

一般化対称性について

山口 哲

2025 年 8 月 25 日

目次

第 1 章	導入	4
1.1	対称性とは？	4
1.2	対称性の使い方の例	5
1.3	いくつかの注意	8
第 2 章	対称性とトポロジカル欠陥	10
2.1	欠陥	10
2.2	対称性とトポロジカル欠陥その 1	11
2.2.1	ユニタリー演算子とトポロジカル欠陥	11
2.2.2	局所演算子への作用	14
2.3	対称性とトポロジカル欠陥その 2	15
2.3.1	分配関数と対称性欠陥	15
2.3.2	演算子への作用	17
2.3.3	背景ゲージ場	18
2.3.4	Ising 模型の spin flip の例	20
2.4	対称性欠陥のまとめ	22
2.5	一般化対称性	23
第 3 章	2 次元 Ising 模型	25
3.1	2 次元 Ising 模型と \mathbb{Z}_2 ゲージ化	25
3.1.1	2 次元 Ising 模型	25
3.1.2	ゲージ化	25
3.1.3	ゲージ固定	27
3.2	双対対称性	28
3.3	Kramers-Wannier 双対性	32
3.3.1	Kramers-Wannier 双対性と、その証明	32
3.3.2	Ising 模型の相構造	34
3.4	Ising 模型の演算子	36
3.4.1	スピン演算子	37
3.4.2	対称性欠陥	37

3.4.3	無秩序スピン	38
3.5	KW 欠陥	40
3.5.1	領域の取り方	42
3.5.2	半空間ゲージ化	43
3.5.3	境界に局在すること	45
3.5.4	トポロジカル性	47
3.6	対称性の構造	49
3.6.1	足し算	49
3.6.2	フュージョン則	50
3.6.3	F 記号	54
3.6.4	他の Ward-Takahashi 恒等式	61
3.7	応用	63
3.8	ゼロ温度での相構造*	65
第 4 章	高次形式対称性	67
4.1	高次形式対称性の定義	67
4.2	格子ゲージ理論の中心対称性	68
4.2.1	格子ゲージ理論	68
4.2.2	格子ゲージ理論の中心対称性	69
4.3	背景ゲージ場その 1	72
4.4	背景ゲージ場その 2 : 単体コホモロジー	73
4.4.1	チェイン	74
4.4.2	コチェイン	76
4.4.3	積分 (ペアリング)	77
4.4.4	カップ積	79
4.5	自発的対称性の破れ	81
第 5 章	高次元の非可逆対称性	83
5.1	高次形式対称性のゲージ化	83
5.1.1	ゲージ化した理論の分配関数	83
5.1.2	双対対称性	85
5.2	4 次元 \mathbb{Z}_2 格子ゲージ理論	88
5.3	Maxwell 理論	89
5.3.1	Maxwell 理論	90
5.3.2	電磁双対性	91

5.3.3	$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ ゲージ化	94
5.3.4	双対性欠陥	95

まえがき

このノートは 2023 年 10 月に東京大学駒場で行った集中講義のノートです。集中講義の機会をくださり、有益な議論をしてくださった東京大学駒場素粒子論研究室の皆様、集中講義の参加者の皆様に感謝いたします。

第 1 章 導入

1.1 対称性とは？

この講義では、対称性の一般化について取り扱います。一般化に行くまえに普通の対称性について質問したいと思います。（場の理論において）対称性とは何でしょうか？考えてみてください。この質問は哲学的に聞こえるかもしれませんが、もっと具体的なもので、例えばみなさんが授業や教科書でどう習ったか、あるいは授業でどう教えているかというものです。

答えはいろいろあると思います。ここでは、その中の3つをとりあえず書いてみます。この中に皆さんの考えた答えはあるでしょうか？

- ①場を ϕ 、作用を $S(\phi)$ とします。対称性とは変換 $\phi \rightarrow \phi'$ であって $S(\phi') = S(\phi)$ となるものです。
- ②Hamiltonian を \hat{H} とします。対称性とは Unitary 演算子 \hat{U} であって、Hamiltonian と交換する、つまり $\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$ となるものです。
- ③余次元 1 のトポロジカル欠陥で群構造を持つものです。

①は、一番人気がある答えで、多くの人がこれを思い浮かべたと思います。②も量子力学では良く出てくる説明で、これを思い浮かべなかった人も言われてみれば納得してもらえenと思います。③は異質ですね。これは普通の教科書には載っていません。意味が分からなかったとしてもひとまず気にしないでください。③はこの後この講義で時間をかけて説明したいことの一つです。これが①や②と同じレベルで納得してもらえれば、この講義の目的の目的の半分くらいは達成したと言えます。

さて、①や②のような分かりやすい言い方があるのに、なぜ③のような難しい言い方を知らないといけないのでしょうか。実は①や②には次のように「大域的である」という共通の不満があるのです。

- ①変換は時空全体で一斉に変換してみることが必要になります。宇宙を考えてい

るなら、宇宙の始まりから未来まで、ほぼ真空のところや星の中から宇宙の果てまで一斉に変換して作用が不変か？という問でしか対称性の存在を記述できていません。

- ②こちらは時間方向は考えなくても良いですが、 \hat{H} も \hat{U} も空間全体に広がる巨大な演算子です。しかも系のサイズによって (Hilbert 空間の次元も含めて) 変わります。両方とも局所的なものの集まりなので、局所的な性質を見れば全体をいっぺんに考えなくても良いはずなのですが、②の言い方では全体でしか考えられていません。

つまり、対称性の記述としては

(大域的対称性であっても) 局所的な記述が望ましい。

ということになります。

この不満は最近になって降って湧いたわけではなく、昔からありました。そしてその解決もされています。それが、最初の質問に対する 4 番目の答えです。

- ④対称性とは、(連続対称性の無限小変換の場合には) カレント $J^\mu(x)$ であって、 $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ を満たすことである。

最初の問でこれを思い浮かべられた方もおられたかも知れません。また、言われてみれば皆さん納得されると思います。この記述は完全に局所的で理想通りです。場の理論で対称性を用いて様々な性質を導くときに、この記述は大変便利で、欠くことができないものです。

④の答えは非常に良いものでしたが、難点は連続対称性の無限小変換に限られることです。例えば離散的対称性の場合にはカレントは存在しませんから、④の記述はありません。実は離散的な対称性の場合にも適用できる局所的な記述が③です。

③のトポロジカル欠陥は対称性の局所的な記述を与える。

このような理由で③の見方は、普通の対称性に対しても有用です。

1.2 対称性の使い方の例

この後、対称性の一般化について説明していくわけですが、対称性を一般化しても有用であるということを説明するために、対称性の使い方の一つをについて説明します。これは簡単な例ですが、量子力学の教科書にはあまり書いてないと思います。

次のような命題が成り立ちます。

命題

\hat{U}, \hat{V} をユニタリー演算子で、Hamiltonian \hat{H} と可換とします（つまり、②の見方での対称性です）。そして

$$\hat{U}\hat{V} = a\hat{V}\hat{U}, \quad (a \text{ は } \mathbb{C} \text{ 数}, a \neq 1) \quad (1.1)$$

とします。このとき、**すべてのエネルギー準位（特に基底状態）は縮退しています。**

これは、場の理論の文脈では 't Hooft アノマリー整合条件と呼ばれているものの一例です。 a がこの例での 't Hooft アノマリーになります。おそらく、普通に場の理論でアノマリーを勉強された方には、そのアノマリーとこの a がどう関係があるかわからないと思います。大事なことではあるのですが、この講義の主題とは外れるのと、知らなくてもこの命題だけで理解できるので、その説明は省略します。

証明 証明を与えます。背理法で証明します。つまり、縮退していないエネルギー固有状態 $|\psi\rangle$, $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ があると仮定します。このとき $\hat{U}|\psi\rangle$ がエネルギー E の固有状態であることが、次のようにして分かります。

$$\hat{H}\hat{U}|\psi\rangle = \hat{U}\hat{H}|\psi\rangle = E\hat{U}|\psi\rangle. \quad (1.2)$$

さらに縮退が無いことがら $\hat{U}|\psi\rangle \propto |\psi\rangle$ なので、次のように表すことができます。

$$\hat{U}|\psi\rangle = u|\psi\rangle, \quad u \in \mathbb{C}, |u| = 1. \quad (1.3)$$

\hat{V} に関しても同様です。

$$\hat{V}|\psi\rangle = v|\psi\rangle, \quad v \in \mathbb{C}, |v| = 1. \quad (1.4)$$

これらを用いると

$$\hat{U}\hat{V}|\psi\rangle = uv|\psi\rangle \quad (1.5)$$

という関係を得ます。ところが、(1.1) の関係を用いると、全く同じベクトルが

$$\hat{U}\hat{V}|\psi\rangle = a\hat{V}\hat{U}|\psi\rangle = auv|\psi\rangle \quad (1.6)$$

とも書けます。ここから

$$auv|\psi\rangle = uv|\psi\rangle \quad (1.7)$$

という関係式を得ます。 $uv|\psi\rangle \neq 0$ ですから、この式は $a \neq 1$ に矛盾します。■

ここで考えてみたいことは、 \hat{U}, \hat{V} がユニタリーでなかったらどうなるか？ということです。この場合、 \hat{U}, \hat{V} ユニタリーではありませんから、従来の意味での対称性ではありません。しかし、証明を見てもらって分かるように、ユニタリー性を用いているところは $uv|\psi\rangle \neq 0$ の部分のみです。ですから、この場合も命題を少し修正することで成り立ちます。このようにして「(従来の意味では) 対称性でないもの」を対称性と同じように用いて理論を調べることができるわけです。このように従来の意味では対称性でないが、対称性と同様な使い方ができるものを「一般化対称性」と呼んでいろいろ調べようというのがここでやりたいことです。

上の証明を見てもらって分かるように、対称性の最も重要な性質は Hamiltonian と交換するということです。これをゆるめてしまうと、対称性と同じように用いることは、なかなか難しくなります。したがって、ここではこの条件はゆるめないことにします。一方、ユニタリーのような条件はゆるめても、そこそこ使えるものになります。これを「一般化対称性」と呼んで、いろいろ調べよう、というのがこの講義の目的です。ユニタリーでないが Hamiltonian と交換する演算子は場の理論の文脈では「非可逆対称性」と呼ばれます。¹⁾

今回取り扱うトピックに関して、文献を少し挙げます。[1] は、非可逆対称性に関する読みやすいレビューです。文献も非常に充実しているので、ここで挙げられなかった文献は、[1] を見ていただけると良いと思います。一般化対称性の元になった論文は [2] です。これは読みやすいとは言い難いのですが、色々なことが書いてあって、読むと非常に勉強になります。2次元の非可逆対称性は共形場理論の

1) 非可逆対称性という名前の由来については、少々複雑です。ちゃんと説明するためには場の理論でのトポロジカル欠陥について知ってもらう必要があります。ここでは、**非可逆対称性という名前だけ**れど \hat{U} という演算子が非可逆とは限らない、ということだけ注意しておきます。

文脈で昔から多くの研究がありますが、比較的最近の「対称性」という観点からの論文として [3] と [4] を挙げておきます。最近の高次元の非可逆対称性の発展の契機になったのは、[5, 6, 7] です。我々の論文 [5] では、格子ゲージ理論を取り扱ったのですが、このアイデアの元になったのは、2次元の格子理論での非可逆対称性の研究 [8, 9] です。この講義では、格子での半空間ゲージ化 [6] のアイデアを元にして、私なりの解説を試みました。

1.3 いくつかの注意

ここでは、通常のセミナーなどでは説明が省略されることが多いけれど、注意が必要なことについて説明します。

一つは、Euclidean の定式化についてです。この講義も含めて、セミナーや論文などでは場の理論を Euclid 形式で取り扱うことがよくあります。これは、「Euclid 形式の場の理論」という、教科書に出てくる場の理論と異なる理論を考えているのではないことに注意してください。理論は教科書に出てくる場の理論と同じものを取り扱っています。異なるのは定式化の仕方とか計算しやすい量です。例えば正準分配関数は Euclid 形式で取り扱いやすい量の一つです。これは

$$\mathrm{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \int D\phi e^{-S_E(\phi)} \quad (1.8)$$

のように表すことができます。ここで、 $S_E(\phi)$ は虚時間方向を長さ β の円周にしたときの Euclid 化した作用です。他にも、 $\hat{\mathcal{O}}_1(x_1), \dots, \hat{\mathcal{O}}_K(x_K)$ をすべて同時刻の別々の点に置かれた局所演算子としたとき、

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_1(x_1) \dots \hat{\mathcal{O}}_K(x_K) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-S_E(\phi)} \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_K(x_K), \quad Z := \int D\phi e^{-S_E(\phi)}. \quad (1.9)$$

と表すことができます。このとき $S_E(\phi)$ は Euclid 化した作用です。他にも様々な量が Euclid 形式を用いて計算することができます。この講義でも Euclid 形式用いて様々な場の理論の性質を考えることになります。

もう一つは演算子関係式についてです。例えば、この講義でも**量子論で**

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (1.10)$$

というような式を書くことがあります。これは古典論であれば、運動方程式を満たす場の配位において、このような関係式を満たすということですが、量子論におい

てはどうでしょうか？一つは演算子形式の場の理論で $\hat{J}^\mu(x)$ が上の関係式を満たすということです。この講義で主に用いるのは、もう少し広い応用ができる見方で、相関関数の間の関係式と見ることです。これは、

$$\langle \partial_\mu J^\mu(x) \dots \rangle = 0, \quad (\dots \text{ は任意の局所演算子や非局所演算子の挿入。})$$

ただし x は \dots の挿入されている点とは異なる。) (1.11)

というのを省略して書いたのが式 (1.10) ということです。問題は「ただし…」のところは文脈によって色々変わるところです。この講義では分かりにくそうな場合はなるべく補足するようにはしますが、もし分からなければ聞いてください。

他によく使う例として

$$\oint_{U(\Sigma)} \star \mathcal{O}(x) = \star \mathcal{O}'(x) \quad (1.12)$$

というようなものがあります。これは x は時空の点で $\mathcal{O}(x), \mathcal{O}'(x)$ は局所演算子、 Σ は余次元 1 の面で $U(\Sigma)$ は Σ に局在した演算子（欠陥）です。この「式」の意味は

$$\langle U(\Sigma) \mathcal{O}(x) \dots \rangle = \langle \mathcal{O}'(x) \dots \rangle, \quad (\dots \text{ は両辺で共通の任意の演算子の挿入。})$$

ただし、 \dots は Σ の内側には挿入されていない。) (1.13)

という意味です。

第 2 章 対称性とトポロジカル欠陥

この章の目標は、前章で紹介した対称性の③の見方「対称性とは余次元 1 のトポロジカル欠陥で群構造を持つもの」ということを納得してもらうことです。まず、欠陥という概念を導入します。そして対称性がトポロジカル欠陥であることを様々な観点から説明します。一旦それを納得してもらえば、対称性の一般化はすんなりと納得してもらえそうです。

2.1 欠陥

まず、欠陥を定義します。

場の理論において**欠陥 (defect)** とは、**時空中で他の部分と性質が異なる部分**のことを言います。ただし、局所性を満たすものとします。

補足の説明をします。性質が異なるというのは、例えば Lagrangian 密度がそこだけ異なるとか、余分な自由度がそこにあるとか、格子の理論なら、そこだけ格子の構造が異なるとか、そういうものです。

局所性というのは、性質が異なるとしても非局所的な相互作用はないということです。言い換えれば、欠陥の上の離れた 2 点が直接相互作用をすることは無いようなものです。格子理論で考える場合には、連続極限をとったときに局所性を満たすようなものなら、それは局所性を満たす欠陥であるということにします。

別の言い方をすると、欠陥とは（広い意味での）演算子であるということもできます。

次に 2 つの言葉を導入します。まず、欠陥の**次元**とは、性質の異なる部分の次元を言います。例えば時空中で 1 点が他の部分と異なるなら、その次元は 1 です。**余次元 (codimension)** とは、時空の次元を d 、欠陥の次元を p としたときに、 $d - p$ のことを言います。欠陥の性質は余次元によって共通な場合もあるので、この言葉を導入するのが便利です。これは単に言葉遣いの問題なのですが、余次元 0 の欠陥、つまりある領域にわたって性質が違ってくるようなものは欠陥とは呼ばないことにし

ます。

代表的な欠陥の例を2つ挙げます。局所演算子は0次元の欠陥です。別の言い方をすれば、局所演算子とは時空の1点にある欠陥の別名です。¹⁾もう一つの例はゲージ理論のWilson ループ $\text{Tr} P \exp(i \oint A)$ です。Wilson ループは1次元の欠陥の例です。

欠陥について一つ注意することは、欠陥は動的な物体、例えばソリトンなどではないということです。動的な物体は運動方程式などにしたがって運動しますが、欠陥はその部分の物理法則を手で変えるようなものです。欠陥の形などは手で決めます。ややこしいことに文献によってはソリトンのことを欠陥と呼んでいるものもあるので注意が必要です。

2.2 対称性とトポロジカル欠陥その1

ここから対称性とトポロジカル欠陥の関係について見ていきます。

まず、**トポロジカル欠陥 (topological defect)** とは、欠陥のうちでトポロジーを変えない連続変形で値を変えないもののことを言います。²⁾絵を使った式で書くなら

(2.1)

のようになります。この式も 1.3 節で述べた演算子関係式の書き方を使っています。つまり、左辺と右辺は他に任意の共通の演算子が挿入されている期待値です。ただし、欠陥を変形している部分には演算子は挿入されていません。

ここから考えていきたいことは、みなさんが納得しているはずの対称性の見方② $\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$ 、および④ $\partial_\mu J^\mu = 0$ から始めて、③トポロジカル欠陥の見方ができることを示すことです。

2.2.1 ユニタリー演算子とトポロジカル欠陥

d 次元の場の理論の演算子形式の定式化から始めることにします。簡単のために $U(1)$ 対称性の場合を考えます。時刻 0 で対称性のユニタリー演算子は変換のパラ

1) 局所演算子は Lagrangian に出てくる場の微分やそれらの積で書けているものに限りません。
2) これも不幸な用語の行き違いなのですが、トポロジー的に守られて安定なソリトンのことをトポロジカル欠陥と呼ぶ文献もあります。これはこの講義でのトポロジカル欠陥とは違うものです。

メーターを α として、

$$\hat{U} = e^{i\alpha\hat{Q}}, \quad \hat{Q} := \int_{t=0, \text{空間}} d^{d-1}x \hat{J}^0. \quad (2.2)$$

\hat{J}^0 はカレント \hat{J}^μ , $\mu = 0, \dots, d-1$ の時間方向成分、つまり電荷密度です。 \hat{Q} の定義は空間が有限（周期境界条件など）の場合には良いですが、無限の場合には積分が定義されるかどうか問題となります。実は自発的対称性の破れが起こっている場合には、この積分は収束しません。自発的対称性の破れについては、教科書 [10] が詳しいです。ここではひとまず定義されている場合を考えることにします。

Euclidean の定式化を使うために、

$$\hat{J}^d := i\hat{J}^0 \quad (2.3)$$

を定義します。³⁾ これを用いると

$$\hat{Q} = -i \int_{t=0, \text{空間}} d^{d-1}x \hat{J}^d \quad (2.4)$$

と書けます。

Euclid 時間（虚時間）を τ として、Euclid 時間発展について考えます。 \hat{O} を時刻 0 での演算子として、Heisenberg 演算子のような役割をする演算子 $\hat{O}(\tau)$ を

$$\hat{O}(\tau) := e^{\tau\hat{H}} \hat{O} e^{-\tau\hat{H}} \quad (2.5)$$

と定義します。⁴⁾ こうすると、例えばカレントの保存則 $\partial_\mu \hat{J}^\mu(x^0, \vec{x}) = 0$, $\mu = 0, \dots, d-1$ は、 $x^d := \tau$ として

$$\partial_\mu \hat{J}^\mu(\vec{x}, x^d) = 0, \quad \mu = 1, \dots, d \quad (2.6)$$

と書くことができます。また、 $\hat{U}\hat{H} = \hat{H}\hat{U}$ ですから

$$\hat{U}(\tau) = \hat{U} \quad (2.7)$$

3) これを見て分かるように、Euclidean の定式化では Hermit 共役には注意する必要があります。

4) 本当の Heisenberg 演算子と区別するために記号を変える方が良いのかもしれませんが、煩雑になるのでやめておきます。本物の Heisenberg 演算子とは違うものであることに注意してください。また、ここで定義した Euclidean の Heisenberg 演算子のようなものは取り扱いには注意が必要です。 $e^{i\tau\hat{H}}$ という高エネルギーのところが大きく効いてくる演算子が入っているからです。ただし、これらの演算子の時間順序積の真空期待値などはちゃんと定義されます。Euclidean の経路積分形式と演算子形式をつなぐときに考えると便利な書き方だと思ふと良いと思います。

となります。

式 (2.7) を Euclidean 経路積分形式での期待値の関係式に書くと

$$U \xrightarrow{\uparrow} = U \xrightarrow{\uparrow} \quad (2.8)$$

のようになります。ここで矢印で向きを表しています。

U は時間一定面で他の部分とは異なっているので、余次元 1 の欠陥です。式 (2.8) は、 U を時間方向にずらしても値を変えないことを示しています。これから、 U がトポロジカル欠陥であることを示します。

これから書くのは Euclidean 経路積分形式での演算子関係式です。余次元 1 の向きのついた部分多様体を M として

$$U(M) := e^{i\alpha Q(M)}, \quad Q(M) := -i \int_M dS_\mu J^\mu \quad (2.9)$$

とします。⁵⁾ $\int_M dS_\mu$ は電磁気の授業などで出てきた面積分です。

この $U(M)$ がトポロジカルであることは次のようにして示します。ある領域 D があって、 $\partial D = M \cup (-M')$ とします。ただし、 $-M'$ は M' の向きを反対にしたものです。こうすると Gauss の定理を用いて

$$\int_D d^d x \partial_\mu J^\mu = \int_M dS_\mu J^\mu - \int_{M'} dS_\mu J^\mu \quad (2.10)$$

を得ます。ここから

$$Q(M) = Q(M'), \quad U(M) = U(M') \quad (2.11)$$

という式が成り立ちます。特に M_1 と M_2 がトポロジを変えない連続変形で繋がっている場合には領域 D で、 $\partial D = M_1 \cup (-M_2)$ となるものがとれますから、 $U(M_1) = U(M_2)$ となり、したがって U はトポロジカル欠陥ということが言えました。

ここまでで言えたことをまとめます。

対称性があると対応するトポロジカル欠陥がある。それは、対称性の演算子 \hat{U} を時間一定面だけでなく、曲がったところにも定義したものである。

最初の方で、自発的対称性の破れがあるときには \hat{U} がうまく定義できないと言い

5) $U(M)$ の定義の中に \exp があって、同じ点での演算子の積が入っています。一般には、ここで発散があったり、繰り込みが必要だったりして微妙なことが起こるのですが、ここではひとまず説明のために無視します。正しい取り扱いは、次節でやる背景ゲージ場とそのゲージ変換を用いる方法です。

ました。しかし、これは定義しようとしている空間が無限であるところからくるものです。したがって、 M が有限である場合には $U(M)$ は自発的対称性の破れがあるかどうかにかかわらず定義でき、理論の解析に用いることができます。

2.2.2 局所演算子への作用

次に対称性の局所演算子への作用について考えてみます。場の理論の演算子形式では、局所演算子 $\hat{\mathcal{O}}(x)$ 変換は

$$\hat{U}\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{U}^\dagger = \hat{\mathcal{O}}'(x) \quad (2.12)$$

と書けます。⁶⁾ \hat{U}, \hat{U}^\dagger は \hat{H} と可換ですから、 \hat{U} を少しだけ虚時間で未来に移動し、 \hat{U}^\dagger を少しだけ過去に移動することで

$$\begin{array}{ccc} U(M_1) & \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} & \\ & \times \mathcal{O}(x) & = \quad \times \mathcal{O}'(x) \\ U(M_2) & \xleftarrow{\quad \downarrow \quad} & \end{array} \quad (2.13)$$

という絵で表すことができます。別の言い方をすると式 (2.12) の左辺は、

$$T(\hat{U}(M_1)\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{U}(M_2)) = T(\hat{U}(M)\hat{\mathcal{O}}(x)), \quad M := M_1 \cup (-M_2) \quad (2.14)$$

と表すことができます。 $T()$ は虚時間順序積を表します。さらに \dots を x と同時刻にはない任意の演算子の挿入として (2.12) より

$$\langle 0|T(\hat{U}(M)\hat{\mathcal{O}}(x)\dots)|0\rangle = \langle 0|T(\hat{\mathcal{O}}'(x)\dots)|0\rangle \quad (2.15)$$

という式が成り立ちます。この両辺に現れる量を Euclidean 経路積分で表すことを想定して

$$\langle U(M)\mathcal{O}(x)\dots\rangle = \langle \mathcal{O}'(x)\dots\rangle \quad (2.16)$$

