

弦理論入門

山口 哲

2021 年 8 月 3 日

目次

第 1 章	導入	4
第 2 章	ボゾンの弦理論	7
2.1	相対論的粒子	7
2.1.1	作用	7
2.1.2	対称性	7
2.1.3	補助場の導入	9
2.1.4	ゲージ固定と量子化	10
2.2	弦の作用	11
2.2.1	Nambu-Goto 作用	11
2.2.2	Polyakov 作用	12
2.2.3	Polyakov 作用の対称性	13
2.2.4	ゲージ固定	14
2.3	2 次元自由スカラー場	16
2.3.1	作用と運動方程式の一般解	16
2.3.2	共形対称性とエネルギー運動量テンソル	18
2.3.3	正準形式	19
2.3.4	量子化	20
2.4	光円錐ゲージ	22
2.4.1	時空の光円錐座標と作用	22
2.4.2	光円錐ゲージ固定	23
2.4.3	光円錐ゲージによる量子化	24
2.4.4	臨界次元	27
2.5	まとめ	30
第 3 章	超弦理論	32
3.1	なぜ「超」か	32
3.2	Grassmann 代数	33
3.3	世界線の超対称性	34
3.3.1	超対称量子力学	37
3.3.2	Dirac 括弧とフェルミオンの正準交換関係*	38

3.3.3	世界線の局所超対称性	40
3.4	2次元スピノール	41
3.4.1	ガンマ行列	41
3.4.2	Chirality	41
3.4.3	C 行列	42
3.4.4	フェルミオンの作用	43
3.5	世界面の超対称性	44
3.5.1	超世界面	44
3.5.2	超場と超対称変換	44
3.5.3	大域的な超対称性を持つ作用	45
3.5.4	超対称性のカレント	46
3.5.5	エネルギー運動量テンソル	47
3.5.6	局所超対称性を持つ作用	48
3.5.7	スピン構造	49
3.6	2次元の自由フェルミオン場	50
3.6.1	作用とモード展開	50
3.6.2	Dirac 括弧と反交換関係	51
3.6.3	エネルギー運動量テンソル	52
3.6.4	真空のエネルギー	54
3.7	超共形代数	55
3.7.1	超対称性のある系の量子化と Virasoro 代数	55
3.7.2	超対称性のカレントと超共形代数	55
3.7.3	超対称性のある系と真空のエネルギー	57
3.8	光円錐ゲージ	58
3.8.1	ゲージ固定	58
3.8.2	拘束条件	59
3.8.3	量子化と臨界次元	59
3.8.4	R セクター	61
3.9	GSO 射影	63
3.9.1	フェルミオン数	64
3.9.2	GSO 射影と 2 種類の超弦理論	65
3.10	超弦理論の時空の超対称性	66
3.10.1	SO(8) の表現論	66
3.10.2	無質量スペクトル	69

3.10.3	時空の超対称性	72
3.11	まとめ	73
第 4 章	D-brane	75
4.1	D-brane とは？	75
4.2	境界のある 2 次元自由スカラー場	75
4.2.1	作用と境界条件	76
4.2.2	二重化トリック	78
4.2.3	モード展開	79
4.3	ボゾンの弦理論の D-brane	86
4.3.1	1 枚の平らな D-brane	86
4.3.2	2 枚の並行な D-brane	88
4.3.3	2 つの異なる D-brane	90
4.4	2 次元超対称理論の境界	91
4.4.1	超対称性のカレントに対する境界条件	91
4.4.2	二重化のトリック	92
4.4.3	フェルミオンの境界条件	92
4.4.4	真空のエネルギー	94
4.5	超弦理論の D-brane	95
4.5.1	1 枚の D-brane	95
4.5.2	D-brane の系	96
4.6	まとめ	98
付録 A	局所超対称性を持つ作用	100
A.1	多脚場とスピン接続	100
A.2	ガンマ行列とスピノール	102
A.3	作用	103
A.4	対称性	105

まえがき

これは、大阪大学理学研究科物理学専攻の 2021 年度の授業「素粒子物理学特論 I」で行った講義のための資料です。内容は弦理論の入門的な講義です。数式や文章、論理の流れなどの間違いがありましたら、ご指摘いただければ幸いです。

再配布等は自由に行ってください。

第1章 導入

この講義では、弦理論の入門的な講義を行います。弦理論は量子重力理論の最も有力な候補です。そのために現在盛んに研究されています。たくさんの啓蒙書や教科書、講義録などが存在し、様々なレベルで弦理論を学ぶことができます。

その中で、この講義では比較的標準的に、ある意味で古風に弦理論を取り扱います。半期の講義なのであまり欲張らずに、スペクトラムを出すことに専念します。一応「M1でも分かるように」を目標としています。¹⁾ただし取り扱う部分に関しては「お話」のレベルではなく、なるべく論理的に追えるようにします。将来弦理論を研究しない人にとっても、教養として知っておくときっと役に立つと思います。将来弦理論を研究する人にとっては、この講義のレベルは本当に入門的なものです。さらに高度な教科書などを読むためのきっかけになれば良いと思います。

仮定する知識は、解析力学、量子力学、特殊相対性理論です。あと一般相対性理論と場の量子論の基本的な知識があると理解しやすい部分があります。

この講義を準備する際次の文献を参考にしました。

- [GSW] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 1,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1987)
- [P] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1, 2,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998)
- [BBS] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, “String theory and M-theory: A modern introduction,” Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2007)
- [T] D. Tong, “String Theory,” arXiv:0908.0333 [hep-th].

特に主として [GSW] を参考にしました。

さて、この講義の大きな目標は、

弦理論が重力の量子論であることを納得すること。

です。一般相対論によると重力は時空の計量の力学として記述されるのでした。つまり、弦理論は時空そのものの量子力学を取り扱う理論ということになります。重力以

1) 逆に、ある程度知っている人には物足りないかもしれません。

外の力を表すゲージ理論や物質なども弦理論には含まれるので²⁾、弦理論は力、物質、時空を統一的に扱える統一理論の有力な候補ということになります。

そのために、いろいろな計算をやったりします。この講義で取り扱うのは、いわゆる第一量子化の方法です。場の理論を知っている人は、ここでやるのは任意個の弦をいっぺんに取り扱う「弦の場の理論」ではないことに注意してください。この理由を少し説明します。

私の相対論的量子力学の講義をとってくれた人は、相対論的な粒子の理論を考えるには場の理論に行かなければならない、と強調したのを覚えていると思います。実はこれは厳密には嘘で、がんばると場の理論に行かないで粒子の生成、消滅を含むような反応を取り扱う定式化もあります。ただし、これには次のような大きな欠点があります。

- 定式化が技術的にめんどくさい。
- どういう種類の粒子を入れるか、どういう相互作用をどのように入れるかという原理が分からない。
- 摂動論しか取り扱えない。

こういう欠点があるので、通常粒子の反応は場の理論で取り扱います。第一量子化の定式化で粒子の理論を取り扱うことは、ほとんどありません。

ところが、弦の場合には状況が変わります。

- 弦の場の理論がよく分かっていない。分かっている部分でも、非常にめんどくさい。
- 弦の第一量子化の定式化だけで、粒子の種類や相互作用が決まる。

1 番目の状況があるので、弦の場の理論をやるよりは、第一量子化の方法の方が（相対的に）ずっとやさしいです。2 番目の状況は非常に重要で、これが粒子と弦の最も大きな違いの一つです。ただし、第一量子化の方法では摂動論しか扱えないのは弦理論の場合も同じです。弦理論の非摂動論的な性質に関する研究はずっと続いています。

この講義での記号についてまとめておきます。まず、自然単位系を用いるので $c = \hbar = 1$ です。時空としては主に D 次元の Minkowski 空間を取り扱います。

2) 逆に弦理論に元々入っていないものを手で入れることが出来ない、というのも弦理論の大きな特徴の一つです。

$\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, D-1$ として、時空の座標を X^μ と書きます。Minkowski 計量は、

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots) \quad (1.0.1)$$

というものをとります。

第 2 章 ボゾンの弦理論

ここではまず、ボゾンの弦理論を扱います。ボゾンの弦理論はタキオンが存在するなど様々な欠陥があります。しかし、取り扱いが技術的にやさしいので、弦理論のトイ・モデル (現実的ではないが、性質を理解するための簡単なモデル) として重要です。

2.1 相対論的粒子

弦理論に入る前に、練習として相対論的粒子の理論を取り扱います。特に世界線の座標変換というゲージ対称性の取り扱いが、今後の鍵となります。

2.1.1 作用

D 次元の Minkowski 時空を動く自由な粒子を考えます。その場合に作用は Lorentz 不変性を持たせたいわけですが、そのような作用ですぐに思いつくのは、「世界線の長さ」です。

$$S \propto (\text{世界線の長さ}) \quad (2.1.1)$$

世界線とは、運動する粒子が時空の中に描く線のことです。世界線の長さを数式で書くためには、世界線に沿ったパラメータを導入しなければなりません。このパラメータを τ と書くことにします。重要なのはこのパラメータの選び方は時間を戻ったりしない限り任意であるということです。世界線のパラメータ表示を $X^\mu(\tau)$ とすると

$$S_1[X] = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu(\tau) \dot{X}^\nu(\tau)} \quad (2.1.2)$$

となります。正の数 m は質量であることが分かります。

2.1.2 対称性

この作用には Poincare 対称性があります。その他に重要な対称性として「世界線の座標変換」の対称性があります。もともと世界線の座標 (パラメータ) τ は長さを式で書くために便宜上導入したものであり、物理的意味はありません。したがって τ を別

のものに取り替えても理論は不変であるはずです。

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau). \quad (2.1.3)$$

このとき X^μ の変換性は、

$$X^\mu(\tau) \rightarrow X'^\mu(\tau) : X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau). \quad (2.1.4)$$

となります。¹⁾

実際にこのときの作用の変化を調べてみましょう。主張は $S_1[X'] = S_1[X]$ となることです。式 (2.1.2) で単に X を X' で置き換えます。

$$S_1[X'] = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} X'^\mu(\tau) \frac{d}{d\tau} X'^\nu(\tau)}. \quad (2.1.5)$$

τ は積分変数なので、勝手に τ' と書き換えてもよいはずですが。さらに変換性 (2.1.4) を使います。

$$S_1[X'] = -m \int d\tau' \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau'} X'^\mu(\tau') \frac{d}{d\tau'} X'^\nu(\tau')} \quad (2.1.6)$$

$$= -m \int d\tau' \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau'} X^\mu(\tau) \frac{d}{d\tau'} X^\nu(\tau)} \quad (2.1.7)$$

さらに合成関数の微分と積分測度の変換

$$\frac{d}{d\tau'} = \frac{d\tau}{d\tau'} \frac{d}{d\tau}, \quad d\tau' = d\tau \frac{d\tau'}{d\tau} \quad (2.1.8)$$

および、 τ' は τ の単調増加関数であることを考慮すると

$$S_1[X'] = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} X^\mu(\tau) \frac{d}{d\tau} X^\nu(\tau)} = S_1[X] \quad (2.1.9)$$

となって作用が不変であることが示せました。

後の練習のために、この世界面の座標変換の無限小形を求めておきましょう。 $\xi(\tau)$ を無限小のパラメータとして、変換を

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau + \xi(\tau) \quad (2.1.10)$$

とします。 X の無限小変換は

$$\delta_\xi X^\mu(\tau) = X'^\mu(\tau' - \xi(\tau)) - X^\mu(\tau) = X'^\mu(\tau') - \xi(\tau) \dot{X}^\mu(\tau) - X^\mu(\tau) = -\xi(\tau) \dot{X}^\mu(\tau) \quad (2.1.11)$$

1) このような変換性は「 X^μ は不変である」とは**言わない**ことに注意してください。「 X^μ は不変である」とは $X'^\mu(\tau) = X^\mu(\tau)$ となることです。引数に注意してください。

となります。

この世界面の座標変換の特徴はパラメータ ξ が座標 τ に任意によっていることです。これは対称性として非常に大きいものです。このようなパラメータが座標に任意によるような対称性を「局所的対称性」あるいは「ゲージ対称性」と呼びます。ゲージ対称性を持つ系の量子論を考えるとときには注意が必要で、多くの場合「ゲージ固定」と呼ばれる操作が必要になります。

2.1.3 補助場の導入

式 (2.1.2) で導入した作用は、次のような点で扱いづらいです。

- 平方根があって、扱いが煩雑になります。
- 質量のない粒子が扱えません。

そこで、vielbein と呼ばれる補助場 $e(\tau)$ を導入して作用を次のように書き換えます。

$$S_2[e, X] = \frac{1}{2} \int d\tau [e^{-1} \dot{X}^2 - em^2], \quad (\dot{X}^2 = \eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu). \quad (2.1.12)$$

この作用では、平方根は現れていないし $m = 0$ とすることにより質量のない粒子も扱えます。

実際、作用 (2.1.12) が作用 (2.1.2) と古典的に同等であることを見てみましょう。 e についての運動方程式を解いて、それを使って e を消去します。 e についての運動方程式を求めるために任意の変分 δe に対して作用の変分を求めると

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d\tau [-e^{-2} \dot{X}^2 - m^2] \delta e \quad (2.1.13)$$

となります。ここから運動方程式 $\delta S = 0$ は、

$$-e^{-2} \dot{X}^2 - m^2 = 0 \quad (2.1.14)$$

となって、これを e について解くと

$$e = \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{X}^2} \quad (2.1.15)$$

となります。これを使って作用 (2.1.12) から e を消去すると

$$S_2 = \frac{1}{2} \int d\tau \left[\frac{m}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \dot{X}^2 - m^2 \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{X}^2} \right] = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^2} \quad (2.1.16)$$

となって S_1 と同じになります。

新しい作用 (2.1.12) にも世界線の座標変換の対称性があります。これは無限小変換の形で表すと

$$\begin{aligned}\delta_\xi X^\mu &= -\xi \dot{X}^\mu, \\ \delta_\xi e &= -\xi \dot{e} - \dot{\xi} e\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

となります。

2.1.4 ゲージ固定と量子化

通常ゲージ対称性があると、そのままでは正準量子化できません。例えば今の場合、 e に対する正準共役運動量が恒等的に 0 になってしまいます。それを回避するため、次のような手順でゲージ固定を行います。

- $e(\tau) = 1$ とします。これは、式 (2.1.17) の変換を使って、この形に出来ます。
- $e(\tau)$ に対する運動方程式を拘束条件として覚えておきます。今の場合

$$0 = \frac{1}{2}e^{-2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m^2 = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m^2\tag{2.1.18}$$

- 通常の手続きにより、正準量子化を行います。

さて、 $e(\tau) = 1$ とすることによって Lagrangian は、

$$L = \frac{1}{2}\dot{X}^2 - \frac{1}{2}m^2\tag{2.1.19}$$

となります。ここから正準共役運動量は、

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \dot{X}_\mu\tag{2.1.20}$$

であり、Hamiltonian は、

$$H = P_\mu \dot{X}^\mu = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}m^2\tag{2.1.21}$$

となります。すると拘束条件 (2.1.18) は、

$$H = 0\tag{2.1.22}$$

と書けることに注意します。

さて、正準量子化を行しましょう。例えば Schrödinger 描像で座標基底の波動関数 $\Psi(X, \tau)$ を考えることにします。いつものように $P_\mu = -i\partial_\mu := -i\partial/\partial X^\mu$ の置き換えをして Schrödinger 方程式を書くと

$$i\frac{\partial}{\partial \tau}\Psi(X, \tau) = H\Psi(X, \tau) = \frac{1}{2}(-\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Psi(X, \tau)\tag{2.1.23}$$

となります。ここで次のような疑問が起こるでしょう。

- Ψ の τ 依存性はどういう意味でしょう。 τ は手で勝手に決めたパラメータだったはずなのに。
- 拘束条件はどうすればいいのでしょうか。

これを解決する一つの方法として、拘束条件を状態に課して、「物理的状态」を定義することです。つまり物理的状态とは

$$0 = H\Psi = (-\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\Psi \quad (2.1.24)$$

を満たす状態のことです。物理的状态に関しては、 τ 依存性が無いことが Schödinger 方程式から分かります。さらに、実際の時間発展 (X^0 が物理的な時間である) を記述するのは、拘束条件である (2.1.24) になります。この方程式は「Klein-Gordon 方程式」と呼ばれる、代表的な相対論的な波動方程式です。

演習問題

1. 式 (2.1.12) の作用が、変換 (2.1.17) の元で不変であることを示してください。
2. (a) 式 (2.1.2) の作用で表される系で、正準運動量と Hamiltonian を求めてください。この場合、どんな不都合があるのでしょうか?
(b) ゲージ固定条件 $X^0 = \tau$ を課してみることにしましょう。この元で X^i , $i = 1, \dots, (D-1)$ に対する正準共役運動量を求めてください。また Hamiltonian を求めてください。
3. 今回、相対論的粒子から出発して Klein-Gordon 方程式を導きましたが、似たような方法で Dirac 方程式を導くようなものを考えてみてください。(難しいのでオプション。いろいろ考えてみてください。)

2.2 弦の作用

2.2.1 Nambu-Goto 作用

さて、 D 次元の Minkowski 時空を運動する閉じた弦 (closed string) を考えましょう。粒子のときのアナロジーから

$$S \propto (\text{世界面の面積}) \quad (2.2.1)$$

となることが考えられます。この作用を式で書くために世界面の座標 (τ, σ) を導入します。とりあえず、パラメータは自由にとれるが τ 方向は時間的に、 σ 方向は空間的になるようにとります。また、 (τ, σ) を (σ^0, σ^1) と書くことも多いです。2つまとめて σ^α , $(\alpha = 0, 1)$ とも書きます。世界面は、 $X^\mu(\tau, \sigma)$ とパラメータ付けされます。単に $X^\mu(\sigma)$ と書くことも多いです。次の誘導計量 (induced metric) を導入すると便利です。

$$G_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu(\sigma) \partial_\beta X^\nu(\sigma) \eta_{\mu\nu} \quad (2.2.2)$$

ここで、 $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \sigma^\alpha}$ です。弦の作用が世界面の面積に比例するとすると、

$$S_{NG}[X] = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\det G} \quad (2.2.3)$$

と書けます。これは **Nambu-Goto 作用** と呼ばれます。ここで α' (アルファプライム) は「スロープパラメータ (slope parameter)」と呼ばれる定数です。あるいは、弦の張力は、 $\frac{1}{2\pi\alpha'}$ となるといっても良いです。²⁾

2.2.2 Polyakov 作用

作用 (2.2.3) は、やはり平方根が面倒なので粒子の場合と同様にして書き換えます。補助場として、「世界面の計量³⁾」 $h_{\alpha\beta}(\sigma)$ を導入します。

$$h_{\alpha\beta}(\sigma), \quad h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}, \quad (\alpha, \beta = 0, 1) \quad (2.2.4)$$

これを用いて、**Polyakov 作用**を次の形で導入します。

$$S[X, h] = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \quad (2.2.5)$$

ここで

$$h = \det h_{\alpha\beta}, \quad h^{\alpha\beta} : h_{\alpha\beta} \text{の逆行列} \quad (2.2.6)$$

2) 定数 α' がこのような形で出てきたのは歴史的な理由によります。 α' はどの教科書や論文でも定義が同じなので便利です。「弦の長さ」(ℓ_s と書いたりする) もよく使われるパラメータですが、教科書や論文によって定義が異なるので注意が必要です。 $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$ だったり、 $\ell_s = \sqrt{2\alpha'}$ だったりします。

3) 誘導計量 $G_{\alpha\beta}$ とは別のものであることに注意しましょう。こちらの世界面の計量の方が後々重要です。

です。この Polyakov 作用 (2.2.5) が Nambu-Goto 作用 (2.2.3) と古典的に同等であることを示しましょう。これは、Polyakov 作用 (2.2.5) から $h_{\alpha\beta}$ を運動方程式を用いて消去することによって示せます。 $h_{\alpha\beta}$ についての運動方程式は、

$$0 = T_{\alpha\beta} := -\frac{4\pi}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}}. \quad (2.2.7)$$

この $T_{\alpha\beta}$ は世界面のエネルギー運動量テンソルです。実際 S の変分は、

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \left(\delta h^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} G_{\gamma\delta} \right) \quad (2.2.8)$$

となるので世界面のエネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \frac{2}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} G_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} G_{\gamma\delta} \right) \\ &= \frac{2}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{4} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X^\nu \right) \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

となります。なので運動方程式 (2.2.7) は

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} G_{\gamma\delta} \quad (2.2.10)$$

と書けます。この式の両辺の \det をとると、 2×2 行列であることに注意して、

$$\det G = \frac{1}{4} h (h^{\gamma\delta} G_{\gamma\delta})^2 \quad (2.2.11)$$

となるので、さらに両辺 $(-)$ をかけて平方根をとると

$$\frac{1}{2} \sqrt{-h} h^{\gamma\delta} G_{\gamma\delta} = \sqrt{-\det G} \quad (2.2.12)$$

となります。これは、Polyakov 作用 (2.2.5) の積分の中に出てきているものです。これを Polyakov 作用 (2.2.5) に代入すると Nambu-Goto 作用 (2.2.3) に一致します。

2.2.3 Polyakov 作用の対称性

Polyakov 作用の対称性について見てみましょう。まずは、重要な局所的対称性についてです。

- 世界面の一般座標変換 $\sigma'^\alpha = \sigma'^\alpha(\sigma)$ 。この変換で $X^\mu, h_{\alpha\beta}$ はそれぞれ次のように変換します。

$$X'^\mu(\sigma') = X^\mu(\sigma), \quad h'_{\alpha\beta}(\sigma') = \frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \sigma'^\alpha} \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \sigma'^\beta} h_{\gamma\delta}(\sigma) \quad (2.2.13)$$

- Weyl 対称性。パラメータは世界面上の関数 $\omega(\sigma)$ で、 $X^\mu, h_{\alpha\beta}$ はそれぞれ次のように変換します。

$$X'^\mu(\sigma) = X^\mu(\sigma), \quad h'_{\alpha\beta}(\sigma) = e^{2\omega(\sigma)} h_{\alpha\beta}(\sigma) \quad (2.2.14)$$

これら局所的な対称性は非常に重要で理論の整合性にかかわるものです。例えば、世界面の座標 σ^α は作用を書くために手で勝手に決めたパラメータであり、物理的、幾何学的意味はありません。だから物理量を計算したときにはこの世界面の座標の取り方によってはいけないわけです。

[注意]

エネルギー運動量テンソル (2.2.9) のトレースを考えると、

$$h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.2.15)$$

となります。これは、実は Weyl 対称性の現れです。

また、Minkowski 時空上を飛ぶ弦の大域的対称性としては、Poincare 対称性があります。パラメータは、Lorentz 変換のパラメータ Λ^μ_ν ($\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}$ を満たす) と並進のパラメータ a^μ で、変換性は

$$X'^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\sigma) + a^\mu \quad (2.2.16)$$

です。

[注意]

時空の意味での長さの単位を選ぶことにより、 α' は好きな値にすることができます。このノートでは今後 $\alpha' = 2$ となる単位を選びます。 α' を復活させるには、 $\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}$ を長さの単位とし、言い換えると $\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}$ を質量の単位として入れていけばよいです。

2.2.4 ゲージ固定

局所的な対称性がある理論を量子化するには、多くの場合「ゲージ固定」を行う必要があります。ここでは、次のようなゲージを採用することにします。

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.2.17)$$

局所的な対称性のパラメータは、一般座標変換の 2 つと Weyl 変換の 1 つの合計 3 つあるので、数の上からは上のようなゲージを取ることはできます。このゲージでは作用は

$$S = -\frac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.2.18)$$

粒子の場合でやったのと同様に $h_{\alpha\beta}$ に対する運動方程式 (2.2.7) を拘束条件として課さなければなりません。これは今のゲージでは (2.2.9) から

$$0 = T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (2.2.19)$$

と書けます。したがって、**古典的な弦理論は (2.2.18) の作用で表される系で (2.2.19) の拘束条件を課したものです。**

さて、局所対称性をゲージ固定したのですが、実はまだ残っている対称性があります。それは、一般座標変換と Weyl 変換を同時に行うようなものです。一般座標変換のうち、

$$\frac{\partial \sigma^\gamma}{\partial \sigma'^\alpha} \frac{\partial \sigma^\delta}{\partial \sigma'^\beta} \eta_{\gamma\delta} = e^{-2\omega(\sigma)} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.2.20)$$

となるような関数 $\omega(\sigma)$ が存在するようなものを考えます。すると Weyl 変換を同時に行うことによってゲージ固定条件を不変に保つことができます。このような一般座標変換を「共形変換 (Conformal transformaiton)」と呼びます。

これらの作用や拘束条件を表すのに便利な座標として光円錐座標を導入しましょう。

$$\sigma^\pm = \sigma^0 \pm \sigma^1 \quad (2.2.21)$$

とすると計量は、

$$ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-, \quad \eta_{\bullet\bullet} = \begin{matrix} & + & - \\ + & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ - & \end{matrix}, \quad \eta^{\bullet\bullet} = \begin{matrix} & + & - \\ + & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ - & \end{matrix}. \quad (2.2.22)$$

となります。この座標を用いると共形変換は、

$$\sigma'^+ = \sigma'^+(\sigma^+), \quad \sigma'^- = \sigma'^-(\sigma^-), \quad (2.2.23)$$

と書けます。実際 σ' で書いた計量は、

$$ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^- = -\frac{\partial \sigma^+}{\partial \sigma'^+} \frac{\partial \sigma^-}{\partial \sigma'^-} d\sigma'^+ d\sigma'^- \quad (2.2.24)$$

となり、これは Weyl 変換により元の計量と同じ形になります。作用とエネルギー運動量テンソルはそれぞれ

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu, \quad d^2\sigma := d\sigma^0 d\sigma^1, \quad (2.2.25)$$

$$T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu, \quad T_{--} = \frac{1}{2} \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu, \quad T_{+-} = T_{-+} = 0 \quad (2.2.26)$$

と書けます。

演習問題

1. Polyakov 作用が、一般座標変換、および Weyl 変換で不変であることを示してください。

2.3 2次元自由スカラー場

これから、作用 (2.2.18) と拘束条件 (2.2.19) の系を考えていきます。これらは作用 (2.2.25) と拘束条件 $T_{++} = T_{--} = 0$ (T_{++}, T_{--} は (2.2.26) 式) と書けます。一旦拘束条件を忘れると、作用 (2.2.18) は相互作用のない、2次元の自由スカラー場が D 個あるだけの系になります⁴⁾。ですから、この節ではまず1個の自由スカラー場について量子論まで含めて詳しく調べます。それを D 個集めてきて拘束条件を考えるのは、後で行います。

2.3.1 作用と運動方程式の一般解

2次元自由スカラー場 X が一つを考えてみましょう。このときの作用は、

$$S = -\frac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta X \quad (2.3.1)$$

