

## 令和6年度 中級計量経済学 講義ノート 4 パネルデータ分析

このノートでは、パネルデータの分析で使われる統計手法を解説する。パネルデータを使用することにより、時間を通じて一定だが個人間では異なる、あるいはその逆の欠落変数の影響を取り除くことができる。ここでは、主に前者を扱う。この利点により、横断面データ(クロスセクションデータ)を使用した場合にはうまく推定のできない効果を推定することが可能になる。一方で、横断面データの分析の場合とは違った統計理論上の注意点が出てくる。

### 4.1 パネルデータ

パネルデータとは、 $n$ 人の個人(人ではなく企業や国のこともある)を $T$ 期間にわたり追跡して観察することから得られるデータである。

表記： $y_{it}$ のように二つの添え字を用いる。最初の添え字の $i$ は個人を表し、次の添え字の $t$ は時点を表す。

- 調和パネル：データに含まれるすべての個人と時点について、すべての変数が観測できている。
- 非調和パネル：少なくとも一人の個人の一つの時点について、ある変数が観測できていない。

この授業では、調和パネルのみを取り扱う。ただ以下に取り扱う固定効果推定量を非調和パネルに拡張するのは容易である。しかし、動学パネルモデルの操作変数推定量を非調和パネルに拡張する際には注意が必要である。

### 4.2 固定効果回帰

次のような線形回帰モデルを考える。しかし、時間を通じて一定な回帰変数 $\mathbf{Z}_i$ (つまり、個人固有の量)が観測できておらず、かつそれが時間とともに変化する回帰変数 $\mathbf{X}_{it}$ と相關している場合を考える。

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1' \mathbf{X}_{it} + \beta_2' \mathbf{Z}_i + u_{it}. \quad (1)$$

もし $\mathbf{Z}_i$ を無視してOLSでこのモデルを推定すると、欠落変数のバイアスが起こり、 $\beta_1$ の推定量は一致性をもたない。しかし、パネルデータを用いると $\beta_1$ の一致推定が可能になる。部分的であるにせよこのような欠落変数の問題を解決することができることがパネルデータを使用する一つの大きな利点であり、データへのアクセスが良くなると共に近年の実証分析では、パネルデータを用いることが多くなってきている。

- 例として、企業の広告費と売り上げの関係を調べたいとする。上の表記に従えば、 $y_{it}$ が売上高であり、 $\mathbf{X}_{it}$ が広告費などの変数になる。しかし、単に売上高を広告費に回帰しても、広告費の効果を正しく推定できるとは思えない。企業規模の大きい企業ほど、売上高も広告費も大きいであろうから、もし、規模の大きさを示す変数が回帰に含まれていない場合は、欠落変数の問題が起こる可能性が高い。ここで、パネルデータがあり、たとえば資本や従業員数等の企業規模を表す変数が時間を通じて一定とする(上の表記のように $\mathbf{Z}_i$ と書ける場合である)と、広告費の効果を一致推定することができる。

このモデルは、 $i$ ごとに異なる $n$ 個の切片をもつ回帰モデルと理解することもできる。 $\alpha_i = \beta_0 + \beta'_2 \mathbf{Z}_i$  とすると、

$$y_{it} = \beta'_1 \mathbf{X}_{it} + \alpha_i + u_{it} \quad (2)$$

と書くことができる。これを固定効果回帰モデルという。ただし、 $\mathbf{X}_{it}$ の中に時間を通じて変化しない変数を含めることはできない。もし含めてしまうと、 $\alpha_i$ と多重共線性を起こしてしまうからである（この点には推定のための变形のところでもう一度触れる）。

さらにこのモデルは $n$ 個の2項变数からなるモデルとして書くこともできる。 $D1_{it}$ を $i=1$ なら1をとり、 $i \neq 1$ なら0をとる变数とする。 $D2_{it}$ から $Dn_{it}$ も同様に定義する。すると、モデルは

$$y_{it} = \beta'_1 \mathbf{X}_{it} + \alpha_1 D1_{it} + \alpha_2 D2_{it} + \alpha_3 D3_{it} + \cdots + \alpha_n Dn_{it} + u_{it} \quad (3)$$

