\,dB(s)$ が well-defined であることを示しておく. 定理 1.1(3) より $m \geq n$ のとき,

$$\int_0^t Y_s^2\,ds \leq n \implies \int_0^t Y_s^{(m)}\,dB(s) = \int_0^t Y_s^{(n)}\,dB(s) \ \text{ a.s.}$$

が成り立つ. したがって Y の局所 2 乗可積分性より $\int_0^t Y_s^{(n)}\,dB(s)$ は概収束する.

定理 1.2 $Y \in \mathscr{L}^2(\mathscr{F})$ に対する確率積分 $I_t(Y) = \int_0^t Y_s\,dB(s)$ は次の性質をみたす.

(1) 確率積分は t に関して連続, Y に関して a.s. 線形である.

(2) 任意の $\{Y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}^2(\mathscr{F})$ と $t \geq 0$ に対し,

$$\int_0^t \left(Y_s^{(n)}\right)^2\,ds \to 0 \text{ i.p.} \implies \sup_{0\leq s\leq t}|I_s(Y^{(n)})| \to 0 \text{ i.p.}$$

が成り立つ.

(3) $\tilde{Y} \in \mathscr{L}^2(\mathscr{F})$ と $t \geq 0$ に対し, $A = \left\{Y_s = \tilde{Y}_s,\ \forall s \in [0,t]\right\}$ とすると $P\left(A \cap \left\{I_t(Y) \neq I_t(\tilde{Y})\right\}\right) = 0.$

証明： (1), (3) は既に示されているので, (2) を示す. $\varepsilon > 0$ に対して

$$Y_s^{(n,\varepsilon)} = Y_s^{(n)} 1_{[0,\varepsilon]}\left(\int_0^t \left(Y_r^{(n)}\right)^2\,dr\right)$$

とおくと, これは L^2 に属する. また仮定より十分大きい整数 $N(\varepsilon)$ に対して

$$n \geq N(\varepsilon) \implies P\left(Y_s^{(n,\varepsilon)} \neq Y_s^{(n)},\ \exists s \in [0,t]\right) < \varepsilon$$

となる. ここで Doob の不等式より

$$P\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|I_s\left(Y^{(n,\varepsilon)}\right)\right| > \varepsilon^{1/3}\right) \leq \varepsilon^{-2/3} E\left[\int_0^t \left(Y_s^{(n,\varepsilon)}\right)^2\right] \leq \varepsilon^{1/3}$$

であるから,

$$n \geq N(\varepsilon) \implies P\left(\sup_{0\leq s\leq t}\left|I_s\left(Y^{(n)}\right)\right| > \varepsilon^{1/3}\right) \leq \varepsilon + \varepsilon^{1/3} \implies E\left[1 \wedge \sup_{0\leq s\leq t}\left|I_s\left(Y^{(n)}\right)\right|\right] \leq \varepsilon + 2\varepsilon^{1/3}$$

となり, したがってこれは 0 へ確率収束する. ■

2 伊藤過程

$\mathscr{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ をフィルトレーション, $B^1, B^2, \ldots, B^n$ を独立な $\mathscr{F}$-Brown 運動とする. また単に B と書いたときはこれらのうち任意のいずれかを指すものとする.

定義 2.1 $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathscr{F}):=\left\{Y\in\mathscr{L}^2(\mathscr{F})\;\middle|\;Y(\cdot,\omega)\text{ は }\omega\text{ ごとに局所有界}\right\}$ とし,

$$\mathcal{Q}=\mathcal{Q}(\mathscr{F}):=\left\{X:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}\;\middle|\;\begin{array}{c}X_t=X_0+\displaystyle\sum_{i=1}^n\int_0^t f_i(s)\,dB^i(s)+\int_0^t f_0(s)\,ds,\ \forall t\geq 0\ \text{ a.s.,}\\ X_0\text{ は }\mathcal{F}_0\text{ 可測},\ f_0,f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{B}(\mathscr{F})\end{array}\right\}$$

とする. $\mathcal{Q}$ に属する確率過程を**伊藤過程**という.

また $\mathcal{B}(\mathscr{F})$ の部分集合として $\mathcal{B}^\infty=\mathcal{B}^\infty(\mathscr{F}):=\left\{Y\in\mathcal{B}\;\middle|\;\sup_{t\geq 0,\ \omega\in\omega}|Y(t,\omega)|<\infty\right\}$ を定め,

$$\mathcal{Q}^\infty=\mathcal{Q}^\infty(\mathscr{F}):=\left\{X:\in\mathcal{Q}(\mathscr{F})\;\middle|\;\begin{array}{c}X_t=X_0+\displaystyle\sum_{i=1}^n\int_0^t f_i(s)\,dB^i(s)+\int_0^t f_0(s)\,ds,\ \forall t\geq 0\ \text{ a.s.,}\\ X_0\text{ は有界かつ }\mathcal{F}_0\text{ 可測},\ f_0,f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{B}^\infty(\mathscr{F})\end{array}\right\}$$

としておく.

定義 2.2 $Z\in\mathcal{B}(\mathscr{F})$ と $X\in\mathcal{Q}(\mathscr{F})$ に対して, X による Z の確率積分を

$$\int_0^t Z_s\,dX(s):=\sum_{i=1}^n\int_0^t Z_sf_i(s)\,dB^i(s)+\int_0^t Z_sf_0(s)\,ds$$

で定める. これも $\mathcal{Q}(\mathscr{F})$ に属する. ただし $f_0,f_1,\ldots,f_n$ は X の定義に使われる $\mathcal{B}(\mathscr{F})$ の元とする.

注 2.1 $t\geq 0$ を固定すると, $[0,t]$ においては $\mathcal{B}$ の元は $\mathcal{B}^\infty$ の元によって任意の確率 $1-\varepsilon$ で近似可能 (近似先と異なる ω の測度を ε 以下にできる. たとえば $X\in\mathcal{Q}$ に対して $M>0$ をとって $X\wedge M\in\mathcal{Q}^\infty$ を考え, M を大きくすればよい) であるから, $\mathcal{Q}$ の元も $[0,t]$ において $\mathcal{Q}^\infty$ の元で近似可能であることに注意しておく. これにより, たとえば $X\in\mathcal{Q}$ に対して $\{X^{(n)}\}\subset\mathcal{Q}^\infty$ をとって $X^{(n)}_s$ を X_s に (一様に) 確率収束させることが可能である. したがって, 当分の間は $\mathcal{Q}^\infty$ の性質を調べることにする.

