

1. 導入

☆ 対称性とは？

場の理論で“対称性とは何か？”

たくさん の 答え が あ り う る。

そのうち 3つ

① 場 中 , 作用 $S(\phi)$

変換 $\phi \rightarrow \phi'$ で “ $S(\phi) = S(\phi')$ となるもの

② Hamiltonian \hat{H} .

(反) ユニタリ-演算子 \hat{U} で “ $\hat{H}\hat{U} - \hat{U}\hat{H}$ となるもの

③ トポロジカル欠陥 (後で)

①, ② の不便な点

大域的な記述である

① 時空全体で 一斉に 変換(なければならぬ)。

例) 2次元の共形対称性?? (知りうる限り)

複素座標 $z \rightarrow f(z)$ 正則

メビウス変換以外は 1対1 ではない。

変換ではない!?

$$\hat{H} = \int d^d x \hat{T}_{00}$$

↑

→ 空間全体に亘るか
巨大な演算子

(大域的対称性だ H)

局所的な記述が望ましい)

④ 連続的対称性、無限小変換の場合

$$J^M(x) \quad \partial_\mu J^M(x) = 0$$

局所的!!

離散的な場合？

③ (内部対称性) トポロジカル欠陥

☆ 対称性の使い方の例

② の記述、量子力学で

命題 \hat{U}, \hat{V} : $C=1$ - , \hat{H} と可換

$$\hat{U}\hat{V} = a\hat{V}\hat{U}, \quad a: C\text{数}, \quad a \neq 1$$

\Rightarrow すべての準位 (特に基底状態) は
縮退していき

('t Hooft anomaly matching condition)

証明

$\exists |4\rangle, \hat{H}|4\rangle = E|4\rangle$, 縮退なしと仮定

$$\hat{H}\hat{U}|4\rangle = \hat{U}\hat{H}|4\rangle = E\hat{U}|4\rangle$$

$\hat{U}|4\rangle$ が E の固有状態

$$\hat{U}|4\rangle = u|4\rangle \quad \exists u \in C, |u|=1$$

同様に $\exists v \in \mathbb{C}, |v|=1$

$$\hat{V}|4\rangle = v|4\rangle$$

$$\hat{U}\hat{V}|4\rangle = a\hat{V}\hat{U}|4\rangle = auv|4\rangle$$

\parallel

$$uv|4\rangle$$

$a \neq 1$

→ 矛盾

(1×1 行列は非可換になれない)



この命題 \hat{U}, \hat{V} がユニタリ-でなかったら?
(対称性ではない)

似たような命題が成り立つ!! \rightsquigarrow 便て
「非可逆対称性」

一般化対称性:

\hat{H} 可換 (\Rightarrow トポロジカル)

他の条件はゆるめても結構便て.

× Euclidean の定式化

Lorentzian の理論とは別の「Euclidean の理論」
を考えているわけではない。

「理論」は同じ、定式化、考えやすい量が違う。

例) $\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}} = \int D\phi e^{-S_E(\phi)}$

↑
Euclidean, 時間方向周期 β

× 演算子関係式

例: $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$

量子論で

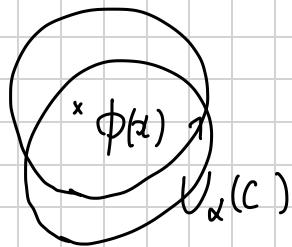
↑ 略記

$$\left(\langle \partial_\mu J^\mu(x) O_1(x_1) \dots W(C) \dots \rangle = 0 \right)$$

x は x_1, \dots, C, \dots (他の演算子のとくに)

とは異なる

例)



$$= e^{i\alpha} {}^x \phi_{\alpha(C)}$$

$$\langle U_\alpha(C) \phi(x) \dots \rangle = e^{i\alpha} \langle \phi(x) \dots \rangle$$

↑ 任意 ↑ 回り ↓ 任意

(C の内側だけ)
入、出ない。

2. 対称性とトポロジカル欠陥

☆ 欠陥



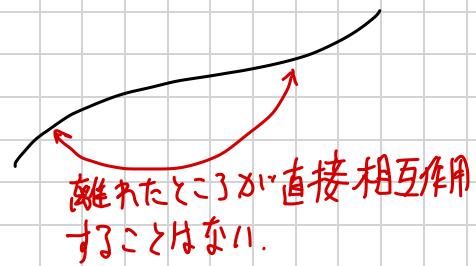
d次元時空間内、他のところと性質が異なった

$$\dim \text{(次元)} \quad , \quad \text{codim} = d - (\dim)$$

異なる部分の次元

制限：相互作用は局所的

広い意味の「演算子」



離れたところが直接相互作用
することはない。

例：局所演算子（0次元欠陥）

※ Lagrangian に出てくる場の汎関数で
書かれてるものも書いていないものもある。

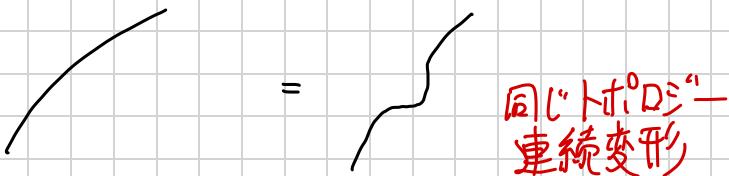
. ハーミテジ理論の Wilson loop

$$\text{Tr}_R \text{P exp}(i \oint A)$$

※ 欠陥は動的な物体ではない

★ 対称性とトポロジカル欠陥 その1

。 トポロジカル欠陥 = 連続変形で値を変えない
欠陥



やることは

$$\textcircled{2} \quad \hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H} \quad \text{と} \quad \textcircled{4} \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

↓

③ トポロジカル欠陥

④ d次元場の理論、連続対称性の場合

$$\hat{U} = e^{i\alpha \hat{Q}}, \quad \hat{Q} = \int_{\text{空間}}^d \hat{j}^0 = -i \int_{\text{空間}}^d \hat{j}^d$$

$$\hat{j}^d := i \hat{j}^0$$

* Euclidean 形式で「エルミート共役」
は気をつけなければならぬ。

Heisenberg っぽい演算子

$$\hat{U}(t) := e^{t\hat{H}} \hat{U} e^{-t\hat{H}}$$

$$= \hat{U}$$

↑ 対称性だから

\Rightarrow Euclidean path integral)