と書くのでした。さらにこれを略記して

$$U(M)\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}'(x) \quad (2.17)$$

6) 量子力学の教科書とは異なる convention を用いています。場の理論の論文では、ここで用いる convention の方が一般的です。

と書きます。 $U(M)$ はトポロジカルですから、連続変形して（変形後の面も同じ記号 M で表すことにして）

$$U(M) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \times \mathcal{O}(x) \\ \downarrow \end{array} \right) = \times \mathcal{O}'(x) \quad (2.18)$$

という絵で書きます。これが、局所演算子の変換性をトポロジカル欠陥を用いて表したのになります。後で示すように、これは Ward-Takahashi 恒等式を有限変換の場合にも適用できる形にしたものと言うこともできます。

2.3 対称性とトポロジカル欠陥その2

ここでは、対称性とトポロジカル欠陥の関係を先程とは少し別の角度から見てみます。ここでは、通常の Ward-Takahashi 恒等式を①の描像から導くのと同様の方法を離散対称性の場合にも適用できるように有限変換で行います。つまり、大域的対称性であっても場所に依存する変換し、それによる作用の変化を見ます。

2.3.1 分配関数と対称性欠陥

d 次元の場の理論を考えます。場を $\phi(x)$ とし、作用を $S(\phi)$ とします。この系に①の意味での大域的対称性があるとします。つまり、群 G があり、 $g \in G$ に対して変換 $\phi(x) \rightarrow \phi^g(x)$ があって、 $S(\phi^g) = S(\phi)$ となるとします。 G は連続的でも離散的でも良いです。

アイデアは、大域的対称性であっても場所に依存する変換、つまりゲージ変換を試みることです。離散対称性でも適用できるように次のような変換を考えます。Euclidean 時空の中の領域 D をとり、変換

$$\phi'(x) = \begin{cases} \phi^g(x), & x \in D \\ \phi(x), & x \notin D \end{cases} \quad (2.19)$$

を考えます。つまり、領域 D 内では、 g での変換を行い、 D の外では変換しませ

ん。この変換を用いて分配関数を変形していきます。

$$\begin{aligned}
Z &= \int D\phi e^{-S(\phi)} \\
&= \int D\phi' e^{-S(\phi')} \\
&= \int D\phi e^{-S_{D,g}(\phi)}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

この変形では、1行目から2行目は単に積分変数の文字を変えただけです。2行目から3行目へは変換 (2.19) を代入しました。簡単のため、この変換で積分測度 $\int D\phi$ は不変であることを仮定しました。また、 $S_{D,g}(\phi) := S(\phi')$ と定義しました。

さて、一般には変換で $S_{D,g}(\phi) \neq S(\phi)$ です。どれくらい異なるかを考えてみましょう。まず、 D の外部では $\phi(x) = \phi'(x)$ ですから、同じです。一方、 D の内部では $\phi \rightarrow \phi^g$ が大域的対称性であることから、同じになることが分かります。つまり、 $S_{D,g}(\phi)$ と $S(\phi)$ は $M := \partial D$ の部分でのみ異なることになります。ですので、 M に局在している演算子（欠陥）を

$$U_{g^{-1}}(M) := \exp(S(\phi) - S_{D,g}(\phi)) \tag{2.21}$$

の挿入で定義することにします。すると (2.20) から

$$Z = \int D\phi e^{-S(\phi)} U_{g^{-1}}(M) \tag{2.22}$$

を得ます。この両辺を Z で割ると

$$\langle U_{g^{-1}}(M) \rangle = 1 \tag{2.23}$$

という恒等式を得ます。これが Ward-Takahashi 恒等式の一つです。

D の外側に他の演算子（欠陥）がささっている場合も全く同様の変形ができて、次の恒等式を得ます。

$$\langle U_{g^{-1}}(M) \cdots \rangle = \langle \cdots \rangle \tag{2.24}$$

このような式を単に

$$U_{g^{-1}}(M) = 1 \quad (\text{ただし } M \text{ の内側には他の演算子がささっていない}) \tag{2.25}$$

と式で表したり、

$$\text{[Diagram: A circle with a dot inside, labeled } U_{g^{-1}}(M) \text{ below it]} = 1 \quad (2.26)$$

と絵で表したりするのでした。

2.3.2 演算子への作用

この見方で演算子への作用を考えてみます。 $\mathcal{O}(x)$ を局所演算子とし、それが $g \in G$ で $\mathcal{O}^g(x)$ と変換するとします。

D の内部に $\mathcal{O}(x)$ を置き、その他の任意の演算子（欠陥）を D の外部に置きます。そして先程と同じように (2.19) を考えます。すると

$$Z \langle \mathcal{O}(x) \cdots \rangle = \int D\phi \mathcal{O}(x) \cdots e^{-S(\phi)} = \int D\phi U_{g^{-1}}(M) \mathcal{O}^g(x) \cdots e^{-S(\phi)} \quad (2.27)$$

という恒等式を得ます。これは

$$U_{g^{-1}}(M) \mathcal{O}^g(x) = \mathcal{O}(x) \quad (2.28)$$

と書くのでした。ここで、 $\mathcal{O}^g(x)$ のことを $\mathcal{O}(x)$ と書き g のことを g^{-1} と書くことで

$$U_g(M) \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^g(x) \quad (2.29)$$

という恒等式を得ます。これは絵で

$$\text{[Diagram: A circle with a dot inside, labeled } U_g(M) \text{ below it]} = \text{[Diagram: A dot, labeled } \mathcal{O}^g(x) \text{ next to it]} \quad (2.30)$$

というふうに表すこともできます。

G は群ですから、演算子への作用も表現になっています。ですから、表現行列を用いて Ward-Takahashi 恒等式を表しておくことも便利です。すべての局所演算子の基底を $\mathcal{O}_a(x)$ とすると、 $\mathcal{O}_a^g(x)$ はこれらの線形結合で表すことができます。つまり $R(g)^b_a$ を表現行列として

$$\mathcal{O}_a^g(x) = \sum_b \mathcal{O}_b(x) R(g)^b_a \quad (2.31)$$

と書くことができます。これらすべてまとめて次のように言うことができます。

離散的な群の場合も含めて、トポロジカル欠陥が対称性の局所的な記述を与える。この対称性を記述するトポロジカル欠陥を**対称性欠陥**と呼ぶ。Ward-Takahashi 恒等式は

$$\oint_{U_g(M)} \star \mathcal{O}_a(x) = \sum_b R(g)_a^b \star \mathcal{O}_b(x) \quad (2.32)$$

と表せる。

2.3.3 背景ゲージ場

対称性を表すトポロジカル欠陥の便利な見方の一つは、背景ゲージ場を考えることです。結論から言うと、flat な背景ゲージ場の背景が対称性のトポロジカル欠陥の配位と同一視できます。それをこれから説明していきます。

簡単のため、連続対称性でアノマリーが無い場合を考えます。前節と同じ設定で、大域的対称性の背景ゲージ場 A を入れた作用を $S(\phi, A)$ とします。 $A = 0$ のときに元の作用に戻るとします。つまり $S(\phi, A = 0) = S(\phi)$ とします。この背景ゲージ場の元での分配関数は

$$Z(A) = \int D\phi e^{-S(\phi, A)} \quad (2.33)$$

と表すことができます。

ここでゲージ変換について考えてみます。 $A = 0$ のところから、前項で考えたゲージ変換 (2.19) をしてみます。このとき、 $A \rightarrow A'$ と変化します。ゲージ不変性は仮定しているので

$$Z(A = 0) = Z(A') \quad (2.34)$$

となります。前項で議論したように、左辺は $M = \partial D$ に対称性欠陥が入った分配関数です。これがゲージ場 A' が入っているのと同じということです。

A' は $A = 0$ から (2.19) から得られたものですから、 A' は M 上だけでデルタ関数的に非 0 の値を持っています (図 2.1 参照)。その値は D の中の点から外の点への経路で M と 1 回交わる経路を C として

$$Pe^{i \int_C A'} = g \quad (2.35)$$

となるようになっています。また、もともと場の強さは0でしたから、ゲージ変換した後も0となります。このように場の強さが0となるゲージ場の配位を **flat** なゲージ場といいます。

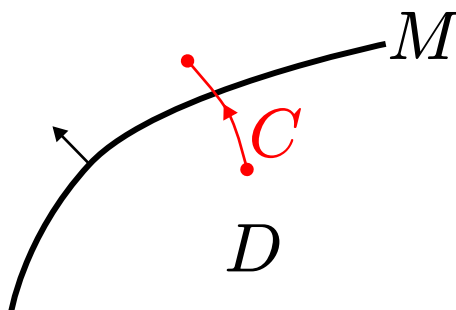


図 2.1 対称性欠陥と背景ゲージ場の配位。M 上にある対称性欠陥は M 上にデルタ関数的に局在した背景ゲージ場の配位として表すことができる。 $Pe^{i\int_C A'} = g$ となるようになっている。

この結果をまとめると

対称性欠陥は、デルタ関数的に局在した背景ゲージ場の配位である。

と言えます。

この逆を考えてみましょう。flat な背景ゲージ場の配位が与えられたとします。するとある点のまわりの球体のトポロジーを持つ領域でゲージ変換して、 $A = 0$ とすることができます。これを図 2.1 のように空間のいろんな部分からやっていって、ほとんどの部分で $A = 0$ とすることができます。しかし、二人の人が別の点からゲージ変換していって、ぶつかったときに、その間ですべて $A = 0$ とすることは限りません。一般に2つの領域の境目で $A \neq 0$ となります。言い換えると、2つの領域の境目が対称性欠陥となります。

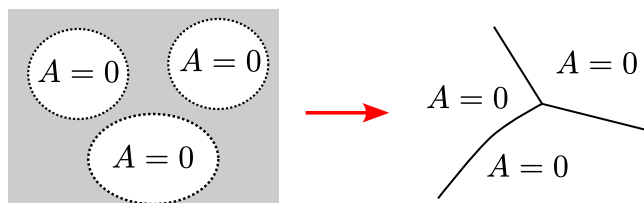
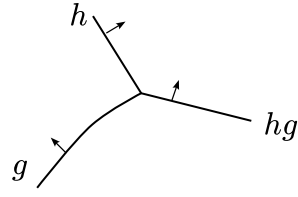


図 2.2 flat な背景ゲージ場の配位と対称性欠陥の関係。右のようにいろんな点のまわりの球体の領域でゲージ変換を行って $A = 0$ となるようにする。領域の境目のみで $A \neq 0$ になるが、これが対称性欠陥になる。

図 2.2 を見てもらっても分かるように、この操作を行うと一般的に対称性欠陥が枝分かれしている**ジャンクション**ができます。ゲージ変換によってジャンクションも連続的に動かすことができるので、このジャンクションもトポロジカルです。このジャンクションで繋がれるトポロジカル欠陥は何でもよいわけではなく、flat であることからジャンクションまわりの Wilson ループが 1 になるので、それぞれの欠陥に割り振られる群の元は



(2.36)

という関係になります。

図 2.2 では 2 次元的に書いているので余次元 2 のジャンクションですが、高次元ではこのようなジャンクションがさらに集まったジャンクションもできます。3 次元空間の中で泡が集まっているようなものを思い浮かべてください。

まとめると

flat なゲージ場の配位は、様々な次元のトポロジカルなジャンクションを含む対称性欠陥の配位で表される。

一般のこのような対称性欠陥の配位の元での分配関数は理論の詳細によります。しかし、対称性のみから導かれる Ward-Takahashi 恒等式から分かる部分もあります。

2.3.4 Ising 模型の spin flip の例

前項までは、連続的な場の理論の描像で対称性がトポロジカル欠陥で表されることを見てきました。連続的な場合には正則化など場の理論特有の微妙な問題もあって、数学的に厳密な取り扱いが難しいです。この項では、格子上での Ising 模型の spin flip の対称性を例にとって、対称性とトポロジカル欠陥を考えてみます。この場合には、経路積分が有限和になりますから、数学的に厳密な取り扱いが可能となります。

まず、Ising 模型を定義します。 d 次元の立方格子を考えます。周期境界条件を課して有限個のサイトがあるような場合を考えます。サイトのラベルを i, j, \dots とします。各サイト i に自由度 $a_i = 0, 1$ を置きます。そして K を正の実数として、分配

関数をすべての $a_i = 0, 1$ の足し上げ

$$Z := \sum_{\{a\}} e^{-S(a)}, \quad S(a) := -K \sum_{\langle ij \rangle: \text{すべてのリンク}} (-1)^{a_i + a_j} \quad (2.37)$$

で定義します。ここでサイト i, j をつなぐリンクを $\langle ij \rangle$ で表しました。これは有限和ですから、数学的に厳密な取り扱いができます。⁷⁾

この Ising 模型には spin flip の対称性

$$a_i \rightarrow a_i + 1 \pmod{2} \quad (2.38)$$

があります。この対称性を表すトポロジカル欠陥がどのようなものかを考えてみましょう。そのために領域（サイトの集合） D をとり、変換

$$a'_i = \begin{cases} a_i + 1, & i \in D \\ a_i, & i \notin D \end{cases} \quad (2.39)$$

を考えます。ここで、(2.37) の分配関数は

$$Z = \sum_{\{a\}} e^{-S(a)} = \sum_{\{a'\}} e^{-S(a')} = \sum_{\{a\}} e^{-S_D(a)} \quad (2.40)$$

と変形できます。最初は和を取っている変数の文字を変えただけです。次は (2.39) を代入し、明らかに成り立つ性質 $\sum_{\{a'\}} = \sum_{\{a\}}$ を用いました。また、 $S_D(a) := S(a')$ を定義しました。

$S_D(a)$ と $S(a)$ の違いを見てみましょう。リンク $\langle ij \rangle$ に関して、 $i, j \notin D$ の場合には変換しないので変化なし、 $i, j \in D$ の場合にも両方のスピンが反転するので、相互作用は変化しません。変化するのは片方が D に入っていて、もう片方は D に入っていない場合、つまりリンクが D の境界にある場合です。このようなリンクは、分配関数への寄与が

$$\exp(-K(-1)^{a_i + a_j}) \quad (2.41)$$

と反強磁性の相互作用になります。したがって $M = \partial D$ の部分でのみ相互作用が反強磁性になっていて、他の部分と異なっています。したがって、これは余次元 1 の欠陥になります。また、いろんな領域をとって (2.39) の変換をすることによって、

7) ここで数学的に厳密に取り扱いを説明するという意味ではありません。

分配関数の値を変えずに連続的に⁸⁾欠陥を動かすことができるので、この欠陥はトポロジカルです。つまり、この欠陥が対称性を表すトポロジカル欠陥である「対称性欠陥」です。

この spin flip のトポロジカル欠陥とゲージ場の配位の関係についても見ておきましょう。先程出てきた S_D は次のように書くことができます。

$$S_D(a) := -K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}}, \quad b_{ij} = \begin{cases} 0, & \langle ij \rangle \notin M \\ 1, & \langle ij \rangle \in M \end{cases}. \quad (2.42)$$

この b_{ij} は、リンクに群 \mathbb{Z}_2 の元 $0, 1$ が配置されているので、格子理論における \mathbb{Z}_2 背景ゲージ場とすることができます。格子ゲージ理論については、後ほど詳しく説明します。このゲージ場の配位 b_{ij} は次のように flat という性質を満たします。格子においてサイトを頂点とする最小の正方形をプラケット (plaquette) と呼ぶことにします。任意のプラケットをとってきて、それを囲む4つのリンクを $\langle ij \rangle, \langle jk \rangle, \langle kl \rangle, \langle li \rangle$ とします。このとき上の b は

$$b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li} = 0 \pmod{2} \quad (2.43)$$

を満たします。このようなゲージの配位は flat な配位といいます。

逆に flat なゲージ場の配位が与えられたとします。すると $b_{ij} = 1$ となるようなリンクを横切るように欠陥を繋いでいくことで、対称性欠陥の配位とすることができます。対称性欠陥が端がなく、ちゃんとつながっていることは次のように保証されます。flat なので、すべてのプラケットに関して $b_{ij} = 1$ のリンクは偶数個あります。ですから、あるプラケットに入ってきた欠陥は、必ず出ていくことができます。

2.4 対称性欠陥のまとめ

これまでいろんな面から対称性の見方③余次元1のトポロジカル欠陥で群構造を持つもの、というのを見てきました。その性質をまとめておきます。

普通の対称性は次のようなものです。群 G を考えます。 $\forall g \in G$ と時空の中の余次元1の向きのついた面 M に対して、トポロジカル欠陥 $U_g(M)$ があって次のような性質を満たします。

8) 格子理論で「連続的」は奇妙な感じがしますが、ここでは、境界付近にあるサイト一つだけまたぐ変形を繰り返してできる変形を「連続的な変形」と呼んでいます。

- 群構造

1. フュージョン (fusion) は群の積。

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ U_g \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ U_h \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ U_{gh} \end{array} \quad (2.44)$$

2. 群の単位元には、自明な欠陥が対応。

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ U_1 \end{array} = 1 \quad (2.45)$$

3. 逆元に対応するのは、向きを裏返したものである。

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ U_g \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ | \\ U_{g^{-1}} \end{array} \quad (2.46)$$

- 局所演算子への作用

$$\bigcirc_{U_g(M)} \star_{\mathcal{O}_a(x)} = \sum_b R(g)^b_a \star_{\mathcal{O}_b(x)} \quad (2.47)$$

2.5 一般化対称性

これまで、普通の対称性がある種のトポロジカル欠陥という見方ができることが分かりました。逆に一般のトポロジカル欠陥は必ずしも対称性を表すものではありません。ここでのアイデアは、これを逆手にとって対称性の一般化を行うことです。

一般のトポロジカル欠陥を「**一般化対称性**」と呼ぶ。

まず、対称性はトポロジカル欠陥のうちで特殊なものでしたから、トポロジカル欠陥のことを一般化対称性と呼ぶのは妥当なことだと思います。大事なことはこの一般化対称性が普通の対称性と同じように場の理論の解析に使えるかということです。まず、トポロジカルという性質だけから Ward-Takahashi 恒等式に当たる恒等式を考えることができます。また導入の章で説明した例ですと、Hamiltonian と交

換するというのはトポロジカルということです。この性質があると、普通の対称性でなかったとしても、ある場面では対称性と同様の使い方ができるということは、導入の章で説明したとおりです。ただし、一般化対称性をどのように使うかということに関しては、まだまだ研究の余地があり、現在も発展中です。

普通の対称性とは異なる一般化対称性には、ざっくり2つの方向性があります(もちろん両方の意味で一般化することも考えます)。

- 普通の対称性は余次元1でしたが、これを余次元 $p+1$, $p > 0$ にしたものは p 形式対称性とか高次形式対称性と呼ばれます。
- 群構造が無いトポロジカル欠陥は「非可逆対称性」と呼ばれます。

非可逆対称性の名前の由来について、もう少しだけ説明します。まず、2つのトポロジカル欠陥を並べて置いたものはまたトポロジカル欠陥とみなすことができます。このような操作で新しいトポロジカル欠陥を作ることを「フュージョン」(fusion)といいます。これは対称性欠陥のまとめのところでも出てきました。普通の対称性の場合にはフュージョンは群の掛け算になります。また、自明なトポロジカル欠陥(何も置かない)ものは必ず存在します。自明なトポロジカル欠陥は任意のトポロジカル欠陥とフュージョンしても変化させないので、単位元の役割を果たします。つまり、群構造のうちで満たさない可能性があるのは逆元の存在です。考えているトポロジカル欠陥 A に対して、フュージョンによって A を消すようなトポロジカル欠陥が存在しない場合に A や A を含むようなトポロジカル欠陥の集合を非可逆対称性と呼びます。

空間方向にのみ伸びているトポロジカル欠陥は Hilbert 空間に作用する演算子で、Hamiltonian と交換するものと思えます。このトポロジカル欠陥が非可逆対称性であることは、必ずしも**この Hamiltonian と交換する演算子が逆演算子を持たないということではない**ということに注意してください。トポロジカル欠陥が非可逆というのは逆のトポロジカル欠陥が無いということです。演算子に逆があったとしても、それが非局所的で欠陥ですらないようなものの場合には、トポロジカル欠陥は非可逆といいます。

第3章 2次元 Ising 模型

この章では、2次元 Ising 模型を題材にして次の2つのことを説明したいと思います。

- 2次元 Ising 模型の spin flip の \mathbb{Z}_2 対称性をゲージ化することについて説明します。離散対称性のゲージ化とは何か、そして有限アーベル群をゲージ化したときに必ず現れる大域的対称性「双対対称性」とその性質について説明します。
- 非可逆対称性の例として Kramers-Wannier 双対性を説明します。

3.1 2次元 Ising 模型と \mathbb{Z}_2 ゲージ化

3.1.1 2次元 Ising 模型

まず、Ising 模型の作用を書きます。これは前章で導入したものと同じものです。2次元正方格子を周期境界条件で考えます。各サイトに自由度 $a_i = 0, 1$ を置きます。 K を正の定数として分配関数は

$$Z_{\text{Ising}}(K) = \sum_{\{a\}} \exp \left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j} \right) \quad (3.1)$$

とします。

この系には spin flip の大域的対称性があります。

$$a_i \rightarrow a_i + 1 \pmod{2}. \quad (3.2)$$

3.1.2 ゲージ化

Spin flip の \mathbb{Z}_2 の対称性をゲージ化するすることを考えます。

ゲージ場は各リンク $\langle ij \rangle$ に \mathbb{Z}_2 に値を持つ自由度 $b_{ij} = 0, 1$ として導入します。前節では背景ゲージ場として同じものが現れましたが、ここでは動的な自由度として導入します。

ゲージ変換はパラメータを各サイトに割り振られた \mathbb{Z}_2 の元 $\lambda_i = 0, 1$ として、

$$\begin{aligned} b'_{ij} &= b_{ij} + \lambda_i + \lambda_j, \\ a'_i &= a_i + \lambda_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

とします。

(3.1) を変形して、トポロジカルにゲージ化された理論の分配関数を V をサイトの数として

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{2^V} \sum_{\{\alpha\}, \{b\}} \exp \left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}} \right) \prod_{\text{すべてのブラケット } \langle ijkl \rangle} \delta_{b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li}, 0}^{\text{mod } 2} \quad (3.4)$$

と定義します。この分配関数について少し説明します。

まず、先頭についている $\frac{1}{2^V}$ の分母 2^V は、「ゲージ体積」です。ゲージ対称性でつながるような配位は物理的に同じ配位とみなすので、分配関数はその冗長性で割っておく必要があります。

最後についている $\delta^{\text{mod } 2}$ のところについて説明します。まず、この記号は b を整数として

$$\delta_{b,0}^{\text{mod } 2} = \begin{cases} 1, & b = 0 \pmod{2} \\ 0, & b = 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (3.5)$$

と定義します。つまり全てのブラケットについて4辺の b の和が偶数の配位、つまり flat な配位のみ足し合わせるということにしています。このような拘束条件をつけたゲージ化を「トポロジカルなゲージ化」と呼ぶことにします。格子の場合には、離散対称性をゲージ化する場合に必ずこのようにしなければならないということではありません。ゲージ場の作用として別のものを選んで、flat に限らないゲージ場の配位をすべて足し合わせるようなゲージ化も可能です。ここでは後のためにトポロジカルなゲージ化を考えようということです。この講義に出てくる離散対称性のゲージ化は8割くらいがこのトポロジカルなゲージ化です。この講義でも後でトポロジカルではないゲージ理論を考えます。論文に出てくる離散対称性のゲージ理論は9割以上がトポロジカルなゲージ化です。

トポロジカルなゲージ化は非常に特殊なことをやっているように見えますが、実は Wilson のブラケット作用で弱結合極限を考えたものとみなすことができます。

$$\delta_{b,0}^{\text{mod } 2} = \lim_{g \rightarrow 0} \exp \left(\frac{1}{g^2} ((-1)^b - 1) \right) \quad (3.6)$$

という恒等式が成り立ちます。この式の右辺の \exp の中で b としてプラケットのリンク変数を全部足したものを代入したものが Wilson のプラケット作用のプラケットの重みでしたから、式 (3.4) の左辺の $\delta^{\text{mod } 2}$ の積の項は Wilson のプラケット作用で弱結合極限をとったものとみなすことができます。

3.1.3 ゲージ固定

前章で flat な背景ゲージ場の配位は対称性欠陥の配位と同等であることを見ました。今、トポロジカルなゲージ化では、それぞれのゲージ場の配位は flat なので、対称性欠陥の配位とすることができます。つまり、ゲージ化とは、すべての対称性欠陥の配位について足し合わせることです。これを (3.4) の分配関数で実際に見てみたいと思います。

(3.4) では、ゲージ変換でつながっている、物理的には同等な配位を何回も足しています。これを次のようにしてゲージ変換でつながっている対称性は 1 回だけ足すように変形します。こうすると、ゲージ場に関する和の項の数は非常に少なくなりますが、代わりに欠陥がある特別なリンクが出てきて、格子の並進対称性が明白では無くなります。¹⁾

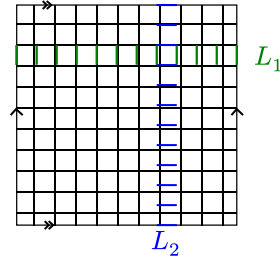


図 3.1 ゲージ固定に用いるリンクの列。

まず、図 3.1 のように縦方向のリンクの横方向の列 L_1 と横方向のリンクの縦方向の列 L_2 を選びます。任意の flat な b の配位において、ゲージ変換で L_1, L_2 以外のリンクの b をすべて 0 にできます。

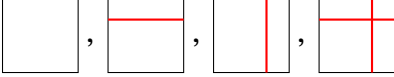
$$b_\ell = 0, \ell \neq L_1, L_2. \quad (3.7)$$

こういうふうにゲージ固定した上で、 L_1 の中にあるリンクについて考えましょう。flat であることと、接している横方向のリンクの b が、 L_2 と交わる場所以外で 0

1) もちろん理論として格子の並進対称性は存在します。並進変換するとゲージ固定条件がこわれますが、ゲージ変換をすることでゲージ固定条件を再び満たすようにできます。これらの変換を組み合わせたものがゲージ固定した後の並進対称性です。

であることから、となり同士の b の値は等しくなります。ですから L_1 に属するすべてのリンクの b の値は等しくなります。同様の考察を L_2 に関しても行うことができます。まとめると、ゲージ固定した後のゲージ場の配位は次の 4 種類になります。

$$\ell_1 \in L_1, \ell_2 \in L_2, \quad (b_{\ell_1}, b_{\ell_2}) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) \quad (3.8)$$

この 4 つの配位はゲージ不変である Wilson ループの値が異なりますから、ゲージ変換では繋がらない配位です。また、 $b_{\ell_1} = 1$ の場合には L_1 のところに 2.3.4 項で考えた spin flip の欠陥が入っている配位です。 $b_{\ell_1} = 0$ の場合には L_1 には欠陥は入っていないということもできますし、自明な欠陥が入っていると言っても良いです。 L_2 の方も同様で、自明な欠陥が入っている場合と、spin flip の欠陥が入っている場合があります。 $(b_{\ell_1}, b_{\ell_2}) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ 場合の欠陥が入った Ising 模型の分配関数を、それぞれ spin flip 欠陥を赤線で描いた絵を用いて  で表すことにします。

次に全体にかかる定数の規格化を求めるために、このゲージ固定をした後で残っているゲージ対称性について考えましょう。残っているゲージ対称性、つまりゲージ固定条件を変えないゲージ変換のパラメーターは次の 2 種類だけです。

$$\lambda_i = 0 \text{ (すべての } i), \quad \lambda_i = 1 \text{ (すべての } i). \quad (3.9)$$

言い換えると、ゲージ体積のうち 2 以外は、このゲージ固定から出てくる冗長性と相殺しています。

これらを合わせると、(3.4) の分配関数は

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2} = \frac{1}{2} \left(\text{empty square} + \text{horizontal red line} + \text{vertical red line} + \text{both red lines} \right) \quad (3.10)$$

となります。

3.2 双対対称性

この節では、Ising 模型を離れて、一般的な 2 次元の場の理論での有限アーベル群の大域的対称性とそのゲージ化について考えます。

G を有限アーベル群、 \mathcal{T} を 2 次元の場の理論で大域的 G 対称性があり、 G はゲージ化可能であるものとします。言い換えると \mathcal{T} の G 対称性には't Hooft アノマリー

は無いものとします。 \mathcal{T} の G 対称性をゲージ化した理論を \mathcal{T}/G と表すことにします。

このとき、次のような命題が成り立ちます。

命題

- (1) \mathcal{T}/G には \hat{G} (Pontryagin 双対) の大域的対称性があります。この \hat{G} 対称性にはアノマリーはありません。
- (2) $\mathcal{T}/G/\hat{G} \cong \mathcal{T}$.