です。これは、自由場であり、無限個の調和振動子からなっています。この無限個の調和振動子の生成消滅演算子に分けることを考えましょう。運動方程式は、

$$0 = -\partial_\alpha \partial^\alpha X = \partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X. \quad (2.3.2)$$

今、閉じた弦を考えているので、 σ 方向には周期性があります。この周期を 2π にとります。すると X は Fourier 展開できて

$$X(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n(\tau) e^{-in\sigma}. \quad (2.3.3)$$

4) X^0 だけが少し違いますが、取り扱いは同様にできます。

運動方程式 (2.3.2) は、

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\ddot{X}_n(\tau) + n^2 X_n(\tau)) e^{-in\sigma} = 0 \quad (2.3.4)$$

となりますが、これは

$$\ddot{X}_n(\tau) = -n^2 X_n(\tau), \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.3.5)$$

と同等です。したがって、この系は $X_0(\tau)$ という自由粒子と $X_n(\tau)$, ($n \neq 0$) の角振動数 $|n|$ の調和振動子が集まった系と考えることができます。これらは、互いに独立⁵⁾なので、一つ一つに分けて考えることができます。一般解は a_n, b_n , ($n \neq 0$), x, p を積分定数として

$$n \neq 0, \quad X_n(\tau) = a_n e^{-i|n|\tau} + b_n e^{i|n|\tau}, \quad (2.3.6)$$

$$n = 0, \quad X_0(\tau) = x + 2p\tau \quad (2.3.7)$$

となります。これを式 (2.3.3) に代入すると

$$X(\tau, \sigma) = x + 2p\tau + \sum_{n>0} (a_n e^{-in\tau} + b_n e^{in\tau}) e^{-in\sigma} + \sum_{n>0} (a_{-n} e^{-in\tau} + b_{-n} e^{in\tau}) e^{in\sigma}. \quad (2.3.8)$$

このままでも良いのですが、次のような積分変数 $\alpha_n, \tilde{\alpha}_n$, ($n \neq 0$) を用いるのが標準的であり、便利です。 $n > 0$ として

$$\alpha_n := -ina_n, \quad \alpha_{-n} := inb_{-n}, \quad \tilde{\alpha}_n := -ina_{-n}, \quad \tilde{\alpha}_{-n} := inb_n \quad (2.3.9)$$

とすると、

$$X(\tau, \sigma) = x + 2p\tau + i \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n}{n} e^{-in(\tau+\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n}{n} e^{-in(\tau-\sigma)} \right). \quad (2.3.10)$$

今、 $X(\tau, \sigma)$ は実数なので $\alpha_n, \tilde{\alpha}_n$ の複素共役は、

$$\alpha_n^* = \alpha_{-n}, \quad \tilde{\alpha}_n^* = \tilde{\alpha}_{-n} \quad (2.3.11)$$

を満たします。この積分変数決め方は、実は次のような微分したものが簡単に書けるように決めたものです。⁶⁾

$$\partial_+ X = p + \sum_{n \neq 0} \alpha_n e^{-in\sigma^+} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in\sigma^+}, \quad \partial_- X = p + \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n e^{-in\sigma^-} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n e^{-in\sigma^-}. \quad (2.3.12)$$

5) 後で拘束条件を考えると独立でなくなります。

6) 2次元での量子論を考えた際には、ボゾン X そのものは、赤外の振る舞いが悪く、局所演算子として良いものではないです。しかし微分したもの、あるいは後に考える頂点演算子形式のものは良い局所演算子です。

ここで、 $\alpha_0 := \tilde{\alpha}_0 := p$ と定義しました。また、微分記号

$$\partial_{\pm} := \frac{\partial}{\partial \sigma^{\pm}} = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1) \quad (2.3.13)$$

を用いました。

後のために式 (2.3.12) を逆に解いておきます。

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_+ X(\tau=0, \sigma) e^{in\sigma}, \quad \tilde{\alpha}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_- X(\tau=0, \sigma) e^{-in\sigma}. \quad (2.3.14)$$

また、 x についても解いておくと便利です。

$$x = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma X(\tau=0, \sigma). \quad (2.3.15)$$

2.3.2 共形対称性とエネルギー運動量テンソル

世界面のエネルギー運動量テンソルは弦理論を考える際には非常に重要な役割を果たします。まず、ゲージ固定した時に出てくる 2 次的な拘束条件、つまり世界面の計量に対する運動方程式は「エネルギー運動量テンソルが 0 になる」というものです。また、世界面の理論に残っている共形対称性に対するカレントはエネルギー運動量テンソルです。今の 1 つのボゾンの系に対するエネルギー運動量テンソルは、

$$T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X \partial_+ X, \quad T_{--} = \frac{1}{2} \partial_- X \partial_- X, \quad T_{+-} = T_{-+} = 0 \quad (2.3.16)$$

です。エネルギー運動量の保存則から運動方程式を満たすような配位に対して $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ が成り立ちます。書き換えると

$$\partial_- T_{++} = \partial_+ T_{--} = 0. \quad (2.3.17)$$

これは式 (2.3.12) の形からも分かります。 σ の周期性から次のように Fourier 展開できます。

$$T_{++} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in\sigma^+}, \quad T_{--} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{L}_n e^{-in\sigma^-}. \quad (2.3.18)$$

実際に式 (2.3.12) を代入すると T_{++} は

$$T_{++} = \frac{1}{2} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in\sigma^+} \alpha_m e^{-im\sigma^+} \quad (2.3.19)$$

$$= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \alpha_n \alpha_m e^{-i(m+n)\sigma^+} \quad (2.3.20)$$

となるので、

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m} \alpha_m \quad (2.3.21)$$

となります。同様にして

$$\tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_{n-m} \tilde{\alpha}_m \quad (2.3.22)$$

となります。

2.3.3 正準形式

量子化の準備として、今考えている理論を正準形式で考えてみましょう。
Lagrangian は、

$$L = \frac{1}{8\pi} \int d\sigma \left(\dot{X}^2 - (\partial_\sigma X)^2 \right) \quad (2.3.23)$$

となるので X に対する正準共役運動量 Π は、

$$\Pi(\sigma) = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}(\sigma)} = \frac{1}{4\pi} \dot{X}(\sigma) \quad (2.3.24)$$

となります。Hamiltonian は、

$$H = \int d\sigma \Pi(\sigma) \dot{X}(\sigma) - L = \int d\sigma \left(2\pi \Pi^2 + \frac{1}{8\pi} (\partial_\sigma X)^2 \right) = \frac{1}{8\pi} \int d\sigma (\dot{X}^2 + (\partial_\sigma X)^2) \quad (2.3.25)$$

となります。あるいは、エネルギー運動量テンソルや、そのモード L_n, \tilde{L}_n を使って書く

$$H = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma (T_{++}(\sigma) + T_{--}(\sigma)) = L_0 + \tilde{L}_0 \quad (2.3.26)$$

となります。

次に Poisson 括弧を計算していくわけですが、後で量子化することを踏まえ、ここだけの記号として次のような括弧を導入します。

$$[A, B]_C := -i\{A, B\}_{\text{Poisson}}. \quad (2.3.27)$$

つまり

$$[X(\sigma), \Pi(\sigma')]_C = i\delta(\sigma - \sigma'), \quad [X(\sigma), X(\sigma')]_C = [\Pi(\sigma), \Pi(\sigma')]_C = 0 \quad (2.3.28)$$

です。量子化するときは基本的にはこの括弧を交換子に置き換えれば良いです。この括弧の計算で便利なのは、次の Leibniz 則です。

$$[A, BC]_C = [A, B]_C C + B[A, C]_C, \quad [BC, A]_C = [B, A]_C C + B[C, A]_C. \quad (2.3.29)$$

様々な量の間の括弧が次のように計算できます。この計算では、(2.3.14),(2.3.15) などの式を用います。

$$[X(\sigma), \dot{X}(\sigma')]_C = 4\pi i \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.3.30)$$

$$[\partial_\pm X(\sigma), \partial_\pm X(\sigma')]_C = \pm 2\pi i \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'), \quad [\partial_\pm X(\sigma), \partial_\mp X(\sigma')]_C = 0, \quad (2.3.31)$$

$$[\alpha_n, \alpha_m]_C = n\delta_{n+m}, \quad [\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_m]_C = n\delta_{n+m}, \quad [\alpha_n, \tilde{\alpha}_m]_C = 0, \quad (2.3.32)$$

$$[x, p]_C = i, \quad (2.3.33)$$

$$[L_n, L_m]_C = (n - m)L_{n+m}, \quad [\tilde{L}_n, \tilde{L}_m]_C = (n - m)\tilde{L}_{n+m}, \quad [L_n, \tilde{L}_m]_C = 0. \quad (2.3.34)$$

2.3.4 量子化

ここまで正準形式を準備したので、この系を量子化します。ここでは正準量子化の方法をとります。それは、 $X(\sigma), x, p, \alpha_n, \tilde{\alpha}_n$ などを Hilbert 空間に作用する演算子とすることです。そして、基本的には上の $[\cdot, \cdot]_C$ を演算子の交換関係 $[\cdot, \cdot]$ に置き換えます。この際、演算子順序の問題が出てくるのでこれを矛盾が出ないように解決しなければなりません。まず、正準交換関係

$$[X(\sigma), \Pi(\sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma'), \quad [X(\sigma), X(\sigma')] = [\Pi(\sigma), \Pi(\sigma')] = 0 \quad (2.3.35)$$

は、そのまま成り立つとします。すると、これから線形変換のみで導かれる交換関係

$$[\partial_\pm X(\sigma), \partial_\pm X(\sigma')] = \pm 2\pi i \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'), \quad [\partial_\pm X(\sigma), \partial_\mp X(\sigma')] = 0, \quad (2.3.36)$$

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m}, \quad [\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_m] = n\delta_{n+m}, \quad [\alpha_n, \tilde{\alpha}_m] = 0, \quad [x, p] = i \quad (2.3.37)$$

は導出されます。問題となるのは、(2.3.16) で表されるエネルギー運動量テンソルです。これを少し詳しく見てみましょう。まず、 $n \neq 0$ なら

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \alpha_m \quad (2.3.38)$$

の表式には問題はありません。なぜなら $n \neq 0$ なら $[\alpha_{n-m}, \alpha_m] = 0$ だからです。 \tilde{L}_n についても同様です。問題となるのは L_0 です。ここではひとまず正規順序積⁷⁾を用いて「定義」しておきます。

$$L_0 := \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n. \quad (2.3.39)$$

その上で Hamiltonian の表式は古典的なもの (2.3.26) を変形して

$$H = L_0 + \tilde{L}_0 + A \quad (2.3.40)$$

と書きます。ここで A は c 数です⁸⁾。それは $[\alpha_n, \alpha_{-n}] = n$ と c 数なので、順序の不定性も c 数になるからです。 L_0 **が出てくるところには、これからも c 数分の不定性があるかもしれないことは、覚えておいてください。**

また、次のような交換関係が成り立ちます。

$$[H, \alpha_n] = -n\alpha_n, \quad [H, \tilde{\alpha}_n] = -n\tilde{\alpha}_n. \quad (2.3.41)$$

したがって、 $\alpha_n, \tilde{\alpha}_n$, ($n > 0$) が消滅演算子、 $n < 0$ が生成演算子となります。

次に Hilbert 空間について考えましょう。この系は (x, p) からなる「自由粒子」と (α_n, α_{-n}) , $(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_{-n})$, ($n = 1, 2, \dots$) という無限個の調和振動子からなります。これを踏まえて、まず次のような消滅演算子で消える「Fock 真空」 $|k\rangle$, $k \in \mathbb{R}$ を考えます。

$$\alpha_n |k\rangle = \tilde{\alpha}_n |k\rangle = 0, \quad (n > 0), \quad p |k\rangle = k |k\rangle. \quad (2.3.42)$$

この Fock 真空 $|k\rangle$ に生成演算子 α_{-n} , $\tilde{\alpha}_{-n}$, ($n = 1, 2, \dots$) を次々とかけていくことによって Fock 空間が作られます。

7) 正規順序積にもいろいろな流儀があります。よく使われるのは、演算子積展開を用いたものです。自由場の理論の場合は「生成を左、消滅を右」という調和振動子の正規順序積も使われます。一般にはこれらは異なりますが、ここで取り扱っている自由スカラー場の場合には同じです。

8) 場の理論の教科書で習うように、この「真空のエネルギー」 A は素朴にやると発散します。しかし重力が結合していない場合には Heisenberg 方程式にこの A が現れないので物理的な時間発展には寄与しません。ここでは、後で世界面の重力と結合させて弦理論を作っていくので、その時には、この真空のエネルギー A について真面目に考えます。

2.4 光円錐ゲージ

前節では、1つの世界面のスカラーの理論を見てきました。弦理論にするためには、これを D 個集めてきてさらに拘束条件を正しく考えればよいです。この拘束条件を取り扱う一つの方法は、残っている対称性を固定し、さらに拘束条件を解いてしまうという方法があります。このような方法の代表的なものが光円錐ゲージと呼ばれるものです。この講義では、主にこの光円錐ゲージによる量子化を取り扱います。

2.4.1 時空の光円錐座標と作用

時空の光円錐座標として次のものを導入します⁹⁾。

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}). \quad (2.4.1)$$

そうすると、計量は

$$ds^2 = -2dX^+dX^- + dX^i dX^i, \quad (i = 1, \dots, D-2) \quad (2.4.2)$$

となります。特に、光円錐成分で書いたベクトルの内積は

$$A^\mu B_\mu = -A^+ B^- - A^- B^+ + A^i B^i \quad (2.4.3)$$

となります。

以前に出てきた弦の作用 (2.2.18) は、

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu \quad (2.4.4)$$

であり、エネルギー運動量テンソル (2.2.19) は

$$T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu, \quad T_{--} = \frac{1}{2} \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu \quad (2.4.5)$$

となり、これを使って拘束条件は $T_{++} = T_{--} = 0$ と書けます。運動方程式の解は、前節でやったように

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2p^\mu \tau + i \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^+} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-in\sigma^-} \right). \quad (2.4.6)$$

9) 世界面の光円錐座標と $\frac{1}{\sqrt{2}}$ だけ異なることに注意してください。ややこしいが、多くの文献でこのような取り方がしてあります。

残っているゲージ対称性は

$$\sigma^+ \rightarrow \sigma'^+ = \sigma'^+(\sigma^+), \quad \sigma^- \rightarrow \sigma'^- = \sigma'^-(\sigma^-) \quad (2.4.7)$$

です。次にこの対称性を固定することを考えます。

2.4.2 光円錐ゲージ固定

ゲージ対称性 (2.4.7) を用いて X^+ を簡単な形にすることを考えます。 X^+ のモード展開は $p^+ \neq 0$ の場合には

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + 2p^+\tau + i \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^+}{n} e^{-in\sigma^+} + \frac{\tilde{\alpha}_n^+}{n} e^{-in\sigma^-} \right) \quad (2.4.8)$$

$$= 2p^+\tau' \quad (2.4.9)$$

と書けます。ここで

$$\tau' = \frac{1}{2}(\sigma'^+ + \sigma'^-) \quad (2.4.10)$$

$$\sigma'^+ = \sigma^+ + \frac{1}{2p^+}x^+ + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^+}{n} e^{-in\sigma^+} \right), \quad \sigma'^- = \sigma^- + \frac{1}{2p^+}x^+ + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\tilde{\alpha}_n^+}{n} e^{-in\sigma^-} \right) \quad (2.4.11)$$

です。ここで (2.4.11) はゲージ変換 (2.4.7) ということができるので σ' を新しい座標とすることができます。この座標を使うと X^+ が非常に簡単な形に書けるのです。新しい座標でも $\sigma' = \frac{1}{2}(\sigma'^+ - \sigma'^-)$ の周期は 2π です。まとめると (′ を省略して) (2.4.7) の変換を用いて X^+ を次のような形にすることができます。

$$X^+(\tau, \sigma) = 2p^+\tau. \quad (2.4.12)$$

このようなゲージ固定の仕方を「光円錐ゲージ (light-cone gauge)」と呼びます。

光円錐ゲージが便利なのは、拘束条件を比較的単純な形で解くことができることです。簡単のため、しばらくは古典論で考えて、後で量子化することにしましょう。拘束条件は (2.4.5) のエネルギー運動量テンソルが $T_{++} = T_{--} = 0$ を満たすことです。今の座標で例えば $T_{++} = 0$ は、

$$0 = -\partial_+ X^+ \partial_+ X^- + \frac{1}{2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i, \quad (i = 1, \dots, D-2) \quad (2.4.13)$$

です。 $\partial_+ X^+ = p^+$ なので、この条件は $\partial_+ X^-$ について解くことができます

$$\partial_+ X^- = \frac{1}{2p^+} \partial_+ X^i \partial_+ X^i \quad (2.4.14)$$

となります。また、同様にして

$$\partial_- X^- = \frac{1}{2p^+} \partial_- X^i \partial_- X^i \quad (2.4.15)$$

です。どこまで拘束条件が減ったかを詳しく見るためにモード展開を考えましょう。横波方向の自由度 X^i , $i = 1, \dots, D-2$ から作られるエネルギー運動量テンソルとそのモード展開を考えておくと便利です。

$$T_{++}^\perp = \frac{1}{2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in\sigma^+}, \quad T_{--}^\perp = \frac{1}{2} \partial_- X^i \partial_- X^i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{L}_n^\perp e^{-in\sigma^-}. \quad (2.4.16)$$

X^- のモード展開は

$$X^-(\tau, \sigma) = x^- + 2p^- \tau + i \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^-}{n} e^{-in\sigma^+} + \frac{\tilde{\alpha}_n^-}{n} e^{-in\sigma^-} \right) \quad (2.4.17)$$

となるので拘束条件 (2.4.14) と (2.4.15) は、

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad \tilde{\alpha}_n^- = \frac{1}{p^+} \tilde{L}_n^\perp. \quad (2.4.18)$$

この条件によって、 X^- 中の自由度は x^- をのぞいて、すべて他の自由度で書けてしまいます。ただし、0 モードに関しては $\alpha_0^- = \tilde{\alpha}_0^- = p^-$ なので、

$$L_0^\perp = \tilde{L}_0^\perp, \quad (2.4.19)$$

という拘束条件が一つだけ残ります。これを「レベル一致条件 (level matching condition)」と呼びます。まとめると、光円錐ゲージ (2.4.12) を取ることができて、その場合拘束条件をばば解ききることができます。これによって X^- は x^- を除いて独立ではなくなります。独立な自由度は x^-, p^+, X^i , ($i = 1, \dots, D-2$) です。ただし、レベル一致条件 (2.4.19) は拘束条件として残ります。

2.4.3 光円錐ゲージによる量子化

さて、量子論を考えましょう。光円錐ゲージをとった後でも横波方向の自由度 X^i , ($i = 1, \dots, D-2$) の量子化は前節の自由スカラー場がたくさんあると考えるだけでよいです。光円錐方向 X^\pm に関しては、独立な自由度は x^-, p^+ しか残っていません。これらの独立なモードの交換関係を書いておきます。

$$[x^i, p^j] = \delta^{ij} i, \quad [\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n \delta^{ij} \delta_{n+m, 0}, \quad [\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] = n \delta^{ij} \delta_{n+m, 0}, \quad (2.4.20)$$

$$[x^-, p^+] = -i. \quad (2.4.21)$$

独立なモードの間の他の組み合わせは交換します。

古典論と異なるのは、演算子順序の問題です。横波方向のエネルギー運動量テンソルのモードを考えると、前節でやったのと同じように $L_0^\perp, \tilde{L}_0^\perp$ のところに問題が出ます。ここでは、ひとまず $L_0^\perp, \tilde{L}_0^\perp$ の定義は正規順序積で行います。このときに問題になるのは、(2.4.18) の 0 モードの部分です。この c 数の不定性をひとまず a とおいて (2.4.18) の量子化バージョンは

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad \tilde{\alpha}_n^- = \frac{1}{p^+} \tilde{L}_n^\perp, \quad (n \neq 0), \quad (2.4.22)$$

$$\alpha_0^- = \frac{1}{p^+} (L_0^\perp - a), \quad \tilde{\alpha}_0^- = \frac{1}{p^+} (\tilde{L}_0^\perp - a) \quad (2.4.23)$$

と書くことにします。レベル一致条件 (2.4.19) は量子化した場合も変わりなく

$$L_0^\perp = \tilde{L}_0^\perp \quad (2.4.24)$$

と書けます。あるいは、 $L_0^\perp, \tilde{L}_0^\perp$ を運動量の部分と振動子の部分に分けて

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} p^i p^i + N, \quad \tilde{L}_0^\perp = \frac{1}{2} p^i p^i + \tilde{N}, \quad (2.4.25)$$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i, \quad \tilde{N} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i \quad (2.4.26)$$

と表したときには、

$$N = \tilde{N} \quad (2.4.27)$$

と書けます。また、このレベル一致条件を考慮すると (2.4.23) は

$$p^- = \frac{1}{2p^+} (L_0^\perp + \tilde{L}_0^\perp - 2a) = \frac{1}{2p^+} (p^i p^i + N + \tilde{N} - 2a) \quad (2.4.28)$$

変形すると

$$2p^+ p^- - p^i p^i = N + \tilde{N} - 2a \quad (2.4.29)$$

となります。この左辺は質量の 2 乗に他ならないので質量の公式

$$m^2 = N + \tilde{N} - 2a \quad (2.4.30)$$

を得ます。

さて、もう少し詳しくスペクトラムを調べましょう。独立な場のうち、 p^+, p^i , ($i = 1, \dots, D-2$) を対角化するような基底を考えます。調和振動子の部分につ

いては、 $n > 0$ として α_n^i を消滅演算子、 α_{-n}^i を生成演算子として取り扱います。つまり、 $|k\rangle = |k^+, k^1, \dots, k^{D-2}\rangle$ で

$$p^+|k\rangle = k^+|k\rangle, \quad p^i|k\rangle = k^i|k\rangle, \quad \alpha_n|k\rangle = \tilde{\alpha}_n|k\rangle = 0, \quad (n > 0) \quad (2.4.31)$$

を満たす状態を考え、これに生成演算子を掛けていって作られる状態で Hilbert 空間は作れます。つまり、基底は整数の列 $0 < n_1, n_2, \dots, n_r$ と $0 < \tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_s$ および $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq D-2$ を用いて

$$\prod_{\ell=1}^r \alpha_{-n_\ell}^{i_\ell} \prod_{\ell=1}^s \tilde{\alpha}_{-\tilde{n}_\ell}^{j_\ell} |k\rangle \quad (2.4.32)$$

と書けます。長いので、この状態をしばらく $|\varphi\rangle$ と書いておきましょう。これらの状態全ては物理的ではなく、レベル一致条件 (2.4.27) を満たすものだけが、物理的です。レベル一致条件やスペクトラムを詳しく見るため、 N, \tilde{N} の固有値について考えましょう。鍵となる式は、

$$[N, \alpha_{-n}^i] = n\alpha_{-n}^i \quad (2.4.33)$$

です。これを変形すると

$$N\alpha_{-n}^i = \alpha_{-n}^i(N+n) \quad (2.4.34)$$

となります。これは、「 N が α_{-n}^i を通り過ぎると $(N+n)$ になる」と読めます。このことを使うと N の固有値は簡単に計算できて

$$N|\varphi\rangle = \sum_{\ell=1}^r n_\ell |\varphi\rangle \quad (2.4.35)$$

となります。 \tilde{N} の方も同様で

$$\tilde{N}|\varphi\rangle = \sum_{\ell=1}^s \tilde{n}_\ell |\varphi\rangle \quad (2.4.36)$$

となります。したがってレベル一致条件 (2.4.19) は

$$\sum_{\ell=1}^r n_\ell = \sum_{\ell=1}^s \tilde{n}_\ell \quad (2.4.37)$$

と書けます。

N, \tilde{N} が小さい状態を具体的に見ていきましょう。まず、 $N = \tilde{N} = 0$ の状態を考えましょう。この状態は Fock 真空

$$|k\rangle \quad (2.4.38)$$

のみです。質量の公式 (2.4.30) から

$$m^2 = -2a \quad (2.4.39)$$

となります。すぐ後に分かるように Lorentz 不変性を持つためには $a = 1$ でなければならないので $m^2 = -2$ となります。これは運動量が空間的ということであり、タキオンです。このタキオンの存在のためここで考えているボゾンの弦理論は不安定であり、整合性のない理論です。しかしボゾンの弦は技術的にやさしく、弦理論の多くの重要な性質を持っているのでトイ・モデルとして研究することに意味があります。

次に $N = \tilde{N} = 1$ の状態を考えましょう。この状態は

$$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |k\rangle \quad (2.4.40)$$

と書けます。この状態は露わに残っている対称性 $SO(D-2)$ の 2 階のテンソルであり、既約表現に分解すると（反対称テンソル）、（トレースの消える対称テンソル）、（スカラー）になります。質量の公式 (2.4.30) から質量は

$$m^2 = 2 - 2a \quad (2.4.41)$$

となります。ここから Lorentz 対称性を考えることにより、 a の値が決まります。まず、Lorentz 対称性があるときには、質量がある場合には静止系を考えることにより、偏角は $SO(D-1)$ の表現で決まり、質量がない場合は $SO(D-2)$ の表現で決まることを思い出してください。今、質量があると仮定すると露わな対称性 $SO(D-2)$ から、少なくとも $SO(D-1)$ の（反対称テンソル）と（トレースの消える対称テンソル）が出てこなければなりません。しかしそうすると $SO(D-2)$ のベクトルも出てこなければならないことになり、今のスペクトラムと合いません。つまり、**Lorentz 不変性があるなら $N = \tilde{N} = 1$ の状態は質量の無い状態でなければなりません。** そうすると、質量の式 (2.4.41) から

$$a = 1 \quad (2.4.42)$$

が導かれます。さらに、このとき質量の無いトレースの消える対称テンソル（スピン 2）粒子があります。質量の無いスピン 2 の粒子は重力子であり、この弦理論には重力が含まれることが結論されます。

2.4.4 臨界次元

ボゾンの弦理論は、 $D = 26$ の時のみ無矛盾に定式化されます。ここでは 2 つの方向から、この事実を導出しよう。

一つめは、かなり発見法的な方法です。まず、上の議論から $a = 1$ になることは分かります。もう一つの仮定は、 $T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i$ の「正しい」演算子順序は、演算子の意味でそのまま掛け算をしたものである、というものです。もちろんこれには発散があるので、「正しい」やり方で正則化とくりこみが行われなければなりません。これは、次のように書くことができます。

$$\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - a. \quad (2.4.43)$$

右辺は正規順序積になっており、有限の量です。右辺の正規順序積になっていない分を交換関係を使って正規順序積になおすと、

$$\frac{1}{2} (D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n = -a \quad (2.4.44)$$