命題 2.1 $Y\in\mathcal{B}^\infty(\mathscr{F})$ が $\displaystyle\sup_{t\geq 0,\ \omega\in\Omega}|Y(t,\omega)|\leq M$ をみたすとき, 任意の $0\leq s\leq t$ について

$$E\left[\left(\int_s^t Y_r\,dB(r)\right)^4\right]\leq 9M^4(t-s)^2$$

が成り立つ.

証明： まず $\mathcal{B}^\infty\subset L^2$ より, 命題 1.5 と Fatou の補題から, $Y\in\mathscr{S}\cap\mathcal{B}^\infty$ について示せばよい (正確には, 命題 1.5 の近似列を M でバウンドされるように取り直せばよい).

時区間の分割を $s=t_0<t_1<\cdots<t_k=t$ として, $Y_r=\eta_{j-1}\ (t_{j-1}\leq r<t_j)$ とする. ただしここで η_j は $\mathcal{F}_{t_j}$ 可測で $|\eta_j|\leq M$ をみたす. このとき

$$\int_s^t Y_r\,dB(r)=\sum_{j=1}^k\eta_{j-1}\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)$$

であるから, $Z_j = \eta_{j-1}\left(B(t_j) - B(t_{j-1})\right)$ とすると

$$E\left[\left(\int_s^t Y_r\,dB(r)\right)^4\right] = E\left[\left(\sum_{j=1}^{k} Z_j\right)^4\right] = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=1}^{k} E\left[Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{j_3}Z_{j_4}\right]$$

をみたす. ここで $j_1, j_2, j_3 < j_4$ のとき,

$$E\left[Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{j_3}Z_{j_4}\right] = E\left[Z_{j_1}Z_{j_2}Z_{j_3}\eta_{j_4-1}E\left[B_{t_{j_4}} - B_{t_{j_4-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j_4-1}}\right]\right] = 0.$$

であり, $j_1 < j_2 = j_3 = j_4$ の場合も同様なので, j_1, j_2, j_3, j_4 のうち最大のものが 2 つまたは 4 つである場合のみ残る. したがって,

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_s^t Y_r dB(r)\right)^4\right] &= \sum_{j=1}^{k} E\left[Z_j^4\right] + 6\sum_{j=2}^{k}\sum_{i_1,i_2=1}^{j-1} E\left[Z_{i_1}Z_{i_2}Z_j^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k} E\left[Z_j^4\right] + 6\sum_{j=2}^{k} E\left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} Z_i\right)^2 Z_j^2\right]
\end{aligned}$$

となる. このときまず 1 項目は

$$\sum_{j=1}^{k} E\left[Z_j^4\right] \le M^4 \sum_{j=1}^{k} E\left[\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)^4\right] = M^4 \sum_{j=1}^{k} 3(t_j - t_{j-1})^2 \le 3M^4(t-s)^2$$

となり, あとは 2 項目を評価すればよい. 今までと同様の議論により

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} Z_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{j-1} E\left[Z_i^2\right] \le M^2 \sum_{i=1}^{j-1}(t_i - t_{i-1}) \le M^2(t-s)$$

が成り立つことに注意しておく. 各 j に対して $\left(\sum_{i=1}^{j-1} Z_i\right)^2 \eta_{j-1}^2$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ 可測なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{k} E\left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} Z_i\right)^2 Z_j^2\right] &= \sum_{j=2}^{k} E\left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} Z_i\right)^2 \eta_{j-1}^2 E\left[\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]\right] \\
&\le \sum_{j=2}^{k} M^2(t_j - t_{j-1}) E\left[\left(\sum_{i=1}^{j-1} Z_i\right)^2\right] \le \sum_{j=2}^{k} M^4(t_j - t_{j-1})(t-s) \le M^4(t-s)^2
\end{aligned}$$

となり示された. ■

定義 2.3 有界連続過程の集合 $\mathcal{B}_c^\infty = \mathcal{B}_c^\infty(\mathscr{F}) := \{Y \in \mathcal{B}^\infty(\mathscr{F}) \mid \forall\omega \in \Omega$ に対して $Y(\cdot,\omega)$ は連続 $\}$ を定義する. また $Z \in \mathcal{B}_c^\infty(\mathscr{F})$ に対してその離散化を $D_Z^m(t) := Z\left(\frac{k-1}{m}\right) \left(\frac{k-1}{m} \le t < \frac{k}{m}\right)$ で定める.

注 2.2 上の状況で

$$\int_0^t D_Z^m(s)\,dX(s) = \sum_{k=1}^{\infty} Z\left(\frac{k-1}{m}\right)\left(X\left(t \wedge \frac{k}{m}\right) - X\left(t \wedge \frac{k-1}{m}\right)\right)$$

とかけることに注意. これは直感的には明らかだが, 厳密に示すには確率積分の $\mathscr{S}(\mathscr{F})$ の元での定式化に戻るとよい.

命題 2.2 $X \in \mathcal{Q}^\infty(\mathscr{F})$, $Z \in \mathcal{B}_c^\infty(\mathscr{F})$ と任意の $t \geq 0$ に対して

$$\int_0^t D_Z^m(s)\, dX(s) \to \int_0^t Z_s\, dX(s) \quad \text{in } L^2(\Omega, P) \quad (m \to \infty)$$

が成り立つ.

証明: X の定義に出てくる各積分について示せばよい. まず Z の連続性より $D_Z^m(s) f_0(s) \to Z_s f_0(s)$ が各点で成り立つので, あとは Z と f_0 の有界性よりこの差は 2 乗可積分で, 優収束定理を使うと $\int_0^t D_Z^m(s) f_0(s) ds \to \int_0^t Z_s f_0(s) ds$ が L^2 の意味で従う.

あとは各 $i = 1, \dots, n$ について, 再び有界性と Z の連続性より

$$E\left[\left(\int_0^t D_Z^m(s) f_i(s)\, dB^i(s) - \int_0^t Z_s f_i(s)\, dB^i(s)\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (D_Z^m(s) - Z_s)^2 f_i(s)^2\, ds\right] \to 0$$

がわかるのでよい. ■

定義 2.4 $X, Y \in \mathcal{Q}(\mathscr{F})$ に対して, X と Y の**二次変分** $\langle X, Y \rangle \in \mathcal{Q}(\mathscr{F})$ を

$$\langle X, Y \rangle_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t f_i(s) g_i(s)\, dB^i(s)$$

で定める. ただし X, Y は次で定まるとする.