Pontryagin 双対 \hat{G} について説明します。 \hat{G} は集合として

$$\hat{G} = \{G \text{ の既約表現 } \} / (\text{同値}) \quad (3.11)$$

です。アーベル群の既約表現ですから、すべて 1 次元表現です。群の掛け算は表現のテンソル積 \otimes で定義します。テンソル積はまた 1 次元表現になるので、既約表現です。単位元は自明な表現、逆元は双対表現になって \hat{G} は群をなします。別の言い方をすると、 \hat{G} は G 対称性のあり得る電荷の集合です。電荷には足し算の概念があって、それで群になります。

この命題について説明していきます。まず、(1) について説明します。前章で説明したとおり、対称性とは余次元 1 のトポロジカル欠陥で群構造を持つ「対称性欠陥」で表されるのでした。今の場合、**Wilson ループが対称性欠陥になります**。ゲージ理論において Wilson ループはゲージ群 G の表現でラベルされる次元 1 の欠陥です。今は全体の次元が 2 ですから Wilson ループの余次元は 1 になります。また、今はトポロジカルなゲージ化を考えているので、場の強さは 0 であり、Wilson ループは連続的に変形しても値を変えない、つまりトポロジカルになります。さらに、Wilson ループのフュージョンは表現のテンソル積になります。上で見たように、有限アーベル群の既約表現全体 \hat{G} はまたテンソル積でアーベル群になります。こうして、Wilson ループが対称性を表す対称性欠陥であり、対称性の群は \hat{G} ことが分かります。

次に (2) について説明します。簡単のためにトーラスの分配関数を考えます。まず、理論 \mathcal{T} の分配関数を

$$Z_{\mathcal{T}} = \square \quad (3.12)$$

$N := |G|$ として、 \mathcal{T}/G の分配関数は、すべての対称性欠陥の配位を足し上げるこ

とで得られるので

$$Z_{\mathcal{T}/G} = \frac{1}{N} \sum_{a,b \in G} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \end{array} =: \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad (3.13)$$

となります。これを右辺のように黄色い四角で表すことにします。ここから $\mathcal{T}/G/\hat{G}$ の分配関数を考えます。これも Wilson ループの配位について足し合わせて

$$Z_{\mathcal{T}/G/\hat{G}} = \frac{1}{N} \sum_{\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \hat{a} \\ \hat{b} \end{array} \quad (3.14)$$

ここで、 \hat{G} 対称性の対称性欠陥である Wilson ループを青い線で表しました。これに (3.13) を代入して

$$Z_{\mathcal{T}/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^2} \sum_{a,b \in G} \sum_{\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ \hat{a} \\ b \\ \hat{b} \end{array} \quad (3.15)$$

右辺の和の中について考えてみます。これは理論 \mathcal{T} の中で赤線で表される対称性欠陥、言い換えると背景ゲージ場の下での分配関数に、青線で表される Wilson ループをかけたものです。 \hat{a} 表現での G の要素 a の指標（表現行列のトレース。1次元表現なので 1×1 の行列そのもの）を $\chi_{\hat{a}}(a)$ とすると

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ \hat{a} \\ b \\ \hat{b} \end{array} = \chi_{\hat{b}}(a) \chi_{\hat{a}}(b) \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \quad (3.16)$$

となります。ところで指標は

$$\sum_{\hat{a} \in \hat{G}} \chi_{\hat{a}}(a) = N \delta_{a,0} \quad (3.17)$$

という関係式を満たします。これらを用いると (3.15) は

$$Z_{\mathcal{T}/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^2} \sum_{a,b \in G} \sum_{\hat{a}, \hat{b} \in \hat{G}} \chi_{\hat{b}}(a) \chi_{\hat{a}}(b) \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \end{array} = \sum_{a,b \in G} \delta_{a,0} \delta_{b,0} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = Z_{\mathcal{T}} \quad (3.18)$$

となります。

先ほどはトーラスの分配関数を考えましたが、一般の閉じた Riemann 面を考えるとときには計量に関する相殺項に関して少し注意が必要です。まず、特に計量に関する相殺項を入れなかったとすると、その分配関数は

$$Z_{\mathcal{T}/G/\hat{G}} = \frac{1}{N^\chi} Z_{\mathcal{T}} \quad (3.19)$$

となります。ここで χ は Riemann 面 Euler 数で、種数 g や面、辺、頂点の数（それぞれ F, E, V ）と

$$\chi = 2 - 2g = F - E + V \quad (3.20)$$

の関係にあります。トーラスの場合には、たまたま $\chi = 0$ なので、先ほどは考える必要がありませんでした。2回やって元にもどるという関係にしたいときには、次のような局所相殺項を入れてゲージ化を定義する必要があります。

$$Z_{\mathcal{T}/G,\text{new}} = \sqrt{N}^\chi Z_{\mathcal{T}/G}, \text{ いままでの} \cdot \quad (3.21)$$

こうすると、一般の閉じた Riemann 面で

$$Z_{\mathcal{T}/G/\hat{G},\text{new}} = Z_{\mathcal{T},\text{new}} \quad (3.22)$$

となります。この Euler 相殺項については、Kramers-Wannier 双対性を表す非可逆なトポロジカル欠陥を考えるとにも必要になります。この講義では、今後ゲージ化の際には、この相殺項を入れたものを考えることにします。

この節では、アーベル群によるゲージ化のみを考えました。では、(有限の) 非アーベル群によるゲージ化を考えるとどうなるでしょうか。トポロジカルなゲージ化を考えると、場の強さが 0 なのは変わりません。したがって Wilson ループが余次元 1 のトポロジカル欠陥になるのも同じです。フュージョンは表現のテンソル積になるのも同じです。違いは非アーベル群の場合には、次元が 2 以上の既約表現があり、テンソル積の意味で逆が無い場合があるということです。つまり、有限非アーベル群をゲージ化した際の双対対称性（よく $\text{Rep}(G)$ と書かれます）は、トポロジカル欠陥で群構造がない「非可逆対称性」になっています。おそらくこれが非可逆対称性の一番簡単な例です。この例も含め 2 次元の非可逆対称性については [3] に詳しく説明されています。この講義では $\text{Rep}(G)$ はこれ以上説明しません。もう一つの代表的な非可逆対称性の例で高次元にも類似物がある Kramers-Wannier 双対性について詳しく説明します。

3.3 Kramers-Wannier 双対性

この節では、2次元 Ising 模型の Kramers-Wannier 双対性を紹介します。Kramers-Wannier 双対性はよく統計力学の教科書でも紹介されていますが、ここでは後のためにより精密な双対性について述べます。後に、この Kramers-Wannier 双対性に対応する非可逆対称性について述べます。

また、Kramers-Wannier 双対性と Ising 模型の相構造について述べます。

3.3.1 Kramers-Wannier 双対性と、その証明

Kramers-Wannier 双対性

次の恒等式が厳密に成り立ちます。

$$\frac{1}{(\sinh 2K)^{V/2}} Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{(\sinh 2\tilde{K})^{V/2}} Z_{\text{Ising}}(\tilde{K}). \quad (3.23)$$

ここで K と \tilde{K} は

$$\sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1 \quad (3.24)$$

の関係で結びついています。

分配関数の前についている \sinh が入った因子は計量のみによく局所的な項として作用に組み込むことができますから、パラメーターが K のゲージ化した Ising 模型とパラメーターが \tilde{K} の Ising 模型は同じ理論であるというのが、この命題です。

この命題を証明します。

まず、(3.4) を補助的な変数を用いて書き換えます。(3.5) は

$$\delta_{b,0}^{\text{mod } 2} = \frac{1}{2} \sum_{c=0,1} e^{\pi i c b} \quad (3.25)$$

という恒等式を満たすことに注目します。すると各ブラケット p に $c_p = 0, 1$ の補助的な自由度を置いて (3.4) は

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{2^{2V}} \sum_{\{a\}, \{b\}, \{c\}} \exp \left(K \sum_{\langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j + b_{ij}} + \pi i \sum_{\substack{\text{ブラケット} \\ p = \langle ijkl \rangle}} c_p (b_{ij} + b_{jk} + b_{kl} + b_{li}) \right) \quad (3.26)$$

と書くことができます。ここで、プラケットの数は頂点の数と同じであることを用いました。

(3.26) で、ゲージ対称性を用いて、すべてのサイト i で $a_i = 0$ となるようにゲージ固定します。この固定によって 2^V 個のすべてのゲージ体積を相殺します。その後、 $\{b\}$ の和を評価します。各リンク ℓ に対して2つのプラケットが接していることに注目して

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) = \frac{1}{2^V} \sum_{\{c\}} \prod_{\text{リンク } \ell} Z_\ell, \quad (3.27)$$

$$Z_\ell = \sum_{b=0,1} \exp(K(-1)^b + \pi i b(c_p + c_q)) \quad (3.28)$$

(p, q は ℓ に接している2つのプラケット)

と書くことができます。 Z_ℓ の表式では、和をとっているダミーの変数は b_ℓ だったものですが、ダミーの変数ですから単に b と書いています。

$c := c_p + c_q \pmod{2}$ と略記して、 Z_ℓ を変形していきます。

$$\begin{aligned} Z_\ell &= e^K + (-1)^c e^{-K} \\ &= \begin{cases} 2 \cosh K & (c = 0) \\ 2 \sinh K & (c = 1) \end{cases} \\ &= 2 \cosh K (\tanh K)^c \end{aligned} \quad (3.29)$$

という形に書けます。ここで

$$\tanh K =: e^{-2\tilde{K}} \quad (3.30)$$

の式で \tilde{K} を定義します。すると

$$\sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1, \quad (3.31)$$

$$Z_\ell = \sqrt{2 \sinh 2K} e^{\tilde{K}(-1)^c} \quad (3.32)$$

という式が成り立ちます。これらを順に導出していきます。

まず、(3.31) を導出します。(3.30) の両辺の逆数をとったものから、(3.30) を引き算します。すると

$$(\text{右辺}) = e^{2\tilde{K}} - e^{-2\tilde{K}} = 2 \sinh 2\tilde{K}, \quad (3.33)$$

$$(\text{左辺}) = \coth K - \tanh K = \frac{\cosh^2 K - \sinh^2 K}{\cosh K \sinh K} = \frac{2}{\sinh 2K} \quad (3.34)$$

と計算できるので、(3.31) が成り立つことが分かります。

次に、(3.32) を導出します。(3.29) に (3.30) を代入し、 $(-1)^c = 1 - 2c$ に注目して変形します。

$$\begin{aligned} Z_\ell &= 2 \cosh K e^{\tilde{K}(-2c)} = 2 \cosh K e^{-\tilde{K}} e^{\tilde{K}(-1)^c} \\ &= 2 \cosh K \sqrt{\tanh K} e^{\tilde{K}(-1)^c} = \sqrt{2 \sinh 2K} e^{\tilde{K}(-1)^c} \end{aligned} \quad (3.35)$$

と変形できるので (3.32) が成り立つことが分かります。

(3.32) を (3.28) に代入して変形します。元の格子に双対な格子を導入すると ℓ に双対なリンクは双対格子のサイト p, q をつなぐ双対格子のリンク $\langle pq \rangle$ になります。これを踏まえて式変形すると

$$\begin{aligned} Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K) &= \frac{1}{2^V} \sum_{\{c\}} \prod_{\langle pq \rangle} \sqrt{2 \sinh 2K} e^{\tilde{K}(-1)^{c_p+c_q}} = (\sinh 2K)^V \sum_{\{c\}} \exp \left(\sum_{\langle pq \rangle} \tilde{K}(-1)^{c_p+c_q} \right) \\ &= (\sinh 2K)^V Z_{\text{Ising}}(\tilde{K}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

という式を得ます。ここで (3.31) を用いると (3.23) を得ます。また (3.24) は、(3.31) です。■

この Kramers-Wannier 双対性の証明を見てみると、次の重要な事実が分かります。**Kramers-Wannier 双対性の左辺のゲージ化した Ising 模型の格子と右辺の Ising 模型の格子は互いに双対関係にあります。**この事実は、後に Kramers-Wannier 双対性を表すトポロジカル欠陥を考える際に非常に重要な役割を果たします。また、今回見たように、トーラス上で正方格子で考えた場合には、双対の格子は同型になってしまうので分かりにくいですが、一般の格子での Kramers-Wannier 双対性の両辺は格子は互いに双対の（一般に異なる）格子になります。

3.3.2 Ising 模型の相構造

この Kramers-Wannier 双対性を踏まえて、Ising 模型の相構造について考えてみます。

統計力学の授業などで、Ising 模型には相転移があることを聞いたことがあると思います。 K が大きいところ（低温）では、spin flip の対称性が自発的に破れた相になっています。場の量子論の見方言えば、ここでは真空が縮退しています。一方で K が小さいところ（高温）では対称性が回復していて、場の理論の見方では真空は唯一です。この間には相転移が少なくとも一回はあります。

Kramers-Wannier 双対性を用いると、この相転移点を求めることができます。まず大事なことは Ising と Ising/ \mathbb{Z}_2 は、熱力学的な量、例えば自由エネルギー密度は同じです。これを $f(K)$ と書くことにします。Kramers-Wannier 双対性から $f(K) = f(\tilde{K})$ が導かれます。また、相転移点では $f(K)$ が非解析的になっています。 $K = K_c$ で相転移があるとする、 $f(K) = f(\tilde{K})$ ですから、 $K = \tilde{K}_c$ でも非解析的、つまり相転移があることになります。ここから、相転移が一回だけであることを仮定すると、自己双対の値 $K_c = \tilde{K}_c$ となること、つまり (3.24) から $\sinh 2K_c = 1$ 、したがって $K_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ となることが分かります。

自己双対の点 $K = K_c$ では、(3.23) の式は

$$Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}(K_c) = Z_{\text{Ising}}(K) \quad (3.37)$$

となります。つまり、この点では Ising と Ising/ \mathbb{Z}_2 は同じ理論ということになります。後に見るように、この性質から、この点では非可逆対称性があります。

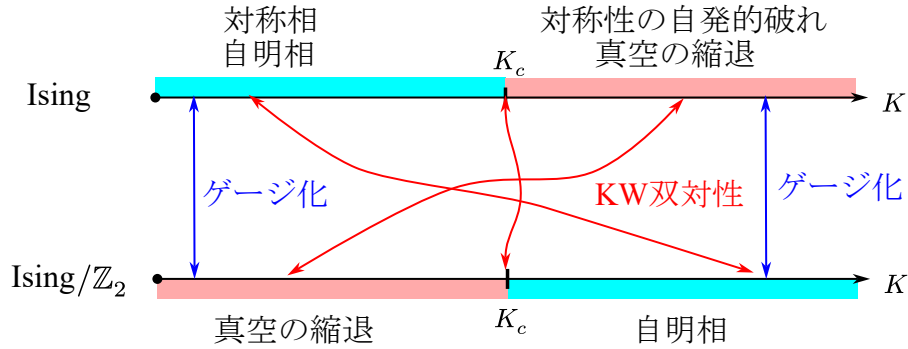


図 3.2

もう少し相構造について見てみましょう。図 3.2 に Ising と Ising/ \mathbb{Z}_2 の相構造とその関係を示しました。Ising では K が大きいところでは対称性の自発的破れがあり、真空の縮退がありました。Kramers-Wannier 双対性から、Ising/ \mathbb{Z}_2 では K が小さいところで自発的対称性の破れがあり、真空の縮退があります。Ising/ \mathbb{Z}_2 では、双対 \mathbb{Z}_2 対称性がありますから、 K が小さいところでこの対称性が自発的に破れています。一方、Ising で K が小さいところでは対称性が保たれている自明な相になっています。Kramers-Wannier 双対性を用いると Ising/ \mathbb{Z}_2 で K が大きいところで自明相になっています。

図 3.2 では、ゲージ化の操作を縦の青い矢印で表しています。例えば K が小さいところでは、Ising は自明相にあり、真空は唯一ですが、これをゲージ化するとゲージ場の自由度を加えることになって、このために真空が縮退します。2つの状態は

空間的な円の Wilson ループの期待値で区別されます。一方、Ising で K が大きいところでは、真空は二重に縮退しています。これをゲージ化すると、2つの真空のうち、ゲージ不変な方だけが生き残るので、唯一の真空をもつ自明な相になります。

3.4 Ising 模型の演算子

ここでは、前節の Kramers-Wannier 双対性の議論を踏まえたうえで、Ising 模型の様々な演算子（欠陥）についてまとめておきます。

まず、その動機について説明します。一つは後に Kramers-Wannier 双対性で演算子がどのように移り合うかを説明するためです。

もう一つの動機は、Lagrangian に出てくる場の複合演算子として書けない演算子の例を与えることです。²⁾一般に場の理論の（局所）演算子には次のようなものがあります。

1. Lagrangian に現れる場。
2. Lagrangian に現れる場の微分やそれらの関数。複合演算子とも呼ばれる。
3. その他。

1. は場の理論の教科書などで最初に出てきますし、みなさん馴染みがあると思います。2. もカレントやエネルギー運動量テンソルなどをはじめとして、場の理論では重要な演算子です。3. は要するに Lagrangian に現れる場の微分や複合演算子として書けない演算子です。まず、1. 2. 3. の違いは記述の違いであって、物理の違いで無いことに注意してください。物理では 3. の演算子も重要になる場面は多数あります。ただ、3. の演算子は分かりにくく、教科書等にあまり出てこないため、馴染みが無い方が多いかもしれません。**Ising 模型の演算子は、Lagrangian に現れる場の微分や複合演算子として書けない例を与えます。**

さて、演算子について説明していきます。ここでは、式 (3.26) に含まれる自由度で書ける様々な演算子について考えます。特に、次の3種類について考えます。

- c_p から作るスピン演算子 (spin operator) $\sigma_p = (-1)^{c_p}$
- b_ℓ から作る Wilson ループ (Wilson loop) 演算子 $\eta(C) = (-1)^{\sum_k b_{\ell_k}}$ 。ただし、 C はリンク ℓ_1, ℓ_2, \dots から作られる閉じたループである。

2) この講義では、「演算子」と「欠陥」はほぼ同じ意味で用いていますが、主に欠陥の方を用いています。これは、欠陥の方が Lagrangian に出てくる場の複合演算子として書けないかもしれないことが強調されると感じたからです。

- a_i から作るスピン演算子。 $\mu_i \sim (-1)^{a_i}$

これらの演算子を作用 (3.26) の中だけで考えるなら、特に問題になることはありません。その演算子の相関関数は通常どおり計算できます。これから考えたいのは上の演算子を、 a, b の和をとってしまったり、 c の和をとってしまったりした後で考えることです。注意してほしいのは、このように、ある和を先にとってしまったとしても、これらの演算子が無くなるわけではありません。作用に出てくる場の関数として書けなくなるだけです。

これらの演算子について順に見ていきます。

3.4.1 スピン演算子

まず、スピン演算子 $\sigma_p = (-1)^{c_p}$ について説明します。これは、これだけでゲージ不変なので純粋な局所演算子 (genuine local operator) です。これは、 a, b を積分してしまったり通常 Ising 模型の記述にした後も、そのスピン演算子として、相転移の秩序変数となる重要な演算子です。

一方で、 c を先に和をとってしまったり、Ising/ \mathbb{Z}_2 (3.4) の記述にした場合はどうでしょうか。 c はもはや Lagrangian の中に現れる場ではないので、 σ_p は **Lagrangian に出てくる場で書けない演算子** になります。では、どう書けるかを考えてみましょう。 $\sigma_p = (-1)^{c_p}$ を挿入してから c について和をとると、(3.4) の拘束を表す $\delta^{\text{mod } 2}$ の因子の中で σ_p を挿入したブラケット p のところだけが、

$$\delta^{\text{mod } 2}_{\sum_{(ij) \in p} b_{ij} + 1, 0} \quad (3.38)$$

となります。つまり、演算子を挿入したところでは、拘束条件がブラケットでの b の和を (0 ではなく) 1 にする、というものになります。

3.4.2 対称性欠陥

次に b から作る Wilson ループ η について詳しく見てみます。3.2 節で見たように、この η はトポロジカルで、対称性欠陥になっています。

η が、スピン演算子 σ を反転する spin flip の演算子になっていることを、詳しく見てみましょう。ブラケット p に演算子 $\sigma_p = (-1)^{c_p}$ を挿入し、それを囲む経路 C をとって $\eta(C)$ を挿入します。 $\eta(C)$ はトポロジカルなので、値を変えずに p のブラケットまで縮めることができます。作用 (3.26) を見ると、この η の挿入は、和を取っている変数の変換 $c'_p = c_p + 1$ で吸収することができます。このとき

$\sigma_p = (-1)^{c_p} = -(-1)^{c'_p}$ となります。したがって、次のような Ward-Takahashi 恒等式が成り立ちます。

$$\circlearrowleft \sigma_p / \eta = \circlearrowleft -\sigma_p. \quad (3.39)$$

これは、 η がスピン演算子 σ を反転する spin flip の対称性欠陥であることを示しています。

a, b の和をとってしてしまった後で η がどのように表現されるか考えましょう。 $\eta(C)$ を挿入した後で 3.3.1 項と同様に a, b の和をとります。すると、 C に含まれるリンクの相互作用には (-1) が余分にかかることになります。つまり

$$\langle \eta(C) \dots \rangle = \frac{1}{Z_{\text{Ising}}} \sum_{\{c\}} \exp \left(\sum_{\text{すべてのリンク } \langle pq \rangle} \tilde{K} (-1)^{c_p + c_q + \delta_{\langle pq \rangle}(C)} \right) \dots \quad (3.40)$$

となります。ここで $\delta_\ell(C)$ はリンク ℓ が C と交わっていれば 1、そうでなければ 0 という記号です。つまり、 C と交わっているリンクは、相互作用が反強磁性に置き換わっています。これは 2.3.4 項で見た spin flip の対称性欠陥そのものです。

