中級計量経済学２０２４練習問題（2）

以下の問 1 - 6 を解きなさい。1 月 10 日（金）の１２：００までに pdf ファイルで答案を作成して PandA で提出してください。pdf ファイルは手書き、タイプのどちらでも構いません。

１．マクロ経済の消費と所得の単純なモデルを考えよう。ある国 i の消費、所得、投資、貯蓄を C_i, Y_i, I_i, S_i とし、その時以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned}\text{消費関数：}\quad C_i =&\quad \gamma_0 + \gamma_1 Y_i + u_i \\ \text{恒等式：}\quad Y_i \equiv&\quad C_i + I_i + S_i\end{aligned}$$

無作為標本 $(C_i, Y_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ が与えられたとし、C を被説明変数、Y を説明変数として消費関数を最小二乗推定したときに限界消費性向 γ_1 を一致推定できるか考えてみよう。ただし、I と S は外生変数とする。

(i) 消費関数と恒等式の関係を (C, Y) について解きなさい。

(ii) (i) の関係を使って、最小二乗推定量 $\hat{b}_1$ が γ_1 の一致推定量になるか調べなさい。一致性を持たない場合、その漸近バイアスを求めなさい。

２．内生性がない分散均一な線形回帰モデル

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i,\ E(u_i|x_i) = 0,\ E(u_i^2|x_i) = \sigma^2$$

に対して操作変数法を適用した時の影響を考えよう。関連性と外生性を満たす操作変数 z_i があり、$E(u_i^2|z_i, x_i) = \sigma^2$ であるとする。無作為標本 $(y_i, x_i, z_i),\ i = 1...., n$ が与えられたとして、以下の問いに答えなさい。

(i) β の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ の漸近分散を求めなさい (分散均一であることに注意)。

(ii) β の操作変数推定量 $\tilde{\beta}$ が β の一致推定量であることを示し、その漸近分散を求めなさい (分散均一であることに注意)。

(iii) (i) と (ii) の結果と比較し、操作変数推定量と最小二乗推定量のどちらが望ましいか調べなさい。（ヒント：コーシー＝シュワルツの不等式を用いる。）

３．以下のように限界効果が個人間で異なる回帰モデルを考える。また、定数項は一定値で、分散均一とする。

$$y_i = \beta_0 + \beta_{1i} x_i + u_i,\ E(u_i|x_i) = 0,\ E(u_i^2|x_i) = \sigma^2,\ i = 1, \cdots, n$$

β_{1i} と (x_j, u_j) はすべての $i, j = 1, \cdots, n$ について独立で、$\beta_{1i}, i = 1, \cdots, n$ は i.i.d. であるとする。x_i の係数が個人ごとに異なることを無視して最小二乗法を適用し、$\hat{\beta}_1$ を計算する。

(i) $\hat{\beta}_1$ が確率収束する収束先を求めなさい。

(ii) $\hat{\beta}_1$ が漸近正規性を持つことを示し、漸近分散を求めなさい。

４．以下の probit モデルを考える。

$$y_i = \begin{cases} 1, & \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \geq 0 \\ 0, & \alpha + \beta x_i + \epsilon_i < 0 \end{cases}$$

ただし、$\epsilon_i | x_i \sim iidN(0, 1)$ である。$N(0, 1)$ の分布関数を $\Phi(x)$ とする。

(i) 回帰関数 $E(y_i|x_i)$ を求めなさい。

(ii) $u_i = y_i - E(y_i|x_i)$ として、$Var(u_i|x_i)$ を求めなさい。

(iii) このモデルから無作為標本 $(x_i, y_i) i = 1, 2, \cdots, n$ が与えられたときに、$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + v_i$ というモデルを用いて最小二乗推定を行った時、α_1 のＯＬＳ推定量は何に確率収束するか？

5．定常な AR(2) モデル

$$y_t = \alpha + \phi y_{t-2} + u_t$$

を考える（y_{t-1} の係数は 0）。ただし、u_t は i.i.d. で $E(u_t) = 0, Var(u_t) = \sigma^2$ とする。

(i) 講義ノート (11)-(13) 式と同様にして $E(y_t)$ をモデルのパラメータ α, ϕ で表しなさい。

(ii) $E(y_t) = \mu$ として、講義ノート (14)-(15) と同様に $E\{(y_t - \mu)u_t\}$ を求めなさい。

(iii) 講義ノート (16)-(21) と同様に、自己共分散 $\gamma_j,\ j = 0, 1, 2, 3, 4$ をモデルのパラメータ α, ϕ, σ^2 で表しなさい。

(iv) ϕ がどのような条件を満たせば、この AR(2) モデルは定常であるか？

6．MA(1) モデル

$$y_t = \alpha + u_t + \theta u_{t-1}$$

を考える。u_t は i.i.d. で $E(u_t) = 0, Var(u_t) = \sigma^2$ とする。

(i) y_t の期待値 $E(y_t)$、分散 γ_0 を α, θ, σ^2 で表わしなさい。

(ii) y_t の自己共分散 γ_1, γ_2 を α, θ, σ^2 で表わしなさい。

(iii) $\gamma_0 = 10,\ \gamma_1 = -4$ であるとき、 θ, σ^2 の値を求めなさい。また、そのうち反転可能なパラメータの組はどれか？

(iv) この MA(1) モデルに従うデータ$\{Y_1, \cdots, Y_T\}$が得られたとする。その時、標本平均 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t$ が確率収束する行き先を求めなさい。