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t f_i(s)\, dB^i(s) + \int_0^t f_0(s)\, ds, \quad Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t g_i(s)\, dB^i(s) + \int_0^t g_0(s)\, ds.$$

命題 2.3 $X, Y \in \mathcal{Q}^\infty(\mathscr{F})$, $Z \in \mathcal{B}_c^\infty(\mathscr{F})$ と任意の $t \geq 0$ に対して, $m \to \infty$ で

$$\sum_{k=1}^\infty Z\left(\frac{k-1}{m}\right)\left(X\left(t \wedge \frac{k}{m}\right) - X\left(t \wedge \frac{k-1}{m}\right)\right)\left(Y\left(t \wedge \frac{k}{m}\right) - Y\left(t \wedge \frac{k-1}{m}\right)\right) \to \int_0^t Z_s\, d\langle X, Y \rangle(s)$$

が $L^2(\Omega, P)$ の意味で成り立つ.

証明: $B^0(s) = s$ とする. 両辺の X, Y についての双線形性と X_0, Y_0 への非依存性より, $i, j = 0, 1, \dots, n$ について

$$X_t = \int_0^t f_s\, dB^i(s), \quad Y_t = \int_0^t g_s\, dB^j(s)$$

として示せばよい. 与式の左辺を $I_m(t)$ としておく.

Case 1. $i = 0$ または $j = 0$ のとき.

このとき $\langle X, Y \rangle \equiv 0$ であることに注意. 対称性より $i = 0$ としてよい. $M = \sup_{t \geq 0,\ \omega \in \Omega} |Z(t, \omega)| < \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} |I_m(t)| &\leq M \sum_{k=1}^\infty \int_{t \wedge \frac{k-1}{m}}^{t \wedge \frac{k}{m}} |f(s)|\, ds \left| Y\left(t \wedge \frac{k}{m}\right) - Y\left(t \wedge \frac{k-1}{m}\right) \right| \\ &\leq M \left(\int_0^t |f_s| ds\right) \sup\left\{ |Y(s) - Y(r)| \;\middle|\; r, s \in [0, t],\ |s - r| \leq \frac{1}{m} \right\} \end{aligned}$$

となるが, $j=0$ のときは g が有界なのでよい. $j\neq 0$ のとき, $r,s\in[0,t]$ に対して Doob の不等式より

$$E\left[\sup_{|s-r|\leq 1/m}|Y(s)-Y(r)|^2\right]\leq 4E\left[\sup_{s\in[0,t]}Y(s)^2\right]\leq 16E\left[Y(t)^2\right]$$

となるので右辺は 2 乗可積分で, Y の局所一様連続性とあわせると優収束定理により $I_m(t)$ は $m\to\infty$ で 0 に収束することがわかる.

Case 2. $i,j\neq 0$ のとき.

命題 1.6 の証明から $(X_t-X_s)(Y_t-Y_s)-\delta_{ij}\displaystyle\int_s^t f_rg_r\,dr$ は二乗可積分で, $\mathcal{F}_s$ で条件付き期待値をとると 0 になり,

$$\Delta_{m,k}(t)=\left(X\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)\left(Y\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)-\delta_{ij}\int_{t\wedge\frac{k-1}{m}}^{t\wedge\frac{k}{m}}f_sg_s\,ds$$

とするとこれは $\mathcal{F}_{k/m}$ 可測かつ $E\left[\Delta_{m,k}(t)\mid\mathcal{F}_{(k-1)/m}\right]=0$ となる. このとき注 2.2 より

$$I_m(t)-\int_0^t D_Z^m(s)d\langle X,Y\rangle(s)=\sum_{k=1}^{\infty}Z\left(\frac{k-1}{m}\right)\Delta_{m,k}(t)$$

となる. この右辺は有限和になることに注意. 再び可測性の議論から

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}Z\left(\frac{k-1}{m}\right)\Delta_{m,k}(t)\right)^2\right]=\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\left(Z\left(\frac{k-1}{m}\right)\Delta_{m,k}(t)\right)^2\right]\leq M^2\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\Delta_{m,k}(t)^2\right]$$

となる. ただし M は Case 1 で定めた定数. ここで相加相乗平均の不等式より

$$\Delta_{m,k}(t)^2\leq 2\left(X\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)^2\left(Y\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)^2+2\left(\int_{t\wedge\frac{k-1}{m}}^{t\wedge\frac{k}{m}}f_sg_sds\right)^2$$

となるが, N を $|f(s,\omega)|,|g(s,\omega)|\leq N$ なる定数として

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(X\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)^2\left(Y\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)^2\right]\\
&\leq E\left[\left(X\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)^4\right]^{1/2}E\left[\left(Y\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-Y\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)^4\right]^{1/2}\\
&\leq 9N^4\left(t\wedge\frac{k}{m}-t\wedge\frac{k-1}{m}\right)^2\leq\frac{9N^4}{m}\left(t\wedge\frac{k}{m}-t\wedge\frac{k-1}{m}\right)
\end{aligned}$$

である (Cauchy-Schwarz と命題 2.1 を用いた). もう片方はそのまま

$$\left(\int_{t\wedge\frac{k-1}{m}}^{t\wedge\frac{k}{m}}f_sg_s\,ds\right)^2\leq N^4\left(t\wedge\frac{k}{m}-t\wedge\frac{k-1}{m}\right)^2\leq\frac{N^4}{m}\left(t\wedge\frac{k}{m}-t\wedge\frac{k-1}{m}\right)$$

と抑えられるので,

$$\sum_{k=1}^{\infty}E\left[\Delta_{m,k}(t)^2\right]\leq\frac{10N^4}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(t\wedge\frac{k}{m}-t\wedge\frac{k-1}{m}\right)=\frac{10N^4t}{m}\to 0\quad(m\to\infty)$$

となる. よって $L^2(\Omega,P)$ において $I_m(t)-\displaystyle\int_0^t D_Z^m(s)d\langle X,Y\rangle(s)\to 0$ であり, 命題 2.2 より $\displaystyle\int_0^t D_Z^m(s)d\langle X,Y\rangle(s)$ は $\displaystyle\int_0^t Z_s\,d\langle X,Y\rangle(s)$ に収束するので, 以上より $I_m(t)\to\displaystyle\int_0^t Z_s\,d\langle X,Y\rangle(s)$ が従う. ■

命題 2.4　$X \in \mathcal{Q}^{\infty}(\mathscr{F})$ に対し,

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left|X\left(t \wedge \frac{k}{m}\right) - X\left(t \wedge \frac{k-1}{m}\right)\right|^3\right] \to 0 \quad (m \to \infty)$$

が成り立つ.

