中級計量経済学 2024 練習問題 (2) 解答例

TA: 岡本優太[1]

1

(i)

恒等式に消費関数を代入して整理すれば、

$$Y_i = \frac{1}{1-\gamma_1}\left(\gamma_0 + I_i + S_i + u_i\right). \tag{1.1}$$

これを消費関数に代入すれば、

$$C_i = \frac{1}{1-\gamma_1}\left(\gamma_0 + \gamma_1\left(I_i + S_i\right) + u_i\right)$$

を得る。

(ii)

練習問題 (1) の問 2-(i) より、

$$\hat{b}_1 = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)\left(C_i - \bar{C}\right)}{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

である。大数の法則が適用できるための条件のもとで、$\hat{b}_1$ は

$$\hat{b}_1 \to_p \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y_i, C_i\right]}{\mathbb{V}\left[Y_i\right]} =: b_1$$

に確率収束する。消費関数 $C_i = \gamma_0 + \gamma_1 Y_i + u_i$ より、

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y_i, C_i\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y_i, \gamma_0 + \gamma_1 Y_i + u_i\right] = \gamma_1 \mathbb{V}\left[Y_i\right] + \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y_i, u_i\right]$$

だから、

$$b_1 = \gamma_1 + \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y_i, u_i\right]}{\mathbb{V}\left[Y_i\right]}$$

となる。ここで、(1.1) の関係を用いれば、

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[Y_i, u_i\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[\frac{1}{1-\gamma_1}\left(\gamma_0 + I_i + S_i + u_i\right), u_i\right] = \frac{1}{1-\gamma_1}\mathbb{V}\left[u_i\right]$$

を得る。ただし、ここで I_i と S_i の外生性（$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[I_i, u_i\right] = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left[S_i, u_i\right] = 0$）を用いた。上の 2 式を合わせて、漸近バイアスは

$$b_1 - \gamma_1 = \frac{1}{1-\gamma_1} \cdot \frac{\mathbb{V}\left[u_i\right]}{\mathbb{V}\left[Y_i\right]}$$

となる。一致性は一般にもたない。

[1]京都大学大学院経済学研究科 D2. ✉ okamoto.yuuta.57w@st.kyoto-u.ac.jp. 不備があった場合や質問がある場合はこちらまでメールしてください。

2

(i)

練習問題 (1) 問 2 より、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}-\beta\right) \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{E}\left[\left(x_i-\mathbb{E}\left[x_i\right]\right)^2 u_i^2\right]}{\mathbb{V}\left[x_i\right]^2}\right).$$

であった。いま、均一分散が仮定されているので、繰り返し期待値の法則を使うと、漸近分散は

$$\frac{\mathbb{E}\left[\left(x_i-\mathbb{E}\left[x_i\right]\right)^2 u_i^2\right]}{\mathbb{V}\left[x_i\right]^2} = \frac{\mathbb{E}\left[\left(x_i-\mathbb{E}\left[x_i\right]\right)^2\right] \sigma^2}{\mathbb{V}\left[x_i\right]^2} = \frac{\sigma^2}{\mathbb{V}\left[x_i\right]}$$

となる。

(ii)*

操作変数推定量は、

$$\tilde{\beta} = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n\left(z_i-\bar{z}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{n^{-1}\sum_{i=1}^n\left(z_i-\bar{z}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)}$$

であった（「講義ノート 3」参照）。よって、$y_i=\alpha+\beta x_i+u_i$ と $\bar{y}=\alpha+\beta\bar{x}+\bar{u}$ を代入すれば、

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \beta + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n\left(z_i-\bar{z}\right)\left(u_i-\bar{u}\right)}{n^{-1}\sum_{i=1}^n\left(z_i-\bar{z}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)} \\ &\to_p \beta + \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[z_i, u_i\right]}{\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[z_i, x_i\right]} = \beta\end{aligned}$$

とわかる。ただし、最後の等式で操作変数の外生性を用いている。また、

$$\sqrt{n}\left(\tilde{\beta}-\beta\right) = \frac{(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^n\left(z_i-\bar{z}\right)u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^n\left(z_i-\bar{z}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)} \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{E}\left[\left(z_i-\mathbb{E}\left[z_i\right]\right)^2 u_i^2\right]}{\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[z_i, x_i\right]^2}\right)$$

であるが、漸近分散は (i) と同様にして、

$$\frac{\mathbb{E}\left[\left(z_i-\mathbb{E}\left[z_i\right]\right)^2 u_i^2\right]}{\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[z_i, x_i\right]^2} = \frac{\mathbb{V}\left[z_i\right]\sigma^2}{\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[z_i, x_i\right]^2}.$$

