素粒子物理学特論 I

— フェルミオンの場の理論 —

1. 導入

- Femion : Fermi-Dirac統計にしたがう粒子. 電子とか

  (⇔ Boson : Bose-Einstein統計にしたがう粒子. 光子とか)

- 場の理論 : 空間の各点に自由度「場」の量子力学

  ⇝ 粒子が「現れる」

  素粒子の記述に有用

やること :

Fermionが現れるような場の理論の様々な側面

- Grassmann代数
- Spinor
- 作用と正準形式
- (Euclid化) 経路積分
- Anomaly

(なじみのないことがたくさん出てくる
  ⇢ 切り分けて1つ1つ理解しよう)

※ 自然単位系 $c = \hbar = 1$ を用いる.

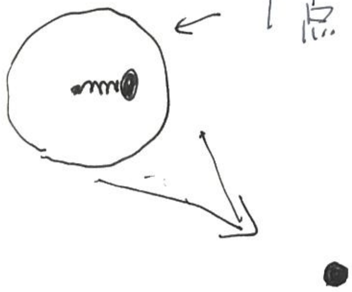
2. Fermion 場の導入

☆ 調和振動子 $\longrightarrow$ Boson

$\hat{a}, \hat{a}^\dagger$, $\qquad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$

消滅 生成

$$\hat{H} = \omega\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) \quad \left(\begin{array}{l} [\hat{H}, \hat{a}] = -\omega a \\ [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega a^\dagger \end{array} \right.$$



← 1点でできた空間
(0次元)

$|0\rangle : \hat{a}|0\rangle = 0$

$|n\rangle = \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle$

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

$\hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a} \qquad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

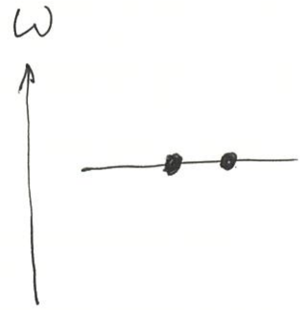
「粒子数」

$|0\rangle$: 粒子なし. 「真空」

$|1\rangle$: 粒子 1コ

$|2\rangle$: 〃 2コ

⋮



何個でも入れる $\rightsquigarrow$ Boson

※ 真空のエネルギーについて

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \underbrace{\frac{1}{2}\omega + V_0}_{=:E_0}$$

定数. 入れない理由はない.

$$= \omega \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + E_0 \qquad \hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle$$

この講義では無視することが多い.
(書かない)

☆ Fermionにするには…

Pauliの排他律

真空 —— $|0\rangle$

1粒子 —•— $|1\rangle$ のみ

$\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^{\dagger}$

消滅 生成

$$\boxed{\hat{\psi}^2 = 0, \quad \hat{\psi}^{\dagger 2} = 0}$$

← こうしとくとよさそう.

$$\cancel{[\hat{\psi}, \hat{\psi}^{\dagger}] = 1} \ ?$$

→ この2つと矛盾

$$\boxed{\{\hat{\psi}, \hat{\psi}^{\dagger}\} = 1}$$

$$\{A, B\} = AB + BA$$

"Clifford代数"

$$\hat{\psi}|0\rangle = 0, \quad |1\rangle = \hat{\psi}^{\dagger}|0\rangle$$

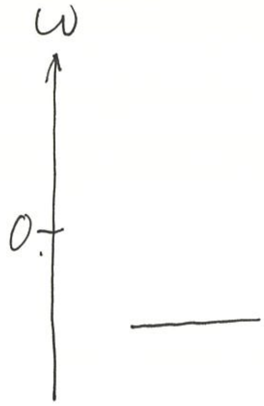
$$\hat{H} = \omega \hat{\psi}^{\dagger}\hat{\psi}$$

☆ $\omega < 0$ だったら……

$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle$ ← 粒子なし

$\hat{H}|1\rangle = E_1|1\rangle$

↑ 粒子あり



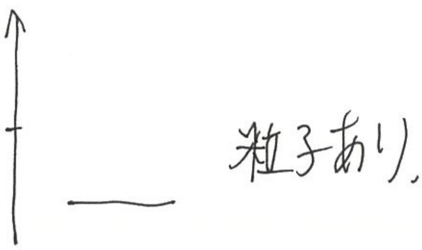
$$E_1 - E_0 = \omega < 0 \Rightarrow E_1 < E_0$$

"粒子ある"方がエネルギーが小さい！？

言い方が悪いだけ

$|1\rangle$ が基底状態（真空）

$|0\rangle$ が励起状態（粒子がある！！）



$$\hat{H} = \omega\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} = -\omega\hat{\psi}\hat{\psi}^\dagger + \underbrace{\omega}_{\text{書かない}} = -\omega\hat{\psi}'^\dagger\hat{\psi}'$$