証明： 相加相乗平均の不等式より, X を定義する各積分ごとに評価すればよいことがわかる.

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t f_i(s)\,dB^i(s) + \int_0^t f_0(s)\,ds$$

とし, $M \geq |f_0(s,\omega)|, |f_1(s,\omega)|, \ldots, |f_n(s,\omega)|$ なる定数をとる.

ds による積分の項は ω に依存せず

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{t\wedge\frac{k-1}{m}}^{t\wedge\frac{k}{m}} f_0(s)\,ds\right|^3 \leq \frac{M^3}{m^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(t \wedge \frac{k}{m} - t \wedge \frac{k-1}{m}\right) = \frac{M^3 t}{m^2} \to 0$$

なのでよい.

残りの項については, Cauchy-Schwarz と命題 2.1 より

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\int_{t\wedge\frac{k-1}{m}}^{t\wedge\frac{k}{m}} f_i(s)\,ds\right|^3\right] &\leq E\left[\left|\int_{t\wedge\frac{k-1}{m}}^{t\wedge\frac{k}{m}} f_i(s)\,dB^i(s)\right|^4\right]^{1/2} E\left[\left|\int_{t\wedge\frac{k-1}{m}}^{t\wedge\frac{k}{m}} f_i(s)\,dB^i(s)\right|^2\right]^{1/2} \\
&\leq 3M^2\left(t \wedge \frac{k}{m} - t \wedge \frac{k-1}{m}\right) E\left[\left|\int_{t\wedge\frac{k-1}{m}}^{t\wedge\frac{k}{m}} f_i(s)\,dB^i(s)\right|^2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

となるので, $Y_s = \displaystyle\int_0^s f_i(s)\,dB^i(s)$ とするとあとは命題 2.3 の Case 1 における $j \neq 0$ の場合の証明と同様になる. ■

注 2.3　命題 2.2, 2.3, 2.4 についての主張は $\mathcal{Q}^{\infty}$ の元についての命題であったが, 注 2.1 で言及した内容から, $\mathcal{Q}$ の元についても任意の $\varepsilon > 0$ に対して確率 $1-\varepsilon$ 以上の集合上で成り立つ. L^2 または L^1 収束すれば確率収束もするので, したがって全体として命題で述べられた収束は確率収束の意味で成り立つことになる.

3　伊藤の公式の証明

補題 3.1　$X^1, X^2, \ldots, X^N \in \mathcal{Q}(\mathscr{F})$, $f \in C_b^3(\mathbb{R}^N)$ とするとき, $f(\boldsymbol{X}) \in \mathcal{Q}(\mathscr{F})$ であり, 任意の $t \geq 0$ に対して

$$f(\boldsymbol{X}_t) = f(\boldsymbol{X}_0) + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{X}_s)\,dX^i(s) + \sum_{i,j=1}^{N}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{X}_s)\,d\left\langle X^i, X^j\right\rangle(s) \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ. ただし, $\boldsymbol{X} = \left(X^1, X^2, \ldots, X^N\right)$ とする.

証明： $g \in C^r(\mathbb{R})$ に対する Taylor の公式 (定理 D.1)

$$g(t) = \sum_{k=0}^{r-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k + \int_0^t \frac{g^{(r)}(s)}{(r-1)!}(t-s)^{r-1}\,ds$$

を用いる. 特に, 与えられた f について $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^N$ に対して $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ として $g(t):=f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{c})$ を考えると,

$$f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})=\sum_{i=1}^{N}c^i\frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}c^ic^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(\boldsymbol{a})+R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

とかける. ただし

$$R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\int_0^1\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j,k=1}^{N}c^ic^jc^k\frac{\partial^3 f}{\partial x^i\partial x^j\partial x^k}(\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{c})\right)ds$$

であるが, 相加相乗平均の不等式と f の 3 階導関数の有界性から定数 $C>0$ が存在して

$$|R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\le C\sum_{i=1}^{N}|c^i|^3=C\sum_{i=1}^{N}|b^i-a^i|^3$$

をみたす.

ここで, $f(\boldsymbol{X}_t)-f(\boldsymbol{X}_0)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{f\left(\boldsymbol{X}\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)\right)-f\left(\boldsymbol{X}\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)\right\}$ が成り立つ (有限和である). これに上で導出された式を用いてシグマの交換を行うと,

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{X}_t)-f(\boldsymbol{X}_0)\\
=&\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\boldsymbol{X}\left(\frac{k-1}{m}\right)\right)\left(X^i\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X^i\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x^i\partial x^j}\left(\boldsymbol{X}\left(\frac{k-1}{m}\right)\right)\left(X^i\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X^i\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)\left(X^j\left(t\wedge\frac{k}{m}\right)-X^j\left(t\wedge\frac{k-1}{m}\right)\right)\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}R\left(\boldsymbol{X}\left(\frac{k-1}{m}\right),\boldsymbol{X}\left(\frac{k}{m}\right)\right)
\end{aligned}$$

が得られる. ここで $m\to\infty$ とする際に注 2.3 を考えると, $R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の評価と合わせると右辺の最後の項は 0 に確率収束し, 残りの 2 項はそれぞれ

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{X}_s)\,dX(s),\qquad\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{X}_s)\,d\left\langle X^i,X^j\right\rangle(s)$$

に確率収束する. したがって m について適当な部分列をとると概収束し, 特に上の式の左辺 $f(\boldsymbol{X}_t)-f(\boldsymbol{X}_0)$ は m に依存しないので与式は成立する. 特に, 与式が成立すれば $f(\boldsymbol{X})\in\mathcal{Q}(\mathscr{F})$ は明らか. ■

定理 3.1 (伊藤の公式) $X^1,X^2,\ldots,X^N\in\mathcal{Q}(\mathscr{F})$, $f\in C^2(\mathbb{R}^N)$ とするとき, $f(\boldsymbol{X})\in\mathcal{Q}(\mathscr{F})$ であり, 任意の $t\ge 0$ に対して

$$f(\boldsymbol{X}_t)=f(\boldsymbol{X}_0)+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{X}_s)\,dX^i(s)+\sum_{i,j=1}^{N}\int_0^t\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{X}_s)\,d\left\langle X^i,X^j\right\rangle(s)\quad\text{a.s.}$$

が成り立つ. ただし, $\boldsymbol{X}=\left(X^1,X^2,\ldots,X^N\right)$ とする.

