中級計量経済学 2024 練習問題 (1) 解答例

TA: 岡本優太[1]

1

(i)

X, Y が連続変数の場合のみを考える。表記の簡単化のために、$\int_{\mathbb{R}}$ を単に $\int$ と書く。周辺密度関数の定義から、

$$f_X(x) = \int f(x, y)\, dy, \ \ f_Y(x) = \int f(x, y)\, dx \tag{1.1}$$

となる。また、X を条件とする Y の条件付密度関数を $f_{Y|X}(y|x)$ と書くと、これは

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \tag{1.2}$$

と定義される。

(ii)

これらを用いれば、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y|X\right]\right] &= \int \mathbb{E}\left[Y|x\right] f_X(x)\, dx \\
&= \int \left\{ \int y f_{Y|X}(y|x)\, dy \right\} f_X(x)\, dx \\
&= \int \int y f(x, y)\, dy dx \\
&= \int y \left\{ \int f(x, y)\, dx \right\} dy \\
&= \int y f_Y(y)\, dy = \mathbb{E}\left[Y\right]
\end{aligned}$$

と計算できる。ただし、3 つ目の等号で (1.2) を、5 つ目の等号で (1.1) を用いた。

(iii)

期待値の線形性より、左辺は

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\{X - \mathbb{E}\left[X\right]\right\}^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[X\right]^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[X\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2
\end{aligned}$$

と、右辺は

$$\mathbb{E}\left[X\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)\right] = \mathbb{E}\left[X^2 - X\mathbb{E}\left[X\right]\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2$$

と変形できることよりわかる。

[1] 京都大学大学院経済学研究科 D2. ✉ okamoto.yuuta.57w@st.kyoto-u.ac.jp. 不備があった場合や質問がある場合はこちらまでメールしてください。

(iv)

上と同様に、左辺は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\{X-\mathbb{E}\left[X\right]\right\}\left\{Y-\mathbb{E}\left[Y\right]\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[XY-Y\mathbb{E}\left[X\right]-X\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[XY\right]-\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]\end{aligned}$$

と変形でき、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\left\{Y-\mathbb{E}\left[Y\right]\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[XY\right]-\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right], \\ \mathbb{E}\left[\left\{X-\mathbb{E}\left[X\right]\right\}Y\right] &= \mathbb{E}\left[XY\right]-\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]\end{aligned}$$

であることよりわかる。

(v)

標本平均の定義を用いて、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i-n\bar{X}=n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)-n\bar{X}=n\bar{X}-n\bar{X}=0.$$

(vi)

上の結果を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)X_i-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\bar{X} \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)X_i-\frac{\bar{X}}{n-1}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)}_{=0} \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)X_i\end{aligned}$$

となり、示せる。

(vii)

上と同様のステップを踏めば示せる。

2

(i)

$\mathcal{L}(b_0,b_1)=\sum_{i=1}^{n}\left\{Y_i-b_0-b_1X_i\right\}^2$ とおく。最小二乗法により (β_0,β_1) を推定するので、

$$\min_{(b_0,b_1)}\mathcal{L}(b_0,b_1)$$

を考えればよい。目的関数 $\mathcal{L}$ の微分は

$$\begin{cases}\partial\mathcal{L}/\partial b_0=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-b_0-b_1X_i\right) \\ \partial\mathcal{L}/\partial b_1=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-b_0-b_1X_i\right)X_i\end{cases}$$

により与えられるので、一階の条件より、$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ は

$$\begin{cases} 0 = \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) \\ 0 = \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) X_i \end{cases} \tag{2.1}$$

を満たす。1 つ目の式から、$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$, であり、これと 2 つ目の式から、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \left(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}\right) \sum_{i=1}^n X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ &= \hat{\beta}_1 \left\{ \bar{X} \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n X_i^2 \right\} + \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n X_i \\ &= -\hat{\beta}_1 \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \left(X_i - \bar{X}\right) \right\} + \sum_{i=1}^n X_i \left(Y_i - \bar{Y}\right) \end{aligned}$$

