中級計量経済学2025年度 中間試験

以下のすべての問いに答えなさい。(解答時間70分)

問1．スカラーの確率変数 x,y に関する線形関係

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + u \tag{1}$$

から無作為標本 $(Y_1, X_1), \cdots, (Y_n, X_n)$ を得たとする。ただし、誤差項 u は $E(u|X) = 0$ を満たすものとし、$Var(X) = \sigma_X^2$ とする。

(i) 目的関数と一階の条件を明示し、(β_0, β_1) の OLS 推定量 $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ を $(Y_1, X_1), \cdots, (Y_n, X_n)$ を用いて表しなさい。

(ii) $\hat{\beta}_1$ が一致性をもつことを示しなさい。
(iii) $\hat{\beta}_1$ が漸近正規性を持つことを示し、その漸近分布を導出しなさい。
(iv) $E(u|X) = g(X) \neq 0$ のとき、$\hat{\beta}_1$ は一般に一致性を失う。その漸近バイアスを導出しなさい。
(v) 計量経済学において、どのような状況で $E(u|X) = g(X) \neq 0$ となるか?例をあげて説明しなさい。

問2．Y を政策的にコントロールしたい変数とし、D はそのための介入を表す二項変数とする。個人 i について、$D_i = 1$ なら介入を受ける、$D_i = 0$ なら受けないものとし、確率変数 $Y_i(1), Y_i(0)$ をそれぞれ $D_i = 1, 0$ に対応する Y の潜在的結果変数とする。また、$\{Y_i(1), Y_i(0)\}$ と D_i は独立で、$Var\{Y_i(1)\} = \sigma_1^2, Var\{Y_i(0)\} = \sigma_0^2$, $Cov(Y_i(1), Y_i(0)) = \sigma_{01}$、$P(D_i = 1) = p$ とする。観測される結果変数は

$$Y_i = D_i Y_i(1) + (1 - D_i) Y_i(0) \tag{2}$$

である。$i = 1, \cdots, n$ の個人について Y_i, D_i が観測されたとき、平均処置効果 $\tau^{ATE} = E\{Y_i(1) - Y_i(0)\}$ の推定を考える。

(i)D_i を条件として (2) の両辺の期待値を計算しなさい。
(ii) 以下の回帰モデル(すなわち $E(u_i|D_i) = 0$ が満たされる)を考える。

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i, \ i = 1, \cdots, n$$

D_i を条件としてこの両辺の期待値を計算し、(i) の結果と比較して β_1 が τ^{ATE} に一致することを示しなさい。

(iii) そのとき u_i は $Y_i(1), Y_i(0), D_i$ を用いてどのように表されるか?
(iv) D_i の期待値と分散を p を用いて表しなさい。
(v) 問1 (iii) の結果を用いて、β_1 の最小二乗推定量 $\hat{\beta}_1$ の漸近分散を $\sigma_1^2, \sigma_0^2, \sigma_{01}, p$ を使って表しなさい。(ヒント:D_i は二項変数なので、m を自然数として $D_i^m = D_i$ が成り立つ。)