3.4.3 無秩序スピン

次に無秩序スピンについて詳しく考えてみます。これは、式 (3.4) の表式でサイト i に置かれた演算子 $(-1)^{a_i}$ です。まず重要なことは $(-1)^{a_i}$ そのものはゲージ不変でないので、統計力学での良い演算子ではありません。これが入った相関関数を考えると、いつでも 0 になってしまいます。

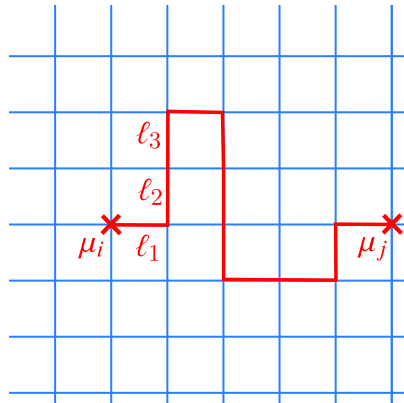


図 3.3 赤い線が η 線演算子で両端の μ_i, μ_j が無秩序スピン演算子である。この形でゲージ不変になっている。

これをゲージ不変にするために η 線演算子 (b Wilson ライン) をくっつけて $\mu_i = (-1)^{a_i + b_{\ell_1} + b_{\ell_2} + \dots}$ を考えます (図 3.3 参照)。ただし、 ℓ_1, ℓ_2, \dots は i に端をもつ経路です。この演算子を $((-1)^{c_p})$ を秩序演算子としてのスピン演算子と言うのに対応して) 無秩序演算子 (disorder operator) とか無秩序スピン (disorder spin) と呼びます。³⁾ 次のようなことに注意する必要があります。

- μ_i は位置 i だけでなく、くっつく Wilson ライン η の経路によっています。ただし、 η はトポロジカルなので、経路の連続変形にはよっていません。一般に、このような演算子を非純正局所演算子 (non-genuine local operator) と呼ぶことがあります。反対の言葉は純正局所演算子 (genuine local operator) で、スピン演算子 σ_p はその例です⁴⁾。
- 端のある Wilson ラインは必ず反対側の端があります。したがって μ_i は必ずペアで現れなければなりません。

a, b の和を取ってしまった後で無秩序スピンのようになるか見てみましょう。スピン演算子がサイトにあるような格子で考えると、 μ はプラケットの中心に配置され、対称性欠陥の端として表されます。別の言い方をすると、プラケット一周してきたときに (周期境界条件ではなく) 半周期境界条件を課するという言い方もできます。

無秩序スピンの名前の由来は次のようなものです。 σ スピン演算子 (秩序スピン演算子) の言葉で秩序相 (spin flip 対称性が自発的に破れている) にあるときは、 μ_i の期待値が 0 になります。正確に言うなら、 μ を挿す 2 点を遠くに離す極限で 2 点関数が 0 になります。これは次のようにして理解することができます。秩序相で K が大きい極限を考えてみます。このとき、すべてのスピンはそろおうとします。しかし、 μ が入っている点のまわりではどこかで反強磁性になっているので、すべてのスピンがそろうことができません。なるべくエネルギーを低くするためには、となりあうスピンが反対の部分 (対称性欠陥直上では同じ部分) が最小になるの

3) 多くの教科書や論文では、秩序演算子、無秩序演算子の区別は記述によるものです。つまり、Lagrangian に出てくる場で書かれているものが秩序演算子、Lagrangian に出てくる場では書かれていないものが無秩序演算子です。これらは互いに非局所的ですが、どちらが純正な局所演算子かは、気にしていないことが多いです。この講義では、記述にかかわらず、純正局所演算子の方を (秩序) スピン演算子、純正ではなく、トポロジカル欠陥がくっついているものを無秩序スピン演算子と呼ぶことにします。

4) この “genuine local operator” という用語は文献 [11] から使われ始めました。

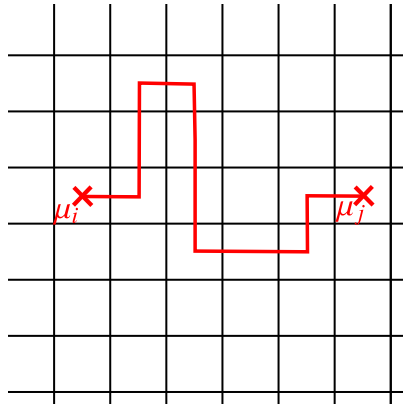


図 3.4 a, b の和をとってしまった後での無秩序演算子の様子。赤で表した経路は対称性欠陥 η を表しています。つまり、赤の線と交わっているリンクは反強磁性になっています。 μ 演算子は η の端のブラケットに配置されています。

が、エネルギーが最も低い配位になります。したがって、ある定数 $m > 0$ があって

$$\langle \mu_i \mu_j \rangle \sim e^{-mL}, \quad (L \text{ は } i, j \text{ の間の距離。}) \quad (3.41)$$

となります。なので $L \rightarrow \infty$ で 2 点関数は 0 になります。

一方、無秩序相にあるときは、 μ が期待値を持つ、正確には μ を刺す 2 点を遠くに離す極限で 2 点関数が 0 でない定数になります。これは次のように理解できます。無秩序相ではスピンは相関が消えます。ですから、 μ 演算子が刺さっている点から離れたところではエネルギーに影響はありません。ただし、 μ が刺さっていることで、その点の近くでエネルギーが変わりますから、その分 0 でない値が出ます。したがって、 μ を挿す 2 点を遠くに離す極限で 2 点関数が 0 でない定数になります。

3.5 KW 欠陥

これまで準備してきたことを踏まえて、ここでは非可逆対称性の一つの例である Kramers-Wannier (KW) 欠陥について紹介します。いろいろな見方があるのですが、ここでは連続理論や高次元への拡張が容易な**半空間ゲージ化 (half-space gauging)**による構成について説明します。

まず、大まかなアイデアについて説明します。一般化対称性とは、何かの方法で作ったトポロジカル欠陥です。最初の方で紹介した対称性の一つの見方①場の変換で作用を不変にするもの、というのがあるとトポロジカル欠陥が作れることを 2

で説明しました。これを絵で表すと

$$\text{変換} \rightarrow D = \text{トポロジカル欠陥} \quad (3.42)$$

となります。これを一般化し、ある領域 D 内で変換だけでなく離散対称性のトポロジカルなゲージ化を含む様々な操作を行うことを考えます。この操作でバルクでは元の理論に戻る場合を考えます。 $K = K_c$ の場合に $Z_{\text{Ising}} = Z_{\text{Ising}/\mathbb{Z}_2}$ でしたから、Ising 模型の場合はゲージ化を含む操作で元に戻る、というのが例です。バルクでは元に戻りますから、一般に境界で欠陥ができます。“うまい境界条件”

でゲージ化を行うと、この欠陥がトポロジカルになる場合があります。絵で書くと

ゲージ化、変換、補助場の導入、積分、…

$$D \Rightarrow \text{トポロジカル欠陥} \quad (3.43)$$

となります。

ここでいくつかの注意をします。

- (3.42) と違って、(3.43) は “=” の関係でないことに注意してください。これは、あくまで（一般に非可逆な）トポロジカル欠陥を見つける方法であって、Ward-Takahashi 恒等式を見つけるには、さらに解析が必要です。
- 離散対称性のトポロジカルなゲージ化であったからといって、すぐに境界に現れる欠陥がトポロジカルになるとは言えません。ゲージ化の際のゲージ場の境界条件の取り方は非常に重要です。

ここでは、 $K = K_c$ の Ising 模型を例にとって、この半空間ゲージ化の方法でトポロジカル欠陥を導出します。まず、格子上で領域 D をどう設定するかについて説明します。これはゲージ場の境界条件と絡んで、重要な部分です。次に半空間ゲージ化の手続きを説明し、バルクがちゃんと元に戻ることを、言い換えると現れる

トポロジカル欠陥がちゃんと余次元1の欠陥になっていることを説明します。その後、この欠陥がトポロジカルであることを説明します。

3.5.1 領域の取り方

領域の取り方について詳しく説明します。 Λ を周期境界条件を課した格子とします。この上で $K = K_c$ の Ising 模型を考えます。分配関数は

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{a\}} \exp \left(K \sum_{\text{リンク} \langle ij \rangle} (-1)^{a_i + a_j} \right) \quad (3.44)$$

です。ここで、 i, j は Λ のサイトで a_i は Λ のサイトに乗っている自由度です。このように Ising 模型でスピンの自由度がサイトにのっている格子をアクティブ格子 (active lattice) と呼ぶことにします。

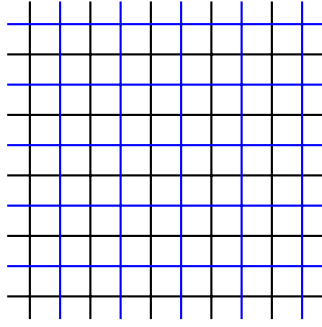


図 3.5 格子 Λ (黒) とその双対格子 $\hat{\Lambda}$ (青)。

さて、 Λ の双対格子である $\hat{\Lambda}$ (図 3.5 参照) を考えましょう。これは Λ のプラケットの中心が $\hat{\Lambda}$ のサイトになるようにとった格子です。今の場合の $\hat{\Lambda}$ のようにプラケットにスピンの自由度がのっているような格子を非アクティブ格子 (inactive lattice) と呼ぶことにします。3.3.1 項で見たとおり、(3.44) を全体でゲージ化すると、 $\hat{\Lambda}$ のサイトにスピンの自由度がのった Ising 模型と等価になります。今 $K = K_c$ を考えているので K は変わらないことに注意してください。標語的に言うなら、Kramers-Wannier 双対性はアクティブ格子と非アクティブ格子を入れ替えます。

半空間ゲージ化をするときの領域を考えるのに $\hat{\Lambda}$ の言葉で言うと便利です。 D は $\hat{\Lambda}$ のサイト、リンク、プラケットの集合で、次のような条件を満たすものとします。

- プラケット $p \in D$ なら、 p を作る 4 つのリンクの集合 ∂p は、 $\partial p \subset D$
- リンク $\ell \in D$ なら、 ℓ の両端のサイト i, j は $i, j \in D$ となります。

端的に言うなら、 D は $\hat{\Lambda}$ の見方で境界が全部含まれるような領域ということになります。

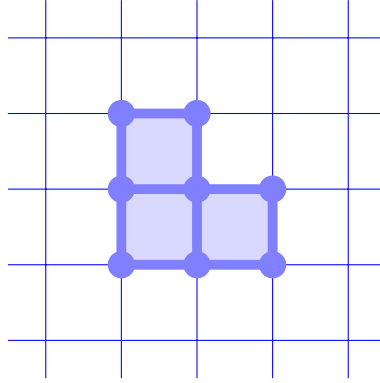


図 3.6 領域 D の取り方の例。 $\hat{\Lambda}$ の格子を青線で表しています。青丸で表したサイト、太い青線で表したリンク、青く塗っているプラケットが D の元です。

逆に Λ の見方では、境界が全部含まれない領域ということになります。後で D の中だけでゲージ化するわけですが、このときに境界にある Λ のリンクにはゲージ場を置かず、また境界にある Λ のサイトにはゲージ変換を置きません。このような境界条件を [6] では Dirichlet 境界条件と呼んでいます。後に見るように、この境界条件で半空間ゲージ化をした場合には、境界に残る欠陥がトポロジカルになります。別の境界条件でゲージ化した場合には、トポロジカルになることは保証されません。


3.5.2 半空間ゲージ化

ここでは、先に述べた条件を満たす D に対して、 D の中だけで spin flip の対称性をゲージ化する手続きを説明します。しばらくは、言葉の使い方としてサイト、リンク、プラケットなどはすべて $\hat{\Lambda}$ のものとしします。

まず、ゲージ化する前からすべてのプラケット i に自由度 $a_i = 0, 1$ がのっていて相互作用がある Ising 模型を考えていたことを思い出してください。

D の要素に関して、次のような変形をします。


1. D の中の各リンク ℓ に対して、ゲージ場 $b_\ell = 0, 1$ を置きます。そしてこのリンクの相互作用を $\exp(K(-1)^{a_i+a_j+b_\ell})$ とします。ただし、 i, j はリンクを挟んでいる 2 つのプラケットです。分配関数の計算では、和 $\sum_{b_\ell=0,1}$ をとります。

2. D の中の各プラケット  i に対してゲージ変換を置きます。ゲージ変換のパラメータを $\lambda_i = 0, 1$ とし、このプラケットに置かれている a_i とこのプラケットに接しているリンク ℓ に置かれているゲージ場は

$$a_i \rightarrow a_i + \lambda_i, \quad b_\ell \rightarrow b_\ell + \lambda_i \quad (3.45)$$

と変換します。 D の取り方から、 i のまわりの4つのリンクはすべて D の要素であるので、 b の自由度が置かれていることに注意してください。

分配関数を考えるときには、ゲージ体積で割る必要があるので、 D の要素であるプラケット i に対して因子 $\frac{1}{2}$ を割り当てます。

3. D の中の各サイト  p には、ゲージ場 b が flat でありなさいという拘束条件を置きます。このサイトにつながる4つのリンクのラベルを 1, 2, 3, 4 とし

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 4 - \bullet - 2 \\ | \\ 3 \end{array} \Rightarrow \delta_{b_1+b_2+b_3+b_4, 0}^{\text{mod } 2} = \sum_{c_p=0,1} \frac{1}{2} (-1)^{c_p(b_1+b_2+b_3+b_4)} \quad (3.46)$$

という因子を割り当てます。 D の中のサイト p につながっている4つのリンクは、必ずしもすべてが D の元であるとは限らないので、 b が割り当てられていない場合もあります。このような場合は、 b が割り当てられていないリンクの b は 0 として拘束条件をかします。

4. (3.21) のあたりで述べた Euler 相殺項を考えます。これは多面体に関する Euler の公式を適用すると D の要素に対して上で述べた因子の他に

$$\begin{array}{ll} \bullet & \Rightarrow \sqrt{2} \\ | & \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \square & \Rightarrow \sqrt{2} \end{array} \quad (3.47)$$

という因子を割り当てれば良いことが分かります。

これらをまとめて、 D で半空間ゲージ化を行った分配関数 Z_D を書いてみます。

$$\begin{aligned}
Z_D = & \underbrace{\sum_{\{a\}}}_{\text{全体にある自由度の和}} \underbrace{\sum_{\{b\}} \sum_{\{c\}}}_{\text{D 内のみの自由度の和}} \underbrace{\prod_{\text{ブラケット} \in D} \sqrt{2} \prod_{\text{リンク} \in D} \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{\text{サイト} \in D} \sqrt{2}}_{\text{Euler 相殺項}} \\
& \times \underbrace{\prod_{\text{ブラケット} \in D} \frac{1}{2}}_{\text{ゲージ体積}} \underbrace{\prod_{\text{サイト} \in D} \frac{1}{2}}_{\text{拘束を補助場で表したときの } 1/2} \\
& \times \prod_{\text{リンク} \notin D} \exp(K(-1)^{a_i+a_j}) \prod_{\text{リンク} \in D} \exp(K(-1)^{a_i+a_j+b_{ij}}) \\
& \times \prod_{\text{サイト } p \in D} (-1)^{c_p \sum_{\ell \in p} b_\ell}. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

これから、この分配関数に関して

- これが、 D の境界に局在する余次元 1 の欠陥であること。
- この欠陥がトポロジカルであること。

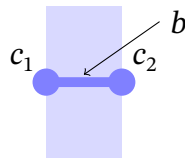
の 2 項目について詳しく見ていきます。

3.5.3 境界に局在すること

まず、境界に局在する欠陥であることを説明します。これには、3.3.1 項でやったのと同様に、 b について先に和を取ることで理解できます。

まず、ゲージ固定として D 内のブラケット i に関して $a_i = 0$ というゲージをとります。このゲージ固定により、(3.48) 中のゲージ体積での割り算はすべて相殺します。

次に b の和をとることを考えます。 D 内のリンクには 2 種類あって、リンクの両側のブラケットが両方 D 内にある場合と、片方だけが D 内にある場合です。前者の場合には、3.3.1 でやったのと全く同じ計算になります。次のように、考えているリンクの変数を b 、リンクの両端のサイトの自由度を c_1, c_2 とします。ブラケットにある a の自由度はすでにゲージ固定で 0 にしていることに注意してください。



(3.49)

この b を含む部分の和は 3.3.1 項と同様に計算して

$$\sum_{b=0,1} e^{K(-1)^b} (-1)^{b(c_1+c_2)} = \sqrt{2} e^{K(-1)^{c_1+c_2}} \quad (3.50)$$

となります。この計算では、今は $K = K_c$ の場合を考えているので $\tilde{K} = K$, $\sinh 2K = 1$ であることに注意してください。(3.50) の右辺の $\sqrt{2}$ は、(3.42) の Euler 相殺項のリンクのところとちょうど相殺します。(3.50) の右辺の残りの部分は、Ising 模型の Boltzmann ウェイトです。つまり、 D 内のバルクでは $\hat{\Lambda}$ をアクティブ格子とする、 $K = K_c$ の Ising 模型になっています。

次に、リンクの両側のプラケットのうち、片方のみ D の内部にある場合を考えます。 D の外にあるプラケットにはゲージ対称性は無いので a の自由度が残っていることに注意します。次のように自由度の名前をつけます。



$$(3.51)$$

この部分の b の和は、先程と同様に

$$\sum_{b=0,1} e^{K(-1)^b} (-1)^{b(c_1+c_2)} = \sqrt{2} e^{K(-1)^{c_1+c_2}} (-1)^{ac_1} (-1)^{ac_2} \quad (3.52)$$

となります。先ほどと同様に、右辺の $\sqrt{2}$ は Euler 相殺項のリンクの部分とキャンセルし、次の因子は Ising 模型の Boltzmann ウェイトになります。それ以外に、 D の境界上で $(-1)^{ac_1} (-1)^{ac_2}$ という因子が残ります。これが本質的に欠陥に与えられるウェイトです。これをまとめて表すために、アクティブサイト（Ising 模型の自由度が割り振られているアクティブ格子のサイト）を \bullet で表すことにします。図 3.7 を見てください。 D の外では、 Λ のサイトがアクティブで、その自由度は a 、 D の中では、 $\hat{\Lambda}$ のサイトがアクティブで、その自由度を c という記号で表してきました。境界では、それらのサイトが隣り合っています。(3.52) の結果は、このように隣り合っているサイトのペアに次のようなウェイトを割り振ればよいということです。



$$= (-1)^{ac} \quad (3.53)$$

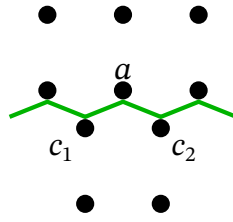


図 3.7 b の和を取った後の KW 欠陥を説明する図。緑の線を境界として、下が D の内側、上が D の外側になる。黒い点は Ising 模型の自由度が割り当てられたアクティブサイト。アクティブ格子は緑の線を境に互いに双対になっている。

さて、残り考えないといけないのは、 D 内の各サイトに割り振られた $\sqrt{2}$ と D 内の各プラケットに割り振られた $1/\sqrt{2}$ です。境界を気にしなければ、サイトとプラケットは対応させることができるので、このウェイトも境界に押し付けることができます。

最後のところは少し誤魔化しています。本当にこのウェイトがちゃんと境界に押し付けられることを示すには、どのように押し付けるかをちゃんと決める必要があります。これの易しいやり方を私は知りません。実際にちゃんとウェイトを決めることができることが、[8] で示されています。

ここまでで、半空間ゲージ化を行うと、その境界に余次元 1 の欠陥が現れることが分かりました。この欠陥を **KW 欠陥** と呼ぶことにします。

3.5.4 トポロジカル性

次に KW 欠陥がトポロジカルであることを示します。

このために D を選んで、その要素のサイト、リンク、プラケットをそれぞれ●、■、□で表します。これまでやってきたように、 D で半空間ゲージ化をやった上で、他にも任意の演算子を挿入し、すべての自由度に関して和をとったものに関して成り立つ恒等式（演算子恒等式）を絵で表すことにします。

次の（ア）、（イ）の演算子恒等式が成り立ちます。

（ア）境界にあるリンク ℓ とそれを含むプラケット p に関して、 p のゲージ変換で $b_\ell = 0$ にします。このゲージ固定で p に割り振られた $1/(\text{ゲージ体積})$ がキャンセルします。また Euler 相殺項は p と ℓ で相殺します。結果として、 D から

p と ℓ を除いたもの D' で半空間ゲージ化したものと同じになります。

(イ)境界にあるサイト i とリンク ℓ で次を満たすものを考える。

(a) i につながる 4 つのリンクで D に属するのは ℓ のみ。

(b) ℓ の両側にあるプラケットは D に属さない。

このとき、サイト i の拘束条件から $b_\ell = 0$ のみが寄与します。また Euler 相殺項は i と ℓ で相殺します。結果として D から i と ℓ を除いた D' で半空間ゲージ化したものと同じになります。

これは Ward-Takahashi 恒等式に当たるものの一種です。

この (ア) と (イ) の恒等式を用いると、値を変えることなく D の境界のトポロジを保ったまま、格子 1 つ分ずつ変形していくことができます。これは、KW 欠陥がトポロジカルであることに他なりません。

この Ward-Takahashi 恒等式の応用例として可縮な円周のトポロジーの KW 欠陥の期待値を求めてみましょう。

最初の等号は、(ア)、(イ) を繰り返すことで得られます。次の等号は、● に割り当てられた Euler 相殺項です。拘束条件の方は自動的に満たされます。

対称性欠陥の場合、2 章で見たように、可縮な円周の期待値は 1 であることが分

かりますから⁵⁾可縮な円周の期待値が $\sqrt{2}$ である KW 欠陥は対称性欠陥ではないということになります。このことから **KW 欠陥は非可逆対称性の欠陥の例であることが分かります。**

3.6 対称性の構造

ここでは、対称性の構造について見ていきます。2次元 Ising 模型の KW 欠陥を含むような非可逆対称性を表すのに便利な数学的構造はフュージョン圏と呼ばれています。フュージョン圏の物理学者向けの分かりやすい解説は [3] にあります。

ここでは、数学的な説明というよりは、場の理論の演算子関係式、あるいは Ward-Takahashi 恒等式として説明したいと思います。また、有限群の対称性もフュージョン圏で表されるので、その場合にどうなるかも説明します。フュージョン圏の主な構造は次の3つです。

- 足し算：相関関数にした後で足し算をします。
- フュージョン則：有限群の対称性の場合には、掛け算の構造になります。
- F 記号：有限群の対称性の場合には、アノマリーの構造になります。

これらについて、有限群の場合と Ising 模型の対称性 (**Ising 圏**と呼ぶことにします) を例にして説明します。

大事なことは、例えば Ising 模型で Ising 圏の対称性の構造が分かったとします。このとき、Ising 圏の対称性の構造のみを用いて導かれた帰結は、**Ising 圏の対称性を持つすべての理論に適用可能**だということです。これは通常の対称性と同様です。

3.6.1 足し算

2次元の次元1のトポロジカル欠陥の種類を圏論の言葉を借りて「対象」(object)と呼ぶことにします。対象と、欠陥が入っている幾何学的な線を考えると具体的なトポロジカル欠陥になります。対象を表す記号を a と書き、2次元時空内の連結な端のない線を C として欠陥を $L_a(C)$ と書くことにします。例えば、群の対称性欠陥の場合、群の元は対象です。

実は、群の対称性の場合でも、群の元だけが対象というわけではありません。

5) 厳密にはアノマリーがあるような対称性の場合、1にならないこともあります。しかし、その場合でも絶対値は1になります。

(群の掛け算以外に) 群の形式的な足し算を考えることができます。

$$L_{a+b}(C) := L_a(C) + L_b(C) \quad (3.57)$$

と定義します (1.3 節で説明した演算子関係式の意味です)。

ここで、注意深い人は次の点が心配になるかもしれません。2.1 節の最初で説明したように、そもそも欠陥は局所的でなければなりません。この欠陥 $L_a(C) + L_b(C)$ は局所的でしょうか？少なくとも局所性は自明ではありません。また、足し算を考えましたが、引き算や複素数倍はどうでしょうか？

実は足し算は次のように考えると局所的であることが分かります。まず、 C 上に系とは結合していないスカラー場の自由度 $n = 1, 2$ を置きます。そして C に沿った微分 $\partial_i n$ が $\partial_i n = 0$ とします。この拘束条件は局所的であることに注意してください。 C は連結としているので n の取りうる値は C 全体で 1 または C 全体で 2 です。したがって、この欠陥を挿入した分配関数は、挿入しないものの 2 倍になります。この欠陥は自明な欠陥を 2 つ足したものと思うことができます。

一般の欠陥の足し算を考える場合には、次のように考えます。上と同様に C 上に $n = 1, 2$ を導入して $\partial_i n = 0$ の拘束条件を考えます。今度はこの n と系を結合させます。 $n = 1$ の部分では、欠陥 L_a となり、 $n = 2$ の場合はとします。 L_a も L_b も局所的な欠陥で、 n も局所場ですからこれは局所的な結合です。したがって、こうして作った欠陥は局所的です。この欠陥の対象を $a + b$ と定義します。分配関数を考えると (3.57) の定義と同じものになります。