とわかる。ここで、大問 1 の (vi) と (vii) で確認した等式を思い出すと、これは

$$\hat{\beta}_1 \left\{ \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2 \right\} = \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)$$

と変形できるので、$\hat{\beta}_1$ は、

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \tag{2.2}$$

と表される。

(ii)

$\bar{u} = \bar{Y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{X}$ とする。上の $\hat{\beta}_1$ の式 (2.2) より、

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left\{(\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i) - \left(\beta_0 + \beta_1 \bar{X} + \bar{u}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left\{\left(\beta_1 \left(X_i - \bar{X}\right) + u_i - \bar{u}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\ &= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} - \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) \bar{u}}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\ &= \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

を得る。なお、最後の等号は、(2.3) の第 3 項の分子が

$$\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) \bar{u} = \bar{u}\left(n\bar{X} - n\bar{X}\right) = 0$$

より第 3 項がゼロになることを用いた。よって、先の式を変形すれば、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) = \sqrt{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right) u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \tag{2.4}$$

とわかる。

(iii)

まず、(2.4) の分子について

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)u_i &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{(X_i-\mu_X)-\left(\bar{X}-\mu_X\right)\right\}u_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)u_i-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{X}-\mu_X\right)u_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_X\right)u_i-\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu_X\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\end{aligned}$$

と分解する。右辺第 2 項の第 1 要素 $\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu_X\right)$ は中心極限定理により正規分布に分布収束するため、bounded in probability であり、第 2 要素は大数の法則より $\mathbb{E}\left[u_i\right]$ に確率収束するが、これは講義ノート 2 の「最小二乗法の性質を調べるための仮定」(i) よりゼロである。したがって、第 2 項はゼロに確率収束する。第 1 項については、中心極限定理により、$\mathcal{N}(0,\mathbb{E}\left[(X_i-\mu_X)^2u_i^2\right])$ に分布収束する。よってスラツキーの補題から、(2.4) の分子は $\mathcal{N}(0,\mathbb{E}\left[(X_i-\mu_X)^2u_i^2\right])$ に分布収束するとわかる。ここで、(2.4) の分母は $\mathbb{V}\left[X_i\right]$ に確率収束するので、再度スラツキーの補題を用いれば、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1-\beta_1\right)\to_d\mathcal{N}\left(0,\frac{\mathbb{E}\left[(X_i-\mu_X)^2u_i^2\right]}{\mathbb{V}\left[X_i\right]^2}\right)$$

とわかる。

(iv)

$\hat{u}_i$ はその定義より $\hat{u}_i=Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i$ なので、(2.1) に代入すれば結論を得る。

(v)

$Y_i-\bar{Y}=\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)+\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)$ より、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)\left(Y_i-\hat{Y}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)\hat{u}_i\end{aligned}$$

だから、第 3 項がゼロだと言えればよい。ここで、(i) で求めた $\hat{\beta}_0$ の公式を思い出すと、

$$\hat{Y}_i-\bar{Y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_i-\bar{Y}=\left(\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\right)+\hat{\beta}_1X_i-\bar{Y}=\hat{\beta}_1\left(X_i-\bar{X}\right)$$

となり、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)\hat{u}_i=\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\hat{u}_i$$

を得る。この右辺と (iv) の結果より、これはゼロである。

さて、R^2 の定義は

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}$$

であったが、これは明らかに非負である。一方で、先の結論より、

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}.$$

第 2 項が非負だから、$R^2 \leq 1$ を得る。以上より、$0 \leq R^2 \leq 1$。

3

(i)

$\hat{\beta}_1^A$ は大問 2 の (i),(ii) と同様にして、

$$\hat{\beta}_1^A = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\epsilon_i}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \tag{3.1}$$

がわかる。一方で、$\hat{\beta}_1^B$ は次の最小化問題

$$\min_{b_1} \sum_{i=1}^n \left\{Y_i - b_1 X_i\right\}^2$$

の解だから、1 階の条件より、

$$\hat{\beta}_1^B = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

を得る。これを変形すると

$$\hat{\beta}_1^B = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \left(\beta X_i + \epsilon_i\right)}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \beta + \frac{\sum_{i=1}^n X_i \epsilon_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}. \tag{3.2}$$

