📚 講義の全体構造

1. 導入：回帰分析の限界と操作変数法の必要性

1.1 通常の回帰分析（OLS）の前提条件

- 基本モデル: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$
- 重要な仮定: 説明変数Xと誤差項uが無相関
    - $E[u|X] = 0$（条件付き期待値がゼロ）
    - $Cov(X, u) = 0$（共分散がゼロ）

1.2 内生性問題が発生する3つの主要ケース

ケース**1**：欠落変数（**Omitted Variables**）

- 重要な変数がモデルから抜けている場合
- その変数が説明変数Xと相関があると内生性が発生

ケース**2**：測定誤差（**Measurement Error**）

- 真の値Xではなく、誤差を含んだ*X* = *X* + vを観測
- データ入力ミスや記録誤差が原因

数式展開：
$Y = \beta_0 + \beta_1 X^* + u$ （真のモデル）$X = X^* + v$ （観測される変数）→ $Y = \beta_0 + \beta_1 X + (u - \beta_1 v) = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

-
- 新しい誤差項$\varepsilon = u - \beta_1 v$には測定誤差vが含まれる
- Xとεが$Cov(X, \varepsilon) \neq 0$となり内生性発生

ケース**3**：連立方程式モデル

- 複数の方程式が同時に決定される場合

2. 操作変数法の基本アイデア

2.1 操作変数Zが満たすべき2条件

条件**1**：関連性（**Relevance**）

- $Cov(Z, X) \neq 0$
- 操作変数は内生変数と相関がある

条件**2**：外生性（**Exogeneity**）

- $Cov(Z, u) = 0$
- 操作変数は誤差項と無相関

2.2 簡単なケース（X, Z各1個）での推定

操作変数推定量の導出過程：

$$
\begin{aligned}
Cov(Z, Y) &= Cov(Z, \beta_0 + \beta_1 X + u) \\
&= \beta_1 \cdot Cov(Z, X) + Cov(Z, u) \\
&= \beta_1 \cdot Cov(Z, X) \quad (\because Cov(Z, u) = 0)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \beta_1 = Cov(Z, Y) / Cov(Z, X)$$

標本版（データから計算）：

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_1^{IV} &= \Sigma_i(Z_i - \bar{Z})(Y_i - \bar{Y}) / \Sigma_i(Z_i - \bar{Z})(X_i - \bar{X}) \\
&= SZY / SZX
\end{aligned}
$$

3. 2段階最小二乗法（2SLS）の詳細

3.1 基本的な考え方

問題意識：

- 内生変数Xを直接使うと推定にバイアスが生じる
- Xの中で「クリーンな部分」だけを取り出して使いたい

解決策：

- 操作変数Zを使ってXを予測
- その予測値$\hat{X}$を新たな説明変数として使用

3.2 2段階最小二乗法の具体的手順

第1段階：内生変数の予測

$$X = \pi_0 + \pi_1 Z + v$$

- OLSでπ_0, π_1を推定
- 予測値を計算：$\hat{X}_i = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 Z_i$

第2段階：予測値を使った回帰

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \hat{X} + \text{誤差}$$

- Yを$\hat{X}$に回帰してβ_1を推定

3.3 数学的証明：**IV**と**2SLS**の一致性

講義では詳細な計算により以下を証明：

$\hat{\beta}_1^{2SLS} = \hat{\beta}_1^{IV}$

証明の要点：

1. $\hat{X}_i = \hat{\pi}_0 + \hat{\pi}_1 Z_i$を2段階目の式に代入
2. 標本共分散の性質を利用
3. $\Sigma_i(\hat{X}_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \hat{\pi}_1 \cdot N \cdot SZY$
4. $\Sigma_i(\hat{X}_i - \bar{X})^2 = \hat{\pi}_1^2 \cdot N \cdot S^2Z$
5. 最終的に$\hat{\beta}_1^{2SLS} = SZY/SZX = \hat{\beta}_1^{IV}$