$\{\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger\} = 1$

$\hat{\psi}' := \hat{\psi}^\dagger$, $\hat{\psi}'^\dagger := \hat{\psi}$

$$\boxed{\begin{gathered}\hat{\psi}'^2 = \hat{\psi}'^{\dagger 2} = 0 \\ \{\hat{\psi}', \hat{\psi}'^\dagger\} = 1\end{gathered}}$$

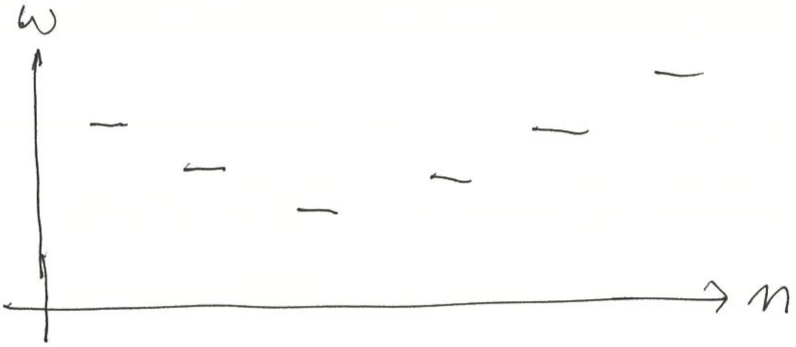
$\hat{\psi}'|0'\rangle = 0$

$|0'\rangle = |1\rangle$

$|1'\rangle = |0\rangle$

$|0'\rangle$ が真空、$|1'\rangle$ が粒子あり。

☆ 空間がN個の点，完全に独立



$\hat{\psi}_n$, $\hat{\psi}^{\dagger n}$ ● $n=1,\cdots,N$

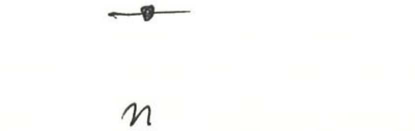
$$\boxed{\begin{aligned}&\{\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_m\} = 0, \quad \{\hat{\psi}^{\dagger n}, \hat{\psi}^{\dagger m}\} = 0 \\ &\{\hat{\psi}_n, \hat{\psi}^{\dagger m}\} = \delta^m_n\end{aligned}}$$

$$\hat{H} = \sum_n \omega_n \hat{\psi}^{\dagger n} \hat{\psi}_n$$

（Diracのトリックを使って $\omega_n > 0$ にしておく）

・$n \neq m$ のとき $\hat{\psi}_n, \hat{\psi}^n$ と $\hat{\psi}_m, \hat{\psi}^m$ は反交換するように選んだ（交換ではなく）

Fermionにしたいから．



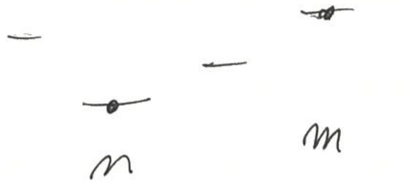
一般の1粒子状態

$$|\alpha\rangle = \sum_n \alpha_n \underbrace{\hat{\psi}^{\dagger}_n |0\rangle}_{\text{粒子が位置}n\text{にいて他のところにいない.}}$$

α_n：“波動関数”

2粒子状態

$$|\alpha\rangle = \sum_{n,m} \alpha_{n,m} \overbrace{\underbrace{\hat{\psi}^{\dagger}_{n} \hat{\psi}^{\dagger}_{m}}_{\text{反可換}} |0\rangle}^{\text{粒子が}n,m\text{にいて他にいない}}$$



$\Rightarrow$ $\alpha_{n,m} = -\alpha_{m,n}$ （他は動かない）

$\Rightarrow$ Fermion

☆ 空間がN個の点，ホッピングあり

$$\hat{H} = \sum_{n,m} \hat{\psi}^{\dagger n} h_n{}^m \hat{\psi}_m$$

$h_n{}^m$: $N \times N$ エルミート行列

$\hat{H}$ がエルミートになるため

ステップ① h を対角化 $\Rightarrow$ 上の場合に帰着

（添字略）

$\sum_m h_n{}^m u^k = \omega_k u^k$ となる u^k を N 個求める

規格化 $u_k^{\dagger} u^{\ell} = \delta_k^{\ell}$

（※場の理論で使うときは別の規格化が便利なことも多い）

② $\hat{\psi}_n = \sum_k \hat{b}_k u^k_n$, $\hat{\psi}^{\dagger n} = \sum_k \hat{b}_k^{\dagger} u_k^{\dagger n}$