ここで、大数の法則、および確率収束の性質を用いれば、(3.1) の第 2 項は

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\epsilon_i}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} &= \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\epsilon_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\
&= \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i\epsilon_i - \bar{X}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n \epsilon_i\right)}{n^{-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\
&\to_p \frac{\mathbb{E}\left[X_i\epsilon_i\right] - \mathbb{E}\left[X_i\right]\mathbb{E}\left[\epsilon_i\right]}{\mathbb{V}\left[X_i\right]} = 0
\end{aligned}$$

とゼロに確率収束する。よって、$\hat{\beta}_1^A$ は β に確率収束する。$\hat{\beta}_1^B$ についても同様に

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i\epsilon_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i\epsilon_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2} \to_p \frac{0}{\mathbb{E}\left[X_i^2\right]} = 0$$

から、(3.2) と合わせて一致性が分かる。

(ii)

大問 2(iii) と同様の議論から、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1^A - \beta\right) \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{E}\left[\left(X_i - \mu_X\right)^2 \epsilon_i^2\right]}{\mathbb{V}\left[X_i\right]^2}\right),$$

および

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1^B-\beta\right)\to_d \mathcal{N}\left(0,\frac{\mathbb{E}\left[X_i^2\epsilon_i^2\right]}{\mathbb{E}\left[X_i^2\right]^2}\right)$$

を得る。

(iii)

漸近分散を比較する。$\hat{\beta}_1^A,\hat{\beta}_1^B$ の漸近分散をそれぞれ $\mathcal{V}_A,\mathcal{V}_B$ と書く。つまり、

$$\mathcal{V}_A=\frac{\mathbb{E}\left[\left(X_i-\mu_X\right)^2\epsilon_i^2\right]}{\mathbb{V}\left[X_i\right]^2},\ \mathcal{V}_B=\frac{\mathbb{E}\left[X_i^2\epsilon_i^2\right]}{\mathbb{E}\left[X_i^2\right]^2}.$$

ここで、以下の 2 つのケースを考える。

例 1.

均一分散の場合を考える。つまり $\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2|X_i\right]=\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2\right]=\sigma_\epsilon^2$ を仮定する。このとき、

$$\mathcal{V}_A=\sigma_\epsilon^2\times\frac{\mathbb{V}\left[X_i\right]}{\mathbb{V}\left[X_i\right]^2}=\sigma_\epsilon^2\times\frac{1}{\mathbb{V}\left[X_i\right]}=\sigma_\epsilon^2\times\frac{1}{\mathbb{E}\left[X_i^2\right]-\mu_X^2}$$

であり、

$$\mathcal{V}_B=\sigma_\epsilon^2\times\frac{1}{\mathbb{E}\left[X_i^2\right]}$$

だから $\mathcal{V}_A\geq\mathcal{V}_B$ となる。

例 2.

$X_i\in\{-1,1\}$、つまり、2 通りの値しか取らないとする。$\mathbb{P}\left[X_i=-1\right]=1/4,\mathbb{P}\left[X_i=1\right]=3/4$ とする。誤差項は、$\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2|X_i=-1\right]=1/4,\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2|X_i=1\right]=5/4$ のような分散不均一性をもつとする。このとき、

$$\begin{aligned}
\mu_X&=\mathbb{E}\left[X_i\right]=\frac{1}{4}\cdot(-1)+\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{1}{2},\\
\mathbb{E}\left[X_i^2\right]&=\frac{1}{4}\cdot(-1)^2+\frac{3}{4}\cdot 1^2=1,\\
\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2\right]&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2|X_i\right]\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}=1,\\
\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2X_i\right]&=\mathbb{E}\left[X_i\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2|X_i\right]\right]=\frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\frac{5}{4}=\frac{7}{8},\\
\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2X_i^2\right]&=\mathbb{E}\left[X_i^2\mathbb{E}\left[\epsilon_i^2|X_i\right]\right]=\frac{1}{4}\cdot(-1)^2\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot 1^2\cdot\frac{5}{4}=1
\end{aligned}$$