上の作り方からは引き算は考えられないことに注意してください。非負の整数以外の複素数倍も局所的にすることはできません。(3.56) で可縮な円周の KW 欠陥の期待値を考えましたが、これに勝手に $1/\sqrt{2}$ をかけて期待値を 1 にすることは、局所性を破ります。したがって、 $\sqrt{2}$ には意味があります。

少し言葉について説明します。他の対象の足し算で書けない対象を**単純対象** (simple object) と言います。単純対象が有限個しかない場合、このフュージョン圏は**有限生成** (finitely generated) であると言います。定義から有限生成のフュージョン圏の対象はいくつかの単純対象の和で書けます。有限群の対称性の場合、単純対象は群の元です。Ising 圏の単純対象は自明対象 1、spin flip η 、KW 欠陥 \mathcal{N} の 3 つです。それぞれ \dots , $\color{red}{|}$, $\color{green}{|}$ で表すことにします。

以降、2 次元では有限生成のフュージョン圏のみ考えます。

3.6.2 フュージョン則

2次元空間内で、2つの1次元のトポロジカル欠陥を間になにも挟まずに並べておいたものはおいたものは、また1次元のトポロジカル欠陥になります。このような操作は**フュージョン** (fusion) と呼ばれ、このルールは**フュージョン則** (fusion rule) とよばれます。有限生成のフュージョン圏の場合には、単純対象2つのフュージョンがどうなるかを定めれば良いことになります。任意の対象は、いくつかの単純対象の和で書かれますから、フュージョン則は

$$\left| \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right| = \sum_{c: \text{単純対象}} N_{ab}^c \left| \begin{array}{c} c \end{array} \right| \quad (3.58)$$

のように表すことができます。ここで、 N_{ab}^c はフュージョン係数 (fusion coefficient) と呼ばれる非負の整数です。この式を単に

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c \quad (3.59)$$

とも表すことにします。

例えば、有限群の対称性の場合、単純対象は群の元で、フュージョン則は a, b を群の元として

$$\left| \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} ab \end{array} \right| \quad (3.60)$$

となります。

Ising 圏のフュージョン則について説明します。まず 1 は自明な欠陥ですから、他の元とフュージョンをとっても、その元を変化させません。また $1, \eta$ は \mathbb{Z}_2 の群をなしますから

$$\eta \times \eta = 1 \quad (3.61)$$

になります。あるいは絵で

$$\left| \begin{array}{c} \text{red} \\ \text{red} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{white} \end{array} \right| \quad (3.62)$$

と書きます。KW 欠陥を含むフュージョン則には非可逆対称性であることが効いています。それは2種類あります。一つは

$$\mathcal{N} \times \eta = \eta \times \mathcal{N} = \mathcal{N}, \quad (\text{絵では}) \quad \left| \begin{array}{c} \text{green} \\ \text{red} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{red} \\ \text{green} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{green} \end{array} \right| \quad (3.63)$$

です。もう一つは

$$\mathcal{N} \times \mathcal{N} = 1 + \eta, \quad (\text{絵では}) \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{green} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{green} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{dotted} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} \quad (3.64)$$

です。これらは非自明ですので導出を半空間ゲージ化の立場から説明します。

まず、 $\mathcal{N} \times \eta$ からです。 η はゲージ化された Ising の見方からは、 b の Wilson ループ（横切るリンクの $(-1)^b$ を挿入する欠陥）になります。このことを強調するために、少し色を変えて、下に W の文字を書いて表すことにします。各サイトに関しての拘束があるので、変形することができることに注意すると

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{green} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{grid with } W \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{grid with } W \\ \hline \end{array} \quad (3.65)$$

という恒等式を得ます。右辺では、 W の横切るリンクには b の自由度は割り当てられていません。言い換えると $W = 1$ に置き換えることができます。したがって

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{green} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{red} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{grid} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{green} \\ \hline \end{array} \quad (3.66)$$

という fusion rule が得られます。

同じ関係を別の見方で導出してみましょう。ゲージ化されていない Ising 模型の見方では、 η は $\hat{\Lambda}$ のリンクをつないでいってできるループ上で定義されていて、そのリンク上で背景ゲージ場 $B = 1$ を入れるという欠陥です。これを強調するために、先ほどとは少し色を変えて、下に B をつけて書くことにします。これがトポロ

ジカルであることを踏まえると

$$\begin{array}{c} \text{red line} \quad \text{green line} \end{array} = \begin{array}{c} \text{purple line} \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{3x3 grid with blue dots} \end{array} = \begin{array}{c} \text{3x3 grid with blue dots} \\ B \end{array} \quad (3.67)$$

という恒等式を得ます。ここで、右辺では、背景ゲージ場 B がある場所は動的なゲージ場 b がある場所に重なっていることに注目します。このことから、動的なゲージ場の再定義 $b' = b + B$ によって、背景ゲージ場を吸収し、消してしまいうことができます。したがって

$$\begin{array}{c} \text{red line} \quad \text{green line} \end{array} = \begin{array}{c} \text{3x3 grid with blue dots} \end{array} = \begin{array}{c} \text{green line} \end{array} \quad (3.68)$$

という fusion rule が得られます。

次に (3.64) の導出を説明します。(3.64) の左辺は2つの \mathcal{N} の間で半空間ゲージ化したとすることができます。さらに 3.5.4 項の (ア)、(イ) の恒等式が成り立つことも考慮すると

$$\begin{array}{c} \text{green line} \quad \text{green line} \end{array} = \begin{array}{c} \text{3x3 grid with blue dots} \end{array} = \begin{array}{c} \text{vertical blue line with dots} \end{array} \quad (3.69)$$

という関係式を得ます。右辺に注目します。それぞれのサイトでの拘束条件を考えると、すべてのリンクに割り当てられた b の値は同じでなければなりません。ですから、 b についての和はすべて $b = 0$ とすべて $b = 1$ になります。これらはそれぞれ

れ、自明な欠陥と η 欠陥と同じになります。また、 D に含まれるサイトの数とリンクの数は同じですから、Euler 相殺項は消えます。したがって

$$\begin{array}{c} | \\ | \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \vdots \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \end{array} \quad (3.70)$$

というフュージョン則を得ます。

Ising 圏のフュージョン則をまとめておきます。

$1, \eta, \mathcal{N}$ の 3 種類の単純対象があり、それらの間に次のフュージョン則がある。

$$1 \times a = a \times 1 = a, \text{ for } \forall a, \quad (3.71)$$

$$\eta \times \eta = 1, \quad (3.72)$$

$$\mathcal{N} \times \eta = \eta \times \mathcal{N} = \mathcal{N}, \quad (3.73)$$

$$\mathcal{N} \times \mathcal{N} = 1 + \eta. \quad (3.74)$$

3.6.3 F 記号

フュージョン圏の中で、もう一つ重要な構造は F 記号 (F symbol) です。F 記号は文脈によって結合子 (associator) や交差関係式 (crossing relation) などとも呼ばれることがあります。ここでは、F 記号を演算子恒等式として説明します⁶⁾。

F 記号について説明するために、まずジャンクション (junction) について説明します。 a, b, c, \dots を単純対象として、 $N_{ab}^c \neq 0$ のときに次のような三叉路の欠陥でト

6) 数学の文脈では、対象に対して \mathbb{C} ベクトル空間が割り当てられ、結合子はそれらの間の線形写像として定義されます。この講義では、これらのベクトル空間の基底を選んで、線形写像を行列で表したときの行列成分を F 記号と呼んでいます。

ポロジカルなものが $N_{ab^c} \neq 0$ 種類存在して、トポロジカルになります。

$$\begin{array}{c} c \\ | \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad b \end{array} \quad (3.75)$$

例えば、群の対称性の場合には、

$$\begin{array}{c} ab \\ | \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad b \end{array} \quad (3.76)$$

というものが存在して、トポロジカルです。この群の対称性のジャンクションは [2.3.3](#) 項でも出てきました。このジャンクションが、どのように系の自由度に結合しているか等は理論の「対称性」だけで決まることではなく、理論の詳細によることです。

一方で、このジャンクションの組み換えに関する次の演算子関係式は、系の詳細によらず、対称性だけで決まります。

$$\begin{array}{c} e \\ | \\ d \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad b \quad c \end{array} = \sum_f (F_{abc}^e)_{df} \begin{array}{c} e \\ | \\ f \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad b \quad c \end{array} \quad (3.77)$$

ここで、 a, b, c, d, e, f は単純対象のラベルです。 $(F_{abc}^e)_{df}$ は複素数で **F 記号** (F-symbol) と呼ばれます。また、関係式 (3.77) は**交差関係式** (crossing relation) と呼ばれます。

F 記号は、移動の仕方の無矛盾性から来る **5 角形恒等式** (pentagon identity) を満たす必要があります。これについて簡単に説明します。まず、(3.77) を何回も適用して得られる、次のような恒等式を考えます (ラベル等、すべて省略します)。

$$\begin{array}{c} | \\ \swarrow \quad \searrow \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} = F \begin{array}{c} | \\ \swarrow \quad \searrow \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} = FF \begin{array}{c} | \\ \swarrow \quad \searrow \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad (3.78)$$

一方、左辺に関して、(3.77) を別の方法で何回も適用して

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = F \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = FF \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = FFF \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad (3.79)$$

という関係式も得ます。(3.78) の右辺と (3.79) の右辺は等しくなければなりませんから

$$FF = FFF \quad (3.80)$$

という形の関係式が成り立ちます。これを 5 角形関係式と呼んでいます。

少し例を述べます。有限群の対称性でアノマリーが無い場合、非自明な ($0 \neq 0$ でない) 交差関係式は

$$\begin{array}{c} abc \\ | \\ ab \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array} = \begin{array}{c} abc \\ | \\ bc \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array} \quad (3.81)$$

となります。2.3.3 項の議論を思い出してもらうと、この恒等式はゲージ不変性の一部でした。この恒等式から、ジャンクションを含むトポロジカル欠陥の配位を考えたとき、分配関数は、そのネットワークの取り方によらないということが出来ます。すべてのトポロジカル欠陥の配位について和を取ることがゲージ化でしたから、この関係式を満たせばゲージ化できることになります。

アノマリーについても少し触れておきます。有限群の対称性の交差関係式は、アノマリーがある場合も含めて

$$\begin{array}{c} abc \\ | \\ ab \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array} = \mathcal{A}(a, b, c) \begin{array}{c} abc \\ | \\ bc \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \quad c \end{array} \quad (3.82)$$

と書けます。ただし、 $\mathcal{A}(a, b, c)$ は 0 でない複素数で、アノマリーを表します。これに関して、次のようなことに注意する必要があります。

- $\mathcal{A}(a, b, c)$ は 5 角形関係式を満たす必要があります。

$$\mathcal{A}(ab, c, d)\mathcal{A}(a, b, cd) = \mathcal{A}(a, b, c)\mathcal{A}(a, bc, d)\mathcal{A}(b, c, d) \quad (3.83)$$

これは教科書にのっているアノマリーの説明の Wess-Zumino 無矛盾条件におおよそ対応します。

- ジャンクションに 0 でない複素数 $C(a, b)$ をかけて再定義することができます。

$$\mathcal{A}'(a, b, c) = C(a, b)C(ab, c)C(a, bc)^{-1}C(b, c)^{-1}\mathcal{A}(a, b, c) \quad (3.84)$$

こうすると $\mathcal{A}(a, b, c)$ は変化しますが、この操作で結びついているアノマリーは同じアノマリーとみなします。例えば、この操作で $\mathcal{A}(a, b, c) = 1$ とできたとすると、アノマリーは無いことになります。これは教科書にのっているアノマリーの説明の局所相殺項を足すことにおおよそ対応します。なお \mathcal{A} が 5 角形恒等式 (3.83) を満たすなら、 \mathcal{A}' も満たすことに注意してください。

離散群を G 、また、 $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし、掛け算でアーベル群とみなします。(3.83) を満たす $\mathcal{A} : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ 全体の集合を (3.84) でつながるものを同一視した集合を $H^3(BG, \mathbb{C}^\times)$ と書いて、3 次の群コホモロジーと呼びます。言い換えると 2 次元の離散群 G の対称性のアノマリーは $H^3(BG, \mathbb{C}^\times)$ で分類できます⁷⁾。

別の例として、Ising 圏の F 記号について説明します。前と同様に Ising 圏の単純対象の 1、spin flip η 、KW 欠陥 \mathcal{N} をそれぞれ \vdots , $|$, $|$ で表すことにします。これらは反対向きにしても同じものなので、ここからは向きを気にしないで絵を書くことにします。また、自明な欠陥はしばしば書くのを省略します。

ジャンクションのうち、自明な欠陥を含むものは、他の 2 つの線が同じものの場合に 1 種類存在します。自明な欠陥を含まないものは、

$$\begin{array}{c} | \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} \quad (3.85)$$

とその足を入れ替えたものになります。

まず、 \vdots と $|$ は、先ほど述べたアノマリーの無い \mathbb{Z}_2 の交差関係式を満たします。新しいのは $|$ を含む交差関係式です。足の入れ替えなどを除くと、非自明なのは次の 4 種類です。

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \end{array} = - \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ | \end{array}, \quad (3.86)$$

7) 実は、いつでも局所相殺項で $|\mathcal{A}(a, b, c)| = 1$ とすることができるので、 $\mathcal{A} : G \times G \times G \rightarrow \text{U}(1)$ に限って考えて良いです。したがって、2 次元のアノマリー进行分类するものは $H^3(BG, \text{U}(1))$ と書いてもよく、多くの文献ではこちらが書かれています。

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array}, \quad (3.87)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \right), \quad (3.88)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \end{array} \right). \quad (3.89)$$

これらについて、半空間ゲージ化の描像から説明していきます。

まずは、半空間ゲージ化の立場からジャンクションがどのように記述できるかと、それがトポロジカルであることを見ます。1つめのジャンクションの見方は、 η をゲージ化していない方において、背景ゲージ場として記述する方法です。

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = B \text{ --- } \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (3.90)$$

これを強調するために、背景ゲージ場の色を変えて、 B というラベルをつけて表しています。この線の上でのみ、背景ゲージ場の値 $B = 1$ にしています。端がありますが、これは D の中に続いていたとしても動的なゲージ場に吸収してしまうことができるために、ここで止めることができます。ただし、終わっているサイトでの拘束条件は、背景ゲージ場も含めて flat であるというものになっていることに注意し

ます。トポロジカルであることは、次の恒等式で説明できます。

1つめの等号は、背景ゲージ場を動的なゲージ場に吸収できることから、 D に含まれるリンクで伸ばしても変わらないことを用いました。2つめの等号は、ゲージ変換で、これは η の欠陥がトポロジカルであることと同じ議論です。このようにしてジャンクションの位置を連続的に変えることができること、つまりトポロジカルであることが示せました。

次に、もう一つ別の方向から η を見てみます。 D の中では、 η はWilsonラインで表されます。これを強調するために、少し色を変えて、 W というラベルを付けて表します。

左端は突き出ている、 $\hat{\Lambda}$ のプラケットの中心で終わっています。これについて少しコメントします。まず、端があるのでゲージ不変かどうか気になります。これは D の外側のプラケットにはゲージ変換が割り当てられていないので、端が D の外にあるかぎり、ゲージ不変になります。このジャンクションがトポロジカルであることは、次のように示せます。

$$(3.93)$$

1 つめの等号は、ゲージ場の無いところでの変形ですので、Wilson ラインの値は変わりません。2 つめの等号は、サイトでの拘束条件から成り立ちます。こうしてジャンクションがトポロジカルであることが分かりました。

準備が整ったので、まず関係式 (3.86) の導出をします。まず、

$$(3.94)$$

のように半空間ゲージ化の立場から実現できます。この右辺を式 (3.93) と同様の変形をすると、次のようになります。

$$(3.95)$$

ここで、1 つめの等号は、左辺に比べて Wilson ラインが背景ゲージ場 $B = 1$ の線を一回余分に横切っているので (-1) がかかります。次の等号は式 (3.93) と同様にサ

イトでの拘束条件から従います。最後の形は、簡略化して書くと

$$- \begin{array}{c} \text{--- } B \text{ ---} \\ \text{--- } W \text{ ---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (3.96)$$

となります。最初と最後を見ると (3.86) になっています。逆に B の線の方を (3.91) と同様に变形しても導出できます。こちらは練習問題に残しておきます。

次に関係式 (3.88) を導出してみます。左辺を半空間ゲージ化の見方で表すと

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (3.97)$$

となります。2つめの等号は 3.5.4 項の (ア) の恒等式を用いました。この右辺のリンク ℓ に関する因子や和を陽に書き下してみます。これは、リンク変数 $b_\ell = 0, 1$ の和と、Euler 相殺項の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ です。

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right). \quad (3.98)$$

この式の右辺は (3.88) の右辺になります。したがって、(3.88) が導出できました。

他の関係式 (3.87), (3.89) も同様に導出できます。これらは練習問題に残しておきます。

3.6.4 他の Ward-Takahashi 恒等式

前項までは、トポロジカル欠陥のみの変形に関する Ward-Takahashi 恒等式を導出しました。ここでは、その他の演算子が絡む Ward-Takahashi 恒等式をいくつか見ていきます。

まず、KW 欠陥とスピン演算子に関して、次の恒等式が成り立ちます。

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = 0 \quad (3.99)$$

これは、まずフュージョン則 (3.63) を使い、次に spin flip に関する Ward-Takahashi 恒等式を用いることで示される、次の恒等式が成り立つことから分かります。

$$\text{circle with } \mathbf{x}_\sigma = \text{circle with } \mathbf{x}_\sigma \text{ and inner red circle} = - \text{circle with } \mathbf{x}_\sigma . \quad (3.100)$$

次に、KW 欠陥がスピン演算子を横切るときに関する次の恒等式が成り立つこのを説明します

$$\left| \mathbf{x}_\sigma \right| = \left| \mathbf{x}_\mu \right| . \quad (3.101)$$

この式の左辺を半空間ゲージ化の見方で次のように表せます。

$$\left| \mathbf{x}_\sigma \right| = \text{3x3 grid with } \times \text{ in center} . \quad (3.102)$$

ここで右辺の×の位置にスピン演算子が入っています。このサイトでは、入ってくる4つのリンクの b の和が (0ではなく) 1 という拘束条件がかされているというのが、スピン演算子でした。これを次のように変形します。

$$\text{3x3 grid with } \times \text{ in center} = \text{3x3 grid with } \times \text{ on left edge} = \text{3x3 grid with } \times \text{ on right edge} \quad (3.103)$$

最初の等号は 3.5.4 項の (ア)、(イ) の変形を次々に適用して得られます。次に×のサイトでの拘束条件を考えるとこれにつながっているリンク ℓ の b_ℓ は、1しか取りません。つまり、これは spin flip の欠陥が入っているのと同じです。Euler 相殺項も考慮して、2つめの等号が得られます。右辺は、(3.101) の右辺と同じです。

最後に以前に導いた次の恒等式をもう一度書いておきます。

$$\bigcirc = \sqrt{2}. \quad (3.104)$$

この量は KW 欠陥の**量子次元** (quantum dimension) と呼ばれます。これは、交差関係式 (3.88), (3.89) を用いることでも導出できます。

3.7 応用

さて、ここまで非可逆対称性の例として $K = K_c$ の Ising 模型にある Ising 圏について見てきました。繰り返しになりますが、対称性の良いところは、対称性があるということだけから、理論の詳細を知ることなしに情報が得られるということです。ここでは、Ising 圏の対称性がある理論に関して成り立つ次の定理を示します [4]。

定理

Ising 圏の対称性を持つ理論は 0 温度で「自明なギャップあり相」ではない。

ここで**自明なギャップあり相** (trivially gapped phase) とは、ギャップがあって、任意の空間のトポロジーでこの場の理論を考えたときに真空（基底状態）が唯一であることです。2次元の場合は空間が S^1 の場合を考えれば十分です。

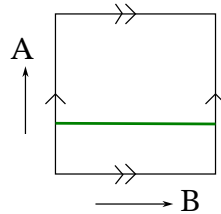


図 3.8 トーラスに KW 欠陥が入った系。左辺と右辺、上辺と下辺がそれぞれ同一視されている。KW 欠陥を緑色で表している。

定理を証明します。背理法を用います。ギャップありで真空が唯一であると仮定します。必要なら宇宙定数を付け加えて、真空のエネルギーを 0 とします。ギャップに比べて十分大きいトーラスを考えて、図 3.8 のように KW 欠陥が入った分配関数を考えます。まず図の A の方向を Euclid 化時間と考えて、演算子形式で考えます。このとき KW 欠陥は Hilbert 空間に作用する演算子となるので、この演算子を

$\widehat{\mathcal{N}}$ と書きます。真空を $|0\rangle$ で表します。温度はギャップに比べて十分小さいので、分配関数に寄与するのは真空のみです。したがって分配関数は

$$Z = \text{Tr} \widehat{\mathcal{N}} e^{-\beta \hat{H}} = \langle 0 | \widehat{\mathcal{N}} | 0 \rangle = \sqrt{2} \quad (3.105)$$

となります。ここで

$$\widehat{\mathcal{N}} |0\rangle = \sqrt{2} |0\rangle \quad (3.106)$$

を用いました。これは、図 3.9 のように考えると理解できます。

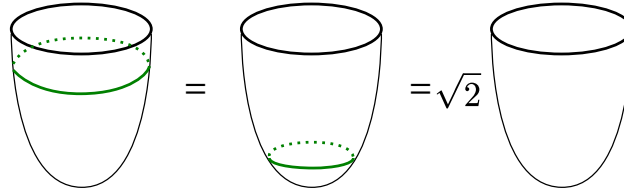


図 3.9 真空中に KW 欠陥の演算子がどう作用するかを表した図。半球のトポロジーを持ち、十分大きな Euclid 化時空中での経路積分を考えている。上の線は境界で状態を表しているが、十分大きいので、真空のみがのこる。左辺では、真空中に KW 欠陥が作用した状態になっている。ギャップありで真空が唯一なので、真空の定数倍になる。トポロジカルなので変形して、下の方に持ってくることで量子次元で置き換えることができるので、この定数は $\sqrt{2}$ であることが分かる。

次に図 3.8 の分配関数を B の方を Euclid 時間と思って演算子形式で考えます。今度は空間内の 1 点にトポロジカル欠陥があるような系の十分低い温度での分配関数になります。この系の Hamiltonian を H_B 、エネルギー 0 の状態の Hilbert 空間を V とすると

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H_B} = \dim V \quad (3.107)$$

となります。つまり Z は非負の整数になりますから、これは (3.105) に矛盾します。

■

Ising 圏の場合、 \mathbb{Z}_2 の対称性を含むので、もしかしたら、この \mathbb{Z}_2 の対称性が本質的な役割を果たしていて縮退していると考えられるかもしれません。ですので、別の非可逆対称性で、群の対称性は一切含んでいないものを紹介します。これは Fibonacci 圏と呼ばれるもので、その単純対象は $1, F$ の 2 種類のみです。フュージョン則は

$$F \times F = 1 + F \quad (3.108)$$

となります。Fibonacci 圏の対称性があるとき、上と同じ議論をしてみると、 $\hat{F}^2 = 1 + \hat{F}$ の関係が成り立ちますから、 \hat{F} の固有値は $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となり、やはり非負の整数ではないので、自明にギャップあり相でないことが分かります。これは、従来の対称性が全く無いのに真空の縮退があるという結果を表していて、非可逆対称性が本質的に重要な役割を果たしています。具体例の一つは Zamolodchikov [12] によって調べられたもので、tricritical Ising CFT を relevant 変形したものです。これには Fibonacci 圏の対称性は残っていますが、ギャップがある系です。[12] では可積分性を用いて理論を解くことにより、真空が縮退していることが分かったのですが、[4] では、非可逆対称性の議論だけで、真空が縮退しなければならないことが説明できました。

3.8 ゼロ温度での相構造*

相構造に関して用語がいくつか出てくるので、説明します。考えている場の理論を有限体積の空間（時空ではない）の上で考えます。この空間の体積 V は理論にあるスケールよりも十分大きく、曲率は十分小さいとします。このとき、Hamiltonian \hat{H} が決まります。 \hat{H} のスペクトルの基底状態付近の定性的な性質によって、いくつかの言葉を定義します。

まず、 \hat{H} は**離散スペクトルを持つことを仮定します**。つまり、 $\forall \Lambda \in \mathbb{R}$ に対して Λ より小さい固有値は有限個で、それぞれの縮退度も有限個です。これは通常考えられるような健全な場の理論で成り立つと信じられています。例えば、これが成り立たないとする、あるエネルギー以下の状態が無限個あることになり、有限温度の分配関数は定義されないことになります⁸⁾。