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ U \end{array} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} \uparrow \\ U \end{array}$$

一般化

M : 向きのついた codim 1 surface

$$U(M) := e^{i\alpha Q(M)}$$

$$Q(M) := -i \int_M dS_\mu J^\mu \quad (= -i \int_M j)$$

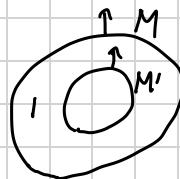
$$j := \frac{1}{(d-1)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} J^{\mu_1} \dots J^{\mu_d}$$

2次元 codim 1 M, M'

$$\times dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_{d-1}}$$

$$\text{s.t. } \exists D \quad \partial D = M \cup (-M')$$

$\curvearrowleft M'$ の向きを反対にした t の



$$\Rightarrow Q(M) = Q(M')$$

$$\begin{aligned} & (\because Q(M) - Q(M') \\ &= -i \int_D dx^\mu \partial_\mu J^\mu = 0) \end{aligned}$$

$$U(M) = U(M')$$

(特にトポロジカル)

∴ $U(M)$ 「対称性欠陥」 (单にトポロジカルより) 強い条件

$$\cdot Q(-M) = -Q(M)$$

$$\cdot U(-M) =: \bar{U}(M)$$

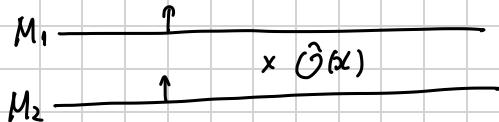
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ U \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \bar{U} \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \end{array}$$

四 局所演算子への作用

$\hat{O}(x)$ 局所演算子 $x = (\vec{x}, t)$

$$\hat{U} \hat{O}(x) \hat{U}^\dagger = \hat{O}'(x) \quad \left(\begin{array}{l} \text{※量子力学の教科書と異なり} \\ \text{convention} \end{array} \right)$$

II



II

$$T(\hat{U}(M_1) \hat{U}(-M_2) \hat{O}(x))$$

\uparrow time ordered product



$$(T(\hat{U}(M) \hat{O}(x))) \quad M := M_1 \cup (-M_2)$$

$\leftarrow x$ と同時刻には挿入なし.

$$\langle 0 | T(\hat{U}(M) \hat{O}(x) \dots) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T(\hat{O}'(x) \dots) | 0 \rangle$$

↓

$$\langle U(M) O(x) \dots \rangle = \langle O'(x) \dots \rangle$$

を $U(M) O(x) = O'(x)$ と書く。

$$\circlearrowleft \hat{O}(x) \rightarrow U(M)$$

=

$$\times \hat{O}'(x)$$

WT id の
有限変換の一般化

↓ 実際 α : 無限小

$$(1 + i\alpha Q(M)) \cup(x) = \cup'(x)$$

$$i\alpha Q(M) \cup(x) = \cup'(x) - \cup(x) = : \alpha \Delta \cup(x)$$

↓ $Q(M)$ の定義

$$\int_M dS_\mu J^\mu(y) \cup(x) = \Delta \cup(x) = \int_D d^d y \delta^d(x-y) \Delta \cup(x)$$
$$= \int_D d^d y \partial_\mu J^\mu(y) \cup(x)$$



$$\partial_\mu J^\mu(y) \cup(x) = \delta^d(x-y) \Delta \cup(x)$$

WT id

(y は他の操作と
重ならない)

☆ 対称性とトポロジカル欠陥 その2

■

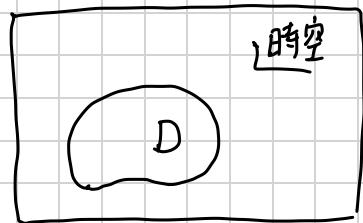
- ① から 通常の WT id を導くのと同じやり方

G : 群 , $g \in G$ 变換 $\phi \rightarrow \phi^g$

$$S(\phi^g) = S(\phi)$$

“ゲージ変換”

$$\phi'(x) = \begin{cases} \phi^g(x) & x \in D \\ \phi(x) & x \notin D \end{cases}$$



D: 領域

$$Z = \int D\phi e^{-S(\phi)}$$

) 文字を変えた

$$= \int D\phi' e^{-S(\phi')}$$

) 代入

$$= \int D\phi e^{-S(\phi')} \quad (\text{測度は不变を仮定})$$

$$S_{D,g}(\phi) := S(\phi')$$

$$\text{一般に } S_{D,g}(\phi) \neq S(\phi)$$

しかし異なるのは $\partial D = M$ のみ

外部 : $\phi' = \phi$

内部 : 対称性なので

$$U_{g^{-1}}(M) := e^{S(\phi) - S_{D,g}(\phi)}$$

M 上に局在

$$Z = \int D\phi e^{-S(\phi)} U_{g^{-1}}(M)$$

両辺 $\frac{1}{Z}$

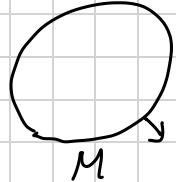
$$\langle U_{g^{-1}}(M) \rangle = 1$$

。 D の外に他の演算子が入るのも同様

$$\langle U_{g^{-1}}(M) \dots \rangle = \langle \dots \rangle$$

$$\begin{array}{c} \text{○} \\ U_{g^{-1}}(M) \end{array} = 1$$

$$(M = \partial D, \exists D)$$



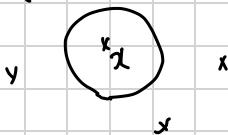
「対称性欠陥」

演算子への作用

$$Z \langle O(x) \dots \rangle = \int D\phi \, O(x) \dots e^{-S(\phi)}$$

さっきと同じ

$$\begin{aligned} x \in D \\ \dots \notin D \\ \dots &= \int D\phi \, O^g(x) U_{g^{-1}}(M) \dots e^{-S(\phi)} \end{aligned}$$



