操作変数法とパネルデータ分析：超詳細講義まとめ

第1部：操作変数法の一般化

1.1 内生性問題の復習

説明変数Xと誤差項uに相関がある場合、通常の最小二乗法（OLS）では一致推定量が得られません。この「内生性問題」に対処するために操作変数法を用います。

1.2 多変量の場合の記法

- **X**：内生変数（K次元ベクトル）
- **Z**：操作変数（M次元ベクトル）
- **W**：外生変数（何個あっても構わないため、特に次元の記法は設けない）

1.3 識別条件

モデルのパラメータが一意に決まるか（識別できるか）という問題について、簡単化のためにWを除いたモデルで考えます。

分散・共分散の計算（式**28**〜**30**）

式28は単なる表現の変形です。条件付き分散の性質を使うと：

$$\text{Cov}(Z, Y) = \text{Cov}(Z, X)\beta_1 + \text{Cov}(Z, u)$$

Zの外生性条件（Zとuが無相関）を仮定すれば、$\text{Cov}(Z, u) = 0$となります。

連立方程式としての解釈

式30は連立方程式になっています：

- 左辺：M × 1次元のベクトル（ZとYの共分散）
- 右辺：ZとXの共分散行列（M × K）× β_1（K × 1）

識別の条件による場合分け

条件	状況	結果

M = K かつ行列がフルランク	ちょうど識別（just identified）	パラメータが一意に決まる
M > K	過剰識別（over-identified）	方程式の数が未知数より多い（条件が多すぎる）
M < K	過少識別（under-identified）	方程式の数が未知数より少ない（決まらない）

重要な結論：M ≥ K が識別の必要条件です。

第2部：二段階最小二乗法（2SLS）

2.1 推定手順

第1段階：内生変数Xを外生変数（ZとW）に回帰し、予測値$\hat{X}$を得る

第2段階：$\hat{X}$とWを説明変数として、Yに対する最小二乗法を実行

2.2 推定量の明示的表現（式36）

説明変数ベクトルをA、外生変数ベクトルをBとおくと、2SLS推定量は式36のように明示的に書けます。この形式により、推定量の漸近的性質を調べることができます。

2.3 一致性と漸近正規性

一致性の証明の概要：

大数の法則を適用して、各項が真の値に確率収束することを示します。重要なポイント：

1. 分母の項：$\frac{1}{N}\sum$の形で、真の共分散に収束
2. 分子の項：$\sqrt{N}$を右辺に移して、Bとuの直交性（期待値0）を利用
3. 中心極限定理により漸近正規性を示す

漸近共分散行列：通常の最小二乗法と同様の方法で導出可能

第3部：内生性の検定（Hausman検定）

3.1 検定の論理

前提：適切な操作変数が存在する

帰無仮説：Xは外生である

検定の原理：

- Xが外生なら：OLSも2SLSも一致推定量 → 両者の差は0に収束
- Xが内生なら：OLSは非一致、2SLSは一致 → 両者に差が生じる

3.2 検定統計量（式53）

$$H = (\hat{\beta}_{2SLS} - \hat{\beta}_{OLS})'[\hat{V}_{2SLS} - \hat{V}_{OLS}]^{-1}(\hat{\beta}_{2SLS} - \hat{\beta}_{OLS})$$

帰無仮説の下で、Hは漸近的にカイ二乗分布に従います。

第4部：操作変数の妥当性検定

4.1 操作変数が満たすべき2条件

条件	**1**変数の場合	一般の場合
関連性（**Relevance**）	$\text{Cov}(Z, X) \neq 0$	$E[Z'X]$がフルランク
外生性（**Exogeneity**）	$\text{Cov}(Z, u) = 0$	$E[Z'u] = 0$

4.2 関連性の検定

4.2.1 弱い操作変数の問題

問題の本質：

1変数の場合の操作変数推定量（式54）を見ると：

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{ZY}}{S_{ZX}}$$

分母S_{ZX}が0に近いと、推定量が非常に不安定になります。分子が少し動くだけで、推定値が大きく変動してしまいます。

4.2.2 関連性の強さの検定

検定方法：

1. 第1段階の回帰（式55）を推定
2. 操作変数Zの係数がゼロであるという仮説をF検定
3. 経験則：F統計量が10を超えれば、弱い操作変数の問題は起きにくい

この基準はStock, Wright, and Yogo（2002年頃）によって提案されました。

4.2.3 弱い操作変数への対処法

F統計量が10未満の場合の対応：

1. より良い操作変数を探す：実務上最も一般的な対応
2. 弱い操作変数に頑健な推定量を使用：LIML（制限情報最尤法）など
3. 弱い操作変数に対応した検定法を使用：Anderson-Rubin統計量、Kleibergen統計量など