4. 一般的なケース（複数の変数）

4.1 モデルの設定

$Y = X\beta + W\gamma + u$

- **X**: 内生変数ベクトル（K次元）
- **W**: 外生変数ベクトル
- **Z**: 操作変数ベクトル（M次元）

4.2 識別条件

識別可能性の**3**つのケース：

1. 過少識別（**Under-identified**）: $M < K$
    - 操作変数が内生変数より少ない
    - パラメータを一意に決定できない
    - 推定不可能
2. ちょうど識別（**Just-identified**）: $M = K$
    - 操作変数と内生変数の数が等しい
    - パラメータが一意に決定される
3. 過剰識別（**Over-identified**）: $M > K$
    - 操作変数が内生変数より多い
    - 全ての情報を効率的に使う必要がある

4.3 一般的な**2SLS**推定

第**1**段階:

$X = Z\Pi + W\delta + V$

各内生変数を全ての操作変数と外生変数に回帰

第**2**段階:

$Y = \hat{X}\beta + W\gamma +$ 誤差

予測値$\hat{X}$と外生変数Wを使って推定

4.4 行列表記

$A = [X, W]'$（説明変数）
$B = [Z, W]'$（操作変数と外生変数）

2SLS推定量:

$\hat{\beta}_{2SLS} = (A'P\_BA)^{-1}A'P\_BY$

ここで、$P_B = B(B'B)^{-1}B'$は射影行列

5. 漸近的性質と標準誤差

5.1 一致性

$\text{plim}\ \hat{\beta}_{2SLS} = \beta$（$N\to\infty$）

5.2 漸近正規性

$\sqrt{N}(\hat{\beta}_{2SLS} - \beta) \to^{d} N(0, V)$

5.3 分散の推定

分散不均一に頑健な標準誤差:

$\hat{V} = N\cdot(A'P\_BA)^{-1}(\Sigma_i\ \hat{u}^2_i B_i B_i')(A'P\_BA)^{-1}$

分散均一の場合（簡略化）:

$\hat{V} = \sigma^2(A'P\_BA)^{-1}$

6. ハウスマン検定

6.1 検定の目的

内生性があるかどうかを統計的に検定

6.2 検定統計量

$H = (\hat{\beta}_{2\square\square\square} - \hat{\beta}_{o\square\square})'[V(\hat{\beta}_{2\square\square\square} - \hat{\beta}_{o\square\square})]^{-1}(\hat{\beta}_{2\square\square\square} - \hat{\beta}_{o\square\square})$

6.3 帰無仮説と判定

- **H_0**: Xは外生的（内生性なし）
- H_0の下で$H \sim \chi^2(K)$
- 統計量が大きければH_0を棄却→内生性あり

7. 実務的な注意点

7.1 ソフトウェアでの実装

- EViews、Stata、R等で標準実装
- デフォルト設定（分散均一/不均一）に注意

7.2 Excelでの2段階推定の落とし穴

- 各段階で個別にOLSを実行すると標準誤差が不正確
- 第1段階の推定誤差が考慮されない
- 専用コマンド/関数を使用すべき

7.3 効率性とのトレードオフ

- 2SLSは内生性に対してロバスト
- しかし外生的な場合、OLSより分散が大きい
- ハウスマン検定で使い分けることが一般的

8. 高度な話題：モデル選択の問題

Wooldridgeの指摘

1. ハウスマン検定→推定法選択の2段階アプローチには問題
2. 第1段階の検定エラーが第2段階の推論に影響
3. 名目的な有意水準（5%等）が実際には保たれない

9. 重要な概念の整理

内生変数（**Endogenous Variable**）

- 誤差項と相関がある説明変数
- 直接OLSで推定するとバイアス発生

外生変数（**Exogenous Variable**）

- 誤差項と無相関な説明変数
- OLSで一致推定可能

操作変数（**Instrumental Variable**）

- 内生変数と相関あり（関連性）
- 誤差項と無相関（外生性）

識別（**Identification**）

- パラメータが一意に決定可能な状態
- 操作変数の数と内生変数の数の関係が重要

この講義は、計量経済学の中でも特に重要な内生性問題とその解決法を、理論的な厳密さを保ちながら実践的な観点も含めて解説した非常に充実した内容となっています。