という式が得られます。左辺は無限です。よくある説明は ζ 関数による正則化を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12} \quad (2.4.45)$$

というものです。これは答えとしては正しいものを与えます。これを用いると (2.4.44) の式から

$$a = \frac{D-2}{24} \quad (2.4.46)$$

という式が得られます。一方で Lorentz 不変性から $a = 1$ なので、これらを合わせると

$$D = 26 \quad (2.4.47)$$

が得られます。

よくある質問は、「なぜ ζ 関数による正則化が正しいのか」というものです。これについて、もう少し補足します。¹⁰⁾ ここで出てくる発散は場の理論の教科書で自由場の量子化の際に Hamiltonian に出てくる「真空のエネルギー」の発散と同じものです。通常、これは局所的な相殺項、真空のエネルギーの場合には宇宙項を入れることによって処理します。同じことを今の場合にもやってみましょう。次元勘定を行うため、少しの間だけ σ の範囲を $0 \leq \sigma \leq 2\pi\ell$ とします。そうすると、真空のエネルギーは、

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ell} \quad (2.4.48)$$

10) Polchinski の教科書に出てくる説明と同じである。

です。これを正則化するために長さの次元をもつ切断 b を導入して、¹¹⁾ ひとまず

$$f(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ell} \exp\left(-\frac{n}{\ell} b\right) \quad (2.4.49)$$

としておきます。 $b/\ell \rightarrow 0$ で f にもどります。この和は計算できて

$$f(b) = \frac{1}{\ell} (e^{\frac{b}{2\ell}} - e^{-\frac{b}{2\ell}})^{-2} \quad (2.4.50)$$

となります。これを b/ℓ が小さいとして展開すると

$$f(b) = \frac{\ell}{b^2} - \frac{1}{12\ell} + O(b^2) \quad (2.4.51)$$

となります。さて、これから発散を相殺項を使って消すわけですが、重要なのは使える相殺項は宇宙項のみで、これは真空のエネルギーには ℓ に比例する形でしか加えられない、ということです。また、今は共形対称性を保ちたいので (ℓ 以外に) 次元のあるパラメータを導入しません。そうすると相殺項の形は完全に決まって、式 (2.4.51) の右辺第一項をちょうど消すようにしか入れられません。なので $b \rightarrow 0$ の極限をとることにより正則化された真空のエネルギーは、

$$f_{\text{reg}} = -\frac{1}{12\ell} \quad (2.4.52)$$

となります。¹²⁾ $\ell = 1$ とすると、 ζ 関数による正則化と同じ結果が得られます。

二つめの導出は、Lorentz 対称性の生成子 $M^{\mu\nu}$ の交換関係を考え、それが正しくなっていることを要求すると臨界次元が出てくるというものです。問題となる交換関係は、

$$[M^{-i}, M^{-j}] \quad (2.4.53)$$

であり、これは 0 とならなければなりません。実際に計算してみると

$$\begin{aligned} [M^{-i}, M^{-j}] &= \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\alpha_{-n}^i \alpha_n^j - \alpha_{-n}^j \alpha_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^j - \tilde{\alpha}_{-n}^j \tilde{\alpha}_n^i \right], \\ A_n &= \left(\frac{D-2}{24} - 1 \right) n + \frac{1}{n} \left(a - \frac{D-2}{24} \right) \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

となり、これが 0 になるためには、

$$D = 26, \quad a = 1 \quad (2.4.55)$$

11) 格子間隔の意味で a と書きたいが、記号がかぶるので b と書きました。

12) ちょうど Casimir エネルギーになっています。

でなければなりません。

演習問題

作用 (2.2.18) を考えます。この作用は Lorentz 変換

$$\delta X^\mu(\sigma) = \epsilon^\mu{}_\nu X^\nu \quad (2.4.56)$$

で不変です。ただし $\epsilon^\mu{}_\nu$ は無限小の変換のパラメーターで

$$\epsilon^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho} \epsilon_{\rho\nu}, \quad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu} \quad (2.4.57)$$

を満たします。

1. この対称性に対する Noether カレント $J^{\mu\nu\alpha}$ を求めてください。今の場合、 $J^{\mu\nu\alpha}$ は、

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} J^{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu \quad (2.4.58)$$

として得られます。

2. Noether 電荷 $M^{\mu\nu}$ を $x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ を用いて表してください。ちなみに Noether 電荷は

$$M^{\mu\nu} = \int d\sigma J^{\mu\nu 0} \quad (2.4.59)$$

で表されます。

2.5 まとめ

この章では、ボゾンの弦理論を光円錐ゲージで取り扱いました。

- 弦の作用は Nambu-Goto 作用、あるいは Polyakov 作用で表されます。
- ゲージ固定をすることにより、作用と拘束条件を得ることができます。
- さらに残っているゲージ対称性を光円錐ゲージで固定することにより、拘束条件を解いてしまうことができます。ただし、明白な Lorentz 対称性は失います。
- 量子論で Lorentz 対称性があるのは、 $D = 26$ のときのみです。
- このとき質量のない 2 階の対称テンソルの粒子（重力子）が、スペクトルの中に現れます。
- ボゾンの弦理論では、スペクトルの中にタキオンを含むので実際には不安定な理論になります。

重力について一つだけ注意しておきます。今、質量のない2階のテンソル粒子があるといいました。実はこのような粒子があって、摂動論的にまともな相互作用がある理論があったとすると、この質量のない2階のテンソル粒子は必ず重力子で、時空の一般座標変換をゲージ対称性として持つことが一般的に結論されます。例えば

- Matthew D. Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model”

では初等的にこのことを説明してあります。

弦理論が摂動論的にまともな相互作用があるということの説明は、この講義の範囲を超えますが、これを認めてもらえば、弦理論は少なくとも摂動論的に量子重力理論を記述しているということが結論されます。

第 3 章 超弦理論

3.1 なぜ「超」か

前節では、ボゾンの弦理論を取り扱いました。この理論は臨界次元で量子論的であり、重力を含んでいました。したがって量子重力理論であるといえます。しかし、現実を記述する理論としては、次のような不満な点があります。

- タキオンを含んでいます。
- フェルミオンを含んでいません。

これらの問題点を解決するのが超弦理論です。

まず、フェルミオンの問題を考えるために、以前出した練習問題を思い出してみましょう。これは、

粒子の世界線の理論で、Dirac 方程式を導くようなものを考えてみてください。

というものでした。この問題を解くために、そもそもボゾンの粒子からどうやって Klein-Gordon 方程式が出てきたかを復習します。平方根を開いた作用（質量なし）は、

$$S = \int d\tau \frac{1}{2} e^{-1} \dot{X}^2 \quad (3.1.1)$$

です。ここで、ゲージ固定条件として $e = 1$ をおきます。これを置いただけではだめで、 e に対する運動方程式を拘束条件として覚えておかなければなりません。この拘束条件は、Hamiltonian を $H = \frac{1}{2} P^2$ として

$$H = 0 \quad (3.1.2)$$

と書けます。量子論的にこの拘束条件は状態から物理的状态を選び出す条件として書けます。この条件は波動関数を Ψ とすると、

$$H\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^2 \Psi = 0 \quad (3.1.3)$$

となり、Klein-Gordon 方程式が出てきます。

また、Dirac 方程式がどういうものであったかを思い出すと、

$$(\text{Dirac 演算子})^2 = (\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = \partial^2 = (\text{Klein-Gordon 演算子}) \quad (3.1.4)$$

です。

これらを考えると、世界線の理論から Dirac 方程式を出すためには

$$H = Q^2 \quad (3.1.5)$$

となるような演算子 Q が存在して、拘束条件が $Q = 0$ となるようにすればよいと考えられます。式 (3.1.5) を満たすような生成子 Q, H のなす対称性を（世界線の）「超対称性」(supersymmetry) と呼びます。まとめると、世界線の理論で、超対称性があり、それが拘束条件となるような理論を考えれば時空の Dirac 方程式が出てきます。

超対称性について、さらに考えるために、まずはフェルミオンを記述するための Grassmann 代数を紹介しましょう。

3.2 Grassmann 代数

Grassmann 代数とは、反交換する記号（「変数」）からなる代数です。つまり、 θ, ψ を反交換する記号（Grassmann 奇、あるいはフェルミオンのとも呼ぶ）とすると

$$\theta\psi = -\psi\theta \quad (3.2.1)$$

を満たします。特に

$$\theta\theta = -\theta\theta = 0 \quad (3.2.2)$$

です。この性質はフェルミオンの統計性を表すのに便利です。

フェルミオンの「変数」 θ の関数は一般に

$$f(\theta) = A + \theta B \quad (3.2.3)$$

と書けます¹⁾。 θ に関する微分を

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(A + \theta B) := B \quad (3.2.4)$$

1) θ で Taylor 展開したと考えると、フェルミオンの性質から $\theta^2 = 0$ です。解析的でない関数 (Taylor 展開できないもの) は考えないことにします。

と定義します。記号の順序に注意します。2変数以上の関数の微分は、

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\psi} = -\frac{\partial}{\partial\psi} \frac{\partial}{\partial\theta} \quad (3.2.5)$$

を満たします。特に

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 = 0 \quad (3.2.6)$$

です。

また積分の記号を次のように定義すると便利です。

$$\int d\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}. \quad (3.2.7)$$

このように定義すると

$$\int d\theta \frac{\partial}{\partial\theta} = 0 \quad (3.2.8)$$

という「部分積分」が使える関係を満たします。

3.3 世界線の超対称性

超弦理論の定式化には、世界面の超対称性を導入するところから始める RNS 定式化と時空の超対称性を導入するところから始める GS 定式化があります。この講義では RNS 定式化のみを取り扱います。世界面の超対称性を導入する前に、まず練習として世界線の超対称性を考えてみましょう。そして確かに時空の Dirac 方程式が出てくることを見てみましょう。

超対称性の導入の仕方のひとつは「超空間」を導入する方法です。今の場合世界線の座標 τ に対して、フェルミオンの座標 θ を導入し (τ, θ) でパラメータ付けされる「超世界線」を考えることです。この超世界線の上のフェルミオンの微分演算子 \widehat{Q}

$$\widehat{Q} := \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta \frac{\partial}{\partial\tau} \quad (3.3.1)$$

を導入します。この微分演算子の反交換関係を見てみると

$$2\widehat{Q}^2 = \{\widehat{Q}, \widehat{Q}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta \frac{\partial}{\partial\tau}, \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta \frac{\partial}{\partial\tau} \right\} = 2i \frac{\partial}{\partial\tau} \quad (3.3.2)$$

となるので

$$\widehat{Q}^2 = i \frac{\partial}{\partial\tau} \quad (3.3.3)$$

です。この計算の計算には、

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}, \theta\right\} = \left\{\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\} = 1 \quad (3.3.4)$$

の関係を使うと便利です。式 (3.3.3) の右辺は時間並進の微分演算子なので、 \widehat{Q} の作用からできる対称性とその生成子を作ることができれば、それが超対称性になると期待できます。

このような対称性を作るために超場 (superfield) を導入しましょう。例えば、世界線の理論には $X^\mu(\tau)$ という場がありましたが、これに対して超世界線上の場 $Y^\mu(\tau, \theta)$ を導入します。 θ で展開すると

$$Y^\mu(\tau, \theta) = X^\mu(\tau) + i\theta\psi^\mu(\tau) \quad (3.3.5)$$

となります。 Y^μ をボゾンのすることにとすると、 X^μ はボゾンの、 ψ^μ はフェルミオンのとなります。 $X^\mu(\tau)$ や $\psi^\mu(\tau)$ は超場 $Y^\mu(\tau, \theta)$ の「成分場」 (component field) と呼ばれます。この超場の表式を用いて超対称変換を定義します。超対称変換のパラメータを ϵ とします。これは、フェルミオンので微小なパラメータである。超場 Y^μ に対する変換性を

$$\delta_\epsilon Y^\mu(\tau, \theta) := \epsilon \widehat{Q} Y^\mu(\tau, \theta) \quad (3.3.6)$$

と定義します。この意味は、両辺を θ で展開したときに、成分場 X^μ, ψ^μ に対する変換は $1, \theta$ の係数を比較して得られるということです。つまり (3.3.6) の左辺は、

$$\delta_\epsilon X^\mu + i\theta\delta_\epsilon\psi^\mu \quad (3.3.7)$$

であり、右辺は、

$$i\epsilon\psi^\mu + \epsilon i\theta\dot{X}^\mu = i\epsilon\psi^\mu - \theta i\epsilon\dot{X}^\mu \quad (3.3.8)$$

となります。これらを比較すると成分場に対する変換性

$$\delta_\epsilon X^\mu = i\epsilon\psi^\mu, \quad \delta_\epsilon\psi^\mu = -\epsilon\dot{X}^\mu \quad (3.3.9)$$

が得られます。

次に、この超対称変換に対して不変な作用を書くことを考えましょう。このために次の演算子 \widehat{D} を導入します。

$$\widehat{D} := \frac{\partial}{\partial\theta} - i\theta\frac{\partial}{\partial\tau}. \quad (3.3.10)$$

これは、 \widehat{Q} と第2項の符号だけが異なります。この演算子 \widehat{D} の重要な性質は、

$$\{\widehat{Q}, \widehat{D}\} = 0 \quad (3.3.11)$$

となることです。また、 \widehat{Q} の形から

$$[\partial_\tau, \widehat{Q}] = 0 \quad (3.3.12)$$

が成り立つことにも注意しましょう。

Lagrangian が、 $Y, \partial_\tau Y, \widehat{D}Y$ の関数 $\widehat{L}(Y, \partial_\tau Y, \widehat{D}Y)$ を用いて

$$L = \int d\theta \widehat{L}(Y, \partial_\tau Y, \widehat{D}Y) \quad (3.3.13)$$

と書けるとき、理論は超対称変換に対して不変です。これは次のようにして示すことができます。まず、

$$\delta_\epsilon \partial_\tau Y^\mu := \partial_\tau \delta_\epsilon Y^\mu = \partial_\tau \epsilon \widehat{Q} Y^\mu = \epsilon \widehat{Q} \partial_\tau Y^\mu \quad (3.3.14)$$

です。最後のところで式 (3.3.12) を用いました。同様にして

$$\delta_\epsilon \widehat{D} Y^\mu = \epsilon \widehat{Q} Y^\mu \quad (3.3.15)$$

であることも示せます²⁾。これらを用いると

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon L &= \int d\theta \left[\delta_\epsilon Y^\mu \frac{\partial \widehat{L}}{\partial Y^\mu} + \delta_\epsilon \partial_\tau Y^\mu \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \partial_\tau Y^\mu} + \delta_\epsilon \widehat{D} Y^\mu \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \widehat{D} Y^\mu} \right] \\ &= \int d\theta \left[\epsilon \widehat{Q} Y^\mu \frac{\partial \widehat{L}}{\partial Y^\mu} + \epsilon \widehat{Q} \partial_\tau Y^\mu \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \partial_\tau Y^\mu} + \epsilon \widehat{Q} \widehat{D} Y^\mu \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \widehat{D} Y^\mu} \right] \\ &= \int d\theta \epsilon \widehat{Q} \widehat{L} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

と変形できます。 $\widehat{L} = A + \theta B$ と書くことにし、 $\int d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ であることに注意すると

$$\delta_\epsilon L = i\epsilon \frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} (i\epsilon A) \quad (3.3.17)$$

となります。この変換での Lagrangian の変化が全微分になることが示せたので、作用はこの変換の元で不変であることが示せました。

この対称性のある理論の一つの例は次のように作れます。

$$L = \int d\theta \frac{i}{2} \partial_\tau Y^\mu \widehat{D} Y_\mu = \frac{1}{2} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu \quad (3.3.18)$$

2) これらの式は「当たり前」ではないです。例えば $\delta_\epsilon (\widehat{Q} Y^\mu) = -\epsilon \widehat{Q} \widehat{Q} Y^\mu \neq \epsilon \widehat{Q} (\widehat{Q} Y^\mu)$ です。

3.3.1 超対称量子力学

この (3.3.18) で表される理論を正準量子化してみましょう。 X^μ, ψ^μ の正準共役運動量はそれぞれ

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \dot{X}_\mu, \quad P_{\psi^\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\mu} = -\frac{i}{2}\psi_\mu. \quad (3.3.19)$$

ボゾンの方は通常どおりです。一方、フェルミオンの方は正準変数の間に非自明な関係がついていて、独立変数とは見做せなくなっています。このような拘束条件がある場合の正準形式の取り扱いには Dirac によって定式化されました。この取扱については、簡単に次の項で触れます。この処方を用いて正準量子化したときの正準交換関係は結果的に

$$[P_\mu, X^\nu] = -i\delta_\mu^\nu, \quad \{\psi^\mu, \psi^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \quad (3.3.20)$$

となります。Hamiltonian は

$$H = \dot{X}^\mu P_\mu + \dot{\psi}^\mu P_{\psi^\mu} - L = \frac{1}{2}P^2 \quad (3.3.21)$$

となります。

この系の Hilbert 空間について、もう少し調べてみましょう。今、 $\Gamma^\mu := \sqrt{2}\psi^\mu$ と書くと、正準交換関係は

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (3.3.22)$$

となり、これは Clifford 代数を生成することになります。Clifford 代数の既約表現は $n := \left[\frac{D}{2}\right]$ であることが知られています。言い換えると Γ^μ は $n \times n$ 行列で表されます。 Γ^μ だけ考えた場合の Hilbert 空間は \mathbb{C}^n になります。今、 P_μ, X^μ の方もありますから、 X^μ 基底をとることにすると、波動関数は n 成分のもの

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \vdots \\ \Psi_n(x) \end{pmatrix} \quad (3.3.23)$$

になります。ガンマ行列やスピノールが出てきたので、Dirac 方程式が出てくる可能性が見えてきたでしょうか。

一方で、この系には超対称性がありましたから、その生成子について考えてみましょう。生成子は

$$Q := -\psi^\mu P_\mu \quad (3.3.24)$$

となります。実際この電荷は

$$Q^2 = H \quad (3.3.25)$$

という関係を満たします。ですから何らかの理由で

$$Q\Psi = 0 \quad (3.3.26)$$

という拘束条件を課す必要があれば、それが Dirac 方程式になります。ただし、ここまでの議論では、この拘束条件はどこからも出てきません。

3.3.2 Dirac 括弧とフェルミオンの正準交換関係*

ここで少し寄り道し、拘束条件のある正準形式と Dirac 括弧について触れます。詳しくは九後汰一郎「ゲージ場の量子論 1」を参照してください。

形式的に正準変数 p_i, q_i , ($i = 1, \dots, N$) で表される相空間があるとします。Poisson 括弧を

$$\{A\}_{PB} := \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - (-1)^{|A||B|} \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \quad (3.3.27)$$

と定義します。ここで $|A|$ は

$$|A| := \begin{cases} 0, & A \text{ がボゾンの} \\ 1, & A \text{ がフェルミオンの} \end{cases} \quad (3.3.28)$$

と定義します。

拘束条件 ϕ_a , ($a = 1, \dots, r$) を p_i, q_i の関数として、拘束条件

$$\phi_a = 0, \quad (a = 1, \dots, r) \quad (3.3.29)$$

を考えます。このとき、これらの Poisson 括弧からできる行列

$$C_{ab} := \{\phi_a, \phi_b\}_P \quad (3.3.30)$$

が、逆行列を持つとき、この拘束条件は**第 2 類**であるといいます。ここでは、拘束条件が第 2 類の場合を考えましょう。

第 2 類の拘束条件がある場合、次のような Dirac 括弧を考えるのが便利です。

$$\{A, B\}_D := \{A, B\}_P - \sum_{a,b} \{A, \phi_a\}_P C_{ab}^{-1} \{\phi_b, B\}_P. \quad (3.3.31)$$

例えば ϕ_a を含むような Dirac 括弧は、

$$\{\phi_a, A\}_D = 0 \quad (3.3.32)$$

となります。ですから、Dirac 括弧の計算では $\phi_a = 0$ として無矛盾になるようになっています。³⁾ 実際 Dirac 括弧は、相空間を $\phi_a = 0$ の空間に限った場合の誘導されるシンプレクティック構造に対する Poisson 括弧になっています。ですから、拘束条件を解いてしまってから量子化する代わりに、Dirac 括弧を（反）交換関係に置き換えるという方法でも量子化できます。

例として、フェルミオンの Lagrangian

$$L = \frac{i}{2} \psi \dot{\psi} \quad (3.3.33)$$

を考えてみましょう。 ψ に対する正準共役な運動量 P_ψ は

$$P_\psi = -\frac{i}{2} \psi \quad (3.3.34)$$

となり、 ψ と P_ψ が独立でなくなってしまう。言い換えると (3.3.34) は拘束条件になっています。まず、形式的に独立変数 ψ, P_ψ を導入し Poisson 括弧を定義します。

$$\{\psi, \psi\}_P = \{P_\psi, P_\psi\}_P = 0, \quad \{P_\psi, \psi\}_P = 1. \quad (3.3.35)$$

そして拘束条件

$$0 = \phi := P_\psi + \frac{i}{2} \psi \quad (3.3.36)$$

を課します。その上で Dirac 括弧を考えます。まず

$$C = \{\phi, \phi\}_P = i \quad (3.3.37)$$

となることを用いると

$$\{\psi, \psi\}_D = \{\psi, \psi\}_P - \{\psi, \phi\}_P C^{-1} \{\phi, \psi\}_P = i \quad (3.3.38)$$

と計算できます。

量子化すると、反交換関係は

$$\{\psi, \psi\} = -i\{\psi, \psi\}_D = 1 \quad (3.3.39)$$

となります。

3) 逆に Poisson 括弧の計算で $\phi_a = 0$ とすると矛盾が起こります。

3.3.3 世界線の局所超対称性

普通の相対論的な粒子の場合に、拘束条件 $H = 0$ がどこから出てきたのかを思い出してみると、それは世界線の座標変換 (2.1.17) の対称性があったからでした。同様にパラメーターが τ による局所的な超対称性をもつ理論を考えると、 $Q = 0$ の拘束条件が課されることが期待できます。実際にやってみましょう。

(2.1.12) の作用の中の補助場 $e(\tau)$ を超場に格上げすることにします。

$$E(\tau, \theta) = e(\tau) + i\theta\lambda(\tau). \quad (3.3.40)$$

これを用いて、次のような Lagrangian を考えます。

$$L = \int d\theta E^{-1} \partial_\tau Y^\mu \widehat{D} Y_\mu = \frac{1}{2} (e^{-1} \dot{X}^2 + ie^{-1} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu + ie^{-2} \lambda \psi_\mu \dot{X}^\mu). \quad (3.3.41)$$

この Lagrangian で表される理論には次の局所超対称性があります。 $\epsilon(\tau)$ をフェルミオンの τ に依存するパラメーターとして、

$$\delta_\epsilon X^\mu = i\epsilon \psi^\mu, \quad \delta_\epsilon \psi^\mu = -\epsilon \dot{X}^\mu, \quad (3.3.42)$$

$$\delta_\epsilon e = i\epsilon \lambda, \quad \delta_\epsilon \lambda = -\epsilon \dot{e} - 2\dot{\epsilon} e \quad (3.3.43)$$

という局所超対称変換を考えます。がんばって計算すると (3.3.41) の L の変換は

$$\delta_\epsilon L = \frac{i}{2} \partial_\tau (e^{-1} \epsilon \psi_\mu \dot{X}^\mu) \quad (3.3.44)$$

と全微分になることから、これが対称性であることが分かります。

さて世界線の一般座標変換と局所超対称性をゲージ固定することにします。次のような固定条件を課します。

$$e = 1, \quad \lambda = 0. \quad (3.3.45)$$

すると、(3.3.18) の Lagrangian が得られることになります。ただし、 e, λ の運動方程式からくる拘束条件があって、それぞれ

$$\frac{1}{2} \dot{X}^2 + \frac{i}{2} \psi_\mu \dot{\psi}^\mu = 0, \quad \psi_\mu \dot{X}^\mu = 0 \quad (3.3.46)$$

となります。特に後者は超対称電荷 $Q = 0$ という拘束条件です。3.3.1 項で議論したことと合わせると、この拘束条件から Dirac 方程式が出ます。

3.4 2次元スピノール

さて、弦理論で世界面の超対称性を記述したいので世界面のボゾンとフェルミオンを導入する必要があります。世界面のボゾンはすでに導入しました。フェルミオンはスピノールとして導入したいので、ここでは2次元のスピノールの定式化について準備をします。

3.4.1 ガンマ行列

まず、2次元のガンマ行列を導入します。 γ^α , ($\alpha = 0, 1$) を

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

とします。すると、このガンマ行列は

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta} \quad (3.4.2)$$

の反交換関係を満たします。このガンマ行列が作用する2成分のスピノールを

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

と書くと、例えば質量のない自由な Dirac 方程式は

$$\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi = 0 \quad (3.4.4)$$

と書けます。このスピノールに対する2次元の Lorentz 変換の生成子は

$$M^{01} := \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^1 \quad (3.4.5)$$

となります。

3.4.2 Chirality

4次元のスピノールのとときと同様に chirality の行列を導入します。

$$\gamma_3 := \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.6)$$

γ_3 の固有値のことを **chirality** と呼びます。 γ_3 は Lorentz 変換の生成子 M^{01} と可換ですから、chirality は Lorentz 変換で不変です。chirality の決まったスピノール

$$\begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} \quad (3.4.7)$$

を **Weyl スピノール** と呼びます。

3.4.3 C 行列

次に C 行列と呼ばれる行列を定義します。

$$C := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.8)$$

この C 行列はユニタリー行列で次の性質を満たします。

$$C\gamma^\alpha C^{-1} = -\gamma^{\alpha T}, \quad C^T = -C. \quad (3.4.9)$$

この C 行列を用いて荷電共役を定義します。まず Dirac 共役を

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (3.4.10)$$

で定義します。そして荷電共役は

$$\psi^c := C\bar{\psi}^T \quad (3.4.11)$$

で定義します。今の表示では荷電共役は単に成分ごとの複素共役になります。

$$\psi^c = \psi^*. \quad (3.4.12)$$

この荷電共役について、いくつか注意を述べます。

- $(M^{01}\psi)^c = M^{01}\psi^c$ が成り立ちます。つまり ψ^c もスピノールの変換性を持ちます。
- $(\gamma_3\psi)^c = \gamma_3\psi^c$ が成り立ちます。つまり、荷電共役は chirality を変えません。これは 4 次元の場合と異なることに注意してください。
- $\psi^c = \psi$ を満たすスピノールを **Majorana スピノール** と呼びます。今の表示では成分ごとに実数のスピノールが Majorana スピノールです。
- Majorana スピノールで、かつ Weyl スピノールのものを **Majorana-Weyl スピノール** と呼びます。Majorana-Weyl スピノールは実 1 成分になります。