③ $\hat{H} = \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$

④ $\omega_k < 0$ があれば Dirac のトリック

$$\hat{d}_k = \hat{b}_k^\dagger, \quad \hat{d}_k^\dagger = \hat{b}_k \qquad \cdots (*)$$

$$\hat{\psi} = \sum_{\substack{k \\ \omega_k>0}} \hat{b}_k u^k + \sum_{\substack{k \\ \omega_k<0}} \hat{d}_k^\dagger u^k$$

$$\hat{H} = \sum_{\substack{k \\ \omega_k>0}} \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sum_{\substack{k \\ \omega_k<0}} (-\omega_k) \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k$$

$\hat{d}_k^\dagger$ で作られる粒子(*) ⇒ 電荷等逆

ホール、反粒子

残る問題(自由場の範囲内で)

あなたの考えたい Fermion の

i) h はどんな形をしているか?

ii) h を対角化できるか?

⋮

演習問題

(1.) $\{\hat{b}_k, \hat{b}_l^\dagger\} = \delta_{kl}$ となることを示せ

$\hat{\psi}_n = \sum_k \hat{b}_k u_n^k$ は時刻0での演算子

(2.) 時刻tでのHeisenberg演算子 $\hat{\psi}_n(t)$ を求めよ.

補足：行列で表す.

$$\{\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger\} = 1, \quad \hat{\psi}^2 = \hat{\psi}^{\dagger 2} = 0$$

$$\hat{\psi}|0\rangle = 0, \quad |1\rangle = \hat{\psi}^\dagger |0\rangle \quad \Rightarrow \text{Hilbert space } V$$

成分： $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

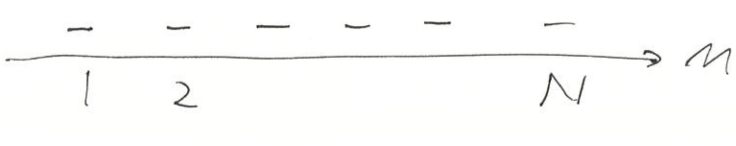
$\Downarrow$

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) =: \sigma_+$$

$$\hat{\psi}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) =: \sigma_-$$

$$[\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}] = \sigma_3$$

$\downarrow$ N個上の系がある



Hilbert sp. $\mathcal{H} = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{N個}$

nのところの
生成消滅

$$\hat{a}_n = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \sigma_+ \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$$\hat{a}_n^\dagger = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{\sigma_+^\dagger} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$\Rightarrow$ $m \neq n$ なら交換する $\Rightarrow$ Boson

同じ Hilbert space

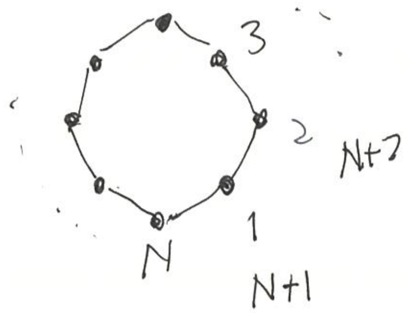
$$\hat{\psi}_n = \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3 \otimes \overset{\overset{n}{\downarrow}}{\sigma_+} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$$\hat{\psi}_n^\dagger = \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_+^\dagger \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$\Rightarrow$ $m \neq n$ なら 交換する $\Rightarrow$ Fermion

☆ 例

・ $n=1,\cdots,N$ 周期境界条件



$\rightsquigarrow$ $n \sim n+N$
という記号で表す。

$$\hat{H} = \sum_n \frac{c}{2i}\hat{\varphi}^{\dagger n}\left(\hat{\varphi}_{n+1} - \hat{\varphi}_{n-1}\right)$$

⇓

ω_k を求めよう

h に 並進対称性がある ⇒ 並進 $T_n{}^m = \delta_{n+1}{}^m$

$n \to n+1$

を対角化

⇒ Fourier 変換

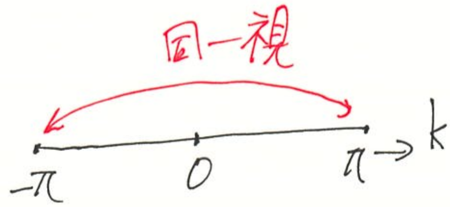
モード関数 $u^k_n \propto e^{ikn}$

・ 周期境界条件 $e^{ik(n+N)} = e^{ikn}$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{N}l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