↓

$$\langle O(x) \dots \rangle = \langle U_{g^{-1}}(M) O^g(x) \dots \rangle$$

$O(x)$ は \forall 局所演算子, $\forall g \in G$ などの z
文字を変えた

$$\begin{array}{ccc} x O(x) & = & x O^g(x) \\ U_g(M) & & \end{array}$$

$O_a(x)$: すべての局所演算子の基底

$$O_a^g(x) = O_b(x) R(g)^b{}_a$$

$R(g)$: G の表現

④ 背景ゲージ場

(簡単のため) 連続 対称性

背景ゲージ場 A

$$S(\phi, A) : S(\phi, A=0) = S(\phi)$$

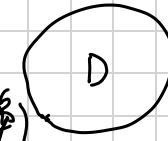
$$Z(A) = \int D\phi e^{-S(\phi, A)}$$

ゲージ変換 (ゲージ不变性を仮定)

$$Z(A') = \int D\phi e^{-S(\phi, A')}$$

$$= Z(A) \quad (A=0 \text{ で})$$

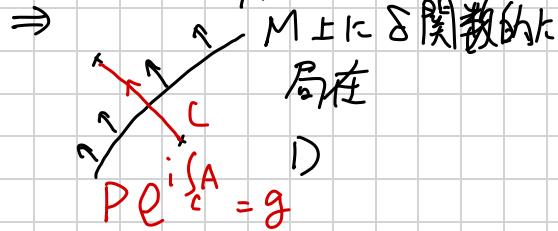
さきのゲージ変換



たとえし.

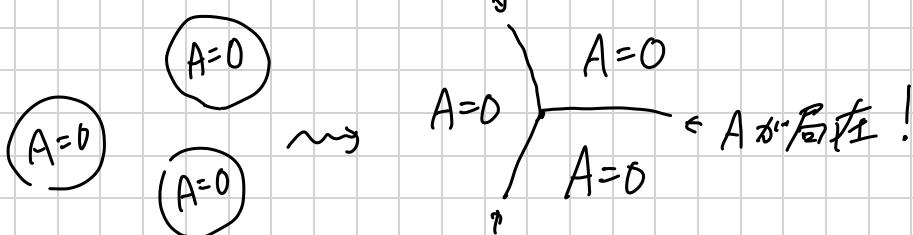
$$F=0 \Rightarrow F'=0$$

"flat"



対称性欠陥の配位 \Rightarrow flat な背景ゲージ場

逆に
flat を 背景ゲージ場 $\xrightarrow{\text{ゲージ変換}} \text{局所的に } A=0$



$\leftarrow A \text{が} "局在"$
 $P e^{i \oint_{C_1} A} = 1 \Rightarrow P e^{i \oint_{C_1} A} = P e^{i \oint_{C_2} A}$
 \Rightarrow 対称性欠陥 U_g ($\Leftarrow : g$)

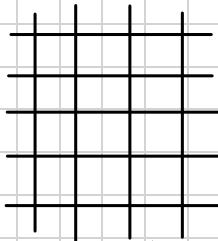
flat な背景ゲージ場の配位

\Rightarrow (ミンクロンを含む) 対称性欠陥の配位

トポロジカルジャンクション

\Rightarrow

Ising の spin flip の例)



各サブ*i*に自由度 $a_i = 0, 1$

各リンク *$\langle ij \rangle$* に相互作用 $K(-1)^{a_i + a_j}$

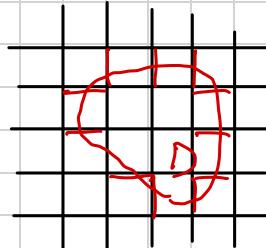
$$Z = \sum_{\{a\}} \exp \left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j} \right)$$

↑すべての配位につけての和

spin flip $a_i \rightarrow a_i + 1 \pmod{2}$

$$a'_i = \begin{cases} a_i + 1 & i \in D \\ a_i & i \notin D \end{cases}$$

$$\sum_{\{a\}} = \sum_{\{a'\}}$$



リンク $\langle ij \rangle$ $i, j \in D$, $i, j \notin D \Rightarrow$ 相互作用は不变

境界

$$\frac{1}{\mid} = \exp \left(-K(-1)^{a_i + a_j} \right)$$

前と同様に

$$\sigma_i := (-1)^{a_i}$$

$${}^x \sigma_i = -1 \quad {}^x \sigma_i$$

○ ハーヒー場の配位

$$\text{各 } i \in \mathcal{I} \langle ij \rangle \vdash B_{ij} = 0, 1$$

flat \Leftrightarrow すべての plaquette

$$\langle i j k l \rangle$$



$$B_{ij} + B_{jk} + B_{kl} + B_{li} = 0 \pmod{2}$$

ゲージ変換

パラメータ: 各サブ i $\lambda_i = 0, 1$

$$B_{ij} \rightarrow B_{ij} + \lambda_i + \lambda_j \pmod{2}$$

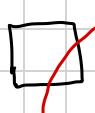
$$a_i \rightarrow a_i + \lambda_i \pmod{2}$$

結合: $i \in \mathcal{I} \langle ij \rangle$

$$\exp(K(-1)^{a_i + a_j + B_{ij}})$$

○ 対称性欠陥 \Leftrightarrow flat な B の配位

(\Rightarrow) : $\exists i, j$ 欠陥と交わる $i \in \mathcal{I}$ $B_{ij} = 1$, それ以外 $B_{ij} = 0$



plaquette: 必ず出でる \Rightarrow 偶数個 $B=1$
 \Rightarrow flat

☆ 対称性欠陥のまとめ

普通の対称性

$\forall g \in G, M : \text{codim } 1, \text{ 向きのついた部分多様体}$
 $\rightarrow U_g(M) \text{ トポロジカル欠陥}$

• 群構造

$$\begin{array}{c|c} \leftarrow & \leftarrow \\ \hline U_g & U_h \end{array} = \begin{array}{c} | \\ U_{gh} \end{array}$$

$$U_1 = 1 \quad (\text{自明な欠陥})$$

$$\begin{array}{c|c} \leftarrow & \rightarrow \\ \hline U_g & U_{g^{-1}} \end{array}$$