3.4.4 フェルミオンの作用

ガンマ行列やスピノールの準備ができたので、2次元の自由フェルミオンの作用を書きます。後々使うので、Majorana フェルミオンの作用を考えます。Majorana フェルミオンの場合

$$\bar{\psi} = \psi^T C \quad (3.4.13)$$

という関係式を満たすことを思い出して

$$S = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma i\psi^T C\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi \quad (3.4.14)$$

とします。 ψ が Majorana (成分ごとに実) のとき、作用が実になることを確かめてください。

実は2次元ぐらいだと、ばらして成分で書いたほうが便利です。 $\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix}$ であることを思い出してください。間にはいつている行列を計算すると

$$C\gamma^\alpha \partial_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_0 + \partial_1 \\ \partial_0 + \partial_1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \partial_+ & 0 \\ 0 & \partial_- \end{pmatrix} \quad (3.4.15)$$

となります。したがって作用は、

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma [i\psi^+ \partial_+ \psi^+ + i\psi^- \partial_- \psi^-] \quad (3.4.16)$$

となります。習慣としてスピノールの足 \pm は下付きのものを使うことが多いのでそのようにします。スピノールの足はC行列で下げ、その逆行列で上げます。

$$\psi_b := C_{bb'} \psi^{b'}, \quad \psi^b := (C^{-1})^{bb'} \psi_{b'}, \quad (b, b' = \pm). \quad (3.4.17)$$

つまり

$$\psi_- = \psi^+, \quad \psi_+ = -\psi^- \quad (3.4.18)$$

となります。 ψ_\pm を用いると、作用は

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma [i\psi_- \partial_+ \psi_- + i\psi_+ \partial_- \psi_+] \quad (3.4.19)$$

となります。この形の作用が今後よく出てきます。

3.5 世界面の超対称性

さて、超対称性のある世界面の理論を考えることにしましょう。ここでは、粒子の場合と同様に超場形式と呼ばれる方法で世界面の超対称性を記述することにします。

3.5.1 超世界面

粒子のときと同様に、世界面の座標 (σ^0, σ^1) に加えてフェルミオンの座標を導入します。今回は Majorana スピノール 1 個分、つまり実成分の座標 θ^\pm を導入します。そして座標として

$$\sigma^0, \sigma^1, \theta^+, \theta^- \quad (3.5.1)$$

で表される超世界面を考えます。これまでと同様に $\sigma^\pm := \sigma^0 \pm \sigma^1$ とし、 $\partial_\pm := \frac{\partial}{\partial \sigma^\pm} = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$ という記号をよく用います。

超世界面の微分演算子として、次のようなものを導入します。

$$\widehat{Q}_\pm := \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} + \theta^\pm \partial_\pm, \quad \widehat{D}_\pm := \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} - \theta^\pm \partial_\pm. \quad (3.5.2)$$

これらの微分演算子の間の反交換関係を計算すると

$$\begin{aligned} \{\widehat{Q}_\pm, \widehat{Q}_\pm\} &= 2i\partial_\pm, & \{\widehat{Q}_\pm, \widehat{Q}_\mp\} &= 0, & \{\widehat{D}_\pm, \widehat{D}_\pm\} &= -2i\partial_\pm, & \{\widehat{D}_\pm, \widehat{D}_\mp\} &= 0, \\ \{\widehat{Q}_\pm, \widehat{D}_\pm\} &= \{\widehat{Q}_\pm, \widehat{D}_\mp\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

となります。

3.5.2 超場と超対称変換

次に超場を導入します。超場 $Y(\sigma, \theta)$ はボゾンの実でスカラーだとします。Y は θ^\pm で展開して

$$Y(\sigma, \theta) = X(\sigma) + i\theta^+ \psi_+(\sigma) + i\theta^- \psi_-(\sigma) + i\theta^+ \theta^- F(\sigma) \quad (3.5.4)$$

と書くことができます。ここで X, F はボゾンの実スカラー場、 ψ_\pm はフェルミオンの Majorana スピノール場（の成分）です。 X, F, ψ_\pm を成分場と呼びます。

この超場 Y に対して超対称変換を次のように定義します。 ϵ^\pm をフェルミオンの Majorana スピノールの定数のパラメータとします。このパラメータによる Y の超対称変換を

$$\delta Y = (\epsilon^+ \widehat{Q}_+ + \epsilon^- \widehat{Q}_-) Y \quad (3.5.5)$$

とします。言い換えると成分場の変換は

$$\delta X + i\theta^+ \delta\psi_+ + i\theta^- \delta\psi_- + i\theta^+ \theta^- \delta F = (\epsilon^+ \widehat{Q}_+ + \epsilon^- \widehat{Q}_-) Y \quad (3.5.6)$$

という式の両辺の θ^\pm の単項式の係数を比較することで得られます。具体的には

$$\begin{aligned} (\epsilon^+ \widehat{Q}_+ + \epsilon^- \widehat{Q}_-) Y &= i\epsilon^+ \psi_+ + i\epsilon^- \psi_- + i\theta^+ (\epsilon^- F - \epsilon^+ \partial_+ X) + i\theta^- (-\epsilon^+ F - \epsilon^- \partial_- X) \\ &\quad + i\theta^+ \theta^- (i\epsilon^+ \partial_+ \psi_- - i\epsilon^- \partial_- \psi_+) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

となりますから成分場は

$$\delta X = i\epsilon^+ \psi_+ + i\epsilon^- \psi_-, \quad \delta\psi_+ = \epsilon^- F - \epsilon^+ \partial_+ X, \quad \delta\psi_- = -\epsilon^+ F - \epsilon^- \partial_- X, \quad \delta F = i\epsilon^+ \partial_+ \psi_- - i\epsilon^- \partial_- \psi_+ \quad (3.5.8)$$

という変換になります。

3.5.3 大域的な超対称性を持つ作用

大域的な超対称性を持つ作用を書きます。超場を用いると、次のように超対称性が書けます。

超対称性の変換が (3.5.5) になるようなものを超場と呼ぶことにします。この言葉遣いをする

- Y が超場なら $\partial_\pm Y, \widehat{D}_\pm Y$ は超場です。
- 超場の定数係数の多項式は超場です。
- Y が超場のとき、例えば $\widehat{Q}_\pm Y$ は超場ではありません。

したがって、 \widetilde{L} を $Y, \widehat{D}_\pm Y, \partial_\pm Y, \dots$ の多項式とします。このとき \widetilde{L} は超場です。すると

$$\mathcal{L} = \int d\theta^+ d\theta^- \widetilde{L} \quad (3.5.9)$$

の超対称変換は、 \widetilde{L} が超場であることに注意すると

$$\delta \mathcal{L} = \int d\theta^+ d\theta^- \delta \widetilde{L} = \int d\theta^+ d\theta^- (\epsilon^+ \widehat{Q}_+ + \epsilon^- \widehat{Q}_-) \widetilde{L} = (\text{全微分}) \quad (3.5.10)$$

となるので、この理論は超対称性を持ちます。

この講義で主に考えるのは、Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int d\theta^+ d\theta^- \widehat{D}_+ Y \widehat{D}_- Y \quad (3.5.11)$$

です。成分場で書くと

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \left(\partial_+ X \partial_- X + i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_- + F^2 \right) \quad (3.5.12)$$

となります。

(3.5.12) のなかの F のような作用に微分が含まれていない場を**補助場**と呼びます。補助場は運動方程式を用いて消去すると便利な場合があります⁴⁾。 F に対する運動方程式は

$$F = 0 \quad (3.5.13)$$

となります。これを (3.5.12) の Lagrangian 密度に代入すると

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} (\partial_+ X \partial_- X + i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_-) \quad (3.5.14)$$

となります。これは、(2.3.1) の自由スカラー場と (3.4.19) の自由フェルミオン場を合わせただけの作用になります。 F を消去した後の超対称の変換は

$$\delta X = i\epsilon^+ \psi_+ + i\epsilon^- \psi_-, \quad \delta \psi_+ = -\epsilon^+ \partial_+ X, \quad \delta \psi_- = -\epsilon^- \partial_- X \quad (3.5.15)$$

となります。実際この変換で Lagrangian 密度 (3.5.14) が全微分を除いて不変であることが確かめられます。

3.5.4 超対称性のカレント

一般に対称性があると保存するカレントがあります。超対称性の場合にもカレントがあります。これを求めてみましょう。

カレントの計算の仕方の一つは次のようなものです。超対称性の変換 (3.5.15) で ϵ^\pm を場所によらせて $\epsilon^\pm(\sigma)$ とした変換を考えます。この場合 Lagrangian 密度の変換は ϵ^\pm が場所によっている分、全微分からずれます。したがって、次のように書けるはずです。

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{i}{2\pi} \partial^\alpha \epsilon^b G_{ab} + (\text{全微分}), \quad (b = \pm) \quad (3.5.16)$$

4) 消去すると不便になる場合もあります。

ここで前についている係数は、後で便利になるように決めたものです。ここに現れる G_{ab} が超対称性のカレントになります。例えば場の配位が運動方程式を満たす場合、Lagrangian 密度の任意の変分は全微分になりますから

$$\partial^\alpha G_{\alpha b} = 0 \quad (3.5.17)$$

という保存則が成り立つことが分かります。

実際に (3.5.14) でこの計算をやってみると

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} (2i\partial_- \epsilon^+ \psi_+ \partial_+ X + 2i\partial_+ \epsilon^- \psi_- \partial_- X) \quad (3.5.18)$$

となります。 $\partial^\pm = -2\partial_\mp$ であることに注意して読み取ると

$$\begin{aligned} G_{++} &= \psi_+ \partial_+ X, & G_{-+} &= 0, \\ G_{--} &= \psi_- \partial_- X, & G_{+-} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

を得ます。

この計算から分かることは、 ϵ^\pm を、それぞれ σ^\pm だけによらせる、つまり $\epsilon^+(\sigma^+)$, $\epsilon^-(\sigma^-)$ というパラメータで変換 (3.5.15) を考えても Lagrangian 密度 (3.5.14) は全微分を除いて不変になります。この変換は**超共形対称性**の一部です。

3.5.5 エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソルも求めておきます。以前は計量で変分するという方法で求めましたが、ここでは少し違うやり方で求めましょう。

無限小一般座標変換 $\sigma^\alpha = \xi^\alpha(\sigma)$ を考えます。このときの場の変換は

$$\delta X = -\xi^\alpha \partial_\alpha X, \quad (3.5.20)$$

$$\delta \psi_\pm = -\xi^\alpha \partial_\alpha \psi_\pm - \frac{1}{2} (\partial_\pm \xi^\pm) \psi_\pm \quad (3.5.21)$$

とします。 $\delta \psi_\pm$ の第2項は改良 (improve) と呼ばれるものに関係があるもので、ここでは説明しませんが系統的に求めることができます。

このときの Lagrangian 密度 (3.5.14) の変分は

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \partial^\alpha \xi^\beta T_{\alpha\beta} + (\text{全微分}) \quad (3.5.22)$$

となるはずですが。実際計算すると

$$\begin{aligned} T_{++} &= \frac{1}{2} \partial_+ X \partial_+ X + \frac{i}{2} \psi_+ \partial_+ \psi_+, \\ T_{--} &= \frac{1}{2} \partial_- X \partial_- X + \frac{i}{2} \psi_- \partial_- \psi_-, \\ T_{+-} &= T_{-+} = 0. \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

この計算から分かることは ξ^\pm がそれぞれ σ^\pm にしかよらない場合、作用は変換 (3.5.21) で不変になります。これは**共形対称性**です。

3.5.6 局所超対称性を持つ作用

ここまでで超対称性を持つ作用を作ることができました。このコピーをたくさん作ったうえで、拘束条件として $G_{++} = G_{--} = 0$ というものが課されるようにしたいです。ボゾンの弦のときの類推からすると、超対称性のパラメーターを σ^α によるようにした変換で不変な**局所超対称性**で不変な理論を考えればよいと期待できます。

実際、これは正しいです。これは非常に技術的になるのでここでは詳しくは説明しません。興味ある人は付録 A を見てください。また convention が少々違いますが

- Green, Schwarz, Witten “Superstring theory 1”

に詳しい説明があります。場として X^μ , ψ_\pm^μ に加えて多脚場 e_α^a とグラビティーノ場 $\chi_{\alpha\pm}$ が入っています。多脚場 e_α^a は世界面の計量 $h_{\alpha\beta}$ と $h_{\alpha\beta} = \eta_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b$ と関係しているものです。

この作用は一般座標変換と局所 Lorentz 変換、局所超対称性の他に Weyl 対称性、超 Weyl 対称性を持ちます。これらをゲージ固定します。

$$e_\alpha^a = \delta_\alpha^a, \quad \chi_{\alpha\pm} = 0. \quad (3.5.24)$$

すると Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} (\partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu + i \psi_+^\mu \partial_- \psi_{+\mu} + i \psi_-^\mu \partial_+ \psi_{-\mu}) \quad (3.5.25)$$

となります。

また、 $e_\alpha^a, \chi_{\alpha\pm}$ に対する運動方程式が拘束条件として残ります。これは、エネルギー運動量テンソルと超対称カレントが

$$\begin{aligned}
T_{++} &= \frac{1}{2} \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \frac{i}{2} \psi_+^\mu \partial_+ \psi_{+\mu}, & T_{--} &= \frac{1}{2} \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{i}{2} \psi_-^\mu \partial_- \psi_{-\mu}, \\
G_{++} &= \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu, & G_{--} &= \psi_-^\mu \partial_- X_\mu
\end{aligned} \tag{3.5.26}$$

となり、これを用いて $T_{++} = T_{--} = 0, G_{++} = G_{--} = 0$ となります。

ゲージ固定後に残っている対称性があります。これは、 $\mathcal{N} = (1, 1)$ 超共形対称性と呼ばれるものです。ボゾンの部分は共形対称性と同じです。 $\xi^+(\sigma^+), \xi^-(\sigma^-)$ を無限小のパラメーターとして

$$\delta_\xi X^\mu = -\xi^+ \partial_+ X^\mu - \xi^- \partial_- X^\mu, \quad \delta_\xi \psi_+^\mu = -\xi^+ \partial_+ \psi_+^\mu - \frac{1}{2} \partial_+ \xi^+ \psi_+^\mu, \quad \delta_\xi \psi_-^\mu = -\xi^- \partial_- \psi_-^\mu - \frac{1}{2} \partial_- \xi^- \psi_-^\mu \tag{3.5.27}$$

というものです。フェルミオンの部分は、 $\epsilon^+(\sigma^+), \epsilon^-(\sigma^-)$ をフェルミオンのパラメーターとして

$$\delta_\epsilon X^\mu = i\epsilon^+ \psi_+^\mu + i\epsilon^- \psi_-^\mu, \quad \delta_\epsilon \psi_+^\mu = -\epsilon^+ \partial_+ X^\mu, \quad \delta_\epsilon \psi_-^\mu = -\epsilon^- \partial_- X^\mu \tag{3.5.28}$$

となります。

今後、この理論を詳しく解析していくことになります。

3.5.7 スピン構造

実は、曲がった世界面でフェルミオンを考えるときには、世界面の計量の他に「スピン構造」と呼ばれる構造が必要です。普通の場合の理論を結構勉強した人でも4次元の Minkowski 時空しか扱ったことがない場合には、このスピン構造というのは出てきてないと思います。スピン構造は「微かな」構造ですが、超弦理論において非常に重要な役割を果たします。

4次元でもいいのですが、スピノールというのは 360° 回転すると、 -1 がかかることを思い出してください。つまり、スピノールは Lorentz 群の表現になっておらず、Lorentz 群の2重被覆である Spin 群の表現になっています。このため、トポロジーを決めて接ベクトル束を決めたとしても、まだ2重被覆のどちらを選ぶかを定める余地

があります。

具体的に、今はシリンダーの世界面を考えているので、スピン構造は、 σ を $\sigma + 2\pi$ にしたときにフェルミオンを反周期的にする場合と周期的にする場合の2つがあります。それぞれ、**NS セクター**、**R セクター**と呼ばれています。つまり ψ_{\pm}^{μ} に関して

$$\text{NS セクター:} \quad \psi_{+}^{\mu}(\sigma + 2\pi) = -\psi_{+}^{\mu}(\sigma), \quad (3.5.29)$$

$$\text{R セクター:} \quad \psi_{+}^{\mu}(\sigma + 2\pi) = \psi_{+}^{\mu}(\sigma) \quad (3.5.30)$$

という境界条件を課することになります。また、スピン構造は ψ_{+}^{μ} と ψ_{-}^{μ} に対して別々に選ぶことができます。したがって、スピン構造の選び方によって NS-NS セクター、R-NS セクター、NS-R セクター、R-R セクターの4種類のセクターがあります。

重要なことは、このスピン構造は世界面の計量と同様に動的だということです。したがって、スピン構造は1つだけでなく、すべてのセクターを考える必要があります。また、世界面の計量の運動方程式から拘束条件が出てきたのと同様に、スピン構造が動的であることにより、拘束条件が出てきます。これは、後で Hilbert 空間の元に課することになるもので **GSO 射影**と呼ばれています。

演習問題

1. 超対称性のカレントの形 (3.5.19) を導出してください。
2. エネルギー運動量テンソルの形 (3.5.23) を導出してください。

3.6 2次元の自由フェルミオン場

さて、超弦理論を解析していくためには、(3.5.25) の作用で表される系について知る必要があります。このうち X^{μ} については、ボゾンの弦のところでやりました。また ψ_{\pm}^{μ} は D 個同じもののコピーがあるだけですから、一つの ψ_{\pm} だけ考えれば良いです。さらに ψ_{+} が分かれば ψ_{-} は完全に同様にできます。なのでここでは ψ_{+} 一つに集中して、その力学を調べていきます。

3.6.1 作用とモード展開

Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2\pi} \psi_{+} \partial_{-} \psi_{+} = \frac{i}{4\pi} \psi_{+} (\dot{\psi}_{+} - \partial_{\sigma} \psi_{+}) \quad (3.6.1)$$

です。ここから運動方程式は

$$\partial_- \psi_+ = 0 \quad (3.6.2)$$

となるので、その一般解は $\psi_+ = \psi_+(\sigma^+)$ となります。

モード展開を考えます。 $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$ で NS セクターでは反周期的、R セクターでは周期的ですから

$$\psi_+(\tau, \sigma) = \sum_r \psi_r e^{-ir\sigma^+}, \quad \begin{cases} r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & \text{NS セクター} \\ r \in \mathbb{Z}, & \text{R セクター} \end{cases} \quad (3.6.3)$$

となります。逆に解くと

$$\psi_r = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma \psi_+(\tau=0, \sigma) e^{ir\sigma} \quad (3.6.4)$$

となります。

また、 ψ_+ は実ですから $\psi_+^\dagger = \psi_+$ です。したがって $\psi_r^\dagger = \psi_{-r}$ となります。

3.6.2 Dirac 括弧と反交換関係

次に正準反交換関係を考えます。 $\pi^+(\sigma)$ を $\psi_+(\sigma)$ に共役な正準運動量とします。
(3.6.1) から

$$\pi^+(\sigma) = \frac{\partial}{\partial(\dot{\psi}_+(\sigma))} \mathcal{L} = -\frac{i}{4\pi} \dot{\psi}_+(\sigma) \quad (3.6.5)$$

となります。これは、拘束条件になります。したがって正準反交換関係を考えるには、この拘束条件を正しく取り扱う必要があります。拘束条件は

$$0 = \phi(\sigma) := \pi^+(\sigma) + \frac{i}{4\pi} \dot{\psi}_+(\sigma) \quad (3.6.6)$$

と書けます。拘束条件の間の Poisson 括弧は

$$C(\sigma, \sigma') = \{\phi(\sigma), \phi(\sigma')\}_P = \frac{i}{2\pi} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.6.7)$$

となります。これは可逆ですから、この拘束条件は第2類の拘束条件になります。ですから、Dirac 括弧を計算すれば良いことになります。C の逆行列を計算しておく

$$C^{-1}(\sigma, \sigma') = -2\pi i \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.6.8)$$

となります。これを用いて Dirac 括弧は

$$\begin{aligned}\{\psi_+(\sigma), \psi_+(\sigma')\}_D &= \{\psi_+(\sigma), \psi_+(\sigma')\}_P \\ &\quad - \int d\sigma'' \int d\sigma''' \{\psi_+(\sigma), \phi(\sigma'')\}_P C^{-1}(\sigma'', \sigma''') \{\phi(\sigma'''), \psi_+(\sigma')\}_P \\ &= 2\pi i \delta(\sigma - \sigma')\end{aligned}\tag{3.6.9}$$

と計算できます。

量子化します。Dirac 括弧から正準反交換関係は

$$\{\psi_+(\sigma), \psi_+(\sigma')\} = -i\{\psi_+(\sigma), \psi_+(\sigma')\}_D = 2\pi\delta(\sigma - \sigma')\tag{3.6.10}$$

とします。ここから、モードの反交換関係は

$$\{\psi_r, \psi_s\} = \delta_{r+s} \begin{cases} r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & \text{NS セクター} \\ r, s \in \mathbb{Z}, & \text{R セクター} \end{cases}\tag{3.6.11}$$

となります。

3.6.3 エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソルの計算は、古典的には超対称性のある系ですでにやりました。(3.5.23) の ψ_+ の部分だけ取り出してくると

$$T_{++} = \frac{i}{2} \psi_+ \partial_+ \psi_+, \quad \text{他の成分は } 0\tag{3.6.12}$$

となります。

量子論的には、演算子順序の不定性がある

$$T_{++} = \frac{i}{2} : \psi_+ \partial_+ \psi_+ : + (\text{c 数})\tag{3.6.13}$$

となります。これをボゾンの場合と同様にモード展開して

$$T_{++} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in\sigma^+}\tag{3.6.14}$$

とします。 ψ_+ のモード展開 (3.6.3) を (3.6.13) に代入して整理することにより

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_r \psi_{n-r} \psi_r, \quad (n \neq 0), \quad L_0 = \sum_{r>0} r \psi_{-r} \psi_r + b\tag{3.6.15}$$

と表せます。 b は演算子順序の不定性から出てくる c 数で、後で決めます。

いろんな交換関係を計算する必要がありますが、特に重要なのは

$$[L_0, \psi_r] = -r\psi_r \quad (3.6.16)$$

です。ここから $\psi_r, r > 0$ が消滅演算子、 $\psi_r, r < 0$ が生成演算子ということが分かります。

さて Fock 空間の構造を調べつつ、 b を求めることにしましょう。NS セクターと R セクターに分けて考えていきます。

NS セクター モードは $\psi_r, r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ですから、0 モードが無いことに注意してください。Fock 真空 $|0\rangle$ を

$$\psi_r |0\rangle, r > 0 \quad (3.6.17)$$

とします。Fock 空間は、この $|0\rangle$ に $\psi_r, r < 0$ をかけていってできます。 b は、Virasoro 代数の交換関係の一つ

$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0 \quad (3.6.18)$$

が成り立つように決めることにします。両辺を $\langle 0|, |0\rangle$ で挟んで

$$\begin{aligned} 2b &= \langle 0| [L_1, L_{-1}] |0\rangle = \langle 0| L_1 L_{-1} |0\rangle = \sum_{r,s} \frac{1}{4} rs \langle 0| \psi_{1-r} \psi_r \psi_{1-s} \psi_s |0\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 0| \psi_{\frac{1}{2}} \psi_{\frac{1}{2}} \psi_{-\frac{1}{2}} \psi_{-\frac{1}{2}} |0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

となるので $b = 0$ を得ます。したがって NS セクターでは

$$L_0 = \sum_{r>0, r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} r \psi_{-r} \psi_r \quad (3.6.20)$$

となります。

R セクター モードは $\psi_r, r \in \mathbb{Z}$ です。ゼロモードがあるので、少しややこしくなります。ゼロモードの作用のために、R セクターの真空には縮退が生じます。これについては、全部まとめてから考えたほうがよいので、後回しにします。とりあえず、R セクターの Fock 真空の一つを $|R\rangle$ とすると、これは

$$\psi_r |R\rangle = 0, r > 0 \quad (3.6.21)$$

を満たします。NS セクターの場合と同様に

$$\begin{aligned} 2b &= \langle 0| [L_1, L_{-1}] |0\rangle = \langle 0| L_1 L_{-1} |0\rangle = \sum_{r,s} \frac{1}{4} rs \langle 0| \psi_{1-r} \psi_r \psi_{1-s} \psi_s |0\rangle \\ &= \frac{1}{4} 1 \cdot (-1) \langle 0| \psi_0 \psi_1 \psi_0 \psi_{-1} |0\rangle = \frac{1}{4} \langle 0| \psi_0 \psi_0 \psi_1 \psi_{-1} |0\rangle = \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

となります。ここで反交換関係 (3.6.11) を用いました。こうして $b = \frac{1}{16}$ を得ます。したがって R セクターでは

$$L_0 = \sum_{r=1}^{\infty} r \psi_{-r} \psi_r + \frac{1}{16} \quad (3.6.23)$$

となります。

このように L_0 を決めると NS セクター、R セクターともに $c = \frac{1}{2}$ の Virasoro 代数

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n} \quad (3.6.24)$$

を満たします。

3.6.4 真空のエネルギー

後で臨界次元を求めるための、フェルミオンの場合の真空のエネルギーを求めておきます。これは、 L_0 を正規順序積になおすときに出てくる定数です。素朴には無限になるのですが、くりこみにより有限の値を得ることができます。具体的には、

$$\frac{1}{2} \sum_r r \psi_{-r} \psi_r = \frac{1}{2} \sum_{r>0} r \psi_{-r} \psi_r + \frac{1}{2} \sum_{r<0} r \psi_{-r} \psi_r = \sum_{r>0} r \psi_{-r} \psi_r - \frac{1}{2} \sum_{r>0} r \quad (3.6.25)$$

としたときの c 数 $a = \frac{1}{2} \sum_{r>0} r$ を求めます。

NS セクターの場合 $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ですからゼータ関数スキームを用いると

$$a = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) \Big|_{\text{くりこみ}} = \frac{1}{2} \zeta\left(-1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48} \quad (3.6.26)$$

となります。ここで Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s, b)$ を $\text{Re } s > 1, 0 < b \leq 1$ に対して

$$\zeta(s, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+b)^s} \quad (3.6.27)$$

と定義します。他の領域には、解析接続で定義します。解析接続を実際にやると

$$\zeta(-1, b) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b^2 \quad (3.6.28)$$

となることが知られています。

同様に R セクターを考えると

$$a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \Big|_{\text{くりこみ}} = \frac{1}{2} \zeta(-1, 1) = -\frac{1}{24} \quad (3.6.29)$$