として書くことができる。 $D$ にも添え字 $t$ がつけてあるが、実際には $t$ に依存しない。定数項が含まれたままだと多重共線性の問題を起こすため、抜かれていることに注意。

パネルデータを扱う際のモデルには、固定効果モデル以外に変量効果モデルと呼ばれるものがある。これは、個別効果  $\mathbf{Z}_i$  が確率变数で、 $\mathbf{X}_{it}$  と相関をもたないケースで、この場合は個別効果  $\mathbf{Z}_i$  が欠落变数でないため、推定モデルに含めなくても OLS によって  $\beta_1$  を一致推定できる。変量効果モデルも固定効果回帰によって一致推定が可能であり、また最近はあまり用いられないため、この授業ではこれ以上は触れない。

**推定** このモデルの推定には2通りの考え方がある。一つ目は(3)式の2項变数による固定効果回帰モデルの表現に基づいた OLS 推定である。

二つ目として、(2)を使って次のような推定量を考えることもできる。このモデルでもし  $\alpha_i$  が  $i$  に依存していないければ、普通の回帰モデルである。 $\alpha_i$  が  $i$  に依存しているところが厄介なので、次のようにして  $\alpha_i$  を消去する。まず、 $\bar{y}_i = \sum_{t=1}^T y_{it}/T$  とする。 $\bar{\mathbf{X}}_i$  と  $\bar{u}_i$  も同じように  $t$  に関して平均をとったものと定義する。すると、

$$\bar{y}_i = \beta'_1 \bar{\mathbf{X}}_i + \alpha_i + \bar{u}_i \quad (4)$$

である。この各個人の平均の式(4)を、それぞれの観測値の式(2)から引くことにより、

$$y_{it} - \bar{y}_i = \beta'_1 (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i) + (u_{it} - \bar{u}_i) \quad (5)$$

となる。この操作によって固定効果  $\alpha_i$  を消すことができ、この変換を固定効果変換と呼ぶ。この式に最小二乗法を適用すると  $\beta_1$  の推定値が得られる。なお、もし  $\mathbf{X}_{it}$  の中に時間を通じて変化しない变数が含まれていると、固定効果変換によって  $\alpha_i$  と一緒に消えてしまい、変換後にすべて0になってしまう。その結果、推定ができなくなる。

(3)と(5)のそれぞれに OLS を適用したとき、二つの  $\beta_1$  の OLS 推定量は同じになる。それは以下のようにして証明できる。まず、2項变数を使ったモデル(3)による最小二乗推定量は

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{it} - \beta'_1 \mathbf{X}_{it} - \alpha_1 D1_{it} - \cdots - \alpha_n Dn_{it})^2 \quad (6)$$

を最小化する。ここで、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{it} - \beta'_1 \mathbf{X}_{it} - \alpha_1 D1_{it} - \cdots - \alpha_n Dn_{it})^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{t=1}^T (y_{it} - \beta'_1 \mathbf{X}_{it} - \alpha_i)^2 \right) \quad (7)$$

である。 $\beta_1$  を固定したときに上の関数を最小化する  $\alpha_i$  の値は、

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_{it} - \beta'_1 \mathbf{X}_{it}) = \bar{y}_i - \beta'_1 \bar{\mathbf{X}}_i \quad (8)$$

ということがわかる。したがって、包絡線定理より  $\beta_1$  の最小二乗推定量は、

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{t=1}^T (y_{it} - \beta'_1 \mathbf{X}_{it} - \bar{y}_i + \beta'_1 \bar{\mathbf{X}}_i)^2 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (y_{it} - \bar{y}_i - \beta'_1 (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i))^2 \quad (9)$$

を最小化するものであるが、これは、 $y_{it} - \bar{y}_i$  を  $\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i$  に回帰した時の最小二乗推定量、つまり (5) に OLS を適用したものと同じである。

この推定量はいろいろな名称で呼ばれる。

- 固定効果推定量 (FE: fixed effect);
- 群間推定量 (WG: within group);
- ダミー変数最小二乗推定量 (LSDV: least squares dummy variables)。