• 局所演算子への作用

$$\begin{array}{c} * \\ \circlearrowleft \\ U_a \\ \hline U_g \end{array} = \sum_b R(g)^b {}_a \begin{array}{c} * \\ \circlearrowright \\ U_b \end{array}$$

☆ 一般化対称性

普通の対称性 \longrightarrow トポロジカル欠陥



↑
「一般化対称性」
と呼ばう！

- $\text{codim } 1 \Rightarrow \text{codim } p+1$

" p -form symmetry"
 p -形式対称性

- 群構造 \Rightarrow 群構造なし

"non-invertible symmetry"
非可逆対称性

かけ算，単位元あり，逆元なし
(fusion) (自明な欠陥)

3. 2次元 Ising 模型

。やること

- 2次元 Ising spin flip \mathbb{Z}_2 対称性

ケーリング

$$\text{Ising} / \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{\exists} \text{双対 } \mathbb{Z}_2 \text{ 大域的対称性}$$

- Kramers-Wannier 双対性

\Rightarrow 非可逆対称性の例)

★ 2次元 Ising と \mathbb{Z}_2 ケーリング

■ Ising 模型

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{a_i\}} \exp\left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j}\right)$$

$$\text{spin flip } a_i \rightarrow a_i + 1 \pmod{2}$$

■ Spin flip の（トポロジカルな）ケーリング

さき導入した背景ゲージ場のすべての配位を足しあげて

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2} = \frac{1}{2^V} \sum_{\{a_i, b_j\}} \exp\left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}}\right)$$

ケーリング積

$$\times \prod_{\substack{\text{plaquette} \\ \langle 1234 \rangle}} \delta_{b_1 + b_2 + b_3 + b_4, 0} \quad \text{拘束}$$

。ゲージ体積：それぞれのサイトに $\lambda_i = 0, 1$ の2とあり
 $\rightarrow 2^V$

。拘束 $S_{b,0}^{\text{mod } 2} := \begin{cases} 0 & b \equiv 1 \pmod 2 \\ 1 & b \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$

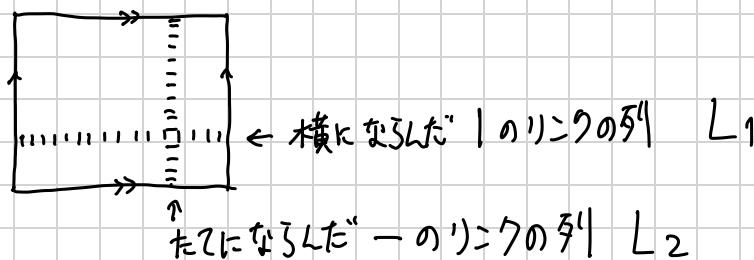
$$= \lim_{g \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{g^2} \left((-1)^b - 1 \right) \right)$$

Wilson の plaquette 作用で“弱結合極限をとったもの”。

■ ゲージ固定

flat な b の配位が与えられたとき、

(1) 水平、垂直それぞれに 1 つの列を選ぶ、



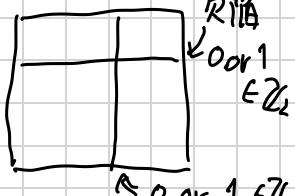
(2) ゲージを選び、

$$b_{l_1} = 0, \quad l \notin L_1, L_2$$

(3) 4通りの可能性

$$(b_{l_1}, b_{l_2}) = \begin{cases} (0, 0) \\ (1, 0) \\ (0, 1) \\ (1, 1) \end{cases}$$

for $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$



$$(0, 0) \Rightarrow \boxed{}$$

$$(1, 0) \Rightarrow \boxed{-}$$

$$(0, 1) \Rightarrow \boxed{|}$$

$$(1, 1) \Rightarrow \boxed{+}$$

(4) 残り、2つ目 "ゲージ対称性"

$$\lambda_i = 0 \text{ for all } i$$

$$\lambda_i = 1 \quad \vdots$$

$$\downarrow \\ Z_{\text{Ising}} / \mathbb{Z}_2 = \frac{1}{2} \left(\boxed{} + \boxed{-} + \boxed{|} + \boxed{+} \right)$$

※

。ゲージ場に関しては格子の細かさに関係ない
→ 連続理論に拡張可

。String とか CFT に出てく orbifold

。熱力学的な量（自由エネルギー密度 とか）

は Ising と $\text{Ising} / \mathbb{Z}_2$ で同じ

☆ 双対対称性

T : 2次 QFT.

大域的 G (abelian, 有限) 対称性, アーリーなし
(ケーリ化可能)

命題

(1) T/G は アーリーなし \hat{G} 対称性がある.

$$\hat{G} := \{ G \text{ の既約表現} \}$$

$\otimes T$ アーベル群にならない

$$\hat{G} \simeq G \quad (\text{カーリーなし})$$

G の電荷, 全体

(2) $T/G/\hat{G} \simeq T$

(1) $T/G \Rightarrow W_{\hat{a}}(C) \quad \hat{a} \in \hat{G} \quad \text{Wilson loop}$
(irrep)

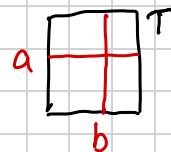
は トポロジカル欠陥, codim 1

$$\begin{array}{ccc|c} & & & \\ \hat{a} & \hat{b} & = & \hat{a} \otimes \hat{b} =: \hat{a} + \hat{b} \\ & & & \end{array} \Rightarrow \text{群構造}$$

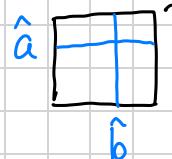
(③の意味で") 対称性

(2)

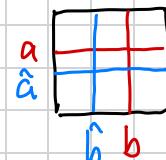
$$Z_{T/G} = \frac{1}{|G|} \sum_{a,b \in G}$$



$$Z_{T/\hat{G}} = \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}}$$



$$= \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}} \frac{1}{|G|} \sum_{a, b \in G}$$



$$\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}$$

G の既約 (1次元) 表現 1. 次元なら $\chi_{\hat{a}}$
 $\chi_{\hat{a}}: G \rightarrow U(1)$ 表現行列 = 指標

$$\chi_{\hat{a}}(a) \chi_{\hat{a}}(b) = \chi_{\hat{a}}(a+b)$$

$$\chi_{\hat{a}}(a) \chi_{\hat{b}}(a) = \chi_{\hat{a}+\hat{b}}(a)$$

$$-\text{般} \leftarrow \sum_{\hat{a} \in \hat{G}} \chi_{\hat{a}}(b) = |\hat{G}| \delta_{b,0} \quad (|\hat{G}| = |G|)$$

