中級計量経済学 2025 年度中間試験 解答例

TA: 岡本優太[1]

1

(i) 目的関数は、$\mathcal{L}(b_0, b_1) := \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - b_0 - b_1 X_i\}^2$。最小二乗法により (β_0, β_1) を推定するので、

$$\min_{(b_0, b_1)} \mathcal{L}(b_0, b_1)$$

を考えればよい。目的関数 $\mathcal{L}$ の微分は

$$\begin{cases} \partial \mathcal{L}/\partial b_0 = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_i) \\ \partial \mathcal{L}/\partial b_1 = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_i) X_i \end{cases}$$

により与えられるので、最小化問題の解 $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ は

$$\begin{cases} 0 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) \\ 0 = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) X_i \end{cases} \tag{1.1}$$

を満たす。これが一階の条件である。1 つ目の式から、$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ であり（$\bar{X}, \bar{Y}$ はそれぞれ X, Y の標本平均)、これと 2 つ目の式から、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \left(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\ &= \hat{\beta}_1 \left\{ \bar{X} \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right\} + \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &= -\hat{\beta}_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i \left(X_i - \bar{X}\right) \right\} + \sum_{i=1}^{n} X_i \left(Y_i - \bar{Y}\right) \end{aligned}$$

とわかる。この式は

$$\hat{\beta}_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)$$

と変形できるので、$\hat{\beta}_1$ は、

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \tag{1.2}$$

と表される。

[1]京都大学大学院経済学研究科 D3 ✉ okamoto.yuuta.57w@st.kyoto-u.ac.jp 不備があった場合や質問がある場合はこちらまでメールしてください。なお、採点結果に関するお問い合わせにはご回答できません。

(ii) $\bar{u} = \bar{Y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{X}$ とする。上の $\hat{\beta}_1$ の式 (1.2) より、

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left\{(\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i) - \left(\beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{u}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left\{\left(\beta_1 \left(X_i - \bar{X}\right) + u_i - \bar{u}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\
&= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} - \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) \bar{u}}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2}}_{=0} \\
&= \beta_1 + \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i}{n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

を得る。右辺第 2 項の分子は大数の法則より、

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i \to_p \mathbb{E}\left[X_i u_i\right] - \mathbb{E}\left[X_i\right]\mathbb{E}\left[u_i\right] = \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{E}\left[u_i|X_i\right]\right] - \mathbb{E}\left[X_i\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[u_i|X_i\right]\right]$$

であるが、$\mathbb{E}\left[u_i|X_i\right] = 0$ より、ゼロに確率収束する。分母は $\mathbb{V}\left[X_i\right]$ に確率収束するから、全体としてゼロに確率収束する。すなわち、

$$\hat{\beta}_1 \to_p \beta_1 + 0 = \beta_1$$

なので、一致性をもつ。

(iii) 先の (1.3) より、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) = \frac{n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i}{n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

と書ける。この分子について

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \left\{(X_i - \mu_X) - \left(\bar{X} - \mu_X\right)\right\} u_i \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) u_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \left(\bar{X} - \mu_X\right) u_i \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) u_i - \sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu_X\right) \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i
\end{aligned}$$

と分解する（ただし $\mu_X = \mathbb{E}\left[X_i\right]$ とおいた）。右辺第 2 項の $\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu_X\right)$ は中心極限定理により正規分布に分布収束するため、bounded in probability であり、第 2 要素は大数の法則より $\mathbb{E}\left[u_i\right]$ に確率収束するが、これは $\mathbb{E}\left[u_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[u_i|X_i\right]\right] = 0$ よりゼロである。したがって、第 2 項はゼロに確率収束する。第 1 項については、中心極限定理により、$\mathcal{N}(0, \mathbb{E}\left[(X_i - \mu_X)^2 u_i^2\right])$ に分布収束する。よって Slutsky の補題から、分子の部分は $\mathcal{N}(0, \mathbb{E}\left[(X_i - \mu_X)^2 u_i^2\right])$ に分布収束するとわかる。ここで、分母の部分は $\mathbb{V}\left[X_i\right] = \sigma_X^2$ に確率収束するので、再度 Slutsky の補題を用いれば、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{E}\left[(X_i - \mu_X)^2 u_i^2\right]}{\left(\sigma_X^2\right)^2}\right)$$

とわかる。

(iv) 設問 (ii) の (1.3) より、

$$\hat{\beta}_1 - \beta_1 = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

であった。右辺の確率収束先は

$$\frac{1}{\sigma_X^2}\left(\mathbb{E}\left[X_i \mathbb{E}\left[u_i|X_i\right]\right] - \mathbb{E}\left[X_i\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[u_i|X_i\right]\right]\right) = \frac{1}{\sigma_X^2}\left(\mathbb{E}\left[X_i g(X_i)\right] - \mathbb{E}\left[X_i\right]\mathbb{E}\left[g(X_i)\right]\right).$$

これが漸近バイアスである。

(v) 講義ノート 2 の第 2.9.1 節および講義ノート 3 の p. 1 参照。以下のような例が考えられる。

- 肥料の例や教育投資のリターンの例のように、経済主体の最適化行動（あるいは意思決定）の結果として観察されるデータの値が決まるような状況では、X と相関しうる観察されない決定要因が u に含まれる可能性があり、その場合 $g(X) \neq 0$ となるかもしれない。
- サーベイ調査で計測したリスク回避度 X を用いて、リスク選好 X^* の職業選択 Y への効果を測る場合、測定誤差が問題になるかもしれない。
- ある財の需要関数を推定したい場合（つまり、X が製品価格で Y が購入量)、市場価格の決定が需要サイドと供給サイドの 2 本の連立方程式によって記述されるならば、一般に $g(X) \neq 0$ となってしまう。