### 4.3 時間固定効果

また、個人間で相違がないが、時間を通じて変わっていく変数から引き起こされる欠落変数のバイアスを避けたい場合もある。

例: 酒税と交通事故死の数の関係を調べる。酒税が上がれば飲酒が減って、交通事故死亡率が下がると予想される。他方、技術進歩によって自動車の安全性が向上しており、その効果を含めないと推定にバイアスが生ずるかもしれない。

時間固定効果を推定式に含めることでこの問題を取り扱うことができる。

$$y_{it} = \beta_0 + \beta'_1 \mathbf{X}_{it} + \beta'_2 \mathbf{Z}_i + \beta'_3 \mathbf{S}_t + u_{it}. \quad (10)$$

- 時間固定効果のみのモデル:

$$y_{it} = \beta'_1 \mathbf{X}_{it} + \lambda_t + u_{it} \quad (11)$$

とすると、 $\lambda_t (= \beta_0 + \beta'_3 \mathbf{S}_t)$  は時間固定効果である。このモデルは、 $T$  個の 2 項変数を使って表現できる。 $B1_{it}$  を  $t = 1$  なら 1 とし、 $t \neq 1$  なら 0 である 2 項変数とする。 $B2_{it} = 1$  は  $t = 2$  なら 1 で  $t \neq 2$  なら 0 な変数とする。他の変数も同じように定義する。

$$y_{it} = \beta'_1 \mathbf{X}_{it} + \lambda_1 B1_{it} + \lambda_2 B2_{it} + \cdots + \lambda_T BT_{it} + u_{it}. \quad (12)$$

このモデルは最小二乗推定することができる。また各時点での平均を引くことで、時間固定効果を取り除くことができる。

$$y_{it} - \bar{y}_t = \beta'_1 (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_t) + u_{it} - \bar{u}_t. \quad (13)$$

ここで、 $\bar{y}_t = \sum_{i=1}^n y_{it}/n$  である。 $\bar{\mathbf{X}}_t$  と  $\bar{u}_t$  も同様に定義する。

- 時間固定効果と個人固定効果の両方が入ったモデル:

$$y_{it} = \beta'_1 \mathbf{X}_{it} + \alpha_i + \lambda_t + u_{it}. \quad (14)$$

やはり 2 項変数を使って

$$y_{it} = \beta'_1 \mathbf{X}_{it} + \alpha_1 D1_{it} + \alpha_2 D2_{it} + \cdots + \alpha_n Dn_{it} + \lambda_2 B2_{it} + \cdots + \lambda_T BT_{it} + u_{it} \quad (15)$$

と表現できる。多重共線性を避けるために、 $B1_{it}$  を式に含めていないことに注意すること。もちろん、 $B1_{it}$  に限らず、どれか一つのダミー変数を抜けばよい。 $\alpha_i$  と  $\lambda_t$  をモデルから除くためには、

$$y_{it} - \bar{y}_i - \bar{y}_t + \bar{y} = \beta'_1 (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i - \bar{\mathbf{X}}_t + \bar{\mathbf{X}}) + u_{it} - \bar{u}_i - \bar{u}_t + \bar{u} \quad (16)$$

という変換を行うとよい。ここで、 $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T y_{it} / nT$  であり、 $\bar{X}$  も同様に定義する。やはり、OLS で推定すればよい。

#### 4.4 固定効果推定量の漸近的性質

固定効果推定量の漸近的性質を導出する。実際のパネルデータでは、横断面(クロスセクション)の標本数  $n$  が比較的大きく、時系列の長さ  $T$  が比較的短い場合が多いため、その場合を考える。その場合、 $n \rightarrow \infty$  だが  $T$  は固定しているような漸近理論を考える。しかし近年はデータの蓄積によって、徐々に  $T$  もある程度大きいデータも増えてきている。とは言え、多くの経済パネルデータでは、やはりクロスセクション方向への広がりの方がはるかに大きい。

##### 固定効果推定量のための仮定

1.  $E(u_{it} | \mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \dots, \mathbf{X}_{iT}, \alpha_i) = 0$  (強外生の仮定と呼ばれる)。
2.  $(\mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \dots, \mathbf{X}_{iT}, u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iT})$ ,  $i = 1, \dots, n$  は、個人間で i.i.d. である。
3.  $(\mathbf{X}_{it}, u_{it})$  は、4 次までの有界なモーメントをもつ。
4.  $\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i$  に多重共線性がない。