(iii)

分母の共分散の部分について、コーシー・シュワルツの不等式を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{V}\left[z_i\right]\sigma^2}{\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[z_i, x_i\right]^2} &= \frac{\mathbb{V}\left[z_i\right]\sigma^2}{\left\{\mathbb{E}\left[\left(z_i-\mathbb{E}\left[z_i\right]\right)\left(x_i-\mathbb{E}\left[x_i\right]\right)\right]\right\}^2} \\ &\geq \frac{\mathbb{V}\left[z_i\right]\sigma^2}{\left\{\mathbb{E}\left[\left(z_i-\mathbb{E}\left[z_i\right]\right)^2\right]^{1/2}\mathbb{E}\left[\left(x_i-\mathbb{E}\left[x_i\right]\right)^2\right]^{1/2}\right\}^2} \\ &= \frac{\mathbb{V}\left[z_i\right]\sigma^2}{\mathbb{V}\left[z_i\right]\mathbb{V}\left[x_i\right]} = \frac{\sigma^2}{\mathbb{V}\left[x_i\right]}.\end{aligned}$$

よって漸近分散の観点からは、最小二乗推定量のほうが望ましい。

3

(i)

最小二乗推定の結果、

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

であった。ここで

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\left(\beta_{1i} x_i - \overline{\beta_1 x} + u_i - \bar{u}\right)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
&= \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\beta_{1i} x_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
&\to_p \frac{\mathbb{E}\left[(x_i - \mathbb{E}[x_i])\beta_{1i} x_i\right]}{\mathbb{V}[x_i]} + 0
\end{aligned}$$

であるが、β_{1i} の独立性より

$$\mathbb{E}\left[(x_i - \mathbb{E}[x_i])\beta_{1i} x_i\right] = \mathbb{E}\left[(x_i - \mathbb{E}[x_i]) x_i\right]\mathbb{E}[\beta_{1i}] = \mathbb{V}[x_i]\,\mathbb{E}[\beta_{1i}]$$

なので、結局、$\hat{\beta}_1 \to_p \mathbb{E}[\beta_{1i}]$ を得る。

(ii)*

まず

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1 - \mathbb{E}[\beta_{1i}]\right) \\
&= \frac{(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\beta_{1i} x_i + (1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} - \frac{(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\,\mathbb{E}[\beta_{1i}]}{n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\
&= \frac{(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\left\{(\beta_{1i} - \mathbb{E}[\beta_{1i}]) x_i + u_i\right\}}{n^{-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}
\end{aligned}$$

とできる。ここで、練習問題 (1) 問 2-(iii) と同様の操作をおこなうと、

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\left\{(\beta_{1i} - \mathbb{E}[\beta_{1i}]) x_i + u_i\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}[x_i])\left\{(\beta_{1i} - \mathbb{E}[\beta_{1i}]) x_i + u_i\right\}$$

とできて、この $\sum$ の中身の期待値はゼロ、分散は

$$\mathbb{E}\left[(x_i - \mathbb{E}[x_i])^2\left\{(\beta_{1i} - \mathbb{E}[\beta_{1i}]) x_i + u_i\right\}^2\right] = \sigma^2\mathbb{V}[x_i] + \mathbb{V}[\beta_{1i}]\,\mathbb{E}\left[x_i^2 (x_i - \mathbb{E}[x_i])^2\right]$$

となる。よって、中心極限定理と Slutsky の定理を用いれば、

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_1 - \mathbb{E}[\beta_{1i}]\right) \to_d \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2\mathbb{V}[x_i] + \mathbb{V}[\beta_{1i}]\,\mathbb{E}\left[x_i^2 (x_i - \mathbb{E}[x_i])^2\right]}{\mathbb{V}[x_i]^2}\right)$$

と漸近正規性が成立し、漸近分散は

$$\frac{\sigma^2\mathbb{V}[x_i] + \mathbb{V}[\beta_{1i}]\,\mathbb{E}\left[x_i^2 (x_i - \mathbb{E}[x_i])^2\right]}{\mathbb{V}[x_i]^2}$$

である。

4

(i)

$y_i \in \{0,1\}$ に注意すると、

$$\mathbb{E}\left[y_i|x_i\right] = \mathbb{P}\left[\alpha + \beta x_i + \epsilon_i \geq 0|x_i\right] = 1 - \Phi(-\alpha - \beta x_i) = \Phi(\alpha + \beta x_i).$$

(ii)

