中級計量経済学 2024 年度中間試験 解答例

TA: 岡本優太[1]

1

(i)

目的関数および一階の条件は、それぞれ、練習問題 (1) 解答例の大問 2-(i) の $\mathcal{L}$ および式 (2.1) である。また、

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X},\ \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

であった。

(ii)

練習問題 (1) の大問 2-(ii) と同様にして、

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{(1/n)\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i}{(1/n)\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

と変形する。右辺第 2 項の分子は大数の法則と $\mathbb{E}\left[u_i|X_i\right] = 0$ よりゼロに確率収束し、分母は $\mathbb{V}\left[X_i\right]$ に確率収束するから、全体としてゼロに確率収束する。すなわち、

$$\hat{\beta}_1 \to_p \beta_1 + 0 = \beta_1$$

なので、一致性をもつ。

(iii)

練習問題 (1) の大問 2-(iii) より、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{E}\left[(X_i - \mu_X)^2 u_i^2\right]}{\mathbb{V}\left[X_i\right]^2}\right)$$

であった。いま、均一分散 $\mathbb{E}\left[u_i^2|X_i\right] = \sigma_u^2$ が仮定されているので、繰り返し期待値の法則を使うと、

$$\mathbb{E}\left[(X_i - \mu_X)^2 u_i^2\right] = \mathbb{E}\left[(X_i - \mu_X)^2 \mathbb{E}\left[u_i^2|X_i\right]\right] = \sigma_u^2 \mathbb{E}\left[(X_i - \mu_X)^2\right] = \sigma_u^2 \mathbb{V}\left[X_i\right]$$

となるので、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_u^2}{\mathbb{V}\left[X_i\right]}\right)$$

を得る。

(iv)

$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ と定義すると、

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

である。

[1] 京都大学大学院経済学研究科 D2. ✉ okamoto.yuuta.57w@st.kyoto-u.ac.jp. 不備があった場合や質問がある場合はこちらまでメールしてください。

(v)

練習問題 (1) 大問 2-(iv),(v) により $0 \leq R^2 \leq 1$ がわかる。

(vi)

この仮定のもとで、OLS 推定量は一致性や不偏性をもつ。つまり、推定したいものを、OLS で推定できているために必要な条件である。また、設問文の式 (1) が構造モデルとして解釈される場合、この仮定のもとで β_1 を X_i の Y_i に対する因果関係として理解できる。

2

(i)

練習問題 (1) 大問 4 より、

$$\hat{\beta}_1 \to_p \beta_1 + \beta_2 \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}$$

であった。つまり、（漸近）バイアスは $\beta_2 \times \left(\sigma_{XZ}/\sigma_X^2\right)$ である。

(ii)

Z_i が Y_i に影響を与えないケース（$\beta_2 = 0$）や、X_i と Z_i が無相関のケース（$\sigma_{XZ} = 0$）では漸近バイアスはゼロである。他方でこれらが絶対値の意味で大きい場合、バイアスは大きくなりうる。

3

(i)

t 統計量は

$$t = \frac{3.6 - 0}{2} = 1.8$$

となる。$|t| > 1.6$ より、有意水準 10%で両側検定をおこなう場合、帰無仮説は棄却される。

(ii)

95%信頼区間は、$\left[\hat{\beta}_1 - 2.0 \times SE(\hat{\beta}_1), \hat{\beta}_1 + 2.0 \times SE(\hat{\beta}_1)\right]$、つまり、$[-0.4, 7.6]$ となる。

(iii)

$\log x$ の微分が $1/x$ であることに注意すれば、十分小さな変化量 ΔX について、

$$\log\left(X + \Delta X\right) \approx \log X + \frac{\Delta X}{X}$$

と近似できる。よって、この変化に付随する Y の変化は

$$\Delta Y = \beta_1 \log\left(X + \Delta X\right) - \beta_1 \log\left(X\right) \approx \beta_1 \frac{\Delta X}{X}.$$

いま、X が 2%増加する、つまり $\Delta X/X = 0.02$ のケースを考えているので、

$$\widehat{\Delta Y} = \hat{\beta}_1 \times 0.02 = 0.072$$

を得る。

(iv)

まず

$$\frac{0.02\hat{\beta}_1 - 0.02\beta_1}{0.02 \times SE\left(\hat{\beta}_1\right)} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{SE\left(\hat{\beta}_1\right)}$$

と、右辺の漸近正規性に注意すれば、90%信頼区間は

$$\left[0.02\hat{\beta}_1 - 1.6 \times \left(0.02 \times SE\left(\hat{\beta}_1\right)\right), 0.02\hat{\beta}_1 + 1.6 \times \left(0.02 \times SE\left(\hat{\beta}_1\right)\right)\right]$$

つまり、$[0.008, 0.136]$ となる。