注意点:

- 仮定 1 で、“ $t = 1, \dots, T$  すべて” の  $X$  の値を条件として誤差項の条件付き平均が 0 であることに注意されたい。講義ノート 2 の回帰分析で導入した仮定と同様に考えると  $E(u_{it} | \mathbf{X}_{it}, \alpha_i) = 0$  というように、 $u$  と同じ期の  $X$  のみを条件にすればよいと思うかもしれない。しかし、単に時点  $t$  での  $X$  の値だけ考えればよいわけではない。後で少し詳しく見るよう、 $T$  個の時点すべての  $X$  の値について条件付き平均を考えることは、平均を引いた回帰変数と平均を引いた誤差項が無相関であることを示すために重要で、これにより推定量の一致性が証明される。
- 多重共線性に関する仮定により、 $\mathbf{X}_{it}$  には時間を通じて変化する変数しか含めることができないことがわかる。

漸近分布 固定効果推定量は次のように表現できる。

$$\hat{\beta}^{FE} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(y_{it} - \bar{y}_i). \quad (17)$$

(17) 式に (5) 式を代入した際に現れる、 $\sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(u_{it} - \bar{u}_i) = \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)u_{it}$  の項に注意されたい。仮定 1 の強外生性により、 $(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)$  と  $u_{it}$  は無相関になり、一致性が保証されることがわかるだろう。 $\hat{\beta}^{FE}$  の漸近分布は、クロスセクションデータの OLS 推定量と同様に簡単に導出でき、それは、

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}^{FE} - \beta_1) \rightarrow_d N(\mathbf{0}, V_{FE}) \quad (18)$$

である。ただし、

$$V_{FE} = \left( E \left\{ \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right\} \right)^{-1} E \left\{ \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T u_{it}u_{is} (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{is} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right\} \quad (19)$$

$$\times \left( E \left\{ \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right\} \right)^{-1} \quad (20)$$

である。

**標準誤差**  $\hat{u}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i - \hat{\beta}^{FE'}(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)$  とする。漸近分散推定量は、

$$\hat{V}_{FE} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \hat{u}_{it}\hat{u}_{is} (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{is} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \quad (21)$$

$$\times \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right)^{-1} \quad (22)$$

を使うことができる。この漸近分散推定量を用いて、 $\hat{\beta}^{FE}$  の標準誤差を計算することができる。

- この漸近分散推定量は、自己相関と分散不均一に頑健な漸近分散推定量と呼ばれる。クラスタリングに頑健な推定量とも呼ばれる。
- Eviews では、上で紹介した漸近分散推定量や標準誤差は、“White period” というオプションを使用することによって計算できる。
- もし、誤差項に系列相関がない（時間の異なる誤差項は無相関になっている）という仮定があると、漸近分散はもっと簡単に表現されて、

$$V_{FE} = \left( E \left\{ \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right\} \right)^{-1} E \left\{ \sum_{t=1}^T u_{it}^2 (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right\} \quad (23)$$

$$\times \left( E \left\{ \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right\} \right)^{-1} \quad (24)$$

となる。その推定のためには、

$$\hat{V}_{FE}^{HR} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it}^2 (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \quad (25)$$

$$\times \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{it} - \bar{\mathbf{X}}_i)' \right)^{-1}. \quad (26)$$

を考えると良さそうであるが、実はこれは一致性をもたない。その原因是、 $T$  が固定されている漸近理論では、 $\alpha_i$  を一致性を持って推定することができないため、必ずしも  $\hat{u}_{it} \approx u_{it}$  とならないからである。この問題についてのより詳しい説明と、系列相関がないという情報を生かした漸近分散の一致推定量については、Stock and Watson (2008) を参照のこと。