となります。

3.7 超共形代数

3.7.1 超対称性のある系の量子化と Virasoro 代数

次に量子化して超対称性の構造を調べるために X, ψ_{\pm} を一つずつ入れ (3.5.14) の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} (\partial_+ X \partial_- X + i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_-) \quad (3.7.1)$$

で表される理論を考えます。

このエネルギー運動量テンソルは (3.5.23) で求めました。例えば、 T_{++} は

$$T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X \partial_+ X + \frac{i}{2} \psi_+ \partial_+ \psi_+ \quad (3.7.2)$$

というように X のエネルギー運動量テンソル（中心電荷 1）と ψ_+ のエネルギー運動量テンソル（中心電荷 $\frac{1}{2}$ ）の和になっています。したがってその中心電荷は

$$c = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (3.7.3)$$

となります。そのモード $T_{++} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in\sigma^+}$ は

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n} \quad (3.7.4)$$

という Virasoro 代数を満たします。 T_{--} についても同様です。

3.7.2 超対称性のカレントと超共形代数

超対称カレントは、(3.5.19) で求めました。例えば G_{++} は

$$G_{++} = \psi_+ \partial_+ X \quad (3.7.5)$$

となります。保存則から、これは σ^+ のみの関数となり、 σ についての（反）周期性から

$$G_{++}(\tau, \sigma) = \sum_r G_r e^{-ir\sigma^+}, \quad \begin{cases} r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & \text{NS セクター} \\ r \in \mathbb{Z}, & \text{R セクター} \end{cases} \quad (3.7.6)$$

と展開できます。モード展開 $\psi_+ = \sum_r \psi_s e^{-is\sigma^+}$, $\partial_+ X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in\sigma^+}$ を代入して計算すると

$$\begin{aligned} G_{++} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, s} \psi_s \alpha_n e^{-i(s+n)\sigma^+} \\ &= \sum_r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{r-n} \alpha_n e^{-ir\sigma^+} \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

となります。途中で $r = s + n$ の変数変換をしました。したがって

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{r-n} \alpha_n \quad (3.7.8)$$

となります。ここでは、演算子順序の問題はありません。

L_n, G_r の (反) 交換関係を計算しておきましょう。がんばって計算すると

$$[L_n, G_r] = \left(\frac{n}{2} - r\right) G_{r+n}, \quad \{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{3} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r+s}, \quad c = \frac{3}{2} \quad (3.7.9)$$

となります。(3.7.4) と合わせて閉じた超 Lie 代数を作ります。この代数は $\mathcal{N} = 1$ 超共形代数と呼ばれます。特に NS セクター、R セクターの超共形代数はそれぞれ NS 代数、R 代数と呼ばれます。

同様にして G_{--} は

$$G_{--} = \psi_- \partial_- X \quad (3.7.10)$$

であり、これを

$$G_{--} = \sum_r \tilde{G}_r e^{-ir\sigma^-} \quad (3.7.11)$$

と展開できます。 $\psi_- = \sum_r \tilde{\psi}_s e^{-is\sigma^-}$, $\partial_- X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_n e^{-in\sigma^-}$ を代入して計算すると

$$\tilde{G}_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_{r-n} \tilde{\alpha}_n \quad (3.7.12)$$

が得られます。これらの間の (反) 交換関係は

$$[\tilde{L}_n, \tilde{G}_r] = \left(\frac{n}{2} - r\right) \tilde{G}_{r+n}, \quad \{\tilde{G}_r, \tilde{G}_s\} = 2\tilde{L}_{r+s} + \frac{c}{3} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r+s}, \quad c = \frac{3}{2} \quad (3.7.13)$$

となります。

3.7.3 超対称性のある系と真空のエネルギー

(3.5.14) で表される系の真空のエネルギーを求めておきましょう。つまり

$$\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n} \alpha_n + \frac{1}{2} \sum_r r \psi_{-r} \psi_r = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{-n} \alpha_n : + \frac{1}{2} \sum_r r : \psi_{-r} \psi_r : - a \quad (3.7.14)$$

となる a を求めます。

まず、NS セクターを考えましょう。ボゾンからは $\frac{1}{24}$ 、フェルミオンからは (3.6.26) で計算したとおり $\frac{1}{48}$ の寄与があるので合わせて

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16} \quad (3.7.15)$$

となります。

実は超対称性があると、真空のエネルギーに関して、発散がなくなるということが起こります。これを見てみましょう。

$$-2a = \sum_{n=1}^{\infty} n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right) \quad \Bigg|_{\text{くりこみ}} \quad (3.7.16)$$

ですが、これは $\infty - \infty$ となっているのでよく分かりません。これを以前やったような指数関数の減衰因子を入れて正則化します。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\epsilon n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2} \right) e^{-\epsilon(n-1/2)} = \left(\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{24} \right) + O(\epsilon) = -\frac{1}{8} + O(\epsilon) \rightarrow -\frac{1}{8} \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (3.7.17)$$

となり、相殺項を入れなくても有限になります。これは超対称性があれば、Weyl 対称性を考えなくても、真空のエネルギー密度が 0 となるためです。

R セクターに関しても、ボゾンからは $\frac{1}{24}$ 、フェルミオンからは、(3.6.29) で計算したとおり $-\frac{1}{24}$ の寄与がありますから

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{24} = 0 \quad (3.7.18)$$

となります。

これも、もう少し戻って見てみると

$$-2a = \sum_{n=1}^{\infty} n - \sum_{n=1}^{\infty} n \quad \Bigg|_{\text{くりこみ}} \quad (3.7.19)$$

となりますから、正則化すればカットオフが有限でも 0 になります。R セクターの場合には、境界条件がボゾンとフェルミオンと同じですから、Hamiltonian と交換する超

対称性の電荷があり、そのためにエネルギー密度だけでなく、エネルギーが 0 になっています。

演習問題

(3.7.9) が成り立つことを確かめよ。

ヒント

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] = \{A, B\}C - B\{A, C\}, \quad (3.7.20)$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C - B[A, C] = [A, B]C - B\{A, C\} \quad (3.7.21)$$

3.8 光円錐ゲージ

3.8.1 ゲージ固定

さて、超弦理論に戻ります。ゲージ固定した後の Lagrangian 密度は (3.5.25) で表されます。もう一度書くと

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} (\partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu + i\psi_+^\mu \partial_- \psi_{+\mu} + i\psi_-^\mu \partial_+ \psi_{-\mu}) \quad (3.8.1)$$

また、エネルギー運動量テンソルと超対称カレントは

$$\begin{aligned} T_{++} &= \frac{1}{2} \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \frac{i}{2} \psi_+^\mu \partial_+ \psi_{+\mu}, & T_{--} &= \frac{1}{2} \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{i}{2} \psi_-^\mu \partial_- \psi_{-\mu}, \\ G_{++} &= \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu, & G_{--} &= \psi_-^\mu \partial_- X_\mu \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

となります。これを用いて拘束条件は $T_{++} = T_{--} = 0, G_{++} = G_{--} = 0$ となります。

ゲージ固定後に残っているゲージ対称性は $N = (1, 1)$ 超共形対称性です。ボゾンの部分は $\xi^+(\sigma^+), \xi^-(\sigma^-)$ を無限小のボゾンのなパラメーターとして

$$\delta_\xi X^\mu = -\xi^+ \partial_+ X^\mu - \xi^- \partial_- X^\mu, \quad \delta_\xi \psi_+^\mu = -\xi^+ \partial_+ \psi_+^\mu - \frac{1}{2} \partial_+ \xi^+ \psi_+^\mu, \quad \delta_\xi \psi_-^\mu = -\xi^- \partial_- \psi_-^\mu - \frac{1}{2} \partial_- \xi^- \psi_-^\mu \quad (3.8.3)$$

と書けます。フェルミオンのな部分は、 $\epsilon^+(\sigma^+), \epsilon^-(\sigma^-)$ をフェルミオンのなパラメーターとして

$$\delta_\epsilon X^\mu = i\epsilon^+ \psi_+^\mu + i\epsilon^- \psi_-^\mu, \quad \delta_\epsilon \psi_+^\mu = -\epsilon^+ \partial_+ X^\mu, \quad \delta_\epsilon \psi_-^\mu = -\epsilon^- \partial_- X^\mu \quad (3.8.4)$$

となります。

3.8.2 拘束条件

ボゾンの弦理論の時と同様にして光円錐ゲージでゲージ固定します。

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}) \quad (3.8.5)$$

という光円錐座標をとり、ボゾンの弦理論のときと同様に (3.8.3) の対称性を使って

$$X^+(\tau, \sigma) = 2p^+ \tau \quad (3.8.6)$$

とします。また、(3.8.4) を用いて

$$\psi_+^+ = \psi_-^+ = 0 \quad (3.8.7)$$

とします。

ここから、 $T_{++} = 0$, $T_{--} = 0$ という拘束条件を解いて

$$\partial_+ X^- = \frac{1}{p^+} T_{++}^\perp, \quad T_{++}^\perp := \frac{1}{2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i + \frac{i}{2} \psi_+^i \partial_+ \psi_+^i, \quad (3.8.8)$$

$$\partial_- X^- = \frac{1}{p^+} T_{--}^\perp, \quad T_{--}^\perp := \frac{1}{2} \partial_- X^i \partial_- X^i + \frac{i}{2} \psi_-^i \partial_- \psi_-^i \quad (3.8.9)$$

という関係式を得ます。 X^- の自由度のうち、残るのは定数モード x^- のみです。またレベル一致条件 $L_0^\perp = \tilde{L}_0^\perp$ が拘束条件として残ります。レベル一致条件は状態に課すことにします。

同様に $G_{++} = 0$, $G_{--} = 0$ を解くことができ

$$\psi_+^- = \frac{1}{p^+} G_{++}^\perp, \quad G_{++}^\perp := \psi_+^i \partial_+ X^i, \quad (3.8.10)$$

$$\psi_-^- = \frac{1}{p^+} G_{--}^\perp, \quad G_{--}^\perp := \psi_-^i \partial_- X^i \quad (3.8.11)$$

となります。これで ψ_\pm^- の自由度は完全に独立でなくなります。

3.8.3 量子化と臨界次元

さて、光円錐ゲージをとったので量子化しましょう。残っている自由度は、 x^- , p^+ , $X^i(\sigma)$, $\psi_\pm^i(\sigma)$ です。これらのモード展開したものの間の交換関係は

$$\begin{aligned} [x^-, p^+] &= -i, \quad [x^i, p^j] = i\delta^{ij}, \quad [\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta_{m+n}\delta^{ij}, \quad [\tilde{\alpha}_m^i, \tilde{\alpha}_n^j] = m\delta_{m+n}\delta^{ij}, \\ \{\psi_r^i, \psi_s^j\} &= \delta_{r+s}\delta^{ij}, \quad \{\tilde{\psi}_r^i, \tilde{\psi}_s^j\} = \delta_{r+s}\delta^{ij} \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

となります。これ以外は交換または反交換します。

量子化したときに、演算子順序の問題が出るのは (3.8.8) と (3.8.9) のゼロモードです。 (3.8.8) のゼロモードは

$$\alpha_0^- = p^- = \frac{1}{p^+} \left(\frac{1}{2} p^i p^i + N - a \right), \quad N := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r>0} r \psi_{-r} \psi_r \quad (3.8.13)$$

となります。 a は、NS セクターの場合、 (3.7.15) から

$$a_{\text{NS}} = \frac{D-2}{2} \quad (3.8.14)$$

となり、R セクターの場合 (3.7.18) から

$$a_{\text{R}} = 0 \quad (3.8.15)$$

となります。一方、 (3.8.9) の方は

$$\tilde{\alpha}_0^- = p^- = \frac{1}{p^+} \left(\frac{1}{2} p^i p^i + \tilde{N} - \tilde{a} \right), \quad \tilde{N} := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i + \sum_{r>0} r \tilde{\psi}_{-r} \tilde{\psi}_r \quad (3.8.16)$$

となります。 \tilde{a} は NS セクター、R セクターの場合にそれぞれ上の $a_{\text{NS}}, a_{\text{R}}$ と等しくなります。

(3.8.13) と (3.8.16) からレベル一致条件

$$N - a = \tilde{N} - \tilde{a} \quad (3.8.17)$$

および質量の式

$$m^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^i p^i = N + \tilde{N} - a - \tilde{a} \quad (3.8.18)$$

を得ます。

さてボゾンの弦の場合と同じようにスペクトルを考えることで、臨界次元を求めましょう。とりあえず、NSNS セクターを考えます。このときの Fock 真空を $|k\rangle$ を

$$\begin{aligned} \alpha_n^i |k\rangle &= \alpha_n^i |k\rangle = \psi_r^i |k\rangle = \tilde{\psi}_r^i |k\rangle = 0, \quad (n, r > 0), \\ p^i |k\rangle &= k^i |k\rangle, \quad p^+ |k\rangle = k^+ |k\rangle \end{aligned} \quad (3.8.19)$$

を満たす状態とします。この状態はレベル一致条件 (3.8.17) を満たし、その質量は (3.8.18) より

$$m^2 = -2a_{\text{NS}} \quad (3.8.20)$$

となります。したがって、この状態はタキオンです。

次に第 1 励起状態を考えます。レベル一致条件を満たす第 1 励起状態は

$$\psi_{-\frac{1}{2}}^i \tilde{\psi}_{-\frac{1}{2}}^j |k\rangle \quad (3.8.21)$$

です。これは、 $SO(D-2)$ の既約表現として 2 階反対称テンソル、トレースレス対称テンソル、スカラーを含みます。ボゾンの弦のときと同じ議論で、Lorentz 対称性があるなら、この状態は質量がゼロでなければなりません。(3.8.18) と合わせると

$$0 = m^2 = 2\left(\frac{1}{2} - a_{\text{NS}}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{D-2}{16}\right) \quad (3.8.22)$$

とならなければならないので臨界次元

$$D = 10 \quad (3.8.23)$$

を得ます。

ボゾンの弦のときと同様に、Lorentz 変換の生成子の交換関係を考えることによって、 $a_{\text{NS}} = \frac{1}{2}$, $D = 10$ を得ることが出来ます。

ここから先は $D = 10$ の場合のみを考えることにします。

3.8.4 R セクター

R セクターについても考えていきます。自由フェルミオンの R セクターのゼロモードについて議論を後回しにしていました。それをここで改めて考えてみます。

まずは、 ψ_n^i , $n \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, 8$ に集中して考えます。(反) 交換関係は

$$\{\psi_n^i, \psi_m^j\} = \delta_{m+n} \delta^{ij}, \quad [L_0, \psi_n^i] = -n \psi_n^i \quad (3.8.24)$$

となります。したがって ψ_n^i , $n > 0$ が消滅、 $n < 0$ が生成演算子となります。ここで、Fock 真空を考えようとして

$$\psi_n^i |R\rangle = 0, \quad (n > 0) \quad (3.8.25)$$

としたのは良いのですが、エネルギーを変えない演算子である ψ_0^i をどうするかが分からないのでした。

$$\psi_0^i |R\rangle = ? \quad (3.8.26)$$

ですので、ここからゼロモード ψ_0^i , $i = 1, \dots, 8$ に集中して考えます。これらの反交換関係は

$$\{\psi_0^i, \psi_0^j\} = \delta^{ij} \quad (3.8.27)$$

となりますから、これらは Clifford 代数をなします。その表現はガンマ行列と言ってもいいです。

この Clifford 代数の表現、言い換えるとガンマ行列をもう少し具体的に作っていくことにします。次のような「生成消滅演算子」を定義します。

$$b_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^{2I-1} + i\psi_0^{2I}), \quad b_I^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^{2I-1} - i\psi_0^{2I}), \quad I = 1, 2, 3, 4. \quad (3.8.28)$$

この b_I, b_I^\dagger の反交換関係は

$$\{b_I, b_J^\dagger\} = \delta_{IJ} \quad (3.8.29)$$

と書けるので、フェルミオンの調和振動子の生成消滅演算子とすることができます⁵⁾。これで Fock 空間を作ることになしましょう。次のような「Fock 真空」 $|---\rangle$ を用意します。

$$b_I |---\rangle = 0, \quad I = 1, 2, 3, 4. \quad (3.8.30)$$

ここから生成演算子をかけていって他の状態を作っていきます。

$$\begin{aligned} b_1^\dagger |---\rangle &= |+-\rangle, & b_2^\dagger |---\rangle &= |-+-\rangle, \\ b_3^\dagger |---\rangle &= |--+\rangle, & b_4^\dagger |---\rangle &= |---+\rangle \end{aligned} \quad (3.8.31)$$

などです。ただし、

$$b_1^\dagger |-+-\rangle = |++-\rangle \quad (3.8.32)$$

と決めたとすると

$$b_2^\dagger |+-\rangle = -|++-\rangle \quad (3.8.33)$$

となることに注意してください。 b_2^\dagger が 2 番目の $-$ に当たりにいくときに、一番目の $+$ を飛び越えないとダメなので、余分に $-$ 符号が付くと覚えておくとよいと思います。

5) ただし、今はゼロモードだけを議論しているのでエネルギーは変えないことに注意してください。なので b と b^\dagger のどちらを生成と呼んで、どちらを消滅と呼ぶか等については任意性があります。

こうしてできる Fock 空間の状態は $|\pm\pm\pm\pm\rangle$ の 16 個あります。これを表すラベルとして $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, $A_I = \pm$ を用意します。

まとめると R セクターのゼロモード ψ_0^i , $i = 1, \dots, 8$ の表現空間の基底は

$$|A\rangle = |A_1 A_2 A_3 A_4\rangle, \quad A_I = \pm \quad (3.8.34)$$

と表されます。

このことを踏まえて、例えば RNS セクターを考えてみることにしましょう。Fock 真空は

$$|k, A\rangle \quad (3.8.35)$$

のように表されます。A は先程見たような ψ_0^i の表現を表すラベルです。この状態は $a = a_R = 0, \tilde{a} = a_{NS} = \frac{1}{2}$ であることを考慮すると

$$N - a = 0, \quad \tilde{N} - \tilde{a} = -\frac{1}{2} \quad (3.8.36)$$

なのでレベル一致条件を満たしません。ですので励起状態を考える必要があります。上の Fock 真空に $\tilde{\psi}_{-\frac{1}{2}}^i$ をかけた状態

$$\tilde{\psi}_{-\frac{1}{2}}^i |k, A\rangle \quad (3.8.37)$$

は、 $N - a = \tilde{N} - \tilde{a} = 0$ となってレベル一致条件を満たします。また質量は (3.8.18) から $m^2 = 0$ となります。この状態は、ベクトルの足を持ったスピノールで、時空のグラビティーノを含みます。

ついでに RR セクターも見てみましょう。Fock 真空は

$$|k, A, \tilde{A}\rangle \quad (3.8.38)$$

となります。A は ψ_0^i の表現を表すラベル、 \tilde{A} は $\tilde{\psi}_0^i$ の表現を表すラベルです。ここからは、様々な反対称テンソル場が現れます。これらは RR 場と呼ばれています。

このようにして、弦のスペクトルを見ていくことができますが、実はまだ非常に大事なことを議論していません。それは GSO 射影で、次の節で見ていきます。

3.9 GSO 射影

以前に予告したように、スピンの動的であることによる拘束条件を考える必要があります。これは、GSO 射影と呼ばれます。この GSO 射影を考えることにより様々な矛盾が解決されます。

- タキオンが消えます。
- モジュラー不変性が成り立ちます。モジュラー不変性とは世界面の一般座標変換の不変性の一部で、必ず成り立つ必要があります。これについては、この講義ではこれ以上深く立ち入りません。
- スピンと統計の関係が正しく成り立ちます。これは半整数スピンの粒子はフェルミオンで、整数スピンの粒子はボゾンだという性質で、まともな理論では必ず成り立つ必要があります。GSO 射影を考えない理論では、例えば $|a\rangle$ という状態と $\psi_{-n}^i \alpha_{-n}^j |a\rangle$ という状態を考えると、スピンは整数しか異ならないのに、統計は反対になるので、どちらかの状態がスピンと統計の関係を満たさないことになります。

3.9.1 フェルミオン数

GSO 射影について述べるために、フェルミオン数という概念を導入します。

まず、 ψ_+ の数を mod 2 で数える演算子 $(-1)^{F_+}$ を次のような関係を持つものとして導入します。

$$(-1)^{F_+} \psi_+^\mu (-1)^{F_+} = -\psi_+^\mu, \quad (-1)^{F_+} \psi_-^\mu (-1)^{F_+} = \psi_-^\mu. \quad (3.9.1)$$

ボゾンとは交換するとしします。 ψ_-^μ とは交換することに注意してください。

$(-1)^{F_+}$ が状態にどう作用するかを考えなければなりません。これは Fock 真空にどう作用するかを決めれば決まります。次のようにします。

$$\text{NS セクター: } (-1)^{F_+} |k\rangle = -|k\rangle, \quad (3.9.2)$$

$$\text{R セクター: } (-1)^{F_+} |A\rangle = A_1 A_2 A_3 A_4 |k\rangle. \quad (3.9.3)$$

少し解説が必要だと思います。まず、NS セクターの方は + でも良いような気がすると思いますが、- でなければなりません。この理由は、散乱振幅を考えたときの無矛盾性からくるのですが、この講義の範囲内では説明することが難しいです。後で説明するように「タキオンを消すため」と思っておいても良いかもしれません。R セクターの方も全体に - をつけても良さそうですが、こちらはそれでも良いです。例えば $X^8 \rightarrow -X^8$ という鏡映変換を行うと反対になります。ここでは、言葉や記号 $(-1)^{F_+}$ は (3.9.3) で定義することにして、任意性は使うときに取り入れることにします⁶⁾。

6) 最近の言葉を用いると、スピン構造の Arf 不変量を作用に足すことにより、これを入れ替えることが出来ます。

R セクターのフェルミオン数について、もう一つだけ補足です。ゼロモードの表現の作り方から

$$A_1 |A\rangle = (2b_1^\dagger b_1 - 1) |A\rangle = 2i\psi_0^1 \psi_0^2 |A\rangle \quad (3.9.4)$$

となります。\$A_2, A_3, A_4\$ に関しても同様です。したがって

$$(-1)^{F_+} |A\rangle = 2^4 \psi_0^1 \cdots \psi_0^8 |A\rangle \quad (3.9.5)$$

となります。つまり、後で見るように \$(-1)^{F_+}\$ は R セクターの Fock 真空に当たるときは、chirality になります。

同様にして、\$\psi_-\$ の数を mod 2 で数える演算子 \$(-1)^{F_-}\$ を次のような関係を持つものとして導入します。

$$(-1)^{F_+} \psi_+^\mu (-1)^{F_+} = \psi_+^\mu, \quad (-1)^{F_+} \psi_-^\mu (-1)^{F_+} = -\psi_-^\mu. \quad (3.9.6)$$

状態への作用も同様にします。

3.9.2 GSO 射影と 2 種類の超弦理論

さて、スピン構造が動的であるということは、上で述べたフェルミオン数 \$(-1)^{F_+}, (-1)^{F_-}\$ がゲージ対称性だということです。したがって、\$(-1)^{F_+}, (-1)^{F_-}\$ で不変な状態のみが物理的状態です。このような物理的状態のみを残すことを **GSO 射影** と呼びます。

したがって、大雑把にいうと GSO 射影は \$(-1)^{F_+} = +1, (-1)^{F_-} = +1\$ の状態のみ残す、ということになります。ただし、上で注意したように R セクターに関しては任意性があるので + あるいは - をとってくるができます。こう書くと R セクターにおいては \$(-1)^{F_+} = \pm 1, (-1)^{F_-} = \pm 1\$ の 4 つの可能性があるように思えます。しかし、上で述べたように、鏡映で \$(-1)^{F_+}, (-1)^{F_-}\$ の両方をひっくり返すことが、物理を変えずにできます。ですから異なる物理を与える R セクターのとり方は、\$(-1)^{F_+} = +1, (-1)^{F_-} = \pm 1\$ の 2 種類です。これらに応じて 2 種類の超弦理論、type IIB と type IIA が存在することになります。

もう少し具体的に書くために、記号を導入します。NS セクターでフェルミオン数が + のセクターを NS+, R セクターでフェルミオン数が + のセクターを R+, R セクターでフェルミオン数が - のセクターを R- とします。この記号を用いて \$\psi_+^\mu, \psi_-^\mu\$ のそれぞれに、これらの 3 つの記号のどれかを割り当てて、例えば (NS+, R+) のような記号でセクターを表すことにします。この記号を用いると 2 つの超弦理論でとってくるセクターは次のようになります。

type IIB 超弦理論

$$(NS+, NS+), (NS+, R+), (R+, NS+), (R+, R+). \quad (3.9.7)$$

type IIA 超弦理論

$$(NS+, NS+), (NS+, R-), (R+, NS+), (R+, R-). \quad (3.9.8)$$

type IIA, type IIB ともにタキオンを含んでいません。また、type IIA, type IIB ともに NSNS セクターに重力子を含んでいるので、量子重力理論になります。さらに細かい性質や、type IIA と type IIB の違いを見るためには、SO(8) の表現論について知っておく必要があります。次の節では、SO(8) の表現論の必要な部分をまとめた後、type IIA, type IIB の超弦理論の無質量のスペクトルに注目して考察します。

3.10 超弦理論の時空の超対称性

実は、type IIB 超弦理論、type IIA 超弦理論には時空の超対称性があります。これは定式化のところで述べた世界面の超対称性とは別のものです。超弦理論の「超」は、実はこの時空の超対称性の「超」です。

これを含めて時空の描像を詳しく見るために、無質量のスペクトルを詳しく調べてみます。そのために SO(8) の表現について必要なことをまとめておきます。

3.10.1 SO(8) の表現論

今光円錐ゲージであらわに見えている対称性は SO(8)⁷⁾ です。この SO(8) の表現についてまとめておきます。

まず、普通のベクトル表現があります。これは 8 次元表現です。このベクトル表現を 8_v と書くことにします。

次にスピノール表現について考えます。そのためにガンマ行列をとります。行列 γ^i , ($i = 1, \dots, 8$) を

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij} \quad (3.10.1)$$

を満たすようにとります。行列のサイズは最低 16×16 必要なので、そのようにして

7) 正確には群としては普遍被覆である Spin(8) を考えています。

おきます。また、全ての γ^i を実対称行列にとることができるので、そのようにしておきます。

カイラリティの行列を $\gamma_9 := \gamma^1 \dots \gamma^8$ とします。こうすると

$$\gamma_9^2 = 1, \quad \{\gamma_9, \gamma^i\} = 0 \quad (3.10.2)$$

という関係を満たします。したがって、 γ_9 は $SO(8)$ の生成子と交換します。また、 γ_9 の固有値は ± 1 です。16 次元の Dirac スピノール表現は、2 つの Weyl スピノール表現に分かれます。