4.3 外生性の検定

4.3.1 ちょうど識別（**M = K**）の場合

結論：外生性の検定は根本的に不可能

理由：2SLSでは、$\hat{u}$とZが直行するようにパラメータが決まる構造になっているため、必然的に$\hat{u}'Z = 0$となってしまいます。

4.3.2 過剰識別（**M > K**）の場合

J検定（過剰識別制約検定）が利用可能：

$$J = N \cdot \hat{u}'Z(Z'Z)^{-1}Z'\hat{u} / \hat{\sigma}^2$$

ここで$\hat{u}$は2SLS残差です。

帰無仮説の下での分布：$J \sim \chi^2(M - K)$

解釈：J統計量が大きければ、操作変数セットの中に外生性を満たさない変数が含まれている可能性があります。

第**5**部：効果の異質性と操作変数法

5.1 異質な処置効果モデル

基本モデル（式**57**）：

$$Y_i = \beta_{0i} + \beta_{1i}X_i + u_i$$

ここでβ_{1i}は個人iによって異なる処置効果を表します。

解釈：

- β_{0i}：個人iの切片（基準水準）
- β_{1i}：個人iにとってのXの限界効果
- 例：教育年数Xが賃金Yに与える影響は人によって異なる

5.2 モデルの変形（式58）

期待値を取り出して整理すると：

$$Y_i = E[\beta_{0i}] + E[\beta_{1i}]X_i + {(\beta_{0i} - E[\beta_{0i}]) + (\beta_{1i} - E[\beta_{1i}])X_i + u_i}$$

この形式は、因果推論ノートの潜在結果モデル（式83-84）と同一構造です。

5.3 ケース分析

ケース1：β_{0i}, β_{1i}とXが独立で、Xが外生

結果：OLSで$E[\beta_1]$（平均処置効果）が一致推定される

証明の概要：

- 独立性により、積の期待値が期待値の積に分解される
- 各項が消えて、最終的に$E[\beta_{1i}]$のみが残る

ケース2：β_{0i}, β_{1i}とXが独立で、Xが内生

結果：2SLSで$E[\beta_1]$が一致推定される

条件：β_{0i}, β_{1i}がZ, V（第1段階の誤差）とも独立

ケース3：β_{1i}とXが独立でない場合

OLSの場合（式61）：

$$\text{plim}\hat{\beta}1 = \frac{E[\beta{1i}(X_i - E[X])^2]}{E[(X_i - E[X])^2]}$$

解釈：これはβ_{1i}に重みをつけた加重平均です。Xの分散が大きい個人ほど大きな重みがかかります。

2SLSの場合：同様に、操作変数Zに関連した重み付けがなされた平均が推定されます。

重要な含意：

1. 使用する操作変数によって推定値が変わりうる
2. 推定されているのは「平均処置効果」ではなく「局所平均処置効果（LATE）」

5.4 異質性の検定

β_{1i}とXに相関があるかどうかの検定方法が提案されています（詳細は省略）。

第6部：自然実験と操作変数

6.1 良い操作変数を見つける難しさ

課題：

- 関連性と外生性の両方を満たす変数を見つけることは非常に困難
- 外生性の検定はちょうど識別の場合不可能
- 良い操作変数の発見自体が学術的貢献になりうる

6.2 操作変数の発見方法

1. 経済理論からの導出：理論モデルに基づいて外生的な変動を特定
2. 直感的な議論：言葉で説明可能な外生性の根拠

6.3 自然実験（Natural Experiment）

定義：説明変数Xの変化が、少なくとも部分的に、実験のようにランダムに決まっている状況

2つのタイプ：

タイプ	特徴	分析方法
タイプ1	Xが完全にランダム化	単純なOLSで可
タイプ2	ランダムな変化がXを部分的に決定	ランダム要因を操作変数として使用

6.4 自然実験の具体例

例**1**：**Card (1990) -** マリエル難民

1980年のマリエル・ボートリフト（キューバからの大量移民）を外生的労働供給ショックとして利用

例2：**Angrist (1990) -** ベトナム戦争の徴兵

背景：

- 1970年代のアメリカで、19歳の男性が徴兵対象
- 誕生日ごとにランダムに番号（1〜365）が割り当てられた
- 番号が小さい人から徴兵

操作変数の論理：

- 番号の割り当ては完全にランダム
- 番号は実際の徴兵を「部分的に」決定（志願兵、健康上の免除などもあるため）
- 番号をZとして使用し、従軍が賃金に与える影響を推定

重要なポイント：

- 番号と従軍には相関がある（関連性）
- 番号は賃金に直接影響しない（外生性）
- 完全にくじ通りに徴兵されていなくても、相関があれば操作変数として使用可能

第7部：パネルデータ分析

7.1 パネルデータの定義と表記

定義：N人の個人（または企業、国など）をT期間にわたって追跡観察したデータ

表記：Y_{it}（iは個人、tは時点を表す添字）

- i = 1, 2, ..., N
- t = 1, 2, ..., T

データ構造のイメージ：

	t=1	**t=2**	**...**	**t=T**
i=1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1T}
i=2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2T}
...	...	...	...	...
i=N	Y_{N1}	Y_{N2}	...	Y_{NT}