- なお、自己相関と分散不均一に頑健な漸近分散推定量は、系列相関があってもなくても使用可能である。

#### 4.5 動学的パネルデータモデル

動学パネルモデルを用いることで、経済変数  $y_{it}$  の系列相関（時間を通じた相関）の原因を調べることができる。たとえば、所得は時間を通じて相関している。つまり、今期高い所得を得ている人は、来期も高い所得を得ており、今期所得の低い人は来期も低い所得であることが多い。この現象が起こる理由として、主に次の 2 つの可能性がありうる。

1. 異質性: 所得を得る能力は人ごとに異なり、系列相関はこうした人々の能力の違いの現れである。
2. 状態依存: ある人が偶然高い所得を得ることができた場合、その人の能力に関係なく、労働市場の硬直性などの原因によって、次の期も高い所得を得る可能性が高くなる。

しかし、これらの二つの解釈から得られる政策への含意は大きく異なる。

この問題をデータを使って調べるために、動学的パネルデータモデルが有用である。代表的なモデルは、パネル自己回帰モデル（自己回帰モデルは時系列モデルで、講義ノート 6 で詳しく述べるが、現在のある変数の値が、同じ変数の過去の値に依存して決まるモデル）であり、その一次のものは、

$$y_{it} = \beta y_{i,t-1} + \alpha_i + u_{it} \quad (27)$$

とかける。これをパネル AR(1) モデルと呼ぶ。ここで、 $y_{it}$  は観察できる確率変数で、その動学的性質に興味がある。また、 $\alpha_i$  は観察できない個人効果である。誤差項  $u_{it}$  は、時間を通じては相関していないと仮定する。

上に延べた 2 つの可能性に戻ると、 $\beta = 0$  で  $\alpha_i \neq 0$  なら異質性のために所得に相関が生ずると考えられ、他方  $\beta > 0$  で  $\alpha_i = 0$  なら状態依存の議論が採用されることになる。

**推定** 固定効果推定量は、不一致になる。固定効果推定量が一致性を持つための条件には、強外生の条件というものがある。しかし、 $y_{it}$  と  $u_{it}$  は相関しているため、その条件はこのモデルでは満たすことができない。実際、固定効果変換をすると、回帰変数は  $y_{i,t-1} - \sum_{s=0}^{T-1} y_{i,s}/T$  となり、誤差項は  $u_{it} - \sum_{s=1}^T u_{is}/T$  となるが、それぞれの第二項は相関している。

ここでは、Anderson and Hsiao (1981) による推定量を考える。まず、一次の階差をとり、個人効果を取り除くと次のようになる。

$$y_{it} - y_{i,t-1} = \beta(y_{i,t-1} - y_{i,t-2}) + u_{it} - u_{i,t-1}. \quad (28)$$

$y_{it-1} - y_{i,t-2}$  と  $u_{it} - u_{i,t-1}$  は相関しているが、 $y_{i,t-2}$  と  $u_{it} - u_{i,t-1}$  は無相関であるとわかる。そこで、 $y_{i,t-2}$  を操作変数として使うことで、 $\beta$  の推定を行うことができる。推定量は

$$\hat{\beta}^{AH} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{t=3}^T y_{i,t-2}(y_{it} - y_{i,t-1})}{\sum_{i=1}^n \sum_{t=3}^T y_{i,t-2}(y_{i,t-1} - y_{i,t-2})} \quad (29)$$

とかける。

また、2期以上のラグをとった被説明変数はすべて操作変数として使用可能である。そうしたすべての操作変数を使用した推定量については、Arellano and Bond (1991) を参照のこと。これらの推定量は、EViews や STATA 等のソフトで計算することができる。

**先決変数** 同じような推定法は、一般に先決変数を含むモデルにおいても使用可能である。次のモデルを考える。

$$y_{it} = \beta x_{it} + \alpha_i + u_{it}. \quad (30)$$

- もし、 $s \geq 0$  について  $E(x_{it-s}u_{it}) = 0$  ならば、 $x_{it}$  は先決変数と呼ばれる。このとき、仮に  $x_{i,t}$  と  $u_{i,t}$  に相関があっても、 $x_{i,t-s}$  を IV に使うことによって  $\beta$  の一致推定が可能である。

ラグ付き被説明変数  $y_{i,t-1}$  は先決変数の代表的な例である。