$\mathbb{E}\left[u_i|x_i\right] = 0$ と $\mathbb{E}\left[y_i^2|x_i\right] = \mathbb{E}\left[y_i|x_i\right]$ に注意して、

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left[u_i|x_i\right] &= \mathbb{E}\left[u_i^2|x_i\right] = \mathbb{E}\left[\left(y_i - \mathbb{E}\left[y_i|x_i\right]\right)^2|x_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[y_i^2|x_i\right] - \mathbb{E}\left[y_i|x_i\right]^2 = \mathbb{E}\left[y_i|x_i\right]\left(1 - \mathbb{E}\left[y_i|x_i\right]\right) = \Phi(\alpha + \beta x_i)\left\{1 - \Phi(\alpha + \beta x_i)\right\}.\end{aligned}$$

(iii)

α_1 の OLS 推定量を $\hat{\alpha}_1$ と書くと、

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n\left(x_i - \bar{x}\right)y_i}{n^{-1}\sum_{i=1}^n\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \frac{n^{-1}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{n^{-1}\sum_{i=1}^n\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \\ &\to_p \frac{\mathbb{E}\left[x_i y_i\right] - \mathbb{E}\left[x_i\right]\mathbb{E}\left[y_i\right]}{\mathbb{V}\left[x_i\right]} \\ &= \frac{1}{\mathbb{V}\left[x_i\right]}\left\{\mathbb{E}\left[x_i\mathbb{E}\left[y_i|x_i\right]\right] - \mathbb{E}\left[x_i\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[y_i|x_i\right]\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\mathbb{V}\left[x_i\right]}\left\{\mathbb{E}\left[x_i\Phi(\alpha + \beta x_i)\right] - \mathbb{E}\left[x_i\right]\mathbb{E}\left[\Phi(\alpha + \beta x_i)\right]\right\}.\end{aligned}$$

5

(i)

モデルの式の期待値をとると、

$$\mathbb{E}\left[y_t\right] = \alpha + \phi\mathbb{E}\left[y_{t-2}\right] + \mathbb{E}\left[u_t\right]$$

となる。定常性（$\mathbb{E}\left[y_t\right] = \mathbb{E}\left[y_{t-2}\right]$）と $\mathbb{E}\left[u_t\right] = 0$ に注意すると、

$$\mathbb{E}\left[y_t\right] = \frac{\alpha}{1 - \phi}.$$

(ii)

(i) より、$\mu = \alpha + \phi\mu$ であることに注意する。モデルの式から μ を引いて、u_i をかけると、

$$(y_t - \mu)u_t = \left(\phi(y_{t-2} - \mu) + u_t\right)u_t$$

だから、期待値を計算すれば、

$$\mathbb{E}\left[(y_t - \mu)u_t\right] = \mathbb{E}\left[\left(\phi(y_{t-2} - \mu) + u_t\right)u_t\right] = \sigma^2.$$

(iii)

$y_t - \mu = \phi(y_{t-2} - \mu) + u_t$ に注意する。(ii) の結果と合わせて、

$$\gamma_0 = \mathbb{E}\left[(y_t - \mu)(y_t - \mu)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(y_t - \mu)(y_{t-2} - \mu) + (y_t - \mu)u_t\right] = \phi\gamma_2 + \sigma^2$$

を得る。同様の計算から、

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \mathbb{E}\left[(y_{t-1} - \mu)(y_t - \mu)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(y_{t-1} - \mu)(y_{t-2} - \mu) + (y_{t-1} - \mu)u_t\right] = \phi\gamma_1, \\
\gamma_2 &= \mathbb{E}\left[(y_{t-2} - \mu)(y_t - \mu)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(y_{t-2} - \mu)(y_{t-2} - \mu) + (y_{t-2} - \mu)u_t\right] = \phi\gamma_0, \\
\gamma_3 &= \mathbb{E}\left[(y_{t-3} - \mu)(y_t - \mu)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(y_{t-3} - \mu)(y_{t-2} - \mu) + (y_{t-3} - \mu)u_t\right] = \phi\gamma_1, \\
\gamma_4 &= \mathbb{E}\left[(y_{t-4} - \mu)(y_t - \mu)\right] = \mathbb{E}\left[\phi(y_{t-4} - \mu)(y_{t-2} - \mu) + (y_{t-4} - \mu)u_t\right] = \phi\gamma_2
\end{aligned}$$

を得る。定常性（$\phi \neq 1$）に注意して、これらを解くと、

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2},\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \phi\frac{\sigma^2}{1 - \phi^2},\ \gamma_3 = 0,\ \gamma_4 = \phi^2\frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