2

(i) D_i を条件とすると、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_i|D_i\right] &= \mathbb{E}\left[D_i Y_i(1) + (1-D_i)Y_i(0)|D_i\right] \\
&= D_i \mathbb{E}\left[Y_i(1)|D_i\right] + (1-D_i)\mathbb{E}\left[Y_i(0)|D_i\right] \\
&= D_i \mathbb{E}\left[Y_i(1)\right] + (1-D_i)\mathbb{E}\left[Y_i(0)\right]
\end{aligned}$$

を得る。ただし、最後の等号は D_i の独立性を用いた。

(ii) D_i を条件とすると、

$$\mathbb{E}\left[Y_i|D_i\right] = \mathbb{E}\left[\beta_0 + \beta_1 D_i + u_i|D_i\right] = \beta_0 + \beta_1 D_i + \mathbb{E}\left[u_i|D_i\right] = \beta_0 + \beta_1 D_i$$

を得る。ただし、最後の等号は $\mathbb{E}\left[u_i|D_i\right] = 0$ を用いた。ここで (i) の結果を思い出すと、

$$D_i \mathbb{E}\left[Y_i(1)\right] + (1-D_i)\mathbb{E}\left[Y_i(0)\right] = \beta_0 + \beta_1 D_i$$

である。これを整理すると、

$$D_i\left(\mathbb{E}\left[Y_i(1)\right] - \mathbb{E}\left[Y_i(0)\right] - \beta_1\right) + \left(\mathbb{E}\left[Y_i(0)\right] - \beta_0\right) = 0$$

を得る。したがって、$D_i = 0$ のときを考えれば、$\beta_0 = \mathbb{E}\left[Y_i(0)\right]$ とわかる。よって、$D_i = 1$ のときを考えると

$$0 = \left(\mathbb{E}\left[Y_i(1)\right] - \mathbb{E}\left[Y_i(0)\right] - \beta_1\right) + \left(\mathbb{E}\left[Y_i(0)\right] - \beta_0\right) = \mathbb{E}\left[Y_i(1)\right] - \mathbb{E}\left[Y_i(0)\right] - \beta_1$$

なので、$\beta_1 = \mathbb{E}\left[Y_i(1) - Y_i(0)\right] = \tau^{\mathtt{ATE}}$ とわかる。

(iii) u_i はその定義より、

$$\begin{aligned}
u_i &= Y_i - \beta_0 - \beta_1 D_i \\
&= \left(D_i Y_i(1) + (1-D_i)Y_i(0)\right) - \mathbb{E}\left[Y_i(0)\right] - \left(\mathbb{E}\left[Y_i(1)\right] - \mathbb{E}\left[Y_i(0)\right]\right)D_i \\
&= \left(Y_i(0) - \mathbb{E}\left[Y_i(0)\right]\right) + \left\{\left(Y_i(1) - Y_i(0)\right) - \mathbb{E}\left[Y_i(1) - Y_i(0)\right]\right\}D_i \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

により与えられる。

(iv) $\mathbb{E}[D_i] = \mathbb{P}[D_i = 1] = p$、$\mathbb{V}[D_i] = \mathbb{E}\left[D_i^2\right] - \mathbb{E}[D_i]^2 = \mathbb{E}[D_i] - \mathbb{E}[D_i]^2 = p - p^2 = p(1-p)$ である。

(v) 問１の (iii) より、最小二乗推定量の漸近分散は

$$\frac{\mathbb{E}\left[(D_i - \mathbb{E}[D_i])^2 u_i^2\right]}{\mathbb{V}[D_i]^2}$$

であった。ここで、繰り返し期待値の法則を使うと、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(D_i - \mathbb{E}[D_i])^2 u_i^2\right] &= \mathbb{E}\left[(D_i - \mathbb{E}[D_i])^2 u_i^2 | D_i = 1\right] \mathbb{P}[D_i = 1] + \mathbb{E}\left[(D_i - \mathbb{E}[D_i])^2 u_i^2 | D_i = 0\right] \mathbb{P}[D_i = 0] \\
&= \mathbb{E}\left[(1-p)^2 u_i^2 | D_i = 1\right] p + \mathbb{E}\left[(0-p)^2 u_i^2 | D_i = 0\right] (1-p) \\
&= (1-p)^2 \mathbb{E}\left[(Y_i(1) - \mathbb{E}[Y_i(1)])^2 | D_i = 1\right] p + p^2 \mathbb{E}\left[(Y_i(0) - \mathbb{E}[Y_i(0)])^2 | D_i = 0\right] (1-p) \\
&= (1-p)^2 \mathbb{E}\left[(Y_i(1) - \mathbb{E}[Y_i(1)])^2\right] p + p^2 \mathbb{E}\left[(Y_i(0) - \mathbb{E}[Y_i(0)])^2\right] (1-p) \\
&= (1-p)^2 p \sigma_1^2 + p^2 (1-p) \sigma_0^2
\end{aligned}$$

である。ただし、３つ目の等号は (2.1) を用いた。したがって、漸近分散は

$$\frac{\mathbb{E}\left[(D_i - \mathbb{E}[D_i])^2 u_i^2\right]}{\mathbb{V}[D_i]^2} = \frac{(1-p)^2 p \sigma_1^2 + p^2 (1-p) \sigma_0^2}{p^2 (1-p)^2} = \frac{\sigma_1^2}{p} + \frac{\sigma_0^2}{1-p}$$

である。