証明： $f\in C^2(\mathbb{R}^N)$ のとき, まず $\phi:\mathbb{R}^N\to[0,1]$ を $\phi(\boldsymbol{x})=1$ $(|\boldsymbol{x}|\le 1)$, $\phi(\boldsymbol{x})=0$, $(|\boldsymbol{x}|\ge 2)$ をみたす C^∞ 級関数とする (注 D.2). このとき $f_m:=\phi\left(\dfrac{1}{m}\boldsymbol{x}\right)f(\boldsymbol{x})$ とすると $f_m\in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ であり, $|\boldsymbol{x}|<m$ において f と f_m は 2 次

の導関数まで含めて一致する．特に，$\sup_{0\le s\le t}|\boldsymbol{X}_s| < m$ となる事象においては f_m に対して伊藤の公式が示されれば十分である．その場合 $m\to\infty$ とすれば結論を得るので，$f\in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ に対して示せば十分である．

$f\in C_b^2(\mathbb{R}^N)$ とするとき，$f_m := h_{1/m} * f$ を考えるとこれは命題 D.1, D.2 より特に $C_b^3(\mathbb{R}^N)$ に属し，$m\to\infty$ で 2 次の導関数まで含めて f に収束する．あとは有界性より $X^1, X^2, \ldots, X^N \in \mathcal{Q}^\infty$ の場合には有界収束定理が使えて各 Brown 運動による確率積分が $m\to\infty$ で L^2 収束，その他の積分は概収束するので適当な部分列をとればよい．$X^1, X^2, \ldots, X^N \in \mathcal{Q}$ の場合にはこれを 2.3 に従って制限して議論すればよい． ■

A　予備知識と記法について

A.1　予備知識

- 測度論の基本的な収束定理と Fubini の定理, Hilbert 空間論あるいは関数解析のごく初歩, 確率論の基礎概念を仮定している.
- σ 加法族に対する条件付き期待値を用いている.
  確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の (非負または可積分な) 確率変数 X と $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族 $\mathcal{G}$ に対して, 確率変数 Y が X の $\mathcal{G}$ による**条件付き期待値**であるとは,
  (1)　Y は $\mathcal{G}$ 可測である.
  (2)　任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して $\displaystyle\int_A X\, dP(\omega) = \int_A Y\, dP(\omega)$ をみたす.
  をみたすことをいう. このような Y は a.s. で一意に存在し, $E[X \mid \mathcal{G}]$ で表す.
- 上以外で仮定したものは基本的に付録に記載している.

A.2　記法と約束事

- $a \wedge b$ で $\min\{a, b\}$ を表す.
- A を X の部分集合としたとき, 1_A で関数 $X \to \mathbb{R}$ であって

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

  なるものを表す. 本文中で登場する場合は X は Ω またはユークリッド空間を指すことが多い.
- $C_b^n(\mathbb{R}^d)$ で n 階連続微分可能で n 階までの各導関数が有界となるような $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ の関数全体を表す. また $C^\infty(\mathbb{R}^d) := \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} C_b^n(\mathbb{R}^d)$ とする.
- 本文中では常に確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が固定されているとする.
- 確率変数 X について, $A \in \mathcal{F}$ についての期待値 $\displaystyle\int_A X(\omega)\, dP(\omega)$ を $E[X, A]$ と表記している.
- 確率測度は有限測度なので優収束定理の優関数として定数を取れることがあるが, その場合は有界収束定理と呼称している.

B　離散時間マルチンゲール

B.1　基本事項

定義 B.1　確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において, $\mathscr{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ が**フィルトレーション** (または**増大情報系**) であるとは, 次をみたすことをいう.

(1)　各 $\mathcal{F}_n$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族.
(2)　$\mathcal{F}_n$ は単調増加, すなわち $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ が成り立つ.
(3)　$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F} \mid P(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

定義 B.2　確率変数列 $(X_n)_{n=0,1,\ldots}$ がフィルトレーション $\mathscr{F}$ に**適合している** ($\mathscr{F}$-adapted ともいう) とは, 任意の

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について X_n が $\mathcal{F}_n$ 可測であることをいう.

注 B.1　これ以降では, 確率空間とフィルトレーションを合わせた $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathscr{F})$ が与えられているとする.

B.2　停止時刻

定義 B.3　$\tau : \Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ が $(\mathcal{F}_n)$-**停止時刻** (stopping time) であるとは,

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が成り立つことをいう.

注 B.2　上の条件は $n = 0, 1, \ldots$ について $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ が成り立つことと同値である. これはフィルトレーションの $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ の条件よりわかる.

注 B.3　停止時刻 τ, σ に対して $\tau \wedge \sigma$, $\tau + \sigma$ も停止時刻である.

B.3　離散時間マルチンゲール

定義 B.4　確率変数列 $X = \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathscr{F}$-**マルチンゲール**であるとは, 次が成り立つことをいう.

(1)　各 X_n は $\mathscr{F}$-adapted である.
(2)　各 X_n は可積分である.
(3)　各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $E[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ a.s..

また (3) の等号を $\geq$ に置き換えたものを**劣マルチンゲール**という.

注 B.4　X がマルチンゲールであることは X と $-X$ がいずれも劣マルチンゲールであることと同値なので, 劣マルチンゲール性のみを確認すればよいことが多い.

注 B.5　$X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ がマルチンゲールのとき, $m > n$ なら $E[X_m \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ a.s. が帰納的にわかる.

定義 B.5　停止時刻 τ に対して, σ 加法族 $\mathcal{F}_\tau$ を

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$$

で定める (この定義は $A \cap \{\tau = n\}$ に変更しても同値).

注 B.6　X_τ は $\mathcal{F}_\tau$ 可測である. 実際, $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{X_\tau \leq r\} \cap \{\tau = n\} = \{X_n \leq r\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$$

なのでよい. また $\sigma \leq \tau$ のとき $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ である. これも定義からすぐわかる.

定理 B.1　(任意抽出定理) X が劣マルチンゲールで停止時刻 σ,τ が $\sigma \leq \tau \leq N$ a.s. を満たしているとき,

$$E\left[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \geq X_\sigma \text{ a.s.}$$

が成り立つ. 特に, X がマルチンゲールなら等号が成り立つ.