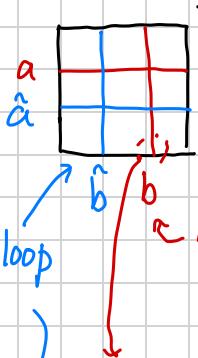
$$\sum_{\hat{a} \in \hat{G}} \chi_{\hat{a}}(b) = |\hat{G}| \delta_{b,0}$$

15) :

$$G = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$$

$$\hat{G} = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$$

$$\chi_{\hat{a}}(b) = e^{\frac{2\pi i}{N} \hat{a}b}$$

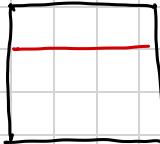


$\chi_b^{\hat{a}}(\phi_B)$

$$\frac{b}{\overline{b}} \quad \leftarrow \text{リンクが} \text{"せんし"} b$$

$$= \chi_b^{\hat{a}}(a) \chi_{\hat{a}}^{\hat{a}}(b)$$

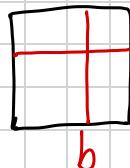
$$\sum_b \chi_b^{\hat{a}}(a)$$



$$= |G| \delta_{a,0}$$

$$\sum_{\hat{a}} \chi_{\hat{a}}^{\hat{a}}(b) = |G| \delta_{b,0}$$

$$Z_{T/G/\hat{G}} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{a,b} |G|^2 \delta_{a,0} \delta_{b,0}$$



$$= \boxed{\square} = Z_T$$

$$T/G/\hat{G} = T$$

※ 時空が一般の閉じた Riemann 面の場合

$$Z_{T/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^{\chi}} Z_T \quad N := |G|$$

$\chi : \Sigma$ の Euler 数

$$= 2 - 2g = V - E + F$$

\uparrow ジーナス \uparrow 頂点 \uparrow 辺 \uparrow 面

～～ Counter term を取ると吸収した。

$$Z_{T/G, \text{new}} = \sqrt{N}^X Z_{T/G, \text{"まつたの。}}$$

$$\sqrt{N}^X = \exp \left(\sum_{\text{局所}} \frac{1}{2} \log N - \sum_{\text{ラグランジアン}} \frac{1}{2} \log N + \sum_{\text{フーリエ}} \frac{1}{2} \log N \right)$$

(局所相殺項で書く)

※ G が "non-abelian" の場合、 T/G 理論

。 Wilson loop はトポロジカル $W_R(C)$ R: 既約表現
L しかし、 \otimes で群にならない

⇒ 「非可逆対称性」の例) $\text{Rep}(G)$

★ KW 双対性

命題

$$\frac{1}{(\sinh 2K)^{\sqrt{2}}} Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{(\sinh 2\tilde{K})^{\sqrt{2}}} Z_{\text{Ising}}(\tilde{K})$$

$$K \text{ と } \tilde{K} \text{ の関係: } \sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1$$

○ 有用な公式

$$\delta_{b,0}^{\text{mod } 2} := \begin{cases} 0 & , b \equiv 1 \pmod{2} \\ 1 & , b \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{c=0,1} (-1)^{cb} = \frac{1}{2} (1 + (-1)^b)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{c=0,1} e^{\pi i c b}$$

↓

plaq. P に $C_p = 0, 1$ の自由度

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{2^{2V}} \sum_{\{a\}, \{b\}, \{c\}} \exp \left[K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}} \right. \\ \left. + \pi i \sum_{P=\langle i:j:k:l \rangle} C_P (b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li}) \right]$$

証明

$$Z := Z_{\text{Ising}} / \mathbb{Z}_2(K)$$

ゲージ固定 $a_i = 0$

$$= \frac{1}{2^V} \sum_{\{c\}} \sum_{\{b\}} \exp \left[K \sum_{\substack{l \\ \text{リンク}}} (-1)^{b_l} + \pi i \sum_{p=\langle ijk \rangle} c_p (b_{ij} + \dots) \right]$$

$\sum_{\{b\}}$ を先に評価

1つの l に注目 \rightarrow 2つの plaq. に接する

p	e g
---	-----

$$Z = \frac{1}{2^V} \sum_{\{c\}} \prod_{\substack{l \\ \text{リンク}}} Z_l$$

$$Z_l := \sum_{b=0,1} \exp \left(K(-1)^b + \pi i b (c_p + c_g) \right) \underset{=: C}{=} C$$

$$= e^K + (-1)^c e^{-K}$$

$$= \begin{cases} 2 \cosh K & (c=0) \\ 2 \sinh K & (c=1) \end{cases}$$

$$Z_l = 2 \cosh K (\tanh K)^c$$

:

$$= \sqrt{2 \sinh 2K} e^{\tilde{K}(-1)^c}$$

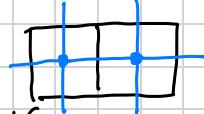
$$\begin{aligned} & \text{(公式 } (-1)^c = 1 - 2c \text{)} \\ & c=0,1 \end{aligned}$$

$$\tilde{K} : \tanh K = e^{-2\tilde{K}}$$

$$\uparrow \downarrow \\ \sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1$$

$$Z = \frac{1}{2^V} \sum_{\{c\}} \prod_{l: \text{link}} Z_l$$

" dual link <pg>



$$= \frac{1}{2^V} \sum_{\{c\}} \prod_{\langle pq \rangle} \sqrt{2 \sinh 2K} e^{\tilde{K}(-1)^{c_p + c_q}}$$

$$(\# \text{ links}) = 2V$$

$$= (\sinh 2K)^V \sum_{\{c\}} \exp \left(\tilde{K} \sum_{\langle pq \rangle} (-1)^{c_p + c_q} \right)$$

$$\underbrace{\frac{(\sinh 2K)^{V/2}}{(\sinh 2\tilde{K})^{V/2}}} \quad \underbrace{Z_{\text{Ising}}(\tilde{K})}$$