となる。これらを用いて漸近分散を計算してみると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_A&=\frac{\mathbb{E}\left[\left(X_i-\mu_X\right)^2\epsilon_i^2\right]}{\left(\mathbb{V}\left[X_i\right]\right)^2}=\frac{\mathbb{E}\left[X_i^2\epsilon_i^2-2\mu_XX_i\epsilon_i^2+\mu_X^2\epsilon_i^2\right]}{\left(\mathbb{E}\left[X_i^2\right]-\mu_X^2\right)^2}=\frac{2}{3},\\
\mathcal{V}_B&=\frac{\mathbb{E}\left[X_i^2\epsilon_i^2\right]}{\mathbb{E}\left[X_i^2\right]^2}=1.
\end{aligned}$$

すなわち、$\mathcal{V}_A<\mathcal{V}_B$.

したがって、**例 1** の場合のように $\mathcal{V}_A\geq\mathcal{V}_B$ となる場合もあれば、**例 2** の場合のように $\mathcal{V}_A<\mathcal{V}_B$ となることもある。すなわち、一般にいずれの推定量が望ましいかを決定することはできない。[2]

[2] この結果は簡単なシミュレーションでも確認できます。このリンク先にサンプルコードを置いておきます。

4

$\hat{\beta}_0$ と $\hat{\beta}_1$ は、

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2},$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

であった。大問 2 の (ii) と同様にして、

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left\{\left(\beta_1\left(X_i - \bar{X}\right) + \beta_2\left(Z_i - \bar{Z}\right) + \epsilon_i - \bar{\epsilon}\right)\right\}}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\ &= \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Z_i - \bar{Z}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)\epsilon_i}{\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\ &\to_p \beta_1 + \beta_2 \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2} + 0.\end{aligned}$$

これと、$\mu_Y = \beta_0 + \beta_1 \mu_X + \beta_2 \mu_Z$（$\mu_Y$ は Y の期待値）を用いて、

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \to_p \mu_Y - \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}\right)\mu_X = \beta_0 + \beta_2 \left(\mu_Z - \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}\mu_X\right).$$

以上より、$\hat{\beta}_0$ と $\hat{\beta}_1$ の漸近バイアスは $\beta_2(\mu_Z - (\sigma_{XZ}/\sigma_X^2)\mu_X)$ および $\beta_2\left(\sigma_{XZ}/\sigma_X^2\right)$ である。これより、例えば、X と Z の相関（つまり $|\sigma_{XZ}|$）が強い場合や Z の Y へ与える影響（つまり $|\beta_2|$）が大きい場合に漸近バイアスが大きくなるかもしれない。

5

$\bar{D} = (1/n)\sum_{i=1}^n D_i$ とする。(2.2) より、

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(D_i - \bar{D}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(D_i - \bar{D}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(D_i - \bar{D}\right)Y_i}{\sum_{i=1}^n \left(D_i - \bar{D}\right)^2}$$

である。ここで、$D_i \in \{0, 1\}$ より、$\sum_{i=1}^n D_i = n_1$、$D_i^2 = D_i$ となることに注意すると、

$$\bar{D} = \frac{n_1}{n}, \ \sum_{i=1}^n \left(D_i - \bar{D}\right)^2 = \frac{n_1(n - n_1)}{n}$$

と計算できる。したがって、

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(D_i - \bar{D}\right)Y_i}{\sum_{i=1}^n \left(D_i - \bar{D}\right)^2} \\ &= \frac{n}{n_1(n - n_1)}\left(\sum_{i=1}^n D_i Y_i - \bar{D}\sum_{i=1}^n Y_i\right) \\ &= \frac{n}{n_1(n - n_1)}\left(\sum_{i=1}^{n_1} Y_i - n\bar{D}\bar{Y}\right) \\ &= \frac{n}{n - n_1}\left(\bar{Y}_1 - \bar{Y}\right) \\ &= \frac{n}{n - n_1}\left\{\bar{Y}_1 - \left(\frac{n_1}{n}\bar{Y}_1 + \frac{n - n_1}{n}\bar{Y}_0\right)\right\} \\ &= \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0.\end{aligned}$$