証明： $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ より, $\sigma \leq \tau \leq N$ が常に成り立っているとして考えればよい. 上の注より X_σ は $\mathcal{F}_\sigma$ 可測なので, 示すべきことは $E[|X_\tau|] < \infty$ と, 任意の $A \in \mathcal{F}_\tau$ に対して $E[X_\tau, A] \geq E[X_\sigma, A]$ が成り立つことである. 前者は $\sigma \leq N$

より $E[|X_\tau|] \le E[|X_0|] + \cdots + E[|X_N|] < \infty$ なのでよい. 後者について, まず $\tau = \sigma$ または $\sigma + 1$ のときに示す.

$$\begin{aligned} E[X_\tau, A] - E[X_\sigma, A] &= E[X_{\sigma+1} - X_\sigma, A \cap \{\tau = \sigma + 1\}] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} E[X_{k+1} - X_k, A \cap \{\tau = \sigma + 1\} \cap \{\sigma = k\}] \end{aligned}$$

であるが, $\{\tau = \sigma + 1\} = \{\tau = \sigma\}^c$ なので,

$$A \cap \{\tau = \sigma + 1\} \cap \{\sigma = k\} = A \cap \{\tau = \sigma\}^c \cap \{\sigma = k\} = A \cap \{\tau = k\}^c \cap \{\sigma = k\} \in \mathcal{F}_k.$$

したがって各 $E[X_{k+1} - X_k, A \cap \{\tau = \sigma + 1\} \cap \{\sigma = k\}]$ は非負. よって $\tau = \sigma$ または $\sigma + 1$ の場合はよい.

一般の場合には, $\tau_n = (\sigma + n) \wedge \tau$ とすると $\tau_0 = \sigma$, $\tau_N = \tau$ であり, $\tau_{n+1} = \tau_n$ または $\tau_n + 1$ が成り立っているので, これらに繰り返し上の結果を適用すればよい. ■

注 B.7　X がマルチンゲールのとき, $|X|$ は劣マルチンゲールである. 実際, $A \in \mathcal{F}_n$ に対して, Jensen の不等式より

$$\begin{aligned} E[|X_n|, A] &= E[X_n, A \cap \{X_n > 0\}] - E[X_n, A \cap \{X_n \le 0\}] \\ &= E[X_{n+1}, A \cap \{X_n > 0\}] - E[X_{n+1}, A \cap \{X_n \le 0\}] \\ &\le |E[X_{n+1}, A \cap \{X_n > 0\}]| + |E[X_{n+1}, A \cap \{X_n \le 0\}]| \le [|X_{n+1}|, A] \end{aligned}$$

である.

定理 B.2　(**Doob の不等式**) X がマルチンゲールのとき, 任意の $a > 0$ に対して

$$P\left(\max_{0 \le k \le n} |X_k| > a\right) \le \frac{1}{a} E\left[|X_n|, \left\{\max_{0 \le k \le n} |X_k| > a\right\}\right], \quad n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$$

が成り立つ. さらに, $p > 1$ に対して $E[|X_n|^p] < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ であるとき,

$$E\left[\max_{0 \le k \le n} |X_k|^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_n|^p]$$

が成り立つ.

証明： τ を次のように定義する：

$$\tau = \begin{cases} k & (|X_k| \text{ が初めて } a \text{ を超えるとき}) \\ n & (\forall k \le n \text{ について } |X_k| \le a \text{ のとき}) \end{cases}$$

まずこれが停止時刻になることを示す. $k < n$ については

$$\{\tau = k\} = \left(\bigcap_{l<k} \{|X_\ell| \le a\}\right) \cap \{|X_k| > a\} \in \mathcal{F}_k$$

なのでよく, $\{\tau = n\}$ は上のものの和の補集合なので $\mathcal{F}_{n-1}$ に入っている. このとき

$$\{|X_\tau| > a\} = \left\{\max_{0 \le k \le n} |X_k| > a\right\}$$

であるから, Markov の不等式より,

$$P\left(\max_{0 \le k \le n} |X_k| > a\right) = P(|X_\tau| > a) \le \frac{1}{a} E[|X_\tau|,\ |X_\tau| > a]$$

である. 最後に任意抽出定理を τ と n について用いると, $\{X_\tau > a\} \in \mathcal{F}_\tau$ から,

$$E\left[|X_\tau|, |X_\tau| > a\right] \leq E\left[|X_n|, |X_\tau| > a\right]$$

がわかる. したがって 1 つ目の式は示された.

次に, $E\left[|X_n|^p\right] < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき, $Y = \max_{0\leq k\leq n} |X_k|$ とおく. $E\left[Y^p\right]$ を評価したい. Fubini の定理より,

$$\begin{aligned}
E\left[Y^p\right] &= \int_\Omega Y^p P(d\omega) \\
&= p\int_\Omega \int_0^\infty x^{p-1} 1_{\{Y>x\}} dx P(d\omega) \\
&= p\int_0^\infty x^{p-1} P(Y > x) dx \\
&\leq p\int_0^\infty x^{p-2} E\left[|X_n|, Y > x\right] dx \\
&= p\int_0^\infty \int_\Omega |X_n| \cdot x^{p-2} 1_{\{Y>x\}} P(d\omega) dx \\
&= \frac{p}{p-1} E\left[|X_n| Y^{p-1}\right]
\end{aligned}$$

がわかる. ここで $q = \dfrac{p}{p-1}$ とすると Hölder の不等式より

$$E\left[|X_n| Y^{p-1}\right] = E\left[(|X_n|^p)^{1/p} (Y^p)^{1/q}\right] \leq \left(E\left[|X_n|^p\right]\right)^{1/p} \left(E\left[Y^p\right]\right)^{1/q}$$

よって,

$$E\left[Y^p\right] \leq \frac{p}{p-1} \left(E\left[|X_n|^p\right]\right)^{1/p} \left(E\left[Y^p\right]\right)^{1/q}$$

であり, これを整理すれば所望の式が得られる. ■

C 連続時間確率過程

C.1 基本事項と可測性

定義 C.1 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において, 写像 $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ であって各 $X(t, \cdot)$ が確率変数になっているものを**確率過程**という. また $X(t, \omega)$ を省略して $X(t)$ や X_t と表記することがある.

定義 C.2 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において, $\mathscr{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が**フィルトレーション**であるとは, 次をみたすことをいう.

(1) 各 $\mathcal{F}_t$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族.

(2) $\mathcal{F}_t$ は単調増加, すなわち $s < t$ に対して $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ が成り立つ.