- $\gamma_9 \Psi = +\Psi$ となる 8 次元表現を spinor 表現と呼び 8_s と書くことにします。
- $\gamma_9 \Psi = -\Psi$ となる 8 次元表現を cospinor 表現と呼び 8_c と書くことにします。

ここまでをまとめると、 $SO(8)$ には 3 種類の 8 次元表現 $8_v, 8_s, 8_c$ があります。これらは同値ではない表現です。 $SO(8)$ は結構面白い群で、triality と呼ばれる性質を持っています。 $8_v, 8_s, 8_c$ は、この triality で入れ替わる 3 つの表現です。

これらの表現のテンソル積を考えることにします。まず $8_v \otimes 8_v$ を考えます。これは、2 階のテンソルになりますが、これまで何回か出てきたように、これはスカラー 1、反対称テンソル 28_a 、トレースレス対称テンソル 35_g の 3 つの既約表現に分解できます。つまり

$$8_v \otimes 8_v = 1 \oplus 28_a \oplus 35_g \quad (3.10.3)$$

と書くことができます。

次にスピノールについて説明します。最初に一つの例を答えだけ示します。

$$8_s \otimes 8_s = 1 \oplus 28_a \oplus 35_+ \quad (3.10.4)$$

となります。 35_+ は自己双対 4 階反対称テンソルです。

自己双対について少し説明します。4 階反対称テンソル $t^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ に対して、その Hodge 双対 $\tilde{t}^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ を

$$\tilde{t}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = \frac{1}{4!} \epsilon^{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7 i_8} t^{i_5 i_6 i_7 i_8} \quad (3.10.5)$$

として定義します。ここで、 $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_8}$ は、完全反対称テンソルで、 $\epsilon^{12 \dots 8} = +1$ となるものです。 $\tilde{t}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = t^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ を満たします。

- $\tilde{t}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = t^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ を満たすものを**自己双対**といいます。
- $\tilde{t}^{i_1 i_2 i_3 i_4} = -t^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ を満たすものを**反自己双対**といいます。

4階反対称テンソルは自己双対なものと反自己双対なものの2つの既約表現に分かれます。

テンソル積の分解 (3.10.4) の理解の仕方の一つは次のようなものです。 Ψ, Ψ' を両方とも 8_s に属するスピノールとします。この Ψ と Ψ' の積は一般のテンソル積表現になりますから、ここからどのような既約表現が出てくるかを見ればよいです。これには

$$\Psi^T \gamma^{i_1 \dots i_p} \Psi' \quad (3.10.6)$$

を全て考えればよいことになります。(3.10.6) は、次のような性質を持ちます。

- p が奇数なら

$$\Psi^T \gamma^{i_1 \dots i_p} \Psi' = 0 \quad (3.10.7)$$

です。これは、次のように示せます。

$$\Psi^T \gamma^{i_1 \dots i_p} \Psi' = \Psi^T \gamma^{i_1 \dots i_p} \gamma_9 \Psi' = -\Psi^T \gamma_9 \gamma^{i_1 \dots i_p} \Psi' = -\Psi^T \gamma^{i_1 \dots i_p} \Psi' \quad (3.10.8)$$

となって、自分自身に $-$ を付けたものと等しいので 0 になります。

- $p > 8$ のものは $p < 4$ の線形結合で書くことができます。これは頑張って計算することで証明出来る式

$$\gamma^{i_1 \dots i_p} \gamma_9 = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}}{(8-p)!} \epsilon^{i_1 \dots i_8} \gamma_{i_{p+1} \dots i_8} \quad (3.10.9)$$

を用いると分かります。

これらの事実を用いると、 $p = 0, 2, 4$ の場合のみが独立であることが分かります。さらに (3.10.9) を用いると $p = 4$ のときに出てくる4階反対称テンソルは自己双対であることが分かります。結果 (3.10.4) が得られます。同様の考え方をすると

$$8_c \otimes 8_c = 1 \oplus 28_a \oplus 35_-, \quad 8_s \otimes 8_c = 8_v \oplus 56_t \quad (3.10.10)$$

が得られます。ここで 35_- は反自己双対4階反対称テンソル、 56_t は3階反対称テンソルです。

さらに $8_v \otimes 8_s$ を考えます。これは、ベクトルの足 i を持ったスピノール Ψ_i で $\gamma_9 \Psi_i = \Psi_i$ を満たすものを考えれば良いことになります。これは、そのままでは既約表現ではありません。それは

$$\Xi := \gamma^i \Psi_i \quad (3.10.11)$$

とすると、 Ξ は部分表現になります。 Ξ は

$$\gamma_9 \Xi = \gamma_9 \gamma^i \Psi_i = -\gamma^i \gamma_9 \Psi_i = -\gamma^i \Psi_i = -\Xi \quad (3.10.12)$$

となるので 8_c 表現です。これを除いた 56 次元表現は既約表現になっていて、これを 56_s と書くことにします。つまり

$$8_v \otimes 8_s = 8_c \oplus 56_s \quad (3.10.13)$$

となります。同様に考えて

$$8_v \otimes 8_c = 8_s \oplus 56_c \quad (3.10.14)$$

となります。

ここまでのテンソル積の結果をまとめておきます。

$$\begin{aligned} 8_v \otimes 8_v &= 1 \oplus 28_a \oplus 35_g, & 8_s \otimes 8_s &= 1 \oplus 28_a \oplus 35_+, & 8_c \otimes 8_c &= 1 \oplus 28_a \oplus 35_-, \\ 8_s \otimes 8_c &= 8_v \otimes 56_t, & 8_v \otimes 8_s &= 8_c \otimes 56_s, & 8_v \otimes 8_c &= 8_s \otimes 56_c. \end{aligned} \quad (3.10.15)$$

こうしてまとめて書いてみると triality が成り立っていることが、よく分かると思います。

3.10.2 無質量スペクトル

さて type IIB 超弦理論と type IIA 超弦理論の無質量スペクトルを調べましょう。低エネルギーでは、無質量の場のみが重要になります。

まず、R セクターの GSO 射影と chirality の関係について述べます。 ψ_+^i , $i = 1, \dots, 8$ からできる R セクターの基底状態は、

$$|A\rangle = |A_1 A_2 A_3 A_4\rangle, \quad A_a = \pm \quad (3.10.16)$$

と表される 16 個の状態でした。このときフェルミオン数は

$$(-1)^F |A\rangle = A_1 A_2 A_3 A_4 |A\rangle \quad (3.10.17)$$

です。ところで、作り方から、例えば

$$A_1 |A\rangle = (2b_1^\dagger b_1 - 1) |A\rangle = 2i\psi_0^1 \psi_0^2 |A\rangle \quad (3.10.18)$$

となります。ところで、 ψ_0^i と γ^i は、基底状態に作用する場合には、

$$\sqrt{2}\psi_0^i = \gamma^i \quad (3.10.19)$$

と関係づけられます。これらをまとめると

$$(-1)^F = \gamma_9 \quad (3.10.20)$$

となります。したがって、 $R+$ の基底状態は 8_s 表現になり、 $R-$ の基底状態は 8_c 表現になります

さてこれらを踏まえて type IIB を見てみましょう。

- NSNS セクターは $(NS+, NS+)$ をとってきます。無質量の状態は

$$\psi_{-\frac{1}{2}}^i \tilde{\psi}_{-\frac{1}{2}}^j |k\rangle \quad (3.10.21)$$

となるのでその表現は既約表現に分解すると

$$8_v \otimes 8_v = 1 \oplus 28_a \oplus 35_g \quad (3.10.22)$$

になります。左辺に出てくる表現の粒子を作る場を順番に dilaton 場 Φ 、 B 場 B_2 、計量 G という名前がついています。

- NSR セクターは $(NS+, R+)$ をとってきます。無質量の状態は

$$\psi_{-\frac{1}{2}}^i |k, \tilde{A}\rangle \quad (3.10.23)$$

となります。これを既約表現に分解すると

$$8_v \otimes 8_s = 8_c \oplus 56_s \quad (3.10.24)$$

になります。左辺に出てくる表現の粒子を作る場を順番に dilatino 場 λ_{c2} 、gravitino 場 Ψ_{s2} という名前がついています。

- RNS セクターは $(R+, NS+)$ をとってきます。無質量の状態は

$$\tilde{\psi}_{-\frac{1}{2}}^i |k, A\rangle \quad (3.10.25)$$

となります。これを既約表現に分解すると

$$8_v \otimes 8_s = 8_c \oplus 56_s \quad (3.10.26)$$

になります。左辺に出てくる表現の粒子を作る場を順番に dilatino 場 λ_{c1} 、gravitino 場 Ψ_{s1} という名前がついています。

- RR セクターは $(R+, R+)$ をとってきます。無質量の状態は

$$|k, A, \tilde{A}\rangle \quad (3.10.27)$$

となります。これを既約表現に分解すると

$$8_s \otimes 8_s = 1 \oplus 28_a \oplus 35_+ \quad (3.10.28)$$

になります。左辺に出てくる表現の粒子を作る場を順番に RR0 形式場 C_0 、RR2 形式場 C_2 、RR4 形式場 C_4 、という名前がついています。

まとめると type IIB 超弦理論の無質量の場は、次のものです。

$$\text{ボゾン} : \Phi, B_2, G, C_0, C_2, C_4, \quad (3.10.29)$$

$$\text{フェルミオン} : \lambda_{c1}, \lambda_{c2}, \Psi_{s1}, \Psi_{s2} \quad (3.10.30)$$

特に、2つの dilatino が同じ chirality、gravitino 2つが同じ chirality、自己双対 4 形式があるので、type IIB 超弦理論はカイラルな理論になっています。

次に type IIA を見てみましょう。

- NSNS セクターは IIB と同じで (NS+, NS+) をとってきます。その表現は既約表現に分解すると

$$8_v \otimes 8_v = 1 \oplus 28_a \oplus 35_g \quad (3.10.31)$$

になります。左辺に出てくる表現の粒子を作る場は順番に dilaton 場 Φ 、B 場 B_2 、計量 G です。

- NSR セクターは (NS+, R-) をとってきます。無質量の状態は

$$\psi_{-\frac{1}{2}}^i \left| k, \tilde{A} \right\rangle \quad (3.10.32)$$

となります。これを既約表現に分解すると

$$8_v \otimes 8_c = 8_s \oplus 56_c \quad (3.10.33)$$

になります。左辺に出てくる表現の粒子を作る場を順番に dilatino 場 λ_s 、gravitino 場 Ψ_c という名前がついています。

- RNS セクターは (R+, NS+) をとってきます。無質量の状態は

$$\tilde{\psi}_{-\frac{1}{2}}^i |k, A\rangle \quad (3.10.34)$$

となります。これを既約表現に分解すると

$$8_v \otimes 8_s = 8_c \oplus 56_s \quad (3.10.35)$$

になります。左辺に出てくる表現の粒子を作る場を順番に dilatino 場 λ_c 、gravitino 場 Ψ_s という名前がついています。

- RR セクターは $(R+, R-)$ をとってきます。無質量の状態は

$$|k, A, \tilde{A}\rangle \quad (3.10.36)$$

となります。これを既約表現に分解すると

$$8_s \otimes 8_c = 8_v \oplus 56_t \quad (3.10.37)$$

になります。左辺に出てくる表現の粒子を作る場を順番に RR1 形式場 C_1 、RR3 形式場 C_3 という名前がついています。

まとめると type IIA 超弦理論の無質量の場は、次のものです。

$$\text{ボゾン} : \Phi, B_2, G, C_1, C_3, \quad (3.10.38)$$

$$\text{フェルミオン} : \lambda_c, \lambda_s, \Psi_s, \Psi_c \quad (3.10.39)$$

特に、2つの dilatino が反対の chirality、gravitino 2つが反対の chirality なので type IIA 超弦理論は非カイラルな理論になっています。

3.10.3 時空の超対称性

以前に説明したように、スピンの1以上（つまりスカラー、スピノール以外）で質量のない粒子があって、まともな相互作用があると、それに伴うゲージ対称性があり、その粒子はそのゲージ対称性のゲージ粒子になるという定理があります。ここでは特にフェルミオンの場に注目します。Type IIB、type IIA 超弦理論にはスピン1以上の無質量のフェルミオンとして

- Type IIB : $56_s, 56_s$.

- Type IIA : $56_s, 56_c$.

があります。これらは、グラビティーノと呼ばれます。対応するゲージ対称性は局所超対称性であり、グラビティーノはその対称性のゲージ粒子になっています。

Type IIB のグラビティーノは2つとも同じ chirality であり、超対称性はカイラルなものになっています。この超対称性は「type IIB の超対称性」と呼ばれます。一方、type IIA のグラビティーノは chirality が異なるものが1つずつあり、超対称性は非カイラルなものになっています。この超対称性は「type IIA の超対称性」と呼ばれます。

無質量スペクトルについて調べてみましょう。Type IIB, type IIA とともに、ボゾンが NSNS セクターと RR セクターから $8 \times 8 + 8 \times 8 = 128$ 個あり、フェルミオンが NSR セクターと RNS セクターから $8 \times 8 + 8 \times 8 = 128$ 個あるので、数が等しいです。これも超対称性があることの帰結です。有質量のスペクトルを調べて見ると、ちゃんと各質量ごとにボゾンの数とフェルミオンの数が等しくなっていて、これも超対称性があることの帰結です。

超対称性と低エネルギー有効理論について少しコメントします。超弦理論で、非常に低エネルギーの散乱のみを考える場合、無質量の場のみが寄与することになります。その散乱を再現するような無質量の場のみで書かれた理論を低エネルギー有効理論と呼びます。実は type IIB、type IIA の超対称性があると、無質量の理論はどういう場があるかも含めて作用の微分の 2 次までで、完全に決まってしまうことになります。これらの理論を、それぞれ「type IIB の超重力理論」「type IIA の超重力理論」と呼びます。これらの超重力理論は、弦理論の様々な性質を調べる上で、非常に有効なツールになります。超重力理論については、原論文や教科書等、たくさんの文献がありますが、日本語で計算などが非常に詳しく書かれているものとして

- 今村 洋介, 「超重力理論についてのノート」, 素粒子論研究, Volume 22, http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/sokendenshi/vol22/sokendenshi_2016_22_3.html があります。

演習問題

テンソル積の分解 (3.10.10) を導出せよ。

3.11 まとめ

この章では超弦理論を取り扱いました。

- 時空のフェルミオンを記述するための一つの方法は世界面の局所超対称性を導入することです。
- 世界面のボゾン X^μ に対応して、フェルミオン ψ_\pm^μ を導入することで、超対称性のある作用を書くことができます。
- 世界面の局所超対称性のある作用を書くことができます。これが、超弦理論の作用です。ゲージ固定することによって、ゲージ固定された作用、拘束条件としてエネルギー運動量テンソル = 0 と超対称性のカレント = 0、残っているゲージ対

称性として $\mathcal{N} = (1, 1)$ 超共形対称性が得られます。

- スピン構造という世界面に付属する自由度があります。超弦理論ではこれが動的になり、非常に重要な役割を果たします。シリンダーでは、フェルミオンが反周期的である NS セクターと周期的である R セクターがあります。 ψ_+^μ と ψ_-^μ に対して独立にスピン構造を取れます。
- 例えば NSNS セクターの無質量の部分を見ることにより、臨界次元 $D = 10$ を得ます。
- スピン構造が動的であることから来る拘束条件が GSO 射影です。GSO 射影の仕方によって type IIB, type IIA という異なる 2 つの超弦理論が存在します。
- 超弦理論には時空の超対称性があります。

第 4 章 D-brane

4.1 D-brane とは？

この章では、D-brane について調べていきます。まずは、D-brane とは何か、そして D-brane を調べるのがどうして重要かについて述べます。

まず、D-brane とは何かについて説明します。一言で言うなら

弦理論において、時空の中で開弦が端を持つことができるような物体

と言えます。つまり、開いた弦があるときには、必ずその端は D-brane にくっついていきます。例えばボゾンの弦理論で、26 次元の中を自由に動く開弦を考えると、時空を満たしている D-brane を考えていることになります。弦理論の中で D-brane は有限の張力を持った動的な物体です。

次にどうして D-brane が重要かを説明します。

- D-brane を導入することで、非可換ゲージ理論が現れます。(非可換) ゲージ理論は現実の素粒子の力を記述する理論です。また、理論的にも非常に興味深い性質を持っています。
- D-brane は弦理論におけるソリトンのような物体で、双対性などの非摂動論的性質を理解する鍵となります。

D-brane を調べるには様々な手段がありますが、最も基本的なのは、D-brane にくっついている開弦を調べることです。例えば、この開弦のスペクトルを調べることで、D-brane 系でどのような励起があるかを調べることができます。この講義では、この D-brane にくっついた開弦のスペクトルを詳しく調べることにします。

4.2 境界のある 2 次元自由スカラー場

開いた弦は、世界面の理論として、境界のある 2 次元の場の理論を考えることになります。ここでは、その準備として 2 次元の 1 つのスカラー場の理論を考えましょう。

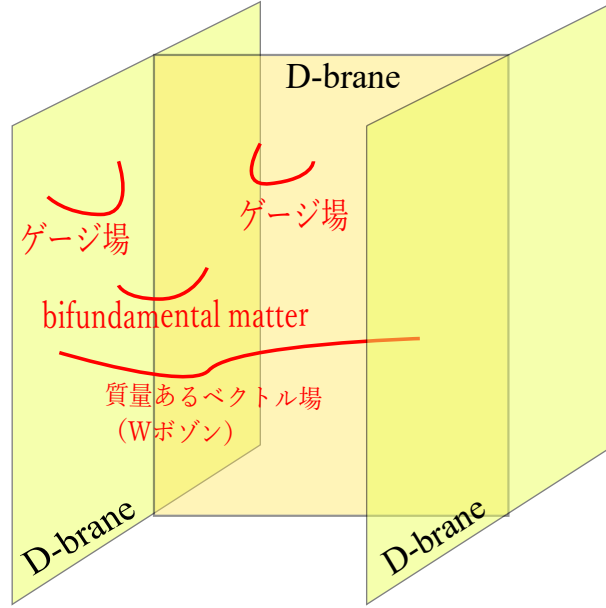


図 4.1 D-brane の配位と、それに端を持つ開弦の例。様々な種類の粒子が D-brane の配位から現れる。

4.2.1 作用と境界条件

空間方向の座標を σ とし、 $0 \leq \sigma \leq \pi$ とします。 $\sigma = 0$ と $\sigma = \pi$ が境界になります。時間方向の座標を τ とします。

スカラー場を $X(\sigma)$ とし、その作用を

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left((\partial_\tau X)^2 - (\partial_\sigma X)^2 \right) \quad (4.2.1)$$

とします。

境界がある理論を考えているので、境界条件をどう取るかを考える必要があります。ここでは運動方程式を考えることで、発見法的に境界条件としてどのようなものがあるかを考えます。(4.2.1) の変分をとると

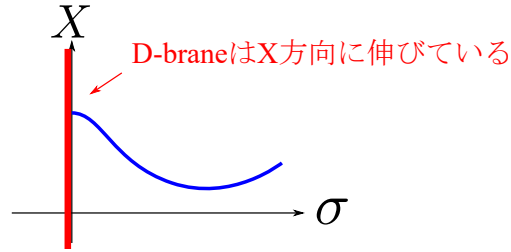
$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{4\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left(\partial_\tau X \partial_\tau \delta X - \partial_\sigma X \partial_\sigma \delta X \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left((-\partial_\tau^2 X + \partial_\sigma^2 X) \delta X + \partial_\tau (X \partial_\tau \delta X) - \partial_\sigma (X \partial_\sigma \delta X) \right) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

となります。被積分関数の第 1 項から運動方程式が出ます。第 2 項は通常 of 最小作用の原理の設定では、時間の端での境界条件を課すので消えます。第 3 項が問題でこれを計算すると

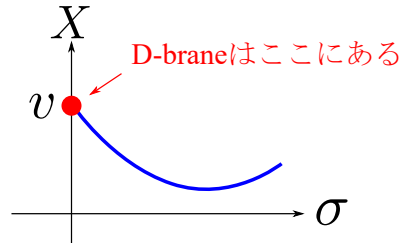
$$\delta S = \cdots + \frac{1}{4\pi} \int d\tau [-\partial_\sigma X \delta X]_{\sigma=0}^\pi \quad (4.2.3)$$

となります。 $\delta S = 0$ となるためには、適切な境界条件を課す必要があります。例えば $\sigma = 0$ での境界条件を考えてみましょう。 $\partial_\sigma X(0)\delta X(0) = 0$ となる必要がありますから、例えば次の2つの境界条件があり得ます。

- Neumann 境界条件（自由端条件） $\partial_\sigma X(0) = 0$. $\sigma = 0$ で表される弦の端は X 方向に自由に動くことができるので、「D-brane は X 方向に伸びている」ということができます。



- Dirichlet 境界条件（固定端条件） $X(0) = v$ （定数）. $\sigma = 0$ で表される弦の端は $X = v$ のところにしかくっつけないので、「D-brane は $X = v$ の場所にある」ということができます。



同様にして $\sigma = \pi$ の方の境界にも Neumann 境界条件と Dirichlet 境界条件の2種類が考えられます。合わせると、 $\sigma = 0, \pi$ の境界条件を N あるいは D で表すことにして、NN, DN, ND, DD の4種類の境界条件のとり方が考えられます。

さて、このような境界条件の場合にエネルギー運動量テンソルがどうなるか見てみましょう。エネルギー運動量テンソルは、以前見たように

$$T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X \partial_+ X, \quad T_{--} = \frac{1}{2} \partial_- X \partial_- X, \quad \partial_\pm := \frac{1}{2} (\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \quad (4.2.4)$$

となります。例えば $\sigma = 0$ で Neumann 境界条件であったとすると $\partial_\sigma X(0) = 0$ ですから

$$\partial_+ X(0) = \partial_- X(0) = \frac{1}{2} \partial_\tau X(0) \quad (4.2.5)$$

となります。したがって $\sigma = 0$ で $T_{++} = T_{--}$ が成り立ちます。一方 $\sigma = 0$ で Dirichlet 境

界条件であったとすると $\partial_\tau X(0) = 0$ ですから

$$\partial_+ X(0) = -\partial_- X(0) = \frac{1}{2} \partial_\sigma X(0) \quad (4.2.6)$$

となります。したがって、やはり $\sigma = 0$ で $T_{++} = T_{--}$ が成り立ちます。まとめると Neumann 境界条件の場合も Dirichlet 境界条件の場合も境界で

$$T_{++} = T_{--} \quad (4.2.7)$$

が成り立ちます。ここでは発見法的に境界条件を考えましたが、実は (4.2.7) が原理的に境界条件が満たさなければならない条件です。(4.2.7) は境界で $T_{01} = 0$ と書けます。これは、エネルギーの流れの境界の垂直方向成分が 0 ということですから、(エネルギーが端に溜まることなく) エネルギーが保存するということと等価です。

4.2.2 二重化トリック

ここでは、境界のある共形場理論の標準的な取り扱いの一つである二重化トリックについて説明します。これは、 $0 \leq \sigma \leq \pi$ での理論を $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ で (反) 周期的境界条件の場の言葉に書き換える方法です。

エネルギー運動量テンソル $T_{++}(\tau, \sigma)$, ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) を次のように定義します。

$$T_{++}(\tau, \sigma) := \begin{cases} T_{++}(\tau, \sigma) & (0 \leq \sigma \leq \pi) \\ T_{--}(\tau, 2\pi - \sigma) & (\pi \leq \sigma \leq 2\pi) \end{cases} \quad (4.2.8)$$

このように定義すると、次のような理由で周期境界条件の場合のエネルギー運動量テンソルのうち T_{++} だけをとってきたものと同じような性質を満たします。

- 境界条件 (4.2.7) から $T_{++}(\tau, \sigma)$ は、 $\sigma = \pi$ で連続、 $T_{++}(\tau, 2\pi) = T_{++}(\tau, 0)$ となります。
- $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ で $\partial_- T_{++} = 0$ を満たします。

これらの性質からモード展開できて

$$T_{++}(\tau, \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in\sigma} \quad (4.2.9)$$

となります。

また、二重化トリックの言葉を用いると古典的な Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (T_{++} + T_{--}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{++} = L_0 \quad (4.2.10)$$

となります。量子化すると c 数分ずれる可能性があります。

4.2.3 モード展開

ここから、もっと具体的にスカラー場の運動方程式を解いてモード展開をしていきます。NN, DD, ND, DN の各境界条件をそれぞれ見ていきます。

— NN 境界条件 —

NN 境界条件では、

$$\left. \partial_\sigma X \right|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (4.2.11)$$

となりますから、一般に

$$\partial_\sigma X(\tau, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n(t) \sin n\sigma \quad (4.2.12)$$

と展開することができます。ここから $X(\tau, \sigma)$ は

$$X(\tau, \sigma) = A_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \cos n\sigma \quad (4.2.13)$$

と展開できます。

(4.2.13) を運動方程式

$$\partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X = 0 \quad (4.2.14)$$

に代入して整理すると A_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対する方程式

$$\ddot{A}_n + n^2 A_n = 0 \quad (4.2.15)$$

を得ます。 $n = 0$ のときは自由粒子の運動方程式と同じなので x, p を定数として一般解を

$$A_0(\tau) = x + 4p\tau \quad (4.2.16)$$

と書くことができます。 $n > 0$ のときには、調和振動子なので一般解は

$$A_n(\tau) = B_n e^{-in\tau} + C_n e^{in\tau} \quad (4.2.17)$$

となります。積分定数を適当に再定義し、(4.2.13) に代入して整理すると

$$X(\tau, \sigma) = x + 4p\tau + 2i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (4.2.18)$$

となります。 x, p, α_n ($n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$) が積分定数になります。

量子化しましょう。正準交換関係は、 $[X(\sigma), \dot{X}(\sigma')] = 4\pi i \delta(\sigma - \sigma')$ です。ここから、 x, p, α_n の交換関係は

$$[x, p] = i, \quad [\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m} \quad (4.2.19)$$

となります。これ以外は交換します。

さらに

$$X = x + 4p\tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} (e^{-in\sigma^+} + e^{-in\sigma^-}) \quad (4.2.20)$$

と書けることに注目すると

$$\partial_+ X = 2p + \sum_{n \neq 0} \alpha_n e^{-in\sigma^+} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in\sigma^+} \quad (4.2.21)$$

となります。最後の式では、 $\alpha_0 := 2p$ と定義しました。同様にして

$$\partial_- X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in\sigma^-} \quad (4.2.22)$$

となります。これらは、次のように二重化トリックで $\partial_+ X(\tau, \sigma)$, ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) にまとめることができます。

$$\partial_+ X(\tau, \sigma) = \begin{cases} \partial_+ X(\tau, \sigma) & (0 \leq \sigma \leq \pi) \\ \partial_- X(\tau, 2\pi - \sigma) & (\pi \leq \sigma \leq 2\pi) \end{cases}. \quad (4.2.23)$$