7.2 バランスドパネルとアンバランスドパネル

バランスドパネル：全ての個人が全ての期間で観測されている アンバランスドパネル：欠測がある（途中脱落、死亡、調査非回答など）

現実：完全なバランスドパネルは稀で、アンバランスドパネルが一般的

7.3 固定効果モデル

7.3.1 モデルの設定

基本モデル：

$$Y_{it} = \beta_0 + \beta_1 X_{it} + \beta_2 Z_i + u_{it}$$

重要な特徴：Z_iには時点の添字tがない

- Z_i：時間を通じて変化しない変数（国籍、性別、生まれ持った能力など）
- X_{it}：時間とともに変化する変数

7.3.2 欠落変数バイアスの問題

Z_iが：

1. 観測されない（データとして得られない）
2. X_{it}と相関がある

この場合、Z_iを省略してOLSを行うと欠落変数バイアスが生じます。

例：企業の広告費と売上の関係

- Y：売上
- X：広告費
- Z：企業規模（時間を通じてあまり変化しない、観測困難）

企業規模をコントロールしないと、広告費の効果を正しく推定できません。

7.3.3 固定効果モデルへの変形

モデルの書き換え（式**2**）：

$\alpha_i = \beta_0 + \beta_2 Z_i$と定義すると：

$$Y_{it} = \alpha_i + \beta_1 X_{it} + u_{it}$$

α_iは「個体固定効果」と呼ばれ、個人iに固有の切片を表します。

7.3.4 ダミー変数による表現（式3）

$$Y_{it} = \beta_1 X_{it} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j D_{jit} + u_{it}$$

ここでD_{jit}は、i = jのとき1、それ以外のとき0となるダミー変数です。

注意：X_{it}の中に時間を通じて変化しない変数を含めることはできません（α_iと区別できないため）。

7.4 固定効果モデルの推定方法

方法**1**：最小二乗ダミー変数法（**LSDV**）

手順：

1. 個体ダミー$D_{1it}, D_{2it}, ..., D_{Nit}$を作成
2. 式3に対して通常の最小二乗法を適用

実装：Excelなどでダミー変数を作成し、全データを縦に並べてOLSを実行

方法**2**：**Within**変換（固定効果変換）

Within変換の定義：

各変数から個体内平均を引く：

$$\bar{Y}i = \frac{1}{T}\sum{t=1}^{T} Y_{it}, \quad \bar{X}i = \frac{1}{T}\sum{t=1}^{T} X_{it}, \quad \bar{u}i = \frac{1}{T}\sum{t=1}^{T} u_{it}$$

変換後のモデル（式**5**）：

式2の両辺から個体内平均を引くと：

$$Y_{it} - \bar{Y}i = \beta_1(X{it} - \bar{X}i) + (u{it} - \bar{u}_i)$$

α_iは時点に依存しないため、平均を引くと消えます。

推定：式5に対してOLSを適用してβ_1を推定

両方法の同値性

定理：LSDVとWithin変換は、β_1に関して全く同じ推定量を与える

証明の概要：

- 最小化問題を二段階で解く手法（集中化）を利用
- α_iを所与としたときのβ_1の最適解を求め、それを代入するとα_iが消える

- 結果的にWithin変換と同じ形式になる

7.5 変量効果モデル（Random Effects Model）

定義：個別効果Z_iが確率変数で、X_{it}と無相関であるケース

特徴：

- Z_iとX_{it}が相関しないため、欠落変数バイアスは生じない
- より効率的な推定が可能（GLS）

現実性：「観測されない個体特性が説明変数と無関係」という仮定は多くの場合非現実的

第8部：講義の総括と重要ポイント

8.1 操作変数法の限界

1. 適切な操作変数を見つけることの困難さ：関連性と外生性の両方を満たす変数は稀
2. 外生性の検証の限界：ちょうど識別の場合、検定不可能
3. 弱い操作変数の問題：関連性が弱いと推定が不安定

8.2 パネルデータの利点

1. 時間を通じて変化しない欠落変数を制御可能
2. クロスセクションデータでは識別できない効果を識別可能
3. より豊富な情報を活用した効率的な推定

8.3 実証研究への示唆

1. 操作変数を使用する際は、F統計量で関連性の強さを確認
2. 過剰識別の場合はJ検定で外生性をチェック
3. 効果の異質性がある場合、推定されるのはLATE（局所平均処置効果）
4. パネルデータがあれば固定効果モデルの使用を検討