(3) $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F} \mid P(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

定義 C.3 確率過程 X がフィルトレーション $\mathscr{F}$ に**適合している** ($\mathscr{F}$-adapted ともいう) とは, 各 X_t が $\mathcal{F}_t$ 可測であることをいう. また, X が $\mathscr{F}$**-発展的可測**であるとは, 任意の $t \geq 0$ に対して $X|_{[0,t]\times\Omega}$ が $[0, t] \times \mathcal{F}_t$ のなす直積 σ 加法族に対して可測であることをいう.

注 C.1 ここでは示さないが, 右連続かつ $\mathscr{F}$-適合ならば $\mathscr{F}$-発展的可測となる.

C.2　マルチンゲールと Doob の不等式

定義 C.4　確率過程 X が **$\mathscr{F}$-マルチンゲール**であるとは, 次が成り立つことをいう.

(1)　各 X_t は $\mathscr{F}$-adapted である.
(2)　各 X_t は可積分である.
(3)　各 $s < t$ について $E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$ a.s..

また (3) の等号を $\geq$ に置き換えたものを**劣マルチンゲール**という.

注 C.2　上の定義は, 任意の時間の離散化とそれに対応するフィルトレーションに対してマルチンゲールとなるということを意味する. これにより, 次の定理が成り立つ.

定理 C.1　(**Doob の不等式**) X が各 $X(\cdot,\omega)$ の連続なマルチンゲールのとき, 任意の $a > 0$ に対して

$$P\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s| > a\right) \leq \frac{1}{a}E\left[|X_t|, \left\{\sup_{0\leq s\leq t}|X_s| > a\right\}\right], \quad \forall t \in [0,\infty)$$

が成り立つ. さらに, $p > 1$ に対して $E\left[|X_s|^p\right] < \infty$ $(\forall s \in [0,t])$ であるとき,

$$E\left[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s|\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|X_t|^p\right]$$

が成り立つ.

証明： 各 m について時間の離散化を $t_{m,k} = \dfrac{kt}{2^m}$ として離散時間の Doob の不等式を用い, あとは両辺に単調収束定理を適用すると X の連続性より 1 つ目の結果が従う. 後半は定理 B.2 の証明と全く同様である. ■

注 C.3　特に, 上の定理で $p = 2$ とした式

$$E\left[\max_{0\leq k\leq n}|X_k|^2\right] \leq 4E\left[|X_n|^2\right]$$

がよく使われる.

定義 C.5　フィルトレーション $\mathscr{F}$ が与えられたとき, 確率過程 B が **$\mathscr{F}$-Brown 運動**であるとは, 次をみたすことをいう.

(1)　$B_0 \equiv 0$ である.
(2)　任意の $\omega \in \Omega$ に対して $B(\cdot,\omega)$ は連続である.
(3)　B は $\mathscr{F}$-adapted である.
(4)　$0 \leq s < t$ に対して $B_t - B_s$ は平均 0, 分散 $t - s$ の正規分布に従い, $\mathcal{F}_s$ と独立である.

注 C.4　(適当なフィルトレーションに対する) Brown 運動が存在することが知られているが, この存在証明は省略する. 再生核 Hilbert 空間を用いた証明が [1] に載っている.

D　実解析の補足

D.1　Taylor の公式

定理 D.1　(Taylor の公式) $f \in C^n(\mathbb{R})$ について,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)\,ds$$

が成り立つ.

証明： n についての帰納法で示す. $n=1$ のときは, $f(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t f'(s)\,ds$ となり明らか. $n=m$ のときを仮定して $n=m+1$ のときを示す. 仮定より

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(s)\,ds$$

であるが, 部分積分により

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(s)\,ds = \left[-\frac{(t-s)^m}{m!} f^{(m)}(s)\right]_0^t + \int_0^t \frac{(t-s)^m}{m!} f^{(m+1)}(s)\,ds$$

となり, 右辺第一項を計算すると $\dfrac{t^m}{m!} f^{(m)}(0)$ となるのでよい. ■

D.2　コンパクト台を持つ滑らかな関数

定義 D.1　$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}}$$

を f の台 **(support)** という.

定義 D.2　コンパクト台を持つ関数の空間を $C_0(\mathbb{R}^d)$, $C_0^r(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d) \cap C^r(\mathbb{R}^d)$ とする. またコンパクト台を持つ滑らかな関数の空間を

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{supp} f \text{ はコンパクト} \right\}$$

で定める.

注 D.1　文献によっては $C_0(\mathbb{R}^d)$ を $C_c(\mathbb{R}^d)$ と表記する場合もある. $C_0^r(\mathbb{R}^d) \subset C_b^r(\mathbb{R}^d)$ は明らかである.

補題 D.1　実数 $a < b$ について, $f_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ であって

$$f_{a,b}(x) = 0 \ \ (x \leq a), \qquad f_{a,b}(x) = 1 \ \ (x \geq b), \qquad |f| \leq 1$$

をみたすものが存在する.

証明： まず次の関数 f を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-1/x} & (x > 0) \end{cases}$$

このとき,

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} & (x > 0) \end{cases}$$

となる．一般に f の高階微分についても帰納的に

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ (1/x \text{ の多項式}) \cdot e^{-1/x} & (x > 0) \end{cases}$$

が得られ, これは $C^\infty(\mathbb{R})$ の元であることがわかる．次に

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$

と定めれば分母は 0 にはならず, $f_{0,1} = g$ とすればよい．一般の $a < b$ については, $f_{a,b}(x) = f_{0,1}\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ と定めれば所望の性質をみたす． ■

注 D.2　$f(x) = f_{-2,-1}(x) f_{-2,-1}(-x)$ を考えると $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ は $f|_{|x| \le 1} = 1$, $f|_{|x| \ge 2} = 0$ をみたしており, これは $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元を具体的に作るときの基本的な例となる．

D.3　微分と積分の交換

定理 D.2　(順序交換定理) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; $(t, x) \mapsto f(t, x)$ は t を固定すると x について可積分であるとし, また各点で t について偏微分可能であるとする．このとき, 任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して, ある $\delta > 0$ と可積分関数 $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \le g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

をみたすとき, $F(t) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(t, x)\, dx$ は $t = t_0$ で微分可能で, $F'(t_0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx$ をみたす．

証明： $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ を 0 に収束する (0 をとらない) 任意の実数列とする．

$$\frac{F(t_0 + h_n) - F(t_0)}{h_n} \to \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx \quad (n \to \infty)$$

を示せばよい．十分先で $|h_n| < \delta$ となるので, この範囲で平均値の定理より

$$\left| \frac{f(t_0 + h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t_0 + \theta h_n, x) \right| \le \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right|$$

となる．ただし θ は $(0, 1)$ 内の適当な実数．したがって, 優収束定理より,

$$\frac{F(t_0 + h_n) - F(t_0)}{h_n} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(t_0 + h_n, x) - f(t_0, x)}{h_n}\, dx \to \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\, dx \quad (n \to \infty)$$

となるので示された． ■

注 D.3　高階導関数に対しても, 同様の仮定があれば上の定理は成り立つ．

D.4　滑らかな関数による近似

定義 D.3　$h, f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を共に Lebesgue 可測関数とするとき, a.e. x で $\displaystyle\int_0^\infty |h(x-y)f(y)|\,dy < \infty$ が成り立つならば,

$$(h * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} h(x-y)f(y)\,dy$$

を h と f の**畳み込み**という.