これを用いると二重化トリックしたエネルギー運動量テンソルは、周期境界条件の場合と同様の計算で

$$T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X \partial_+ X = \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \alpha_n \alpha_m e^{-i(k+m)\sigma^+} = \sum_n \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{n-m} \alpha_m e^{-in\sigma^+} \quad (4.2.24)$$

となります。演算子順序による c 数の不定性の部分も周期境界条件の場合と同じで

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m} \alpha_m \quad (n \neq 0), \quad L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \alpha_m \quad (4.2.25)$$

となります。

真空のエネルギーも周期境界条件の T_{++} の方だけの場合と同じで

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{-m} \alpha_m \right|_{\text{くりこみ}} = L_0 - \frac{1}{24} \quad (4.2.26)$$

となります。

— DD 境界条件 —

DD 境界条件

$$X(\tau, 0) = v_0, \quad X(\tau, \pi) = v_\pi \quad (4.2.27)$$

の場合を考えます。この場合

$$X(\tau, \sigma) = v_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\pi}\right) + v_\pi \frac{\sigma}{\pi} + \tilde{X}(\tau, \sigma) \quad (4.2.28)$$

として $\tilde{X}(\tau, \sigma)$ を定義すると

$$\tilde{X}(\tau, 0) = \tilde{X}(\tau, \pi) = 0 \quad (4.2.29)$$

となります。したがって

$$\tilde{X}(\tau, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \sin n\sigma \quad (4.2.30)$$

となります。つまり

$$X(\tau, \sigma) = v_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\pi}\right) + v_\pi \frac{\sigma}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau) \sin n\sigma \quad (4.2.31)$$

となります。これを運動方程式に代入すると

$$\ddot{A}_n(\tau) + nA_n(\tau) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.2.32)$$

という調和振動子の運動方程式になります。その一般解は

$$A_n(\tau) = B_n e^{-in\tau} + C_n e^{in\tau} \quad (4.2.33)$$

となります。定数を再定義して

$$X(\tau, \sigma) = v_0 + \frac{v_\pi - v_0}{\pi} \sigma + 2 \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in\tau} \sin n\sigma \quad (4.2.34)$$

となります。

量子化します。交換関係はこれまでと同じで

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m} \quad (4.2.35)$$

となります。

また

$$X(\tau, \sigma) = v_0 + \frac{v_\pi - v_0}{\pi} \sigma + v_\pi \frac{\sigma}{\pi} + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} \left(e^{-in\sigma^+} - e^{-in\sigma^-} \right) \quad (4.2.36)$$

と書けるので

$$\partial_+ X(\tau, \sigma) = \frac{v_\pi - v_0}{2\pi} + \sum_{n \neq 0} \alpha_n e^{-in\sigma^+} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in\sigma^+}, \quad \alpha_0 := \frac{v_\pi - v_0}{2\pi} \quad (4.2.37)$$

となります。同様に

$$\partial_- X(\tau, \sigma) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-in\sigma^-} \quad (4.2.38)$$

となります。これらは、次のように二重化トリックで $\partial_+ X(\tau, \sigma)$, $(0 \leq \sigma \leq 2\pi)$ にまとめることができます。

$$\partial_+ X(\tau, \sigma) = \begin{cases} \partial_+ X(\tau, \sigma) & (0 \leq \sigma \leq \pi) \\ -\partial_- X(\tau, 2\pi - \sigma) & (\pi \leq \sigma \leq 2\pi) \end{cases}. \quad (4.2.39)$$

このとき $\partial_+ X(\tau, 0) = \partial_+ X(\tau, 2\pi)$ を満たします。ここから $T_{++} = \frac{1}{2} \partial_+ X \partial_+ X = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in\sigma^+}$ として L_n を計算しますが、これは周期境界条件の場合と同じです。

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m} \alpha_m \quad (n \neq 0), \quad L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m} \alpha_m. \quad (4.2.40)$$

真空のエネルギーも同様に

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m} \alpha_m \right|_{\text{くりこみ}} = L_0 - \frac{1}{24} \quad (4.2.41)$$

となります。

— DN 境界条件 —

DN 境界条件の場合、

$$X(\tau, 0) = v_0, \quad \partial_\sigma X(\tau, \pi) = 0 \quad (4.2.42)$$

を満たします。このとき X は

$$X(\tau, \sigma) = v_0 + \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} A_r(\tau) \sin r\sigma \quad (4.2.43)$$

と展開することができます。これを運動方程式に代入すると、多数の調和振動子になります。これを解くと

$$A_r(\tau) = B_r e^{-ir\tau} + C_r e^{ir\tau} \quad (4.2.44)$$

となります。積分定数を適当に再定義して

$$X(\tau, \sigma) = v_0 + 2 \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{\alpha_r}{r} e^{-ir\tau} \sin r\sigma \quad (4.2.45)$$

を得ます。モードの交換関係は

$$[\alpha_r, \alpha_s] = r \delta_{r+s} \quad (4.2.46)$$

となります。

微分を計算していきます。

$$\partial_+ X = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_r e^{-ir\sigma^+}, \quad (4.2.47)$$

$$\partial_- X = - \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_r e^{-ir\sigma^-}. \quad (4.2.48)$$

となります。これらは、次のように二重化トリックで $\partial_+ X(\tau, \sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) にまとめることができます。

$$\partial_+ X(\tau, \sigma) = \begin{cases} \partial_+ X(\tau, \sigma) & (0 \leq \sigma \leq \pi) \\ \partial_- X(\tau, 2\pi - \sigma) & (\pi \leq \sigma \leq 2\pi) \end{cases}. \quad (4.2.49)$$

こうすると $\partial_+ X(\tau, 0) = -\partial_+ X(\tau, 2\pi)$ と反周期境界条件になります。

エネルギー運動量テンソルは

$$T_{++} = \frac{1}{2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_s \alpha_r e^{-i(r+s)\sigma^+} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_{n-r} \alpha_r e^{-in\sigma^+} \quad (4.2.50)$$

となりますから、

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_{n-r} \alpha_r \quad (n \neq 0), \quad L_0 = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} \alpha_{-r} \alpha_r + b \quad (4.2.51)$$

となります。 b はこれから決める c 数です。

b を決めましょう。これは、Virasoro 代数の一部

$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0 \quad (4.2.52)$$

が成り立つように決めます。Fock 真空を $|0\rangle$, $\alpha_r |0\rangle = 0$ ($r > 0$), $\langle 0|0\rangle = 1$ として、ここから

$$\begin{aligned} 2b &= \langle 0| [L_1, L_{-1}] |0\rangle = \langle 0| L_1 L_{-1} |0\rangle = \sum_{r,s} \frac{1}{4} \langle 0| \alpha_{1-s} \alpha_s \alpha_{-1-r} \alpha_r |0\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle 0| \alpha_{\frac{1}{2}} \alpha_{\frac{1}{2}} \alpha_{-\frac{1}{2}} \alpha_{-\frac{1}{2}} |0\rangle = \frac{1}{4} \langle 0| \alpha_{\frac{1}{2}} \alpha_{-\frac{1}{2}} \alpha_{\frac{1}{2}} \alpha_{-\frac{1}{2}} |0\rangle + \frac{1}{8} \langle 0| \alpha_{\frac{1}{2}} \alpha_{-\frac{1}{2}} |0\rangle = \frac{1}{8} \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

となるので

$$b = \frac{1}{16} \quad (4.2.54)$$

を得ます。しがたって

$$L_0 = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} \alpha_{-r} \alpha_r + \frac{1}{16} \quad (4.2.55)$$

となります。真空のエネルギーは

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_{-r} \alpha_r \right|_{\text{くりこみ}} = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} \alpha_{-r} \alpha_r + \frac{1}{2} \left. \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} r \right|_{\text{くりこみ}} = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} \alpha_{-r} \alpha_r + \frac{1}{48} \quad (4.2.56)$$

となります。ここでは、(3.6.27) と (3.6.28) から $\zeta(-1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$ であることを用いました。

— ND 境界条件 —

ND 境界条件の場合、

$$\partial_\sigma X(\tau, 0) = 0, \quad X(\tau, \pi) = v_\pi \quad (4.2.57)$$

を満たします。これは、DN 境界条件の場合とほぼ同様に考えることができます。このとき X は

$$X(\tau, \sigma) = v_\pi + \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} A_r(\tau) \cos r\sigma \quad (4.2.58)$$

と展開することができます。これを運動方程式に代入すると、多数の調和振動子になります。これを解くと

$$A_r(\tau) = B_r e^{-ir\tau} + C_r e^{ir\tau} \quad (4.2.59)$$

となります。積分定数を適当に再定義して

$$X(\tau, \sigma) = v_\pi + 2i \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{\alpha_r}{r} e^{-ir\tau} \cos r\sigma \quad (4.2.60)$$

を得ます。モードの交換関係は

$$[\alpha_r, \alpha_s] = r\delta_{r+s} \quad (4.2.61)$$

となります。

微分を計算していきます。

$$\partial_+ X = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_r e^{-ir\sigma^+}, \quad (4.2.62)$$

$$\partial_- X = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_r e^{-ir\sigma^-}. \quad (4.2.63)$$

となります。これらは、次のように二重化トリックで $\partial_+ X(\tau, \sigma)$, $(0 \leq \sigma \leq 2\pi)$ にまとめることができます。

$$\partial_+ X(\tau, \sigma) = \begin{cases} \partial_+ X(\tau, \sigma) & (0 \leq \sigma \leq \pi) \\ -\partial_- X(\tau, 2\pi - \sigma) & (\pi \leq \sigma \leq 2\pi) \end{cases}. \quad (4.2.64)$$

こうすると $\partial_+ X(\tau, 0) = -\partial_+ X(\tau, 2\pi)$ と反周期境界条件になります。

エネルギー運動量テンソルは

$$T_{++} = \frac{1}{2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_s \alpha_r e^{-i(r+s)\sigma^+} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_{n-r} \alpha_r e^{-in\sigma^+} \quad (4.2.65)$$

となりますから、

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_{n-r} \alpha_r, \quad (n \neq 0), \quad L_0 = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} \alpha_{-r} \alpha_r + \frac{1}{16} \quad (4.2.66)$$

となります。 L_0 の定数部分は DN の場合と全く同じ計算になるので $\frac{1}{16}$ です。

真空のエネルギーも DN の場合と全く同じで

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \alpha_{-r} \alpha_r \right|_{\text{くりこみ}} = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, r > 0} \alpha_{-r} \alpha_r + \frac{1}{48} \quad (4.2.67)$$

となります。

4.3 ボゾンの弦理論の D-brane

さて、2次元の境界付きの自由スカラー場の理論の準備は終わったので、実際に弦理論における D-brane の解析を進めましょう。

4.3.1 1枚の平らな D-brane

まずは、一番簡単なところで 26 次元時空にある、1 枚の平らな D-brane を考えます (図 4.2 参照)。この系では、閉じた弦の他に、D-brane にくっついている開弦があります。この開弦を調べることで、D-brane があることによる余分な励起にどのようなものがあるかを調べることが出来ます。

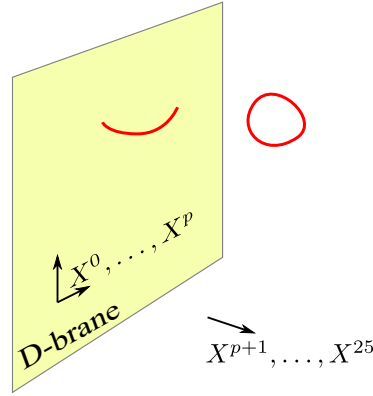


図 4.2 1枚の D_p -brane。閉弦に加えて、D-brane に端を持つ開弦が励起として存在します。

この平らな D-brane は X^0, \dots, X^p 方向にのびていて、 X^{p+1}, \dots, X^{25} 方向には局在しているとします。このように空間方向 p 次元にのびている D-brane を D_p -brane と呼びます。ここにくっついている開弦の世界面の場の理論においては

- X^0, \dots, X^p が NN 境界条件。
- X^{p+1}, \dots, X^{25} が DD 境界条件。

になります。この講義では光円錐ゲージを考えたいので、 $p \geq 1$ の場合を考えます。

さて光円錐ゲージを考えましょう。閉弦の場合と同様に

$$X^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1) \quad (4.3.1)$$

として、ゲージ固定条件

$$X^+(\tau, \sigma) = 4p^+ \tau \quad (4.3.2)$$

を課します。こうすると拘束条件

$$T_{++}(\tau, \sigma) - a = 0 \quad (4.3.3)$$

を解くことができ

$$\partial_+ X^- = \frac{1}{2p^+} \left(\frac{1}{2} \partial_+ X^i \partial_+ X^i - a \right), \quad i = 2, \dots, 26 \quad (4.3.4)$$

となります。今、 a は、NN, DD 方向からの寄与が $\frac{1}{24}$ ですから、 $a = 1$ となります。このゼロモードを考えると

$$\alpha_0^- = \frac{1}{2p^+} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^\ell \alpha_0^\ell + N - 1 \right), \quad N := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i, \quad \ell = 2, \dots, p \quad (4.3.5)$$

となります。ここで、DD 境界条件のボゾンのゼロモードは (4.2.37) のように表され、しかも今は 1 枚しか D-brane がないので $v_0 = v_\pi$ となり、ゼロモードは消えることを用いました。要するに、D-brane の伸びていない方向には開弦は運動量を持ってないということです。 $\alpha_0^\mu = 2p^\mu$ であることを考慮すると $(p+1)$ 次元の意味での質量 m^2 は

$$m^2 := 2p^+ p^- - p^\ell p^\ell = \frac{N-1}{2} \quad (4.3.6)$$

となります。

さて、スペクトルを調べていきましょう。まず、Fock 真空 $|k\rangle$ は

$$\begin{aligned} p^+ |k\rangle &= k^+ |k\rangle, \quad p^\ell |k\rangle = k^\ell |k\rangle \quad (\ell = 2, \dots, p), \\ \alpha_n^i |k\rangle &= 0 \quad (n > 0, i = 2, \dots, 25) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

という状態です。これは $N = 0$ であり (4.3.6) より $m^2 = -\frac{1}{2}$ となるのでタキオンになります。

次に第 1 励起状態を見てみましょう。この状態は

$$\alpha_{-1}^\ell |k\rangle, \quad \alpha_{-1}^j |k\rangle \quad (j = p+1, \dots, 25) \quad (4.3.8)$$

です。この状態は $N = 1$ なので質量は (4.3.6) より $m^2 = 0$ となって無質量状態となります。これらの無質量の場は両方とも重要な意味があります。

- $\alpha_{-1}^\ell |k\rangle$ は、 $(p+1)$ 次元の Lorentz 群のうち、あらわに見えている $SO(p-1)$ に対してベクトル表現になっています。ですから、 $(p+1)$ 次元のベクトル粒子になります。これは、この D-brane の上に $U(1)$ ゲージ対称性があることを示します。

- $\alpha_{-1}^j |k\rangle$ は $(p+1)$ 次元のスカラー粒子になります。また、 $(p+1)$ 次元の言葉で言うと内部対称性である、D-brane に垂直方向の回転 $SO(25-p)$ のベクトル表現になっています。今考えている系は D-brane の存在により、時空の並進対称性を一部破っています。 $\alpha_{-1}^j |k\rangle$ のスカラー粒子の対称性に対する変換性を考えると、これらが並進対称性の自発的破れによる NG ボゾンであることが分かります。言い換えると、このスカラー場は D-brane の垂直方向のゆらぎを表します。

4.3.2 2 枚の並行な D-brane

次に 2 枚の平行な Dp -brane を考えます (図 4.3 参照)。2 つの brane は X^{25} 方向のみに離れていて、座標はそれぞれ $X^{25} = 0$ 、 $X^{25} = v$ とします。この系では、閉弦、それぞれの片方の D-brane にくっついている開弦に加えて、2 つの D-brane をつなぐ開弦が励起としてあります。

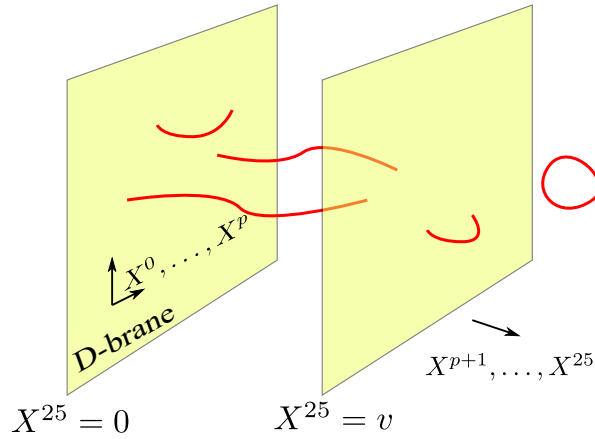


図 4.3 2 枚の並行な Dp -brane。

片方の D-brane だけにくっついている開弦は前項で調べたので、ここでは 2 つの brane をつなぐ開弦を考えましょう。この場合やはり

- X^0, \dots, X^p が NN 境界条件。
- X^0, \dots, X^p が DD 境界条件。

となります。なので、ほとんど前項の解析と同様にできます。前項の解析との違いは、DD 方向のうち X^{25} のゼロモードが 0 にならないことです。したがって、光円錐ゲージで拘束条件を解いたとき (4.3.5) が変更されて

$$\alpha_0^- = \frac{1}{2p^+} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^\ell \alpha_0^\ell + \frac{1}{2} \alpha_0^{25} \alpha_0^{25} + N - 1 \right), \quad N := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i, \quad \alpha_0^{25} = \frac{v}{2\pi} \quad (4.3.9)$$

となります。したがって、 $(p+1)$ 次元の意味での質量は

$$m^2 = \left(\frac{v}{4\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}(N-1) \quad (4.3.10)$$

となります。

スペクトルを調べましょう。Fock 真空 $|k\rangle$ は $N=0$ ですから、その質量は $m^2 = \left(\frac{v}{4\pi}\right)^2 - 1$ となります。これは、 v が小さいときにはタキオンですが、ある程度大きくなると有質量になります。

第1励起状態は、 $\alpha_{-1}^\ell |k\rangle$ ($\ell=2, \dots, p$), $\alpha_{-1}^j |k\rangle$ ($j=p+1, \dots, 25$) です。その質量は

$$m^2 = \left(\frac{v}{4\pi}\right)^2 \quad (4.3.11)$$

ですから $v \neq 0$ のときには有質量になります。 $\alpha_{-1}^\ell |k\rangle$ は $SO(p-1)$ のベクトルになります。 $(p+1)$ 次元の有質量ベクトル粒子の一部になります。 $(p+1)$ 次元の有質量ベクトル粒子の偏光は p 個ありますから、 $\alpha_{-1}^\ell |k\rangle$ 以外にもう一つこのベクトル粒子の偏光になっているものがあります。これは $SO(p-1)$ のスカラーである $\alpha_{-1}^{25} |k\rangle$ です。それ以外のスカラー $\alpha_{-1}^j |k\rangle$ ($j=p+1, \dots, 24$) は、 $(p+1)$ 次元のスカラー粒子になっています。

さて、開弦のスペクトルについてまとめておきましょう。そのために2つの D-brane に①、②というラベルをふります。そして例えば①と②をつなぐ弦を①②弦などと呼ぶことにします。①①弦から①の D-brane 上に $U(1)$ ゲージ場ができます。この $U(1)$ 対称性を $U(1)_1$ と呼ぶことにします。同様に②②弦によって作られるゲージ場の $U(1)$ 対称性を $U(1)_2$ と呼ぶことにします。①②弦や②①弦はこれらの $U(1)$ 対称性について電荷を持つことになります。これらの電荷について表にまとめておきます。

	$U(1)_1$ 電荷	$U(1)_2$ 電荷
①①弦無質量ベクトル、スカラー	0	0
②②弦無質量ベクトル、スカラー	0	0
①②弦有質量ベクトル、スカラー	+1	-1
②①弦有質量ベクトル、スカラー	-1	+1

表 4.1 平行な2枚の D-brane の各種開弦の電荷

ここで、 $v \rightarrow 0$ とした場合に何がおこるかを考えてみましょう。それまで有質量だった①②弦と②①弦から出てくるベクトル場やスカラー場が無質量になります。これに伴い、ゲージ対称性が拡大します。表 4.1 も考え合わせると、拡大された対称性は $U(2)$ になります。スカラー場は、随伴表現になります。こうして、非可換なゲージ

対称性が現れることになります。 $v \neq 0$ は、この随伴表現のスカラー場が真空期待値を持つことを意味します。この真空期待値によりゲージ対称性が $U(2)$ から自発的に敗れて $U(1) \times U(1)$ になり、一部のゲージ場が有質量になります。つまり Higgs 機構を起こすのです。

ここで少し不思議なのは、2つの D-brane の位置は2つの数（あるいは、垂直方向の2つのベクトル）だったのですが、 $U(2)$ が回復する点では、 2×2 の行列（からなるベクトル）になります。これは、古典的には非常に想像しにくい場の理論、あるいは弦理論独特の現象です。

同様にして n 枚の重なった D-brane があるときには、 $U(n)$ のゲージ対称性が現れます。そこには随伴表現の無質量スカラー場があり、これが真空期待値をとることにより一般には $U(1)^n$ に自発的に破れます。

4.3.3 2つの異なる D-brane

次に次元が異なる2つの D-brane を考えます。図 4.4 を見てください。 $p' > p$ として Dp -brane と Dp' -brane を考え、 Dp -brane の方は X^0, \dots, X^p の方向に伸びており、 Dp' -brane の方は $X^0, \dots, X^{p'}$ の方に伸びているとします。

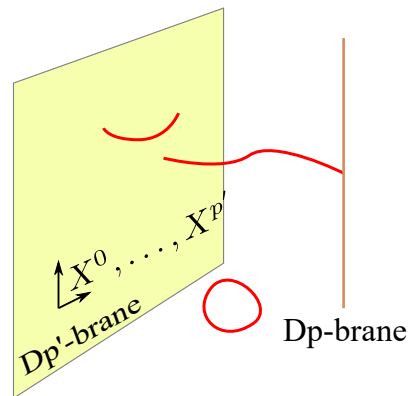


図 4.4 次元が異なる2つの D-brane

それぞれの D-brane にくっついている開弦はもうやりました。これらは、それぞれの D-brane の上に $U(1)$ ゲージ場をつくります。さらに Dp -brane と Dp' -brane にくっついている開弦は、 Dp -brane のゲージ場に対して、その向きによって電荷が +1 または -1 になります。もし、 Dp' -brane が N_f 枚あったとすると、それは Dp -brane の上から見れば N_f 個のフレーバーに見えます。

さらに Dp -brane と Dp' -brane にくっついている開弦のスペクトルについて考えてみましょう。境界条件は

- X^0, \dots, X^p : NN.
- $X^{p+1}, \dots, X^{p'}$: ND, DN.
- $X^{p'+1}, \dots, X^{25}$: DD.