↓

$$\frac{1}{(\sinh 2K)^{V/2}} Z_{\text{Ising}/Z_2}(K) = \frac{1}{(\sinh 2\tilde{K})^{V/2}} Z_{\text{Ising}}(\tilde{K})$$

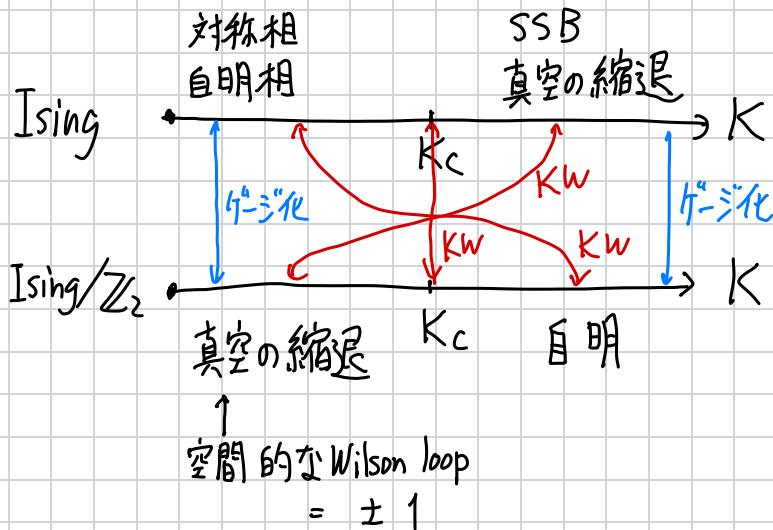


相構造

$$K_c : K_c = \tilde{R}_c$$

$$\sinh 2K_c = 1$$

$$\Rightarrow K_c = \frac{1}{2} \log(1+\beta)$$



★ Ising の演算子 (欠陥)

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) \quad (\propto Z_{\text{Ising}}(\tilde{K}) \leftarrow \text{二つの言葉づかい})$$

$$= \frac{1}{2^{2V}} \sum_{\{a\}, \{b\}, \{c\}} \exp \left[K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}} + \pi i \sum_{P=\{1234\}} C_P (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \right]$$

演算子 (欠陥)

1. スピノ演算子

$$\sigma_p = (-1)^{C_p}$$

$\{C\}$ の和をとった後で見ると
Lagrangianの中の場の次関数で書かれている

無くなっちゃってはいけない!!

$$\boxed{P} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{flat の代わりに} \\ S^{\text{mod } 2} \\ \sum b + 1, 0 \end{matrix}$$

2. b Wilson line = Ising "spin flip" の対称性欠陥
 $\eta(c) = (-1)^{b_{e_1} + b_{e_2} + \dots}$

$$\left(\frac{x}{\oint_p} \right)_\eta = -1 \quad \frac{x}{\oint_p}$$

3. 無秩序スピニ (disorder spin)

$$\mu_i \sim (-1)^{a_i} \quad \text{トポロジ不变でない} \\ \mu_i = (-1)^{a_i + b_{e_i} + \dots} \quad \Rightarrow \text{Wilson line を付ける}$$

$$\overbrace{\mu_i}^{x} \quad \overbrace{\eta}^{y}$$

局所演算子だけどトポロジカル欠陥がついた。

"non-genuine" 局所演算子
 非純粋

Ising の描像

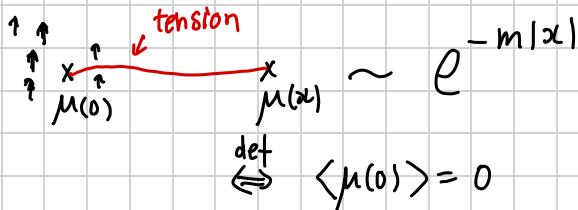


$+$ \leftarrow 反強磁性相互作用

名前の由来

- 秩序相（自発的対称性の破れ）

$$\langle \sigma(0) \rangle \neq 0 \quad (\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle \sigma(0) \sigma(x) \rangle \neq 0)$$



- 無秩序相（対称相）

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram showing two spins } \mu(0) \text{ and } \mu(x) \text{ with arrows pointing up, connected by a horizontal line labeled 'tension'. Below the diagram, it is stated that the average magnetization is non-zero.} & \sim \text{const} & \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle \mu(0) \rangle \neq 0 \\ \text{Ising } / \mathbb{Z}_2 \sigma & & \end{array}$$

★ KW 欠陥



アイン"ア

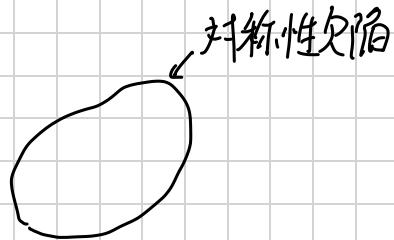
KW 双対性 $K = K_c \Rightarrow$ 非可逆対称性

$\text{Ising}/\mathbb{Z}_2 \simeq \text{Ising}$

- 対称性



\Rightarrow



\Downarrow

- 一般化

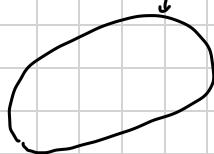


変換, ゲージ化, integrate in/out

うまく.