まず、大きく分けてギャップありとギャップなしの分類があります。ギャップなし相は次のようなものです。

8) 離散スペクトルを持つことは有限温度の分配関数が存在することの必要条件であって、十分条件ではありません。

ギャップなし相

空間の計量をスケール倍を除いて固定します。 $\forall m > 0, \forall N \in \mathbb{Z}$ に対して $\exists V_0$ が存在し、体積 V が、 $V > V_0$ を満たすとき、エネルギー固有値 E が $E - E_0 < m$ を満たす状態数が N 個以上ある。ただし、 E_0 は基底状態のエネルギーである。

少し説明します。一般的に体積を大きくしていくと状態間隔は詰まっていきます。基底状態付近を見たときに体積を大きくするといくらでも密になるというのがギャップなし相です。粒子描像があるような場の理論の場合は質量の無い粒子がある場合がギャップなし、すべての粒子に質量がある場合がギャップありです。

ギャップありの場合をさらに分類します。ギャップありということは、体積を大きくしたときに、エネルギーがいくらでも基底状態に近づく状態の個数が有限個ということになります。この有限個の状態を「真空」と呼ぶことにします。この言葉を用いて自明なギャップあり相を定義します。

自明なギャップあり相

ギャップあり相であって、任意の空間のトポロジーで真空が唯一である。

ギャップありだが自明でないものは、空間のトポロジーによって真空が複数個あるものです。例えば、離散対称性が自発的に破れた相はこれにあたります。また「トポロジカル秩序相」と呼ばれるものもこれにあたります。

少し余談ですが、自明なギャップあり相はさらに分類できて、対称性に守られたトポロジカル相 (Symmetry Protected Topological Phase)(SPT 相) と本当に自明な相⁹⁾ に分類することもできそうです。これは Hamiltonian のスペクトルだけでは区別がつかず、対称性に対する背景ゲージ場を導入したときの分配関数の位相によって区別できます。

9) 正しい言葉使いかどうかよくわかりません。

第 4 章 高次形式対称性

これまでは主に 2 次元の一般化対称性について見てきましたが、これから徐々に高次元の一般化対称性について見ていくことにします。まずは、高次元での高次形式対称性と呼ばれるクラスの一般化対称性について見ていきます。

4.1 高次形式対称性の定義

まず p 形式対称性を定義します。群 G があって、 $g \in G$ と時空内の余次元 $p + 1$ の向きのついた面 M があったときに M に局在したトポロジカル欠陥 $U_g(M)$ が存在して、次の条件を満たすとき、これを p 形式対称性と呼びます。

1. フュージョン則は群の積になります。

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ U_g \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ U_h \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ U_{gh} \end{array} \quad (4.1)$$

2. 単位元、逆元も群の構造に従います。つまり

$$U_1(M) = 1, \quad U_{g^{-1}}(M) = U_g(-M) \quad (4.2)$$

となります。

この言葉遣いでは 0 形式対称性は普通の対称性です。 $p > 0$ のとき p 形式対称性は高次形式対称性と呼ばれます。高次形式対称性の場合には、トポロジカルな変形でフュージョンの順番を入れ替えることができるので、群 G はアーベル群になります。

次に、 p 形式対称性の欠陥（演算子）への作用について見ていきましょう。一般に p 形式対称性は p 次元の欠陥に自然に作用します。例えば普通の対称性は 0 形式対称性ですから、0 次元の欠陥である局所演算子に自然に作用します。もう少し正確に述べます。 C を次元 p の曲面として $W_a(C)$ を C に局在した次元 p の（トポロジカルとは限らない）欠陥とします。ここで a はラベルです。余次元 $p + 1$ の曲

面 M を C に絡み数 1 で絡んでいる曲面として $U_g(M)$ は $W_a(C)$ に次のように作用します。

$$\begin{array}{c} \text{[Diagram: A red loop labeled } U_g \text{ encircling a vertical line labeled } W_a(C) \text{]} \end{array} = \sum_b R^b_a(g) \begin{array}{c} \text{[Diagram: A vertical line labeled } W_b(C) \text{]} \end{array} \quad (4.3)$$

ここで $R^b_a(g)$ は G の表現行列です。高次形式対称性の場合には G はアーベル群でしたから、既約表現は 1 次元です。つまり、 $R^b_a(g) = (\text{位相})\delta^b_a$ となる基底をとることができます。

いくつかコメントをします。

- 高次形式対称性の最も代表的な例はゲージ理論の中心対称性です。これは次の節で格子ゲージ理論の場合に詳しく見ていきます。
- 実は高次形式対称性は様々な場面で知られていました。例えば弦理論において弦やブレーンが電荷を持つゲージ対称性は高次形式対称性です。格子ゲージ理論の中心対称性も閉じ込めと非閉じ込めを区別する対称性として格子ゲージ理論の文脈で知られていました。ただ、大域的高次形式を局所的なトポロジカル欠陥として理解し、様々な場の理論への応用への道を切り開いたのが [2] です。

4.2 格子ゲージ理論の中心対称性

ここでは高次形式対称性の例としてゲージ理論の中心対称性を紹介します。これは格子ゲージ理論の見方からすると対称性の見方①（変換で作用を不変にするもの）でも理解できるので、まずはそれを説明します。

4.2.1 格子ゲージ理論

格子ゲージ理論はすでに出てきましたが、ここで改めて説明します。ここでは問題を具体的にするためにゲージ群が $SU(N)$ の場合を考えますが、別のコンパクト群の場合でも同様に格子ゲージ理論を構成することができます。注意することは、格子ゲージ理論の場合には Lie 代数ではなくて群をそのまま考えることです。 d 次元の超立方格子を考えます。ゲージ群は各リンク $\langle ij \rangle$ に群の元 $U_{ij} \in SU(N)$ を割り当てます。向きを反対にした場合の記号の使い方として $U_{ji} = U_{ij}^{-1}$ とします。分配

関数は

$$Z = \int \prod_{\langle ij \rangle: \text{すべてのリンク}} dU_{ij} \exp(-S[U_{ij}]),$$

$$S[U] = -K \sum_{\langle ijkl \rangle: \text{すべてのプラケット}} [\text{Tr}(U_{ij}U_{jk}U_{kl}U_{li}) + (\text{複素共役})] \quad (4.4)$$

と書けます。ここで K は定数で、ゲージ結合定数 g_{YM} と $K \sim 1/g_{\text{YM}}^2$ という形で関係しています。また積分 $\int dU_{ij}$ は Haar 測度と呼ばれる積分測度で、群の元をかける作用で不変です。

格子ゲージ理論のゲージ対称性は次のように記述されます。ゲージ変換のパラメータは各頂点に割り当てられたゲージ群の元 $g_i \in \text{SU}(N)$ です。ゲージ変換はリンクに次のように作用します。

$$U'_{ij} = g_i U_{ij} g_j^{-1}. \quad (4.5)$$

Haar 測度と作用 (4.4) はこの変換で不変です。

4.2.2 格子ゲージ理論の中心対称性

格子ゲージ理論の中心対称性を説明するために少し群についての準備をします。 $\text{SU}(N)$ の元の中で単位行列に比例するような元を考えます。例えば $\omega = \exp(2\pi i/N)$ として $\omega \mathbf{1}$ は $\text{SU}(N)$ の元です。このような元をすべて集めてきた集合

$$\mathcal{Z} = \{\omega^k \mathbf{1} | k = 0, 1, \dots, N-1\} \subset \text{SU}(N) \quad (4.6)$$

は $\text{SU}(N)$ のすべての元を可換な最大の部分群です¹⁾。このような部分群を中心と呼びます。 \mathcal{Z} は群として \mathbb{Z}_N と同型です。

次に中心対称性を記述します。ここでは 2.3 節で説明したのと同様のやり方で説明します。図 4.1 のように、立方格子の時空の中で余次元 1 の向きのついた面 M を考えます。 M はサイトを通らないことにします。 M は境界を持っていて、その境界を $\Sigma = \partial M$ とします。 M は余次元 1 でリンクを横切っていて、 Σ は余次元 2 でプラケットの中を繋いでいっていることに注意してください。

この上で次のような積分変数の変換をします。簡単のために中心 \mathcal{Z} の元 ω に注

1) $\text{SU}(N)$ のすべての元と可換な元は単位行列に比例することは、Schur の補題から分かります。

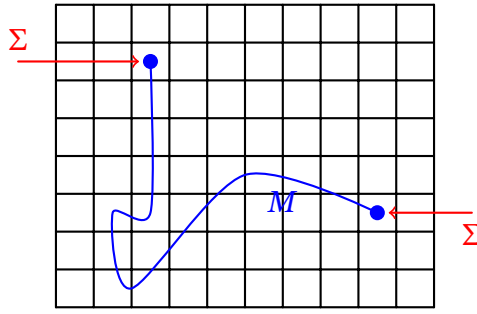


図 4.1 面 M とその境界 Σ

目します。

$$U'_{ij} = \begin{cases} U_{ij} & \langle ij \rangle \text{ が } \Sigma \text{ を横切らない,} \\ \omega U_{ij} & \langle ij \rangle \text{ が } \Sigma \text{ 正の方向に横切る. } i \rightarrow j \\ \omega^{-1} U_{ij} & \langle ij \rangle \text{ が } \Sigma \text{ 負の方向に横切る. } i \leftarrow j \end{cases} \quad (4.7)$$

複数回横切っている場合には、それらの操作をすべて行います。

この変換は次の性質を持ちます。まず、この変換は群の元をかけているだけなので、Haar 測度は不変です。次に作用を考えます。作用は不変ではありませんが、どれくらい変化するかを考えます。作用はブラケットの和ですから、一つ一つのブラケットについて考えます。

- M と交わらないようなブラケットは変化しません。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \leftarrow & \leftarrow \\ \hline \downarrow & \downarrow \\ \hline \rightarrow & \rightarrow \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \leftarrow & \leftarrow \\ \hline \downarrow & \downarrow \\ \hline \rightarrow & \rightarrow \\ \hline \end{array} \quad (4.8)$$

- M と Σ 以外のところで交わるブラケットを考えます。この場合、正の方向に交わるのと負の方向に交わるのが同じ回数だけあるので、結果として作用は変化しません。

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \leftarrow & \leftarrow \\ \hline \downarrow & \downarrow \\ \hline \rightarrow & \rightarrow \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \leftarrow & \leftarrow \\ \hline \downarrow & \downarrow \\ \hline \rightarrow & \rightarrow \\ \hline \end{array} \quad (4.9)$$

- Σ がブラケットを貫いている場合、 M と 1 回だけ交わるということがありえま

す。この場合、実際にプラケットは変化します。



$$(4.10)$$

まとめると、 $S(U')$ と $S(U)$ は Σ 上のみで異なります。つまり、 Σ に局在した欠陥が存在します。作り方からこの欠陥はトポロジカルになります。これを $V_{\omega^{-1}}(\Sigma)$ と書くことにします。同様にして $V_{\omega^n}(\Sigma)$ も定義できます。これらは $SU(N)$ の中心 z の構造を持っています。したがって、1 形式対称性の公理をすべて満たすので、1 形式対称性になっています。特にこの例の対称性は**中心対称性**と呼ばれます。

この中心対称性は **Wilson ループ** に作用します。まず、Wilson ループとは次のような演算子です。 C をリンクを繋いでいってできる向きのついた閉曲線とします。 C 上のサイトを順に $i_0, i_1, \dots, i_K = i_0$ として、基本表現の Wilson ループ $W_{\square}(C)$ を

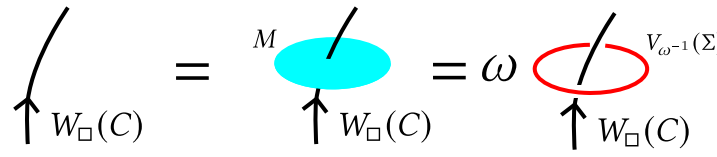
$$W_{\square}(C) = \text{Tr}(U_{i_0 i_1} U_{i_1 i_2} \cdots U_{i_{K-1} i_K}) \quad (4.11)$$

と定義します。一般に $SU(N)$ の表現 ρ に対して、Wilson ループ $W_{\rho}(C)$ は

$$W_{\rho}(C) = \text{Tr}(\rho(U_{i_0 i_1} U_{i_1 i_2} \cdots U_{i_{K-1} i_K})) \quad (4.12)$$

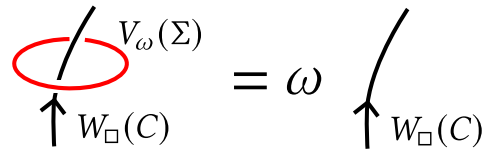
と定義します。Wilson ループはゲージ不変な演算子です。

中心対称性の Wilson ループへの作用を見るには、次のようにします。Wilson ループ $W_{\square}(C)$ が存在する場合に、 M として C と 1 回だけ正の向きで交わる余次元 1 の面をとり、先程の変換を行います。



$$(4.13)$$

整理すると次のような恒等式が得られます。



$$(4.14)$$

これは、中心対称性の Ward-Takahashi 恒等式と呼ぶべきものです。一般の Wilson ループ $W_{\rho}(C)$ に対しては、Ward-Takahashi 恒等式は次のようになります。既約表

現 ρ は基本表現 ℓ 個のテンソル積で得られるとします。

$$\underbrace{\square \otimes \square \otimes \cdots \otimes \square}_{\ell} = \rho \oplus \dots \quad (4.15)$$

このとき、 $\ell \bmod N$ を ρ の N -ality と呼びます。別の言い方をすると、 ρ を Young 図で表したときの箱の数を $\bmod N$ で考えたものが N -ality です。 ρ の N -ality を ℓ として、Ward-Takahashi 恒等式は

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow \\ \uparrow W_\rho(C) \end{array} \text{---} V_{\omega^k(\Sigma)} = \omega^{k\ell} \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow \\ \uparrow W_\rho(C) \end{array} \quad (4.16)$$

と書けます。

4.3 背景ゲージ場その1

2.3.3 節で見たように、普通の対称性の場合には対称性のトポロジカル欠陥を考えることと、flat な背景ゲージ場を考えることは同じことでした。高次形式対称性の場合も同様に、トポロジカル欠陥を考えることと、背景ゲージ場を考えることは同じことです。高次形式対称性の場合にも背景ゲージ場の配位としてトポロジカル欠陥を考えることは有用です。この節では格子の場合に 1 形式対称性の背景ゲージ場を考えます。

具体的にするために、格子で $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 対称性を考えます。この場合、各プラケット $\langle ijkl \rangle$ に $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ の元 B_{ijkl} を割り当てます。これを \mathbb{Z}_N 2 形式ゲージ場と呼びます。

\mathbb{Z}_N 2 形式ゲージ場に対するゲージ変換は次のようにします。ゲージ変換のパラメーターは各リンク $\langle ij \rangle$ に割り当てられた \mathbb{Z}_N の元 Λ_{ij} 、つまり普通の \mathbb{Z}_N ゲージ場です。ゲージ変換は

$$B'_{ijkl} = B_{ijkl} + \delta\Lambda_{ijkl}, \quad (4.17)$$

$$\delta\Lambda_{ijkl} := \Lambda_{ij} + \Lambda_{jk} + \Lambda_{kl} + \Lambda_{li} \quad (4.18)$$

となります。

2 形式ゲージ場 B_{ijkl} に対する場の強さ δB は、各立方体 c に割り当てられた \mathbb{Z}_N

の元で、次のように定義します。

$$\delta B_c = \sum_{p: \text{立方体の表面の各プラケット}} B_p \quad (4.19)$$

とします。ただし、 p の向きは立方体の外側から見て反時計回りになるようにします。このように定義すると、 δB_c はゲージ不変、つまり $\delta \delta \Lambda_c = 0$ となります。これは、立方体の表面の各リンクは2つのプラケットに共有されていて、それらの相対的な向きが逆になっているため、各リンクからの寄与が打ち消しあうからです。

普通の対称性の場合と同様にすべての c で場の強さが $\delta B_c = 0$ となるようなものを flat な背景ゲージ場と呼びます。flat な背景ゲージ場はゲージ変換をすることで局所的に $B = 0$ にすることができます。このゲージ変換を繰り返して $B = 0$ の領域を広げていくと、 $B \neq 0$ の部分は余次元2の部分（とそのジャンクションなど）に限られます。このような $B \neq 0$ の部分がトポロジカル欠陥となります。

次に、この2形式ゲージ場 B と格子ゲージ理論の結合を考えます。この結合を表す作用は(4.4)に B を結合させることで、次のように与えられます。

$$S(U, B) = -K \sum_{\langle ijkl \rangle} [\text{Tr}(U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li}) \exp(2\pi i B_{ijkl}/N) + (\text{複素共役})] \quad (4.20)$$

とします。この作用は次のようにゲージ対称性を保ちます。 B のゲージ変換は(4.18)です。リンク変数 U のゲージ変換は

$$U'_{ij} = U_{ij} \exp(-2\pi i \Lambda_{ij}/N) \quad (4.21)$$

とします。この変換で作用(4.20)は不変であることが分かります。また、中心対称性のトポロジカル欠陥を発見するためにやってみた変換(4.7)は、ここで見た(4.21)と同じものであることが分かるでしょう。ここからも中心対称性のトポロジカル欠陥の配位が2形式背景ゲージ場の配位と同じであることが分かります。

ここまでは背景ゲージ場として考えてきましたが、1形式対称性のゲージ化についても少しだけコメントします。普通の対称性の場合と同じように B のすべての配位について足し合わせることを1形式対称性の「ゲージ化」と呼びます。 $SU(N)$ ゲージ理論の中心対称性をゲージ化すると $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ のゲージ理論が得られます。

4.4 背景ゲージ場その2：単体コホモロジー

ここまでは、格子ゲージ理論での中心対称性を例として高次形式対称性を考えてきました。ただ、一般の曲がった空間などを考えるときに立方格子で格子化できる

とは限りません。ここでは、もう少し広い範囲の空間で考えることができるように、**単体コホモロジー (simplicial cohomology)** というアイデアを導入します。

大まかなアイデアは次のようなものです。flat なゲージ場は局所的に 0 にできますから、0 の領域を広げていくことにより空間をボールと同じトポロジーを持つ胞に分けることができます。この分割の双対を考えることで、空間を単体に分割することができます。単体は 0 次元の点、1 次元の線分、2 次元の三角形、3 次元の四面体などを一般化したものです。このような単体の分割を**単体分割**と呼びます。

格子ゲージ理論を考えるとときには空間を立方体に分割しましたが、単体分割はこれを立方体の代わりに単体にしたようなものです。今考えたいものはトポロジカルなもので、距離などにはよらないものです。ですから長さは考えなくて良いですし、荒い分割でも問題ありません。このような状況では立方体の格子よりも単体の方が柔軟で応用も効きます。ここでは、単体分割を用いて高次形式対称性を記述することを考えます。

微分形式や de Rham コホモロジーをご存知の方は、それらと似ているところや異なるところに注目してもらおうと理解が進むと思います。

この節の内容について、さらに詳しいことを知りたい場合には、[13] を参照してください。物理学者向けのもっとコンパクトな説明としては [14] の Appendix が参考になります。

4.4.1 チェイン

言葉を導入していきます。 X を向きのついた閉多様体とし、この単体分割を K とします。この頂点に通し番号 $0, 1, 2, \dots$ をふります。この単体分割や通し番号は人為的ですが、この人為的なものによるものか、よらないものかを考えることは重要です。このあたり、ゲージ理論のゲージ固定に似ていますね。

K 中の単体をそれに含まれる頂点を用いて表します。例えば頂点 (0 単体) はその頂点の番号 i_0 を用いて $\langle i_0 \rangle$ 、2 つの頂点 i_0, i_1 ($i_0 < i_1$) をつなぐ線分 (1 単体) は $\langle i_0 i_1 \rangle$ 、3 つの頂点 i_0, i_1, i_2 ($i_0 < i_1 < i_2$) をつなぐ三角形 (2 単体) は $\langle i_0 i_1 i_2 \rangle$ と表します。一般に p 次元の単体は p 単体と呼ばれます。 $p+1$ 個の頂点 i_0, i_1, \dots, i_p ($i_0 < i_1 < \dots < i_p$) からなる p 単体を $\langle i_0, i_1, \dots, i_p \rangle$ と表します。頂点の順番を変えるとどうなるかを考えるとややこしくなるので、**必ず小さい順に並べることにします**。以下では、 $\langle i_0, i_1, \dots, i_p \rangle$ と添字を書くのが面倒なので $\langle 0 \dots p \rangle$ の場合を考えても一般性を失わないことを用いて、添字を書く量を減らします。

$C_p(K, \mathbb{Z})$ を K 中の p 単体の形式的な和や差をとったものとします。つまり、

$C_p(K, \mathbb{Z})$ は次のように定義されます。

$$C_p(K, \mathbb{Z}) = \left\{ \sum_{\Delta: K \text{ の } p \text{ 単体}} g_{\Delta} \Delta, \quad g_{\Delta} \in \mathbb{Z} \right\} \quad (4.22)$$

$C_p(K, \mathbb{Z})$ には係数ごとの足し算によって足し算が定義されます。この足し算により $C_p(K, \mathbb{Z})$ はアーベル群になります。 $C_p(K, \mathbb{Z})$ の元を p -**チェイン**と呼びます。

次に境界 (boundary) 演算子 $\partial: C_p(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{p-1}(K, \mathbb{Z})$ を定義します。これは p 単体 $\langle 0 \dots p \rangle$ に対して

$$\partial \langle 0 \dots p \rangle = \langle 12 \dots p \rangle - \langle 02 \dots p \rangle + \dots = \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle 0 \dots \hat{i} \dots p \rangle \quad (4.23)$$

と定義します。ここで \hat{i} は i を抜いたことを表しています。

境界演算子の重要な性質は、境界演算子を2回適用すると0になることです。

$$\partial \partial = 0. \quad (4.24)$$

これは実際に定義 (4.23) から簡単に確かめることができます。

p -チェインのうち、境界演算子を適用して0になるものを p -**サイクル**と呼びます。 p -サイクルの集合を $Z_p(K, \mathbb{Z})$ と書きます。つまり

$$Z_p(K, \mathbb{Z}) = \{c \in C_p(K, \mathbb{Z}) \mid \partial c = 0\} \quad (4.25)$$

これは $C_p(K, \mathbb{Z})$ の部分群になっています。

一方、 p -チェインのうち、 $(p+1)$ -チェインに境界演算子を適用して得られるものを全体 $B_p(K, \mathbb{Z})$ と書きます。つまり

$$B_p(K, \mathbb{Z}) = \{\partial c \mid c \in C_{p+1}(K, \mathbb{Z})\} \quad (4.26)$$

とします。これも $C_p(K, \mathbb{Z})$ の部分群になっています。 $\partial^2 = 0$ であることを思い出すと、 $B_p(K, \mathbb{Z}) \subset Z_p(K, \mathbb{Z})$ となっていることも分かります。

これらの性質を踏まえてホモロジー群 $H_p(K, \mathbb{Z})$ を

$$H_p(K, \mathbb{Z}) = Z_p(K, \mathbb{Z}) / B_p(K, \mathbb{Z}) \quad (4.27)$$

と定義します。つまり、 p -サイクルに対して、差が何かの境界になっているようなものは同一視したものです。 $H_p(K, \mathbb{Z})$ もやはりアーベル群になります。

4.4.2 コチェイン

次に考えるのはコチェインです。コチェインは「 p 形式ゲージ場の配位」と直接対応するものです。

G をアーベル群とします。群演算は $+$ で表すことにします。 K の中の各 p 単体 $\langle i_0 i_1 \dots i_p \rangle$ に $A_{i_0 i_1 \dots i_p} \in G$ を割り当てます。これを p -**コチェイン** と呼びます。 p -コチェイン全体の集合を $C^p(K, G)$ と書きます。例えば、各リンク $\langle ij \rangle$ に $A_{ij} \in G$ を割り当てるものが 1-コチェインですが、これは格子ゲージ理論のゲージ場と同じようなものです。大雑把に言うと、 p -コチェインはあまり細かいことを考える前の p 形式ゲージ場の配位を表します。 $C^p(K, G)$ は各 p 単体ごとに割り当てられた G の元の和や差を考えることでアーベル群になります。

次にコバウンダリ演算子 $\delta : C^{p-1}(K, G) \rightarrow C^p(K, G)$ を次のように定義します。 A を $(p-1)$ -コチェイン、つまり p 単体 $\langle 0 \dots (p-1) \rangle$ に群の元 $A_{01\dots(p-1)}$ を割り当てるものとしものとして p -コチェイン δA を

$$\delta A_{01\dots p} = \sum_{j=0}^p (-1)^j A_{0\dots \hat{j} \dots p} \quad (4.28)$$