となります。質量は、brane 間の距離を v として

$$m^2 = \left(\frac{v}{4\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(N - 1 + \frac{p' - p}{16}\right) \quad (4.3.12)$$

となります。これは、 $v = 0$, $N = 1$ でも有質量であることに注意してください。

4.4 2次元超対称理論の境界

次に超弦理論での弦理論を考えたいです。そのために、ここではまず超対称性のある2次元の理論の境界について調べましょう。

4.4.1 超対称性のカレントに対する境界条件

超弦理論に使うためには超対称性が保存するような境界条件を課す必要があります。

ここで考える理論の作用を

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_+ X \partial_- X + i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_-), \quad 0 \leq \sigma \leq \pi \quad (4.4.1)$$

とします。超対称性のカレントは

$$G_{++} = \psi_+ \partial_+ X, \quad G_{--} = \psi_- \partial_- X \quad (4.4.2)$$

です。

境界で超対称性を保存するためには $\sigma = 0, \pi$ で

$$G_{++} = \pm G_{--} \quad (4.4.3)$$

を満たす必要があります。カイラルなフェルミオン数の対称性 $\psi_- \rightarrow \psi_-$ がありますから、(4.4.3) で $-$ 符号の方も許されることに注意してください。この対称性を利用して $\sigma = \pi$ で

$$G_{++} = G_{--} \quad (4.4.4)$$

とします。そうすると、超対称性を保つ境界条件には $\sigma = 0$ で

- $G_{++} = -G_{--}$: NS セクター
- $G_{++} = G_{--}$: R セクター

の2種類があります。

4.4.2 二重化のトリック

超対称性のカレントに対する二重化のトリックを考えます。 $G_{++}(\tau, \sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) を次のように定義します。

$$G_{++}(\tau, \sigma) = \begin{cases} G_{++}(\tau, \sigma) & (0 \leq \sigma \leq \pi) \\ G_{--}(\tau, 2\pi - \sigma) & (\pi \leq \sigma \leq 2\pi) \end{cases}. \quad (4.4.5)$$

こうすると $\sigma = \pi$ で連続になります。さらに

- $G_{++}(\tau, 2\pi) = -G_{++}(\tau, 0)$: NS セクター
- $G_{++}(\tau, 2\pi) = G_{++}(\tau, 0)$: R セクター

という（反）周期境界条件を満たします。また $\partial_- G_{++} = 0$ を満たしますから G_{++} は σ^+ だけによっており

$$G_{++}(\tau, \sigma) = \sum_r G_r e^{-ir\sigma^+}, \quad \begin{cases} r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & (\text{NS セクター}) \\ r \in \mathbb{Z} & (\text{R セクター}) \end{cases} \quad (4.4.6)$$

とモード展開できます。

4.4.3 フェルミオンの境界条件

さて、ここでは、ボゾンの NN, DD, ND, DN の各境界条件に対して、具体的にフェルミオンに対する境界条件を求めてみることにします。

— NN 境界条件 —

$\sigma = \pi$ では、 $\partial_+ X = \partial_- X$ です。 $G_{++} = G_{--}$ ですから $\psi_+ = \psi_-$ となります。

$\sigma = 0$ では、 $\partial_+ X = \partial_- X$ です。

- NS セクター: $G_{++} = -G_{--} \Rightarrow \psi_+ = -\psi_-$
- R セクター: $G_{++} = G_{--} \Rightarrow \psi_+ = \psi_-$

となります。

二重化のトリックを用いると $\psi_+(\tau, \sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) が定義できて

- NS セクター: $\psi_+(\tau, 2\pi) = -\psi_+(\tau, 0)$ で反周期的。
- R セクター: $\psi_+(\tau, 2\pi) = \psi_+(\tau, 0)$ で周期的。

となります。反周期的、周期的なフェルミオンは 3.6 節での取り扱いと同じです。

— DD 境界条件 —

$\sigma = \pi$ では、 $\partial_+ X = -\partial_- X$ です。 $G_{++} = G_{--}$ ですから $\psi_+ = -\psi_-$ となります。

$\sigma = 0$ では、 $\partial_+ X = -\partial_- X$ です。

- NS セクター: $G_{++} = -G_{--} \Rightarrow \psi_+ = \psi_-$
- R セクター: $G_{++} = G_{--} \Rightarrow \psi_+ = -\psi_-$

となります。

二重化のトリックを用いると $\psi_+(\tau, \sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) が定義できて

- NS セクター: $\psi_+(\tau, 2\pi) = -\psi_+(\tau, 0)$ で反周期的。
- R セクター: $\psi_+(\tau, 2\pi) = \psi_+(\tau, 0)$ で周期的。

となります。

— DN 境界条件 —

$\sigma = \pi$ では、 $\partial_+ X = \partial_- X$ です。 $G_{++} = G_{--}$ ですから $\psi_+ = \psi_-$ となります。

$\sigma = 0$ では、 $\partial_+ X = -\partial_- X$ です。

- NS セクター: $G_{++} = -G_{--} \Rightarrow \psi_+ = \psi_-$
- R セクター: $G_{++} = G_{--} \Rightarrow \psi_+ = -\psi_-$

となります。

二重化のトリックを用いると $\psi_+(\tau, \sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) が定義できて

- NS セクター: $\psi_+(\tau, 2\pi) = \psi_+(\tau, 0)$ で周期的。
- R セクター: $\psi_+(\tau, 2\pi) = -\psi_+(\tau, 0)$ で反周期的。

となります。

— ND 境界条件 —

$\sigma = \pi$ では、 $\partial_+ X = -\partial_- X$ です。 $G_{++} = G_{--}$ ですから $\psi_+ = -\psi_-$ となります。

$\sigma = 0$ では、 $\partial_+ X = \partial_- X$ です。

- NS セクター: $G_{++} = -G_{--} \Rightarrow \psi_+ = -\psi_-$
- R セクター: $G_{++} = G_{--} \Rightarrow \psi_+ = \psi_-$

となります。

二重化のトリックを用いると $\psi_+(\tau, \sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) が定義できて

- NS セクター: $\psi_+(\tau, 2\pi) = \psi_+(\tau, 0)$ で周期的。
- R セクター: $\psi_+(\tau, 2\pi) = -\psi_+(\tau, 0)$ で反周期的。

となります。

4.4.4 真空のエネルギー

これらの結果をまとめて、真空のエネルギー (a と書いていたもの) をまとめておきます。

まず、表 4.2 に、(反) 周期的なボゾン、フェルミオンの a の値をまとめておきます。

	周期的	反周期的
ボゾン	$\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{48}$
フェルミオン	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$

表 4.2 a の値の表。ボゾンかフェルミオンか、二重化のトリックをしたときに周期的か反周期的かによる。

これらから、各境界条件に対する a の値は次のようになります。

- NN, DD:

$$\begin{aligned}
 \text{NS セクター: } & \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{16}, \\
 \text{R セクター: } & \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{1}{16}.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.7}$$

- ND, DN:

$$\begin{aligned}
 \text{NS セクター: } & -\frac{1}{48} - \frac{1}{24} = -\frac{1}{16}, \\
 \text{R セクター: } & -\frac{1}{48} + \frac{1}{48} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.8}$$

これを見ると R セクターはいつも 0、NS セクターは NN, DD に比べて ND, DN は $\frac{1}{8}$ だけ小さいことが分かります。

4.5 超弦理論の D-brane

ここでは超弦理論の D-brane を調べていきます。

4.5.1 1 枚の D-brane

まず、1 枚の D-brane を調べます。空間 p 次元にのびている Dp -brane を考えます。 X^0, \dots, X^p の方向にのびているとします。

この D-brane に両端をもつ開弦を考えます。この開弦の境界条件は次のようになります。

- X^0, \dots, X^p は NN 境界条件。
- X^{p+1}, \dots, X^9 は DD 境界条件。

二重化のトリックをするとボゾンは全て周期的になります。フェルミオンは全て NS セクターでは反周期的、R セクターでは周期的になります。

光円錐ゲージをとって考えます。ゲージ固定条件は

$$X^+ = 4p^+ \tau, \quad \psi_+^+ = 0 \quad (4.5.1)$$

とします。これを用いて拘束条件

$$T_{++} = 0, \quad G_{++} = 0 \quad (4.5.2)$$

を解くことができます。特に $p+1$ 次元の意味での質量が求まって

$$m^2 := 2p^+ p^- - p^\ell p^\ell = \frac{N - a}{2} \quad (\ell = 2, \dots, p), \quad (4.5.3)$$

$$N := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \sum_{r>0} r \psi_{-r}^i \psi_r^i \quad (i = 2, \dots, 9) \quad (4.5.4)$$

となります。ここで、NS セクターでは $a = \frac{1}{2}$ 、R セクターでは $a = 0$ となります。

スペクトルを調べていくことにしましょう。まず NS セクターの Fock 真空 $|k\rangle$ は、 $m^2 = -\frac{1}{4}$ となり、タキオンになります。この状態は、場合によっては GSO 射影で消えます。開弦の場合に GSO 射影をどう課すべきかについては、この講義では詳しくは話せませんが、結果の一部だけを説明します。この講義では、このタキオン状態が GSO 射影で消せる場合のみを考えます。

NS セクターの第 1 励起状態は $N = \frac{1}{2}$ で $m^2 = 0$ となります。タキオンが GSO 射影で消える場合には、この状態は残ります。次の 2 種類の状態があります。

- $\psi_{-\frac{1}{2}}^{\ell}$: これは、 $SO(p-1)$ のベクトル表現になります。したがって $p+1$ 次元の意味での質量のないベクトル粒子になり、D-brane 上の $U(1)$ ゲージ場になります。
- $\psi_{-\frac{1}{2}}^j$ ($j = p+1, \dots, 9$): これは、 $SO(p-1)$ のスカラーになり、 $SO(9-p)$ のベクトル表現になります。したがって $p+1$ 次元の意味での質量のないスカラー粒子になり、D-brane の垂直方向のゆらぎを表すスカラー場になります。

R セクターの Fock 真空は $N = 0$ で $m^2 = 0$ となります。ゼロモード ψ_0^i があるので、 $SO(p-1)$ のスピノール表現で $SO(9-p)$ のスピノール表現でもあります。GSO 射影により、8 成分残ります。

もし上で述べたような GSO 射影が出来るとすると、時空の超対称性が存在します。例えば、同じ質量ごとに NS セクターの状態の数と R セクターの状態の数が等しくなります。このような D-brane を **BPS D-brane** と呼びます。

どのような BPS D-brane が存在するかは、type IIB か type IIA かによって異なります。

- Type IIB では BPS Dp -brane (p は奇数) が存在します。
- Type IIA では BPS Dp -brane (p は偶数) が存在します。

どうしてこうなるかは、この講義の範囲内では説明できません。

上で求めた BPS D-brane 上の無質量のスペクトルは、まとめると 10 次元の超対称 $U(1)$ ゲージ理論を $p+1$ 次元に次元削減したものになります。

n 枚重なった Dp -brane を考えると $U(n)$ ゲージ対称性が現れます。例えば type IIB の D3-brane を考えた場合、brane 上の無質量の場は 4 次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論の場と同じになります。ここで低エネルギー極限をとると閉弦が結合しなくなり、4 次元だけの理論になります。4 次元で $\mathcal{N} = 4$ 超対称性を持ち、重力の入っていない場の理論は $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論のみで、これはゲージ群と結合定数と θ 角を決めると一意に決まると考えられています。D3-brane の低エネルギー理論は、ゲージ群は $U(n)$ と分かっています。また、結合定数と θ 角は、閉弦から来る場の真空期待値と対応づけることができるので、低エネルギーでの理論が完全に決まることになります。

4.5.2 D-brane の系

次に様々な D-brane の系を考えることにします。

一つの D-brane に両端を持つ開弦はもうすでに考えました。異なる D-brane に端を一つずつもつ開弦を考えます。この開弦で q 個の DN, ND 方向があり、その他の $10 - q$ 個の方向が NN あるいは DD の場合を考えます。このとき、「時空の超対称性を保つか？」ということを考えます。このために真空のエネルギーを考えてみましょう。R セクターでは、いつも $a = 0$ です。NS セクターでは、

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}q \quad (4.5.5)$$

となります。モードは最小でエネルギーを $\frac{1}{2}$ 変えますから、もし (4.5.5) が $\frac{1}{2}$ の倍数でなければ、R セクターと NS セクターのエネルギーが同じになることはありません。したがって時空の超対称性はないことになります。つまり

$q = 0, 4, 8$ のいずれかであることが、時空の超対称性があることの必要条件である。

ということが出来ます。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D3	○	○	○	○	×	×	×	×	×	×
D7	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×

表 4.3 D3-brane と D7-brane の系。○が D-brane が伸びている方向。×が D-brane が伸びていない方向。

$q = 4$ の例として、表 4.3 のような type IIB 超弦理論での D3-brane と D7-brane の配位を考えます。この場合、D3-D7 をつなぐ弦では、NS セクター、R セクターともに $a = 0$ となります。したがって質量は D3-brane と D7-brane の間の距離を v として

$$m^2 = \left(\frac{v}{4\pi}\right)^2 + N \quad (4.5.6)$$

となります。 $N = 0$ の状態を詳しく調べましょう。

- NS セクターでは $\psi_+^4, \psi_+^5, \psi_+^6, \psi_+^7$ にゼロモードがあります。これは $\psi_0^4, \psi_0^5, \psi_0^6, \psi_0^7$ で、SO(4) の Clifford 代数をなします。つまり、 X^4, \dots, X^7 を回転する SO(4)=SU(2)×SU(2) の Dirac スピノール表現 $(2, 1) \oplus (1, 2)$ になります。GSO 射影によって Weyl スピノール表現 $(2, 1)$ になります。
- R セクターでは、 $\psi_+^2, \psi_+^3, \psi_+^7, \psi_+^8$ にゼロモード $\psi_0^2, \psi_0^3, \psi_0^7, \psi_0^8$ があります。このために 4つの状態があります。GSO 射影によって 2つの状態になります。

向きを反対にした D7-D3 弦と合わせて、これらの状態は 4 次元の $\mathcal{N} = 2$ 超対称性のハイパー多重項というまとまりを作ります。特に n 枚の D3-brane と N_f 枚の D7-brane を考えた場合には、4 次元で比較的軽い場は

- 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ U(n) 超対称 Yang-Mills 理論。
- N_f 個の基本表現のハイパー多重項。

となります。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4	○	○	○	○	○	×	×	×	×	×
D6	○	○	×	×	×	○	○	○	○	○

表 4.4 D4-brane と D6-brane の系。

$q = 8$ の例として、表 4.4 のような type IIA 超弦理論での D4-brane と D6-brane の配位を考えます。この場合、D4-D6 をつなぐ弦で比較的軽い状態を調べてみましょう。NS セクターでは、 $a = \frac{1}{2}$ となるので Fock 真空は $m^2 = \frac{1}{4}$ となって有質量になります。R セクターは $a = 0$ ですので $m^2 = 0$ です。今、質量とは 2 次元の Poincaré 対称性に対する質量ですので、 $p^+ p^- = 0$ となります。 $p^+ = 0$ の場合には光円錐ゲージで考えることは出来ませんので、ここでは、 $p^- = 0$ の場合を考えます。これはフェルミオンで X^1 の正の方向に光の速さで走っていることになります。つまり 2 次元の意味でのカイラル・フェルミオンを表します。

現実の世界を記述するためには、カイラル・フェルミオンを含むことが必須です。上の D4-D6 の系は非常に簡単で 2 次元ですが、弦理論がカイラル・フェルミオンを含むことが出来るということの例になっています。

4.6 まとめ

この章では D-brane について考えてきました。

- D-brane とは弦理論において開弦がくっつくことができる物体です。
- D-brane を調べる最も基本的な方法は、D-brane にくっついた開弦を調べることです。
- 簡単な境界条件の例として Neumann 境界条件と Dirichlet 境界条件があります。
- D-brane の上にはゲージ場があります。また、D-brane の垂直方向のゆらぎもあります。

- Type IIB では BPS Dp -brane (p は奇数)、Type IIA では BPS Dp -brane (p は偶数) があります。
- 超弦理論では、DN, ND 方向の数が 0, 4, 8 の場合に超対称性を保つ可能性があります。このとき、ハイパー多重項が出てくる例や、カイラル・フェルミオンが出てくる場合があります。

付録 A 局所超対称性を持つ作用

ここでは、本文で省略した、局所超対称性を持つ作用を解説します。

A.1 多脚場とスピン接続

超対称変換を2回やると並進になりますから、局所超対称性を持つ理論は必然的に一般座標変換に対する不変性を持ちます。したがって、一般座標変換で不変な枠組みでスピノールを定式化する必要があります。Lorentz 対称性のスピノール表現はありますが、一般線形群のスピノール表現はありません。したがって、一般座標変換で不変な枠組みで、どのように Lorentz 変換が入りこんでいるかが鍵となります。

d 次元の時空を考え、その座標の足を $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, \dots, d-1$ とします。計量を

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \quad (\text{A.1.1})$$

とします。これは、各点の接空間に内積を入れたことに対応します。この各点の接空間は Minkowski 空間ですから、座標とは関係なく直交基底をとることができます。この接空間（正確には余接空間）の基底を $e_\alpha^a d\sigma^\alpha$, $a = 0, 1, \dots, d-1$ とします。これは、

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b \quad (\text{A.1.2})$$

という関係式を満たします。このような e_α^a を**多脚場 (vielbein)** と呼びます。

e^a のとり方には、各点での Lorentz 変換の分の任意性があります。つまり $\Lambda^a_b(\sigma)$ を Lorentz 変換の行列、つまり

$$\eta_{ab} \Lambda^a_c(\sigma) \Lambda^b_d(\sigma) = \eta_{cd} \quad (\text{A.1.3})$$

を満たす行列として

$$e'^a_\alpha = \Lambda^a_c(\sigma) e^b_\alpha \quad (\text{A.1.4})$$

としたものも (A.1.2) を満たすので多脚場になります。(A.1.4) のような変換を**局所 Lorentz 変換**と呼びます。

局所的な対称性、つまりゲージ対称性がある場合、それに対する共変微分やゲージ場を考えると便利です。局所 Lorentz 変換に対するゲージ場を $\omega_\alpha^a{}_b$ と書いて**スピン**

接続と呼びます。局所 Lorentz 変換のベクトル表現にしたがう場 v^a に対して、共変微分は

$$\nabla_\alpha v^a = \partial_\alpha v^a + \omega_\alpha{}^a{}_b v^b \quad (\text{A.1.5})$$

と定義します。 v^a, w^a を局所 Lorentz 変換のベクトル表現にしたがう場として、 $\eta_{bc} v^b w^c$ は局所 Lorentz 変換で不変な場ですから $\nabla_a(\eta_{bc} v^b w^c) = \partial_a(\eta_{bc} v^b w^c)$ とすべきです。Leibniz 則と $\nabla_a \eta_{bc} = 0$ を要請すると

$$\omega_\alpha{}^{ab} = -\omega_\alpha{}^{ba} \quad (\text{A.1.6})$$

という式が得られます。以降多脚場の足 a, b, \dots の上げ下げは η_{ab}, η^{ab} で行います。

ここまでは一般論ですが、多脚場とスピン接続にはなんの関係ありません。ただし、計量を決めたときに自然に決まるスピン接続（Levi-Civita 接続と呼ばれます）を考えることが多いです。これは、 e_α^a の共変微分が 0 だという要請をおくことで決まるものです。つまり

$$\nabla_\alpha e_\beta^a := \partial_\alpha e_\beta^a + \omega_\alpha{}^a{}_b e_\beta^b - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma^a = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

という要請をおくものです。ここで $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ はクリストッフェル記号です。ただし、要請として必要十分なのは α, β に関して反対称部分

$$\partial_{[\alpha} e_{\beta]}^a + \omega_{[\alpha}{}^a{}_b e_{\beta]}^b = 0 \quad (\text{A.1.8})$$

です。今後、 $\omega_\alpha{}^a{}_b$ という記号は Levi-Civita 接続を表すとします。

この局所 Lorentz 変換に対してスピノール表現で変換する場を考え、それをスピノール場と呼ぶことにします。スピノール表現は Lorentz 群の表現ではなく、その 2 重被覆であるスピン群の表現ですから、スピン構造という構造を考えないといけないことに注意してください。ただし、局所的な Lagrangian 密度の表現には、どういうスピン構造を選んだかということは表れません。大域的な構造を考えると問題になります。

ガンマ行列を γ^a , $a = 0, 1, \dots, d-1$ とします。これは、次の反交換関係を満たすようにします。

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}. \quad (\text{A.1.9})$$

これを用いると $\gamma_{ab} := \gamma_{[a}\gamma_{b]}$ が Lorentz 群の Lie 代数のスピノール表現になります。したがってスピノール場 ψ に対する共変微分は、

$$\nabla_a \psi := \partial_a \psi + \frac{1}{4} \omega_a{}^{ab} \gamma_{ab} \psi \quad (\text{A.1.10})$$

となります。

A.2 ガンマ行列とスピノール

ここから 2 次元の場合に具体的に定式化していきます。ガンマ行列 γ^a , $a = 0, 1$ は 3.4.1 項で導入したように

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.1})$$

とします。C 行列を

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

とします。このとき

$$C^T = -C, \quad (C\gamma^a)^T = C\gamma^a, \quad (C\gamma^{ab})^T = C\gamma^{ab} \quad (\text{A.2.3})$$

が成り立ちます。また、chirality の行列を

$$\gamma_3 := \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.4})$$

とします。スピノール場 ψ は 2 成分で、その成分を

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_- \\ -\psi_+ \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

と書きます。この表示では Majorana スピノールは成分ごとに実です。一般に Dirac 共役は

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{A.2.6})$$

で定義しますが、Majorana スピノールに対しては、

$$\bar{\psi} = \psi^T C \quad (\text{A.2.7})$$

が成り立ちます。これらを合わせると、 ψ を Majorana フェルミオンとして

$$\bar{\psi}\gamma^a\psi = 0, \quad \bar{\psi}\gamma^{ab}\psi = 0 \quad (\text{A.2.8})$$

などが成り立ちます。また γ^{ab} の独立なものは $\gamma^{01} = \gamma_3$ しかなく $\gamma^a \gamma_3 = -\epsilon^{ab} \gamma_b$ ですから

$$\bar{\psi} \gamma^c \gamma_{ab} \psi = 0 \quad (\text{A.2.9})$$

となります。

スピノールの双線形形式の公式について少し説明します。 $\chi, \lambda, \epsilon, \psi$ をすべて Majorana フェルミオンのスピノールとします。このとき (A.2.3) から

$$\bar{\chi} \psi = \bar{\psi} \chi, \quad \bar{\chi} \gamma^a \psi, \quad \bar{\chi} \gamma_3 \psi = -\bar{\psi} \gamma_3 \chi. \quad (\text{A.2.10})$$

$$-2\bar{\chi} \psi \bar{\epsilon} \lambda = \bar{\chi} \gamma_a \lambda \bar{\epsilon} \gamma^a \psi + \bar{\chi} \gamma_3 \lambda \bar{\epsilon} \gamma^3 \psi + \bar{\chi} \lambda \bar{\epsilon} \psi, \quad (\text{A.2.11})$$

$$-2\bar{\chi} \psi \bar{\psi} \lambda = \bar{\chi} \lambda \bar{\psi} \psi \quad (\text{A.2.12})$$

などの公式が成り立ちます。

e_a^α を e_α^a の逆行列とし、 $\gamma^\alpha := e_a^\alpha \gamma^a$ とします。これらを用いて作用 (3.4.14) を一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対して不変にしたものは

$$S = -\frac{1}{4\pi} \int d^2 \sigma e i \bar{\psi} \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi \quad (\text{A.2.13})$$

となります。ここで $e := \det e = \sqrt{-h}$ です。このなかの共変微分 ∇_α の中のスピン接続の項は (A.2.9) から消えますので、単に ∂_α に置き換えても良いです。

A.3 作用

局所超対称性のある作用を作っていきます。ここでは、Noether 法と呼ばれる方法を用います。大層な名前がついていますが、基本的に「目の子で作る」方法です。

まず (3.5.25) を一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対して共変に書きます。

$$S_0 = -\frac{1}{4\pi} \int d^2 \sigma e \left[\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + i \bar{\psi}^\mu \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi_\mu \right] \quad (\text{A.3.1})$$

変換としては、(3.5.28) を局所的にしたものを試してみることにしましょう

$$\delta_0 X^\mu = i \bar{\epsilon} \psi^\mu, \quad \delta_0 \psi^\mu = \frac{1}{2} \partial_\alpha X^\mu \gamma^\alpha \epsilon, \quad \delta_0 e_\alpha^a = 0. \quad (\text{A.3.2})$$

これで変換を計算してみると

$$\delta_0 S_0 = -\frac{1}{4\pi} \int d^2 \sigma e i \nabla_\alpha \bar{\epsilon} \gamma^\beta \gamma^\alpha \psi_\mu \partial_\beta X^\mu \quad (\text{A.3.3})$$

となります。

さて、次の段階に行きます。(A.3.3)を消すために、超対称性に対するゲージ場としてグラビティーノ場 χ_α を導入します。これは、 α というベクトルの足を持った Majorana フェルミオンです。この変換性を

$$\delta_1 \chi_\alpha = -\nabla_\alpha \epsilon, \quad \delta_1(\text{他}) = 0 \quad (\text{A.3.4})$$

とし、さらに作用に

$$S_1 = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma e i \bar{\chi}_\alpha \gamma^\beta \gamma^\alpha \psi_\mu \partial_\beta X^\mu \quad (\text{A.3.5})$$

を付け足します。こうすると $\delta_0 S_0 + \delta_1 S_1 = 0$ となります。しかし

$$\delta_0 S_1 = -\frac{1}{4\pi} \int d^2e \left(-i \bar{\epsilon} \gamma^\alpha \bar{\chi}^\beta \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\gamma \chi_\gamma h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \right) + (\text{フェルミオン 3 次}) \quad (\text{A.3.6})$$

となるので、まだ終わっていません。このフェルミオン 1 次の項を消すように $\delta_2 e_\alpha^a$ を決めます。 $\delta_2 e_\alpha^a$ はフェルミオン 1 次ですから、 δ_2 でフェルミオン 1 次の項が出てくるのは $\delta_2 S_0$ のみです。実際

$$\delta_2 e_\alpha^a = -i \bar{\epsilon} \gamma^a \chi_\alpha, \quad \delta_2(\text{他}) = 0 \quad (\text{A.3.7})$$

とすると

$$\delta_2 h_{\alpha\beta} = -2i \bar{\epsilon} \gamma_{(\alpha} \chi_{\beta)}, \quad \delta_2 h^{\alpha\beta} = 2i \bar{\epsilon} \gamma^{(\alpha} \chi^{\beta)}, \quad \delta_2 e = -i \bar{\epsilon} \gamma^\alpha \chi_\alpha \quad (\text{A.3.8})$$

となります。これを用いて計算すると

$$\delta_2 S_0 = -\frac{1}{4\pi} \int d^2e \left(i \bar{\epsilon} \gamma^\alpha \bar{\chi}^\beta \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\gamma \chi_\gamma h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \right) + (\text{フェルミオン 3 次}) \quad (\text{A.3.9})$$

となり、 $(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)(S_0 + S_1 + S_2) = (\text{フェルミオン 3 次})$ となるので、フェルミオンの 1 次まででは不変になります。

次にフェルミオン 3 次の項を考えます。まず、

$$\delta_0 S_1 = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma e \left[\frac{1}{2} \bar{\chi}_\alpha \gamma^\beta \gamma^\alpha \nabla_\beta \bar{\psi}_\mu \psi_\mu \right] + \dots \quad (\text{A.3.10})$$

という項が出てきます。これを消すために作用に

$$S_2 = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma e \left[\frac{1}{4} \bar{\chi}_\alpha \gamma^\beta \gamma^\alpha \chi_\beta \bar{\psi}^\mu \psi_\mu \right] \quad (\text{A.3.11})$$

というフェルミオン4次の項を足します。さらに、これらから出てくる ψ の2次、 χ の1次の項を消すために、変換に

$$\delta_3 \psi^\mu = -\frac{i}{2} \gamma^\alpha \epsilon \bar{\psi}^\mu \chi_\alpha \quad (\text{A.3.12})$$

を加えます。

ここまでの作用と変換を全部合わせると、作用が超対称変換で不変になることがチェックできます。作用はまとめて $S = S_0 + S_1 + S_2$ で

$$S = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma e \left[\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + i \bar{\psi}^\mu \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi_\mu + i \bar{\chi}_\alpha \gamma^\beta \gamma^\alpha \psi_\mu \partial_\beta X^\mu + \frac{1}{4} \bar{\chi}_\alpha \gamma^\beta \gamma^\alpha \chi_\beta \bar{\psi}^\mu \psi_\mu \right] \quad (\text{A.3.13})$$

となります。また変換は $\delta = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ で

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= i\bar{\epsilon} \psi^\mu, & \delta \psi^\mu &= \frac{1}{2} \gamma^\alpha \epsilon (\partial_\alpha X^\mu - i \bar{\psi}^\mu \chi_\alpha), \\ \delta \chi_\alpha &= -\nabla_\alpha \epsilon, & \delta e_\alpha^a &= -i\bar{\epsilon} \gamma^a \chi_\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.3.14})$$

となります。

A.4 対称性

作用 (A.3.13) の対称性について見ておきましょう。まず、一般座標変換の対称性と局所 Lorentz 対称性は明白にあります。また、局所超対称性 (A.3.14) があります。

それ以外に次の Weyl 対称性があります。 $w(\sigma)$ を無限小で場所によっているスカラーのパラメーターとして

$$\delta_w X^\mu = 0, \quad \delta_w \psi^\mu = -\frac{1}{2} w \psi^\mu, \quad \delta_w e_\alpha^a = w e_\alpha^a, \quad \delta_w \chi_\alpha = \frac{1}{2} w \chi_\alpha \quad (\text{A.4.1})$$

という変換で作用 (A.3.13) は不変です。

さらに次の超 Weyl 対称性があります。 $\lambda(\sigma)$ を無限小で場所によっている Majorana フェルミオンのパラメーターとして

$$\delta_\lambda \chi_\alpha = \gamma_\alpha \lambda, \quad \delta_\lambda (\text{他}) = 0 \quad (\text{A.4.2})$$

という変換で作用 (A.3.13) は不変です。

これらすべては世界面のゲージ対称性であり、超弦理論で重要な役割を果たします。