注 D.4　$h(x-y)f(y)$ ならびに $h * f$ の可測性は明らかではないがここでは省略する.

定義 D.4　$x \in \mathbb{R}^d$ について, $h_t(x) = \dfrac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{2t}\right)$ を **Gauss 核**という.

注 D.5　$h_t(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり, また $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h_t(x)\,dx = 1$ である (**Gauss 積分**と呼ばれる).

命題 D.1　$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を有界連続関数とするとき, Gauss 核 h_t との畳み込み $h_t * f$ は x について C_b^∞ に属し,

$$\lim_{t \searrow 0} (h_t * f)(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

をみたす.

証明： t を定数とみれば,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)^{\alpha_d} h_t(x) = (x \text{ の多項式}) \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$$

となることは $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ に関する帰納法によりわかる. 今 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ を固定して, この多項式を $P_\alpha(x)$ とする. このときある $M > 0$ が存在して

$$P_\alpha(x) = \sum_{a_1 + \cdots + a_d \leq M} C_{a_1, \ldots, a_d} (x^1)^{a_1} \cdots (x^d)^{a_d}$$

とかけるが, うまく $C > 0$ を選ぶことで

$$Q_\alpha(x) = C\left(1 + |x|^{2dM}\right)$$

が $|P_\alpha| \leq Q_\alpha$ をみたすようにできる (相加相乗平均を繰り返し使えばよい). また $|z| \leq 1$ とすると, 三角不等式より

$$R_\alpha(x) = C\left(1 + (1 + |x|)^{2dM}\right) \geq Q_\alpha(x+z)$$

であり, また $2|x+z|^2 + 2 \geq 2|x+z|^2 + 2|z|^2 \geq (|x+z| + |z|)^2 \geq |x|^2$ なので,

$$\exp\left(-\frac{|x+z|^2}{2t}\right) \leq \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}|x|^2 - 1}{2t}\right) = \exp\left(\frac{1}{2t}\right) \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

よって, $x_0, y \in \mathbb{R}^d$ について,

$$\sup_{|x-x_0| \leq 1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)^{\alpha_d} h_t(x-y) \right| \leq R_\alpha(y-x_0) \exp\left(\frac{1}{2t}\right) \exp\left(-\frac{|y-x_0|^2}{4t}\right)$$

となる. この右辺は各 α で $y \in \mathbb{R}^d$ について可積分であることに注意すると, 定理 D.2 が繰り返し使えて, $h_t * f$ は $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元である (f が有界であったことに注意).

あとは収束を示せばよい．$t_n \to 0$ とする．$|x-y|$ ならば $|f(x)-f(y)| \le \varepsilon$ となる $\delta > 0$ をとると，$h_{t_n}(x)$

$$\left| f(x) - \int_{\mathbb{R}^d} h_{t_n}(x-y) f(y)\, dy \right| \le \int_{|x-y| \le \delta} h_{t_n}(x-y)|f(x)-f(y)|\, dy + \int_{|x-y|>\delta} h_{t_n}(x-y)|f(x)-f(y)|\, dy$$
$$\le \varepsilon + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)| \int_{|x-y|>\delta} h_{t_n}(x-y)\, dy \to \varepsilon, \quad n \to \infty$$

となるのでよい．最後の極限は置換積分で示せる． ■

命題 D.2　$f \in C_b^r(\mathbb{R}^d)$ であるとき，$\alpha_1 + \cdots + \alpha_d \le r$ について，

$$\lim_{t \searrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)^{\alpha_d} (h_t * f)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)^{\alpha_d} f(x)$$

が成り立つ．

証明： $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ のときに $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(h_t * f) = h_t * \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ を示せば十分．これは畳み込みが $z = x - y$ の変換によって次のように表せることから従う．

$$(h_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h_t(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} h_t(z) f(x-z)\, dz$$

実際，$f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ より偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x-z)$ は有界なので，定理 D.2 が適用可能 (δ は任意でよい) なので，

$$\frac{\partial (h_t * f)}{\partial x^i}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h_t(z) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x-z)\, dz = \left(h_t * \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)(x)$$

となる．したがってあとは前命題を繰り返し使うことで従う． ■

注 D.6　Gauss 核以外にも同様の性質をもつ関数はいくつかあり，それらを総称して**軟化子**という．軟化子の定義は文献により多少の差異があり，関数の台にコンパクト性を要求する場合もある．

参考文献

[1] 伊藤清, 確率論, 岩波書店, 1991.
[2] 舟木直久, 確率微分方程式, 岩波書店, 1997.
[3] 谷口説男, 確率微分方程式, 共立出版, 2016.
[4] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版, 1980.
[5] 吉田伸生, ルベーグ積分入門, 遊星社, 2006.
[6] 新井仁之, 新・フーリエ解析と関数解析学, 培風館, 2010.

確率積分のところは概ね [1] に従った. 伊藤の公式の証明は東京大学工学部で学部 3, 4 年向けに開講されている「数理手法 VI」の講義内容に従いつつ, 確率過程や関数のクラスの一般化を図った. [2], [3] は各所で参考にしたが証明の流れなどは異なるものが多い. [4], [5], [6] は主に付録 D 執筆時に参照した.

確率論を扱った前半 3 つの内容について少しコメントしておく. [1] は読みにくいが豊富な内容をカバーしており, 入門には難しいが測度論を学んだ後読むのによく適している. 特に 5 章からは難易度と内容の深さが跳ね上がり, 省略も増える. 伊藤の公式自体も証明は略されている. [2] は物理的イメージを大切にして記述が明解であるが, ところどころ証明を省略した箇所がある. [3] は [2] の流れを守りつつ行間をなくしたような印象を受けるが, 添え字がかなり多く読みづらい部分もある. 1 章の「確率論の基本概念」は復習用としてよくまとまっている.