で定義します。ここで \hat{j} は j を抜いたことを表しています。コバウンダリ演算子の重要な性質は、コバウンダリ演算子を 2 回適用すると 0 になることです。

$$\delta\delta = 0. \quad (4.29)$$

これは実際に定義 (4.28) から簡単に確かめることができます。

少し例をやってみましょう。 $\lambda \in C^0(K, G)$ 、 $A \in C^1(K, G)$ とします。このとき

$$\delta\lambda_{01} = \lambda_1 - \lambda_0, \quad (4.30)$$

$$\delta A_{012} = A_{12} - A_{02} + A_{01}. \quad (4.31)$$

となります。 A をゲージ場と思うと δA は場の強さ、 $A + \delta\lambda$ はゲージ変換と解釈することができます。

さらに少し言葉を導入します。 p -コチェインのうち、コバウンダリ演算子を適用して 0 になるものを p -**コサイクル** と呼びます。 p -コサイクル全体の集合を $Z^p(K, G)$ と書きます。つまり

$$Z^p(K, G) = \{A \in C^p(K, G) | \delta A = 0\} \quad (4.32)$$

これは $C^p(K, G)$ の部分群になっています。

一方、 p -コチェインのうち、 $(p-1)$ -コチェインにコバウンダリ演算子を適用して得られるものを p -コバウンダリと呼び、 p -コバウンダリ全体の集合を $B^p(K, G)$ と書きます。つまり

$$B^p(K, G) = \{\delta A | A \in C^{p-1}(K, G)\} \quad (4.33)$$

とします。これも $C^p(K, G)$ の部分群になっています。また $\delta^2 = 0$ であることを思い出すと、 $B^p(K, G) \subset Z^p(K, G)$ となっていることも分かります。

これらを踏まえて、ホモロジー群 $H^p(K, G)$ を

$$H^p(K, G) = Z^p(K, G) / B^p(K, G) \quad (4.34)$$

と定義します。つまり、 p -コサイクルに対して、差が何かのコバウンダリになっているようなものは同一視したものです。 $H^p(K, G)$ もやはりアーベル群になります。実は $H^p(K, G)$ は三角分割 K の取り方に依存しないことが知られています。したがって、これを $H^p(X, G)$ と書きます。

一般にアーベル群 G の flat な $p+1$ 形式ゲージ場の配位は $H^p(X, G)$ の元で表されます。 $A \in C^p(K, G)$ は素朴な $p+1$ 形式ゲージ場だと言いました。flat なゲージ場は $\delta A = 0$ 、つまりコサイクルです。さらに $B^p(K, G)$ の元を足すことがゲージ変換に対応しますから、flat なゲージ場の配位としては、これで同一視するべきです。このようなものはまさに $H^{p+1}(K, G)$ の元で表されます。

4.4.3 積分（ペアリング）

一般に場の理論の作用を書くときには場の和や微分のみならず、場の積や積分が必要になります。単体コホモロジーによるゲージ場の記述の場合にも同様です。ここではまず、「積分」（ペアリング）について説明します。

ペアリングを次のように定義します。これは積分と似たような役割を果たすので、積分の記号を用いて表すことにします。

$$\int : C_p(K, \mathbb{Z}) \times C^p(K, G) \rightarrow G. \quad (4.35)$$

つまり、 $c \in C_p(K, \mathbb{Z})$ と $A \in C^p(K, G)$ に対して

$$\int_c A \in G \quad (4.36)$$

を対応させます。これは c についても A についても線形とします。また $\langle 0 \dots p \rangle$ と $A \in C^p(K, G)$ に対して

$$\int_{\langle 0 \dots p \rangle} A := A_{0 \dots p} \quad (4.37)$$

とします。これでペアリング \int が定義されました。²⁾

このペアリングに対して、ストークスの定理のようなものが成り立ちます。つまり、 $c \in C_p(K, \mathbb{Z})$ 、 $A \in C^{p-1}(K, G)$ に対して

$$\int_{\partial c} A = \int_c \delta A \quad (4.38)$$

が成り立ちます。これを確かめるには、 $c = \langle 0 \dots p \rangle$ のときに ∂ と δ の定義（それぞれ (4.23) と (4.28)）を用いて具体的に両辺を表してみれば良いです。

これを利用してホモロジーとコホモロジーとの間のカップリングについて考えてみます。 $c \in Z_p(K, \mathbb{Z})$ と $A \in Z^p(K, G)$ をそれぞれサイクル、コサイクルとします。このときに $\int_c A$ の性質を考えていくのですが、まずは次の2つの特別な場合を考えます。

- A がコバウンダリ、つまり $A = \delta B$, $B \in C^{p-1}(K, G)$ の場合には

$$\int_c A = \int_c \delta B = \int_{\partial c} B = 0 \quad (4.39)$$

となります。途中で (4.38)、および $\partial c = 0$ であることを用いました。

- c がバウンダリ、つまり $c = \partial b$, $b \in C_{p+1}(K, G)$ の場合には

$$\int_c A = \int_{\partial b} A = \int_b \delta A = 0 \quad (4.40)$$

となります。途中で (4.38)、および $\delta A = 0$ であることを用いました。

このことを用いると

$$\int_{c+\partial b} (A + \delta B) = \int_c A \quad (4.41)$$

が成り立ちます。つまり

2) むしろコチェインを群の準同型写像（線形写像） $A : C_p(K, \mathbb{Z}) \rightarrow G$ と定義したと考える方がシンプルです。このとき、 $\int_c A := A(c)$ となります。

$[c] \in H_p(X, \mathbb{Z}), [A] \in H^p(X, G)$ としたとき、 $\int_c A$ は代表元のとりかたによらず定義されます。

特に X の次元を d としたとき、すべての d 単体を適切な符号で足し合わせることで、 X 全体を表すようなサイクルができます。これを単に X と書くことにします。これがサイクルであることは、 X は閉多様体であって境界がないことから従います。 X がバウンダリーでないことは $d+1$ 単体が存在しないため、 $C_{d+1}(K, G) = \{0\}$ であることから従います。したがって、 $0 \neq [X] \in H_d(X, \mathbb{Z})$ です³⁾。このとき、 d -コチェイン $A \in C^d(K, G)$ に対して

$$\int_X A \quad (4.42)$$

を定義できます。 $C^{d+1}(K, G) = \{0\}$ なので、 $\delta A = 0$ 、つまり A はコサイクルであることが分かります。したがって、 $\int_X A$ はコホモロジー類 $[A] \in H^d(X, G)$ にのみよります。

4.4.4 カップ積

次にコチェイン同士の積であるカップ積を導入します。微分形式や de Rham コホモロジーをご存知の方には、これはウェッジ積に似たものです。

これまで群 G は一般のアーベル群でした。 G には元々群演算としての $+$ が定義されていました。ここからやることのためには、 G に対して積を定義する必要があります。話を具体的にするために G とその積について、次の場合に限って考えることにします。

- $G = \mathbb{R}$ の場合には、普通の実数の積を用います。
- $G = \mathbb{Z}$ の場合には、普通の整数の積を用います。
- $G = \mathbb{Z}_N$ の場合には、整数の代表元をとって考えた積を $\text{mod } N$ で考えたものを用います。

カップ積 $C^p(K, G)$ の元同士の積を定義することができます。 $A \in C^p(K, G)$ と $B \in C^q(K, G)$ に対して、 $A \smile B \in C^{p+q}(K, G)$ を次のように定義します。

$$(A \smile B)_{0 \dots (p+q)} = A_{0 \dots p} B_{p \dots (p+q)}. \quad (4.43)$$

3) この $[X]$ は $H_d(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元であることが知られていて基本類と呼ばれています。

ここで右辺に G の元の積が出てきますが、ここには先ほど定義した G の積を用います。

一般のコチェインに対してカップ積はあまり良いものではありません。一般には対称でも反対称でもありません。とりあえず言えるのは (G の積の結合則から) 結合則と分配則が成り立つことです。これからコホモロジーのカップ積が定義されることを示して、それは良い性質を持つことを見ていきます。

一般のコチェインのカップ積は、 δ に対して Leibniz 則のようなものが成り立ちます。

$$\delta(A \smile B) = \delta A \smile B + (-1)^p A \smile \delta B. \quad (4.44)$$

ここから次の2つの事実が導けます。

- $\delta A = 0$ のとき $A \smile \delta B$ はコバウンダリ。
- $\delta B = 0$ のとき $\delta A \smile B$ はコバウンダリ。

これらを用いると $[A] \in H^p(X, G)$ 、 $[B] \in H^q(X, G)$ としたとき、 $A \smile B$ のコホモロジー類は代表元 A, B のとり方によらないことが示せます。つまりコホモロジーのカップ積

$$\smile: H^p(X, G) \times H^q(X, G) \rightarrow H^{p+q}(X, G) \quad (4.45)$$

が定義されます。

このコホモロジーのカップ積に対して、次数付き交換則が成り立ちます。 $A \in H^p(X, G)$ 、 $B \in H^q(X, G)$ に対して

$$A \smile B = (-1)^{pq} B \smile A \quad (4.46)$$

となります。

ここで単体コホモロジーに関して少し詳しく説明したのは、後で高次元の非可逆対称性を作る歳に高次形式対称性のゲージ化について考える必要があるのですが、これに関して単体コホモロジーの描像で考えることが有用だからです。詳しいことは次の章で説明します。

4.5 自発的対称性の破れ

対称性に関して非常に重要な現象の一つは**自発的対称性の破れ**です。ここでは高次形式対称性の自発的破れについて考えます。

高次形式対称性の前に、まず普通の対称性の自発的破れについて復習します。普通の対称性の場合、秩序演算子と呼ばれる局所演算子 $\sigma(x)$ があって対称性の変換で線形に変換します。この対称性の自発的破れとは素朴には真空期待値が $\langle \sigma(x) \rangle \neq 0$ となることです。

しかし、これは素朴すぎる考え方で、経路積分を有限次元の積分と同じように取り扱ったときには対称性があれば必ず $\langle \sigma(x) \rangle = 0$ になります。特に普通の積分と同じように扱うために時空の体積が有限であることを仮定しています。有限体積の枠内でちゃんと自発的対称性の破れを考える一つの方法は2点関数を考えることです。

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle \neq 0 \quad (4.47)$$

の場合に対称性が自発的に破れていると言います。体積は $|x|$ から決まる体積よりも十分大きく取っておけば、2点関数は体積に依存しません。

高次形式対称性の場合も同様に考えてみましょう。問題を具体的にするためにゲージ理論の中心対称性の場合を考えてみます。この場合、秩序演算子に対応するものは Wilson ループです。したがって、素朴には自発的対称性の破れは次のように記述することができます。 C の形を一つ固定し、大きさを大きくする極限を考えます。このとき $\lim_{C \rightarrow \infty} \langle W(C) \rangle$ が 0 が否かで対称性が保たれているか自発的に破れているかを判断できそうな気がしますが、実はこれは素朴すぎます。

C を大きくしたときに $\langle W(C) \rangle$ がどのように振る舞うかについて、さらに詳しく見ていくことにしましょう。 m をある定数として

$$\langle W(C) \rangle \sim \exp\left(-m \int_C ds\right) \quad (4.48)$$

のように振る舞う場合を**周長則**と呼びます。ここで $\int_C ds$ は C の周長を表しています。この場合 $m > 0$ なら $\lim_{C \rightarrow \infty} \langle W(C) \rangle = 0$ となりますが、これは中心対称性が自発的に破れているとは言いません。なぜかという、これは $W(C)$ を $W'(C) = W(C) \exp(m \int_C ds)$ と再定義することによって取り除けるからです。この

ような再定義に用いる因子を Z 因子と呼んだり局所相殺項と呼んだりします。このような操作で取り除けるようなものは物理的に意味がないものなので、こういう局所相殺項で消せるものはできる限り取り除いた上で考える必要があります。周長則の場合、あるいはクーロン則でも同様に局所相殺項を適切に設定した場合には $\lim_{C \rightarrow \infty} \langle W(C) \rangle \neq 0$ となり、この場合は中心対称性が自発的に破れていると言えます。

別の振る舞い方として $T > 0$ をある定数として

$$\langle W(C) \rangle \sim \exp(-TA) \quad (4.49)$$

というものがあります。ここで A は C 境界とする面の最小の面積を表しています。この場合にも $\lim_{C \rightarrow \infty} \langle W(C) \rangle = 0$ となります。今度は局所相殺項で取り除けないので、対称性は保たれていると言えます。もしかしたら

$W'(C) = W(C) \exp(TA)$ と再定義すれば有限になるじゃないか？

と思われるかもしれませんが、しかし、このような相殺項は局所的ではありません。我々は欠陥を考えるとときに、どんな変なものを考えても良いけれど、局所性だけは保つことを要求しました。「 C 境界とする面の最小の面積」は C の局所的な部分を見ただけでは分からず、 C 全体、およびバルクの情報も必要としますので、局所相殺項で書くことはできません。

まとめると、中心対称性（あるいは一般に 1 形式対称性）自発的破れは次のように判定することができます。

- Wilson ループの真空期待値が面積則の場合（**閉じ込め**の場合）、中心対称性は保たれている。
- Wilson ループの真空期待値が周長則、あるいはクーロン則などの場合（**非閉じ込め**の場合）、中心対称性は自発的に破れている。

他の高次形式対称性の場合も同様の考え方（秩序演算子の振る舞い、局所相殺項）で自発的破れを判定することができます。

第 5 章 高次元の非可逆対称性

高次元の非可逆対称性は比較的新しい話題で、現在も盛んに研究が進んでいる分野です。高次元の非可逆対称性の系統的な調べ方はまだありません。いくつかの例が知られているだけです。高次元の非可逆対称性の発見の仕方にはいくつかあります。例えば次のような方法があります。

- 高次ゲージ化 (higher gauging)
- 半空間ゲージ化 (half-space gauging)

後者は 3.5 節で Kramers-Wannier 双対性の欠陥を作るのに用いた方法の高次元版です。この講義では、この後この半空間ゲージ化について詳しく紹介します。名前を見て分かるとおり、両方とも「ゲージ化」の方法ですので、まずは高次形式対称性のゲージ化について説明します。

5.1 高次形式対称性のゲージ化

G を有限アーベル群とし、 \mathcal{T} を d 次元の場の理論で p 形式 G 対称性 ($G^{(p)}$ 対称性) を持つものとし、 X を d 次元の向きをついた閉リーマン多様体とし、 K を X の単体分割とし、この単体分割を利用して $G^{(p)}$ 対称性に対する背景ゲージ場を $A \in Z^{p+1}(X; G)$ として導入します。この背景ゲージ場のもとでの分配関数を $Z_{\mathcal{T}}(A)$ と表します。

5.1.1 ゲージ化した理論の分配関数

$Z_{\mathcal{T}}(A)$ がアノマリーが無い場合、つまり $Z_{\mathcal{T}}(A + \delta\lambda) = Z_{\mathcal{T}}(A)$ が成り立ち、しかも単体分割のしかた K に依存しない場合を考えます。このとき、ゲージ化した理論 $\mathcal{T}/G^{(p)}$ を考えることができます。その分配関数 $Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}}(A)$ はすべてのゲージ場の配位について足し合わせることで得られます。

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}} = \frac{1}{\text{Vol}} \sum_{a \in Z^{p+1}(X; G)} Z_{\mathcal{T}}(a). \quad (5.1)$$

ここで Vol はゲージ体積であり、ゲージ変換でつながるようなゲージ場の配位を何回も数えている分を割っておくものです。

ゲージ体積について少し考えてみます。以下、式を短くするために $C^p(K, G)$ のことを引数を省略して単に C^p と書くことにします。素朴にはゲージ変換のパラメーター $\lambda \in C^p$ の数なので $1/\text{Vol} = 1/|C^p|$ と考えられます。しかし、 $\lambda \in C^p$ がすべて独立なゲージ変換のパラメーターではなく、 $\lambda \in C^p$ と $\lambda + d\sigma, \sigma \in C^{p-1}$ は同じゲージ変換を表しますので、 $|C^{p-1}|$ で割る必要があります。しかし、話はこれで終わりではなく、 $\sigma \in C^{p-1}$ もすべて独立なパラメーターではなく……と続けていく必要があります。最終的には

$$\frac{1}{\text{Vol}} = \begin{cases} \frac{|C^{p-1}||C^{p-3}|\dots 1}{|C^p||C^{p-2}|\dots|C^0|} & (p \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{|C^{p-1}||C^{p-3}|\dots|C^0|}{|C^p||C^{p-2}|\dots 1} & (p \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (5.2)$$

となります。

文献等ではこれらはコチェイン C^* の言葉ではなくてコホモロジーの言葉で書いてあることも多いと思います。それについてここで説明します。まず、 $H^{p+1} = Z^{p+1}/B^{p+1}$ なので、

$$\sum_{a \in Z^{p+1}(X; G)} Z_{\mathcal{T}}(a) = |B^{p+1}| \sum_{a \in H^{p+1}} Z_{\mathcal{T}}(a) \quad (5.3)$$

となります。また、完全系列（前の写像の像が次の写像の核になるような系列）

$$0 \rightarrow Z^p \xrightarrow{i} C^p \xrightarrow{\delta} B^{p+1} \xrightarrow{\delta} 0 \quad (5.4)$$

を考えることができます。ここで i は包含写像です。この完全系列から

$$B^{p+1} = C^p / Z^p \quad (5.5)$$

であることが分かります。これらの関係を用いると

$$|B^{p+1}| = \frac{|C^p|}{|Z^p|} = \frac{|C^p|}{|H^p||B^p|} = \frac{|C^p||Z^{p-1}|}{|H^p||C^{p-1}|} = \frac{|C^p||H^{p-1}||B^{p-1}|}{|H^p||C^{p-1}|} = \dots \quad (5.6)$$

$$= \frac{|C^p||C^{p-2}|\dots}{|C^{p-1}||C^{p-3}|\dots} \times \frac{|H^{p-1}||H^{p-3}|\dots}{|H^p||H^{p-2}|\dots} \quad (5.7)$$

となります。これを (5.3) に代入し、さらに (5.1)、(5.2) を用いると

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}} = \frac{|H^{p-1}||H^{p-3}|\dots}{|H^p||H^{p-2}|\dots} \sum_{a \in H^{p+1}} Z_{\mathcal{T}}(a) \quad (5.8)$$

という表式を得ます。この他に重力に関する局所項を入れることもできます。

5.1.2 双対対称性

2次元の場合と同様に有限アーベル群 G の p 形式対称性をゲージ化した理論 $\mathcal{T}/G^{(p)}$ には双対対称性が存在します。これについて見ていくことにしましょう。

双対対称性のトポロジカル欠陥は Wilson サーフェスと呼ばれる演算子です。これは $\rho \in \hat{G}$ (1次元ユニタリー表現) つまり $\rho : G \rightarrow U(1)$ (準同型)、 $c \in Z_{p+1}(K, \mathbb{Z})$ として

$$W_\rho(c) = \rho \left(\int_c a \right) \quad (5.9)$$

を挿入することです。この欠陥は $p+1$ 次元ですから、余次元は $d-p-1$ 次元になります。つまりこれは $(d-p-2)$ 形式対称性のトポロジカル欠陥になります。まとめると、次のことが言えました。

$\mathcal{T}/G^{(p)}$ は $\hat{G}^{(d-p-2)}$ 対称性を持つ。

これをさらに詳しく見るために $G = \mathbb{Z}_N$ の場合に限って考えます。この場合、 $q = d-p-2$ として Wilson ループの情報は $B \in H^{q+1}$ で表されます。この背景での分配関数は

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}}(B) = \frac{|H^{p-1}||H^{p-3}| \dots}{|H^p||H^{p-2}| \dots} \sum_{a \in H^{p+1}} Z_{\mathcal{T}}(a) \exp \left(\frac{2\pi i}{N} \int_X B \smile a \right) \quad (5.10)$$

となります。ゲージ化すると、分配関数はだいたい Fourier 変換したようなものになります。

この \hat{G}^q 対称性をゲージ化した理論 $\mathcal{T}/G^p/\hat{G}^q$ を考えます。この分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}/\hat{G}^{(q)}} &= \frac{|H^{q-1}||H^{q-3}| \dots}{|H^q||H^{q-2}| \dots} \sum_{b \in H^{q+1}} Z_{\mathcal{T}/\hat{G}^q}(b) \\ &= \frac{|H^{q-1}||H^{q-3}| \dots}{|H^q||H^{q-2}| \dots} \sum_{b \in H^{q+1}} \frac{|H^{p-1}||H^{p-3}| \dots}{|H^p||H^{p-2}| \dots} \sum_{a \in H^{p+1}} Z_{\mathcal{T}}(a) \exp \left(\frac{2\pi i}{N} \int_X b \smile a \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

となります。ここで、知られている恒等式

$$\sum_{b \in H^{q+1}} \exp \left(\frac{2\pi i}{N} \int_X b \smile a \right) = |H^{p+1}| \delta_{a,0} \quad (5.12)$$

を用いると

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}/\hat{G}^{(q)}} = \mathcal{C} Z_{\mathcal{T}}, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{C} = \frac{|H^{q+1}| |H^{q-1}| |H^{q-3}| \dots |H^{p-1}| |H^{p-3}| \dots}{|H^q| |H^{q-2}| \dots |H^p| |H^{p-2}| \dots} \quad (5.14)$$

を得ます。つまり $\mathcal{T}/G^{(p)}/\hat{G}^{(q)}$ の分配関数と \mathcal{T} の分配関数は比例係数を除いて等しいので、これら2つの理論は同じであることが期待できます。

これらをもう少し精密にするために、比例係数についてももう少し詳しく見ていきます。これも一般にやるのは少し大変なので、 X にトーションが無い場合、つまり $H^*(X, \mathbb{Z})$ の0でない元を0でないどんな整数倍しても0でないような場合を考えます。このときある非負の整数 b_p があって $H^p(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_p}$ となります。この b_p を用いて $H^p(X, G) \cong G^{b_p}$ と書けるので $|H^p| = N^{b_p}$ となります。また、 $b_{d-p} = b_p$ であることも知られています。 $p = d - q - 2$ であることも思い出すと比例係数は

$$\mathcal{C} = \begin{cases} N^\chi & (q \text{ が偶数のとき}) \\ N^{-\chi} & (q \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (5.15)$$

となります。ここで

$$\chi = \sum_{p=0}^d (-1)^p b_p \quad (5.16)$$

は Euler 数です。 d が奇数のときは $\chi = 0$ になりますので、 $\mathcal{C} = 1$ となります。 d が偶数のときには、ゲージ化した分配関数を先ほどの定義から

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}}^{\text{new}} = \sqrt{\mathcal{C}} Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}}^{\text{old}} \quad (5.17)$$

とすることにより $Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}/\hat{G}^{(q)}} = Z_{\mathcal{T}}$ となるようにすることができます。(5.17) の再定義は作用に局所的な項を付け加えることで実現できます。これは Euler の公式

$$\chi = \sum_{r=0}^d (-1)^r (r \text{ 単体の数}) \quad (5.18)$$

を用いると分かります。実際、各 r 単体に対して

$$\begin{cases} \sqrt{N}^{(-1)^r} & (p, q \text{ が偶数のとき}) \\ \sqrt{N}^{(-1)^{r+1}} & (p, q \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (5.19)$$

の因子をかければ良いことになります。

さらに、背景ゲージ場を入れた場合にも同様の解析ができます。このとき、

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}/\hat{G}^{(q)}}(A) = (\text{定数}) \sum_{b \in H^{q+1}} \sum_{a \in H^{p+1}} Z_{\mathcal{T}}(a) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \int_X A \smile b\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \int_X b \smile a\right) \quad (5.20)$$

となります。ここで

$$b \smile a = (-1)^{(p+1)(q+1)} a \smile b \quad (5.21)$$

であることを思い出して、(5.12)を用いると

$$Z_{\mathcal{T}/G^{(p)}/\hat{G}^{(q)}}(a) = \begin{cases} Z_{\mathcal{T}}(-a) & (p, q \text{ がともに偶数のとき}) \\ Z_{\mathcal{T}}(a) & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (5.22)$$

を得ます。 p, q がともに偶数のときの背景ゲージ場の符号が反転していますが、これは荷電共役をとった理論になります。したがって、次のことが言えました。

$\mathcal{T}/G^{(p)}/\hat{G}^{(q)}$ は、 \mathcal{T} あるいはその荷電共役と同じ理論である。

さて2回ゲージ化して同じ理論に戻るなら、特殊な場合には1回ゲージ化しても同じ理論に戻るということがありえます。この場合には $p = q$ である必要があります。つまり $d = 2n$ としたとき $p = q = n - 1$ の場合です。 $n = 1$ の場合の例は前に詳しくやった KW 双対性です。次に簡単なのは $n = 2$ の場合です。つまり4次元で $\mathcal{T}/G^{(1)} \cong \mathcal{T}$ になる場合があります。例を挙げると

- \mathbb{Z}_2 格子ゲージ理論、 $K = K_c$ の場合の Kramars-Wannier-Wegner(KWW) 双対性。
- Maxwell 理論で $\frac{1}{g^2} = \frac{N}{4\pi}$ のときの電磁双対性。
- $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills でゲージ群が $SU(N)$ 、coupling が $\tau = i$ の場合の Montonen-Olive 双対性。

このような場合には2次元のときと同様にして半空間ゲージ化によってトポロジカル欠陥を作ることができます。一般にはこれは非可逆対称性になります。このようにして作られるトポロジカル欠陥は双対性欠陥と呼ばれます。この講義の残りで、上2つの例： \mathbb{Z}_2 格子ゲージ理論と Maxwell 理論の双対性欠陥について説明します。

5.2 4次元 \mathbb{Z}_2 格子ゲージ理論

1つ目の例は我々が [5] でやったものです。これは2次元の KW 双対性の4次元のアナロジーです。第3章でやったのと同様の解析によりその性質を調べることができます。ここではその内容を簡単に説明します。