トポロジカル欠陥

\Rightarrow

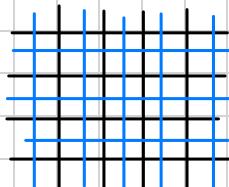


"half-space gauging"

□ D のとり方

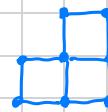
Ising のスピニが乗った 113 格子
"active lattice"

\Downarrow



双対 "inactive lattice"

D : inactive lattice の言葉で
"端"をすべて含んでいい



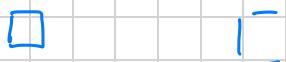
D : inactive lattice の

• | □
サイト リンク フラグメント

) の集合

次を満たす

- $P \in D \Rightarrow \partial P = \{P\text{のまわりの}4\text{つのリンク}\} \subset D$

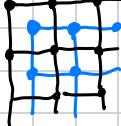


- $l \in D \Rightarrow \partial l = \{l\text{の両端のサイト}\} \subset D$



"Dirichlet boundary condition"

IC



$\leftarrow \partial D$ と IC,
 ∂D のリンク : ケージ場 = 0
サイト : ケージ変換なし

四 D 内でケージ化

(0. □ $a=0, 1$, | 相互作用)

D 内の要素に対して

1. | $\leftarrow b=0, 1 \Rightarrow a$ で γ couple, $\sum_{b=0, 1}$
"対称性欠陥"

2. 2 1 3 4 $\leftarrow \delta_{b_1+b_2+b_3+b_4, 0}^{\text{mod } 2} = \sum_{c=0, 1} \frac{1}{2} (-1)^{c(b_1+\dots+b_4)}$
"シヤニクシヨン"

$$3. \quad \square \leftarrow \text{トポロジ变换} \Rightarrow 1/\text{トポロジ体積} = \frac{1}{2}$$

4. Euler counter term

$$\bullet = \sqrt{2}$$

$$- = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\square = \sqrt{2}$$

$$Z_D = \sum_{\{a\}} \sum_{\{b\}} \sum_{\{c\}} \prod_{\square \in D} \frac{\sqrt{2}}{2} \prod_{| \in D} \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{\bullet \in D} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

← 拘束を c_2^*
 書いたときの $\frac{1}{2}$

↑ 全体 ↑ D の中たる

↑ "トポロジ体積"

$$\times \prod_{| \notin D} e^{K(-1)^{a_i + a_j}} \cdot \prod_{| \in D} e^{K(-1)^{a_i + a_j + b_{ij}}}$$

$$\times \prod_{\square \in D} (-1)^{C_p \sum_{l \in l} b_l}$$

■ b の和をとる

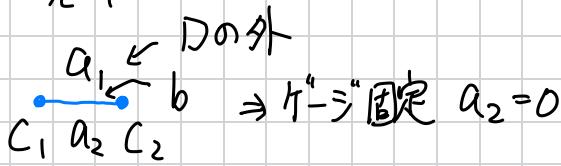
- D の内部 (前と同じ)

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} a_1 \\ \swarrow \\ c_1 \end{array} & b & \Rightarrow \text{トポロジ固定 } a_1, a_2 = 0 \\
 \begin{array}{c} \downarrow \\ a_2 \\ \searrow \\ c_2 \end{array} & & \left(\begin{array}{l} K = K_c \\ \sinh 2K = 1 \end{array} \right) \\
 & & C_1 + C_2
 \end{array}$$

$$\sum_{b=D,1} e^{K(-1)^b} (-1)^{b(C_1 + C_2)} = \sqrt{2} e^{K(-1)^{C_1 + C_2}}$$

← Euler と \neq は \neq です

・ 境界

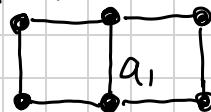


$$\sum_{b=0,1} e^{k(-1)^{b+a_1}} (-1)^{b(c_1+c_2)} = \sum_{b'} e^{k(-1)^{b'(c_1+c_2)}} \times (-1)^{a_1 c_1} (-1)^{a_1 c_2}$$

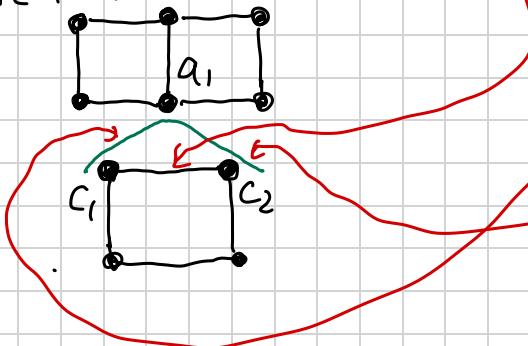
$(b' = b + a_1)$ とおる?

$$= \sqrt{2} e^{k(-1)^{c_1+c_2}} (-1)^{a_1 c_1} (-1)^{a_1 c_2}$$

active lattice



Euler $\zeta \neq \pm i\pi/kL$



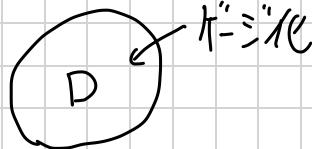
$$\begin{array}{ccc} a & & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ c & & \end{array} \rightarrow (-1)^{ac}$$

■ 残りの定数

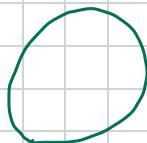
D内 $\bullet = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ D内のパルクでは中止せし

$\square = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$ 境界のみに残る
(topとした構成) ~ [Aasen, Mong, Fendley 16]

■ ここまで"のまとめ



↓



KW欠陥

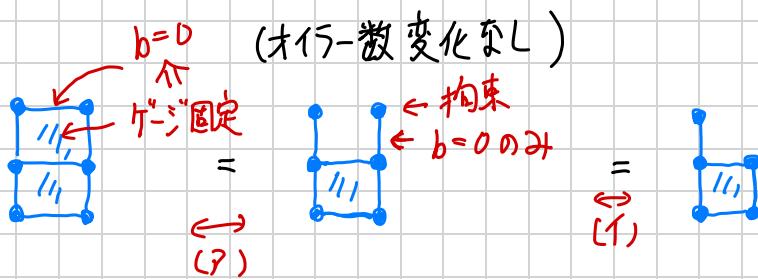
genuine codim 1 の欠陥

- Dのバルクは外と変わらない
- 局所的

$$\bullet_c^a - (-1)^{ac}$$

■ トポロジカルであること。

Dの例)



(ア), (イ) の操作で分配関数は変化なし

= トポロジカル

(ア), (イ) をくり返して縮めていく

$$= \bullet = \text{Euler } \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