(iv)

「講義ノート 6」の (9) 式より、$1 - \phi z^2 = 0$ の解の絶対値が 1 より大きければよい。よって、$-1 < \phi < 1$。

6

(i)

モデルの式より、$\mathbb{E}\left[y_t\right] = \alpha + \mathbb{E}\left[u_t\right] + \theta\mathbb{E}\left[u_{t-1}\right] = \alpha$ と $\gamma_0 = \mathbb{E}\left[(\alpha + u_t + \theta u_{t-1})^2\right] - \alpha^2 = (1 + \theta^2)\sigma^2$ を得る。

(ii)

(i) の結果より、

$$\gamma_1 = \mathbb{E}\left[(y_t - \alpha)(y_{t-1} - \alpha)\right] = \mathbb{E}\left[y_t y_{t-1}\right] - \alpha^2$$

であるが、$\mathbb{E}\left[y_t u_t\right] = \mathbb{E}\left[\alpha u_t + u_t^2 + \theta u_{t-1}u_t\right] = \sigma^2$ に注意すると、

$$\gamma_1 = \mathbb{E}\left[y_t y_{t-1}\right] - \alpha^2 = \mathbb{E}\left[(\alpha + u_t + \theta u_{t-1})y_{t-1}\right] - \alpha^2 = \theta\sigma^2$$

を得る。同様にして、

$$\gamma_2 = \mathbb{E}\left[(y_t - \alpha)(y_{t-2} - \alpha)\right] = \mathbb{E}\left[y_t y_{t-2}\right] - \alpha^2 = \mathbb{E}\left[(\alpha + u_t + \theta u_{t-1})y_{t-2}\right] - \alpha^2 = 0.$$

(iii)

$(1 + \theta^2)\sigma^2 = 10, \theta\sigma^2 = -4$ を解けば、$(\theta, \sigma^2) = (-1/2, 8), (-2, 2)$ と求まる。「講義ノート 6」p. 6 の議論より、反転可能なのは前者である。

(iv)

$\bar{Y} := T^{-1}\sum_{t=1}^{T} Y_t$ とおく。まず、期待値の線形性とモデルの定常性より、

$$\mathbb{E}\left[\bar{Y}\right] = \mathbb{E}\left[y_t\right] = \alpha$$

である。また、$\bar{Y}$ の分散は、

$$\mathbb{V}\left[\bar{Y}\right] = \frac{1}{T^2}\mathbb{V}\left[\sum_{t=1}^{T} Y_t\right] = \frac{1}{T^2}\sum_{l=1}^{T}\sum_{m=1}^{T}\mathbb{C}\mathrm{ov}\left[y_l, y_m\right] = \frac{1}{T^2}\sum_{l=1}^{T}\sum_{m=1}^{T}\gamma_{l-m}$$

とわかる（ただし、$\gamma_{-k} = \gamma_k$ と解釈する）。ここで、(ii) と同様の操作から、$n \geq 2$ に対して、

$$\gamma_n = \mathbb{E}\left[(y_t - \alpha)(y_{t-n} - \alpha)\right] = \mathbb{E}\left[y_t y_{t-n}\right] - \alpha^2 = \mathbb{E}\left[(\alpha + u_t + \theta u_{t-1}) y_{t-n}\right] - \alpha^2 = 0$$

なので、結局、

$$\mathbb{V}\left[\bar{Y}\right] = \frac{1}{T^2} \sum_{l=1}^{T} \sum_{m=1}^{T} \gamma_{l-m} = \frac{1}{T}\gamma_0 + \frac{2(T-1)}{T^2}\gamma_1$$

となるが、これは $T \to \infty$ でゼロに収束する。以下、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\mathbb{P}\left[\left|\bar{Y} - \alpha\right| \geq \varepsilon\right]$$

がゼロに収束することを示す。Chebyshev の不等式より、

$$\mathbb{P}\left[\left|\bar{Y} - \alpha\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\mathbb{V}\left[\bar{Y}\right]^2}{\varepsilon^2}$$

を得る。右辺（の分子）がゼロに収束することは先に確認したので、$\mathbb{P}\left[\left|\bar{Y} - \alpha\right| \geq \varepsilon\right] \to 0$ $(T \to \infty)$ とわかる。これは確率収束の定義そのものであり、結果として、$\bar{Y} \to_p \alpha$ を得る。

配点

小問一つあたり 4 点を配点します。ただし、* が付いているもの（2-(ii) と 3-(ii)）に関しては、8 点を配点します。合計 100 点です。