考える理論は4次元 \mathbb{Z}_2 格子ゲージ理論で、これは4.2.1項で取り扱った格子ゲージ理論においてゲージ群を $SU(N)$ の代わりに \mathbb{Z}_2 としたものです。つまり4次元の立方格子において、各リンク ℓ に \mathbb{Z}_2 の元 $a_\ell = 0, 1$ を割り当てます。分配関数は K を正の実数の定数として

$$Z_{\mathcal{T}}(K) = \sum_{\{a\}} \exp \left(K \sum_{\text{すべてのプラケット} \langle 1234 \rangle} (-1)^{a_1+a_2+a_3+a_4} \right) \quad (5.23)$$

と書けます。Ising 模型と似ているのが分かってもらえるでしょうか。

この理論には中心対称性 $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ があります。これは4.2節で説明したとおりのもので、中心対称性 $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ は2次元 Ising 模型のときのスピン反転対称性のアナロジーです。

さらに、この理論には KW 双対性に似た双対性である KWW 双対性があります。この主張は適切な局所相殺項を加えると

$$Z_{\mathcal{T}/\mathbb{Z}_2^{(1)}}(K) = Z_{\mathcal{T}}(\tilde{K}), \quad \sinh 2K \sinh 2\tilde{K} = 1 \quad (5.24)$$

となることです。この関係は2次元の Ising 模型の KW 双対性と同様の方法で示すことができます。特に $K = \tilde{K}$ のとき、つまり $K = K_c := \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ のときには、 \mathcal{T} と $\mathcal{T}/\mathbb{Z}_2^{(1)}$ は同じ理論になります。これは2次元 Ising 模型の臨界点と同じです。

この理論の相構造について見ておきます。用語など、適宜3.8を参照してください。まず、極端な場合について考えておきます。

- $K \ll 1$ (強結合) のとき、強結合展開により、Wilson ループは面積則であることが分かります。つまり、閉じ込め相であり、 $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 対称性が保たれている相です。真空は唯一であり、自明にギャップがある相です。
- $K \gg 1$ (弱結合) のとき、flat な配位が支配的になり、Wilson ループは自明に1になります。つまり、非閉じ込め相であり、 $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ 対称性が自発的に破れている相です。ギャップはあいていますが、空間のトポロジーによって真空に有限個の縮退があるトポロジカル秩序相になります。

これらは対称性が異なる相なので相転移は必ずあります。2次元 Ising と同様の双対性を用いた論理で、相転移が一回だけあるとすると、それは自己双対の点 $K = K_c$ であることが分かります。これらをまとめると図 5.1 のようになります。これも 2次元 Ising 模型の相構造と似ています。

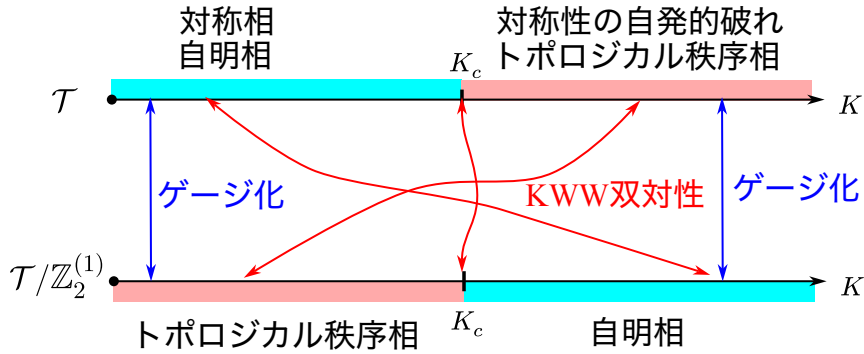


図 5.1 \mathbb{Z}_2 格子ゲージ理論の相構造の図。

2次元 Ising の場合と異なるところは、相転移の次数です。2次元 Ising 模型の相転移は二次相転移でしたが、 \mathbb{Z}_2 格子ゲージ理論の相転移は一次相転移です。これは昔 Creutz が数値計算により発見したものです。相転移が一次ですから、相転移点直上でもギャップがある理論になっているので、この相転移点を利用してトポロジカルでない連続理論を作ることはできません。

$K = K_c$ のときには、 \mathcal{T} と $\mathcal{T}/\mathbb{Z}_2^{(1)}$ は同じ理論になります。このとき、2次元の場合と同様にして半空間ゲージ化によりトポロジカル欠陥「双対性欠陥」を作ることができます。こうしてできる双対性欠陥は余次元 1 で、中心対称性の欠陥 $\mathbb{Z}_2^{(1)}$ と合わせて様々な演算ができます。特に双対性欠陥の量子次元に当たる量 (S^3 の分配関数) は $1/\sqrt{2}$ になります。このことから双対性欠陥が非可逆であることが分かります。

5.3 Maxwell 理論

別の双対性欠陥の例として、4次元 Maxwell 理論の電磁双対性から来る双対性欠陥を考えます。Maxwell 理論には電場と磁場を入れ替える双対性がありますが、まずそれを精密に定式化します。その後で双対性欠陥を作る方法を説明します。

5.3.1 Maxwell 理論

まず、Maxwell 理論の作用を書きます。\$X\$ を閉 Riemann 多様体（正定値計量 \$g_{\mu\nu}\$ の入った多様体）でスピン構造が入っているとします¹⁾。ベクトルポテンシャルを \$A = A_\mu dx^\mu\$ とし、\$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu\$ とします。ここでは微分形式の記号を使っています。\$F\$ のホッジ双対を

$$*F := \frac{1}{4} \sqrt{g} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad F^{\rho\sigma} := g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.25)$$

と定義します。ここで \$g = \det g_{\mu\nu}\$ です。また、\$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\$ は完全反対称テンソルで \$\epsilon_{0123} = 1\$ となるものです。この Hodge 双対 \$*\$ は次の性質を持ちます。\$F, G\$ を 2 形式として

$$F \wedge *G = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \sqrt{g} d^4x, \quad d^4x := dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4. \quad (5.26)$$

Maxwell 理論のパラメーターは結合定数 \$g^2\$ と \$\theta\$ 角です。これらをまとめて複素数のパラメーター \$\tau\$:

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + i \frac{4\pi}{g^2} \quad (5.27)$$

を定義しておくくと便利です。

Maxwell 理論の作用は

$$I_\tau = \int_X \mathcal{L}_\tau, \quad \mathcal{L}_\tau = \frac{1}{g^2} F \wedge *F + \frac{i\theta}{8\pi^2} F \wedge F \quad (5.28)$$

と書けます。このパラメーター \$\tau\$ で表される Maxwell 理論を \$M_\tau\$ と書くことにします。

準備として、\$\mathcal{L}_\tau\$ を少し書き換えておきます。まず、(反) 自己双対 2 形式 \$F^\pm\$ を

$$F^\pm = \frac{1}{2} (F \pm *F) \quad (5.29)$$

で導入します。これらは

$$*F^\pm = \pm F^\pm, \quad F = F^+ + F^-, \quad F^+ \wedge F^- = 0 \quad (5.30)$$

1) ポゾンだけの理論なのに、なぜスピン構造が必要なのかは、かなり技術的です。スピン構造が無い場合にも双対性を議論できますが、その場合の双対性の構造はかなりややこしいものになるので、この講義では取り扱いません。

という性質を満たします。これらを用いると

$$\mathcal{L}_\tau = -\frac{2\pi i}{8\pi^2}(\tau F^+ \wedge F^+ + \bar{\tau} F^- \wedge F^-) \quad (5.31)$$

と書けます。

5.3.2 電磁双対性

電磁双対性の主張は

M_τ と $M_{-1/\tau}$ は等価な理論である。

というものです。以下でこの主張を3つのステップで導出します。ここでの説明は[15]に沿っています。

5.3.2.1 ステップ1：U(1) 2形式ゲージ場の導入

U(1) 2形式ゲージ場 B を導入します。これは局所的には実数値を持つ2形式で、次のようなゲージ変換性を持ちます。パラメーターは普通の U(1) ゲージ場 Λ で、

$$B' = B + d\Lambda \quad (5.32)$$

と変換されます。これを Λ ゲージ変換と呼んでおくことにします。

これを Maxwell 場と結合させることを考えます。このために Maxwell 場 A の Λ ゲージ変換を

$$A' = A + \Lambda \quad (5.33)$$

とします²⁾。2形式 \mathcal{F} を

$$\mathcal{F} := F - B \quad (5.34)$$

で定義すると、 \mathcal{F} は Λ ゲージ変換に対して不変になります。これを利用して Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}_\tau(\mathcal{F}) = -\frac{2\pi i}{8\pi^2}(\tau \mathcal{F}^+ \wedge \mathcal{F}^+ + \bar{\tau} \mathcal{F}^- \wedge \mathcal{F}^-) \quad (5.35)$$

とすると Λ ゲージ変換で不変な作用が得られます。これは $B = 0$ のときに元の Maxwell 理論の作用になることに注意してください。

2) U(1) ゲージ場と実数値を持つ1形式の違いに注意してください。 A も Λ も U(1) ゲージ場ですから、その足し算である A' も U(1) ゲージ場です。

5.3.2.2 ステップ2：Maxwell 理論と等価な理論を作る

2 形式 $U(1)$ ゲージ場に対する汎関数積分と汎関数 δ 関数を導入します。

$$\delta(B) = 0, (\text{ゲージ変換をして } B = 0 \text{ にできないような } B \text{ に対して}) \quad (5.36)$$

$$\int DB \delta(B) = 1. \quad (5.37)$$

Maxwell 理論の分配関数を考えます。

$$Z_{M_\tau} = \int DA e^{-\int \mathcal{L}_\tau(F)}. \quad (5.38)$$

右辺に (5.37) を挿入し、 $B = 0$ のとき $\mathcal{F} = F$ であることを用いると

$$Z_{M_\tau} = \int DADB \delta(B) e^{-\int \mathcal{L}_\tau(F)}. \quad (5.39)$$

という式を得ます。

次にこの汎関数 δ 関数を積分で表すことにします。 \tilde{A} を $U(1)$ ゲージ場として

$$\delta(B) = \int D\tilde{A} \exp\left(-\frac{i}{2\pi} \int_X \tilde{A} \wedge dB\right) \quad (5.40)$$

が成り立ちます。この関係式の「証明」のスケッチは以下のとおりです。

$$\Delta(B) := \int D\tilde{A} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \int_X \tilde{A} \wedge dB\right) \quad (5.41)$$

と定義して、 $\Delta(B) = \delta(A)$ であることを示します。

1. まず、ゲージ変換しても $B = 0$ にできない場合 $\Delta(B) = 0$ となることを示します。簡単のためにトーションが無い場合を考えます。トポロジカルに非自明な $U(1)$ ゲージ場 \tilde{A} の配位は $\left[\frac{d\tilde{A}}{2\pi}\right] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ に対応します。 $H^2(X, \mathbb{Z})$ の生成子の代表元を ω_j , $j = 1, \dots, b_2$ とし、 $dc_j = 2\pi\omega_j$ となる $U(1)$ ゲージ場 c_j を持ってきます。すると、 \tilde{A} の配位は

$$\tilde{A} = \sum_{j=1}^{b_2} n_j c_j + b, \quad n_j \in \mathbb{Z} \quad (5.42)$$

と書けます。ここで b はトポロジ的に自明な $U(1)$ ゲージ場、つまり単に 1 形式です。こうすると

$$\Delta(B) \propto \sum_{\{n\}} \int Db \exp\left(-\frac{i}{2\pi} \int_X \tilde{A} \wedge dB\right) \quad (5.43)$$

となります。 $\int Db$ の積分により、 $dB \neq 0$ のような B に対しては $\Delta(B) = 0$ となります。 $dB = 0$ でもゲージ変換で $B = 0$ にできるとは限りません。このとき「 $B = 0$ に出来なさ」は Wilson サーフェスで特徴づけられます。これ次のように n_j の和を考えることにより取り扱うことができます。 ω_j に双対なサイクルを α_j とすると $dB = 0$ となる B に対して

$$\exp\left(-\frac{i}{2\pi} \int_X \tilde{A} \wedge dB\right) = \exp\left(-i \sum_j n_j \int_{\alpha_j} B\right) \quad (5.44)$$

となりますから、 n_j の和を考えることにより $\int_{\alpha_j} B = 0 \pmod{2\pi}$ でないような B に対しては $\Delta(B) = 0$ となります。このようにして、ゲージ変換しても $B = 0$ にできないような B に対しては $\Delta(B) = 0$ となることが分かりました。

2. 次に $\int DB\Delta(B) = \mathcal{Z}$ として $\mathcal{Z} = 1$ となることを示します。

$$\mathcal{Z} = \int DBD\tilde{A} \exp\left(-\frac{i}{2\pi} \int_X \tilde{A} \wedge dB\right) \quad (5.45)$$

ですから、 \mathcal{Z} は B と \tilde{A} を動的な場で \exp の肩にのっているものを作用とした理論の分配関数ということになります。この理論が自明であれば $\mathcal{Z} = 1$ であることが示せます。閉じた3次元面を M として $X = M \times S^1$ と書ける場合には S^1 方向を Euclid 時間と思うことで演算子形式で調べることができます。詳細は省略しますが、これをやってみると Hamiltonian は 0 で、状態は 1 つしかないことが分かります。ですからこの場合には $\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta H} = 1$ となります。このように書けない X の場合には、トポロジカルな場の理論の一般論で、切ったり貼ったりをすることにより、やはり $\mathcal{Z} = 1$ であることが示せます。

これらを合わせると $\Delta(B) = \delta(B)$ であることが分かります。

式 (5.39) に (5.40) を代入すると

$$Z_{M_\tau} = \int DADB\tilde{A} e^{-\int \mathcal{M}_\tau}, \quad \mathcal{M}_\tau = \frac{i}{2\pi} \tilde{A} \wedge dB + \mathcal{L}_\tau(\mathcal{F}) \quad (5.46)$$

となります。

5.3.2.3 ステップ3：別の変形

式 (5.46) は Maxwell 理論 M_τ の分配関数でした。この式の積分を別の評価の仕方を行います。

まず、 Λ ゲージ変換を利用して $A = 0$ となるゲージをとります。その上で B を積分することを考えます。このとき全微分を除いて

$$\frac{i}{2\pi} \tilde{A} \wedge dB = -\frac{i}{2\pi} \tilde{F} \wedge B = -\frac{i}{2\pi} \tilde{F}^+ \wedge B^+ - \frac{i}{2\pi} \tilde{F}^- \wedge B^- \quad (5.47)$$

となります。ここで $\tilde{F} = d\tilde{A}$ は \tilde{A} の場の強さ、 \tilde{F}^\pm, B^\pm は (反) 自己双対部分です。これらを考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^2}{2\pi i} \mathcal{M}_\tau &= -\tilde{F}^+ \wedge B^+ - \tilde{F}^- \wedge B^- - \frac{1}{2} \tau B^+ \wedge B^+ - \frac{1}{2} \tau B^- \wedge B^- \\ &= -\frac{1}{2} \tau (B^+ + \frac{1}{\tau} \tilde{F}^+) \wedge (B^+ + \frac{1}{\tau} \tilde{F}^+) - \frac{1}{2} \tau (B^- + \frac{1}{\tau} \tilde{F}^-) \wedge (B^- + \frac{1}{\tau} \tilde{F}^-) \\ &\quad + \frac{1}{2\tau} \tilde{F}^+ \wedge \tilde{F}^+ + \frac{1}{2\tau} \tilde{F}^- \wedge \tilde{F}^- \end{aligned} \quad (5.48)$$

を得ます。積分変数の変換 $B^\pm \rightarrow B'^\pm = B^\pm + \frac{1}{\tau} \tilde{F}^\pm$ を行くと、 B'^\pm の積分は分離します。これは Gauss 積分で評価でき、計量や τ に依存する数が出てきますが、計量による局所相殺項 (Euler 相殺項、符号数相殺項) に吸収することができます。したがって、積分したあとには

$$\mathcal{M}_\tau \rightarrow -\frac{2\pi i}{(2\pi)^2} \left[-\frac{1}{2\tau} \tilde{F}^+ \wedge \tilde{F}^+ - \frac{1}{2\tau} \tilde{F}^- \wedge \tilde{F}^- \right] = \mathcal{L}_{-1/\tau} \quad (5.49)$$

が残ります。これは $U(1)$ ゲージ場 \tilde{A} に対する Maxwell 理論 $M_{-1/\tau}$ の Lagrangian 密度そのものです。こうして電磁双対性が証明されました。

5.3.3 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ ゲージ化

Maxwell 理論には $U(1)^{(1)}$ 中心対称性があります。この部分群として $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ を考え、これをゲージ化することを考えます。

まず、 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ ゲージ理論を考えます。前は単体コホモロジーで考えましたが、Maxwell 理論に結合する場合には微分形式で考えるほうが便利です。これは実は (5.45) を一般化したような理論

$$\int DBD\tilde{A} \exp\left(-\frac{iN}{2\pi} \int_X \tilde{A} \wedge dB\right) \quad (5.50)$$

で表すことができます。これが実際 $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ ゲージ理論であることは正準量子化などで確かめることができます。

$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ ゲージ理論 (5.50) を Maxwell 理論 M_τ に結合させて、 $M_\tau/\mathbb{Z}_N^{(1)}$ 理論を作りま

す。これは (5.46) とほぼ同じで、

$$Z_{M_\tau/\mathbb{Z}_N^{(1)}} = \int DADB D\tilde{A} e^{-\int \mathcal{M}_{\tau,N}}, \quad \mathcal{M}_{\tau,N} = \frac{iN}{2\pi} \tilde{A} \wedge dB + \mathcal{L}_\tau(\mathcal{F}) \quad (5.51)$$

となります。ここで、先程と同じように $A = 0$ ゲージをとって B を積分すると

$$Z_{M_\tau/\mathbb{Z}_N^{(1)}} = Z_{M_{-N^2/\tau}} \quad (5.52)$$

という関係式を得ます。つまり $M_\tau/\mathbb{Z}_N^{(1)} \cong M_{-N^2/\tau}$ という理論の双対性を得ました。

この双対性が面白いのは、双対性で元に戻るような理論を考えることができるからです。実際 $M_{\tau=iN}$ という理論に対して上の双対性を利用すると

$$M_{iN}/\mathbb{Z}_N^{(1)} = M_{iN} \quad (5.53)$$

という関係が得られます。つまり M_{iN} は $\mathbb{Z}_N^{(1)}$ をゲージ化しても元の理論と同じ理論になる、という関係を得ました。一般的に議論したように、このような場合には非可逆対称性があります。

5.3.4 双対性欠陥

最後に半空間ゲージ化を行って、双対性欠陥を作ってみます。

Maxwell 理論 $M_{\tau=iN}$ を閉多様体 X で考えます。領域 $D \subset X$ をとって D の内部のみに \tilde{A}, B を導入します。特に B に対して $Y = \partial D$ での Dirichlet 境界条件

$$B|_Y = 0 \quad (5.54)$$

を課します。

D の中での Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{D \text{ の中}} = \frac{iN}{2\pi} \tilde{A} \wedge dB + \mathcal{L}_{iN}(\mathcal{F}) = \frac{iN}{2\pi} \tilde{F} \wedge \mathcal{F} + \mathcal{L}_{iN}(\mathcal{F}) \quad (5.55)$$

となります。1行目から2行目へは部分積分をし、 Λ ゲージ対称性があらわであるように書き換えました。ここからさらに D の中だけで $A = 0$ ゲージをとって B を積分するということをします。注意することは Dirichlet 境界条件のために、境界では $\Lambda = 0$ とする必要があり、境界で $A = 0$ のゲージ固定条件を取れるかどうか分からないことです。このことを考慮して

$$\mathcal{L}_{D \text{ の中}} = \frac{iN}{2\pi} \tilde{F} \wedge F - \frac{iN}{2\pi} \tilde{F} \wedge B + \mathcal{L}_{iN}(\mathcal{F}) \quad (5.56)$$

と変形します。後ろ 2 項は B を積分することで \tilde{A} をゲージ場とした M_{iN} の Maxwell 理論になります。第 1 項目はトポロジカルな項で、これを積分したものは $\text{mod } 2\pi i$ で表面項になり、

$$\int_D \frac{iN}{2\pi} \tilde{F} \wedge F = \int_Y \frac{iN}{2\pi} \tilde{A} \wedge dA \quad \text{mod } 2\pi i \quad (5.57)$$

と表すことができます。

まとめると、半空間ゲージ化によって得られた理論は Y 以外の部分では M_{iN} であり Y に局在する欠陥があります。これは、 Y の両側のゲージ場 A, \tilde{A} を用いて (5.57) のような作用で表すことができます。

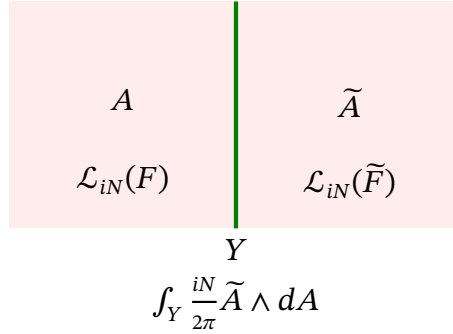


図 5.2 半空間ゲージ化により得られる欠陥の様子。

最後に $N = 1$ の場合についてコメントします。この場合は普通の対称性になります。この場合、Lagrangian 密度として $\tau = i$ で全体で (5.46) のものをもって考えるのが分かりやすいと思います。このとき全体で \tilde{A}, B を積分すると全体で $\tau = i$ の Maxwell 理論が得られます。一方で、 D の中では A, B を積分、 D の外では \tilde{A} を積分すると、 D の外でも中でも $\tau = i$ の Maxwell 理論が得られますが、 $Y = \partial D$ 上で欠陥が現れます。この場合、積分のしかたが異なるだけなので、 D の中に他の演算子が入っていないかぎり欠陥の期待値は 1 になります。したがってこの欠陥で表される一般化対称性は普通の対称性になります。

2次元の自由スカラー場でも似たような議論ができて、もっとよく調べられています。自己双対の点では半空間ゲージ化により得られる一般化対称性はやはり普通の対称性になります。この場合、実は対称性がもっと大きく拡大していて $SU(2) \times SU(2)$ になっていることが知られています。4次元でこのような、さらに大きな拡大が分かったら面白いと思います。

参考文献

- [1] S.-H. Shao, “What’s Done Cannot Be Undone: TASI Lectures on Non-Invertible Symmetry,” [arXiv:2308.00747 \[hep-th\]](#).
- [2] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, “Generalized Global Symmetries,” *JHEP* **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 \[hep-th\]](#).
- [3] L. Bhardwaj and Y. Tachikawa, “On finite symmetries and their gauging in two dimensions,” *JHEP* **03** (2018) 189, [arXiv:1704.02330 \[hep-th\]](#).
- [4] C.-M. Chang, Y.-H. Lin, S.-H. Shao, Y. Wang, and X. Yin, “Topological Defect Lines and Renormalization Group Flows in Two Dimensions,” *JHEP* **01** (2019) 026, [arXiv:1802.04445 \[hep-th\]](#).
- [5] M. Koide, Y. Nagoya, and S. Yamaguchi, “Non-invertible topological defects in 4-dimensional \mathbb{Z}_2 pure lattice gauge theory,” *PTEP* **2022** no. 1, (2022) 013B03, [arXiv:2109.05992 \[hep-th\]](#).
- [6] Y. Choi, C. Cordova, P.-S. Hsin, H. T. Lam, and S.-H. Shao, “Noninvertible duality defects in 3+1 dimensions,” *Phys. Rev. D* **105** no. 12, (2022) 125016, [arXiv:2111.01139 \[hep-th\]](#).
- [7] J. Kaidi, K. Ohmori, and Y. Zheng, “Kramers-Wannier-like Duality Defects in (3+1)D Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **128** no. 11, (2022) 111601, [arXiv:2111.01141 \[hep-th\]](#).
- [8] D. Aasen, R. S. K. Mong, and P. Fendley, “Topological Defects on the Lattice I: The Ising model,” *J. Phys. A* **49** no. 35, (2016) 354001, [arXiv:1601.07185 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [9] D. Aasen, P. Fendley, and R. S. K. Mong, “Topological Defects on the Lattice: Dualities and Degeneracies,” [arXiv:2008.08598 \[cond-mat.stat-mech\]](#).
- [10] 九後汰一郎, ゲージ場の量子論 II. 培風館, 1989.
- [11] A. Kapustin and N. Seiberg, “Coupling a QFT to a TQFT and Duality,” *JHEP* **04** (2014) 001, [arXiv:1401.0740 \[hep-th\]](#).
- [12] A. B. Zamolodchikov, “S matrix of the subleading magnetic perturbation of the tricritical Ising model,”
- [13] A. Hatcher, *Algebraic Topology*.
<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.

- [14] F. Benini, C. Córdova, and P.-S. Hsin, “On 2-Group Global Symmetries and their Anomalies,” *JHEP* **03** (2019) 118, [arXiv:1803.09336 \[hep-th\]](#).
- [15] E. Witten, “On S -duality in Abelian gauge theory,” *Selecta Math.* **1** (1995) 383, [arXiv:hep-th/9505186](#).