拘束 $\delta_0 = 1$

従来の

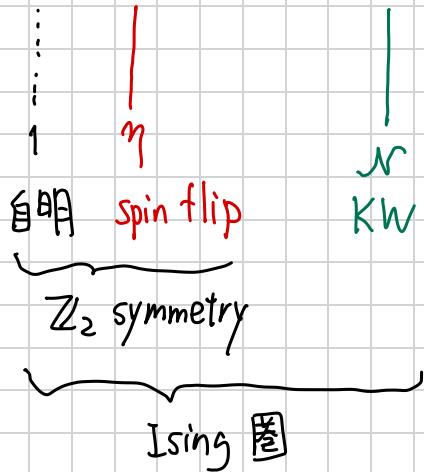
$$\Rightarrow \text{緑の図} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{対称性ではない!}$$

ここまで の 結論

- $K = K_c$ の Ising には「 KW 欠陥,
 $\text{codim} 1$ トポロジカル欠陥」がある.
 - これは従来の対称性の対称性欠陥
ではない.
- 少
一般化対称性、非可逆対称性の例

☆ 対称性の構造

2D Ising のトポロジカル欠陥



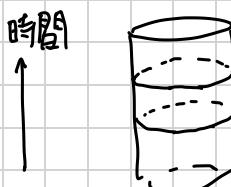
融合圏 (fusion category)
(おしくは [Bhardwaj, Tachikawa 17])

Fusion rule

$$\begin{array}{ccc}
 | & | & = \\
 a & b & \\
 \text{2つのトポロジカル欠陥} \\
 \text{を} & \text{と} & \text{おく}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 | \\
 a \otimes b \leftarrow \text{こうじる記号で書く。} \\
 \text{新たなトポロジカル欠陥}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 = \sum_c N_{ab}^c | \\
 c
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 "simple" \text{ な } t \text{ の } \\
 \text{仮定}
 \end{array}$$

Hilb. sp に作用する演算子(②の立場)の見方で
演算子の積

従来の対称性の場合
群演算



$$0 \quad \begin{array}{c|c} | & | \\ N & \eta \end{array} = \begin{array}{c} | \\ N \end{array} \quad (\Rightarrow N_{\eta} \text{ 非可逆})$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram showing a 3x3 grid of blue dots with a red vertical line through the middle column.} \\ \eta : \text{Wilson line} \\ \rightarrow D \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram showing a 3x3 grid of blue dots with a red vertical line through the middle column and a red dot at the top center.} \\ \text{Wilson line} \\ \uparrow \eta \rightarrow \text{場変化} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram showing a 3x3 grid of blue dots with a red vertical line through the middle column and a red dot at the top center.} \end{array}$$

$$0 \quad \begin{array}{c} \text{Diagram showing a 3x3 grid of blue dots with a red vertical line through the middle column.} \\ \eta : \text{spin flip} \\ \leftarrow \text{背景} \rightarrow \text{場} \\ \text{dynamical } T = \text{場} \\ b \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram showing a 3x3 grid of blue dots with a red vertical line through the middle column and a red dot at the top center.} \\ \text{背景} \rightarrow \text{場} \\ \text{dynamical } \eta \rightarrow \text{場} \\ \text{はさまれた} \\ b' = b + B \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram showing a 3x3 grid of blue dots with a red vertical line through the middle column and a red dot at the top center.} \end{array}$$

$$0 \quad \begin{array}{c} \text{Diagram showing two vertical green lines labeled } N \text{ and } N. \\ \eta \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \eta \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \boxed{D} \\ \downarrow \eta \text{-化} \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \eta \end{array}$$

$\Leftrightarrow b \text{ が } \eta \text{ の } O$
or \therefore

Quantum dimension

$$\text{a} \quad =: q^{\dim}$$

$$\text{Red circle} = 1 \quad , \quad \text{Green circle} = \sqrt{2}$$

 F-symbol

$$= \sum_f (F_{abc}^e)_{af} \begin{array}{c} e \\ \diagdown \quad \diagup \\ f \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array}$$

151

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array}
 = \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array}
 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \end{array} \right) + \begin{array}{c} \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right)$$

↗ link の 部 分
 explicit に 言 う

$$\circ \quad \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} = (-1)$$

化の WT id

$$0 \quad \begin{array}{c} x \\ \sigma \end{array} = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{○} \\ \text{II} \\ \begin{array}{c} x \\ \sigma \end{array} \end{array} \right) = - \begin{array}{c} x \\ \sigma \end{array} \right)$$

$$0 \quad \begin{array}{c} x \\ \sigma \end{array} \Big| = \begin{array}{c} x \\ \mu \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline x & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline & b=1 \text{ の } 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

強制的 $\sum b = 1$

★ 応用

[Chang, Lin, Shao, Wang, Yin 19]

命題：Ising 圈の対称性を持つ 2D QFT は
trivially gapped にならない

gapped かつ、空間のトポロジーがどうなつても
 真空に縮退なし。
 空間の体積が大きい

$$E_1 - E_0 \geq m \quad \exists m > 0 \text{ 体積によらない}$$

第1励起状態
 のエネルギー E_1
 基底状態のエネルギー
 $E_0 = 0$

証明

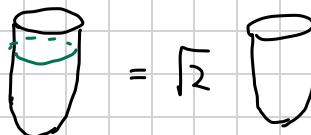
gapped, 唯一の真空 $|0\rangle$ を仮定

以外、計量の曲率 $\ll m^2$, 体積 $\gg \frac{1}{m} \Rightarrow |0\rangle$ 以外の
 拡散は無視

\hat{N} : Hilbert 空間に作用する演算子



$$\hat{N}|0\rangle = \sqrt{2}|0\rangle$$





$$\textcircled{1} \quad Z = \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = \sqrt{2}$$

矛盾

$$\textcircled{2} \quad Z = \dim \mathcal{H}_{\text{defect}} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

※ Ising 圈 $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ 対称性 \leftarrow 普通の対称性 \leftarrow これのおかげ?

別の対称性

Fibonacci 圈 : トポロジカル欠陥 1, F

$$\text{Fusion rule} \quad F^2 = F + 1$$

普通の対称性を含まない。

\Rightarrow 同様の命題が成り立つ (trivially gapped になれぬ)

$$\hat{F} \text{ の固有値 } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$