・ $n \in \mathbb{Z}$

$k \sim k+2\pi$



Brillouin ゾーン

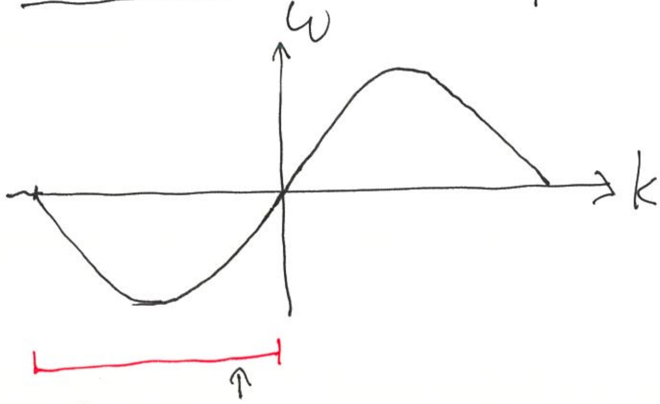
$$\sum_m T_n{}^m u^k_m = \sum_m \delta_{n+1}{}^m u^k_m = u^k_{n+1} = e^{ik(n+1)} = e^{ik} u^k_n$$

$$\boxed{T u^k = e^{ik} u^k}$$

$$h = \frac{c}{2i}(T - T^\dagger)$$

$$h u^k = \frac{c}{2i}(e^{ik} - e^{-ik}) u^k = c \sin k \; u^k$$

$$\boxed{\omega_k = c \sin k}$$



真空＝ここが埋まっている状態

◦ 低エネルギーのフェルミオン

$k \sim 0$　　$\omega_k \simeq c k$　　線型分散

長波長

近似的に相対論的

$k \sim \pi$　　$\omega_k \simeq c(\pi - k)$　　〃

(doubler
格子QCD業界の用語)

↳ 連続極限で 1+1次元 Dirac fermion

3. Fermion 場の作用と正準量子化

☆ 次に…

- Lagrangian, 作用を書きたい! $\longleftrightarrow$ 正準形式?

- "古典論"?

$\hat{\psi}_n, \hat{\psi}^{\dagger n}$: ほとんど反交換する ← 「Clifford 代数」

$\{\hat{\psi}_n, \hat{\psi}^{\dagger n}\} = 1$ ← これ以外

$\Updownarrow$

たぶん"古典"

$\psi_n, \psi^{\dagger n}$: 全部反交換する

だろう… ← 「Grassmann 代数」

cf. Boson

量子: $[\hat{p}, \hat{x}] = i$ ($[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ 線型結合とりなおしたもの)

「Heisenberg 代数」(の universal enveloping algebra …)

…

古典: p, x の(いい感じの)関数全体

☆ Grassmann 代数

◎ 生成子 1つの場合

$$G_1 := \{ a + b\theta \mid a, b \in \mathbb{C} \} \simeq \mathbb{C}^2$$

↑ この講義だけの記号

たし算, $\mathbb{C}$倍 : ベクトル空間として

かけ算 : $\theta^2 = 0$, 分配則

$$G_1 \ni f(\theta) = a + \theta b$$ (θの1次式に見える)

- 微分

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) := b$$

↑ 定義

・ $f(\theta) = a + b\theta$

$$\theta f(\theta) = a\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta f(\theta)\right) = a$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) = b$$

$$\theta \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) = b\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta f(\theta)\right) + \theta\frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) = a + b\theta = f(\theta)$$

$\Updownarrow$

こう書く. $\frac{\partial}{\partial\theta}\theta + \theta\frac{\partial}{\partial\theta} = 1$

($\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x} = 1$ のアナロジー)

$\Downarrow$

θ, $\frac{\partial}{\partial\theta}$ のなす代数

$\theta^2 = 0$, $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 = 0$, $\left\{\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right\} = 1$ "Clifford代数"

◎ 生成子 N 個

$$\theta_1, \cdots, \theta_N$$

$G_N := \{1, \theta_1, \cdots, \theta_N$ のかけ算, $\mathbb{C}$倍, たし算でできるもの全体. ただし. $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i\}$

$\theta_i^2 = 0 \Rightarrow$ ベクトル空間として 2^N 次元

例 $N=2$ の場合

$$a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_{12}\theta_1\theta_2$$

$G_N \ni f(\theta) = \theta$ の多項式

◦ 微分 〜 多項式としての微分だけど順序に注意.

θ_1に注目

$$f(\theta) = A + \theta_1 B \quad (\theta_1^2 = 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1} f(\theta) := B$$

$\frac{\partial}{\partial\theta_i}$ も同様 (θ_i の入っている項 $= \theta_i B$ と書いたとき. B)

例 $N=2$

$$f(\theta) = a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_{12}\theta_1\theta_2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1} f(\theta) = a_1 + a_{12}\theta_2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2} f(\theta) = a_2 - a_{12}\theta_1$$

$$G_N = G_{N,0} \oplus G_{N,1}$$

ベクトル空間としての直和

$$G_{N,0} := \{\theta\text{を偶数個かけたものの線型結合}\}$$

$$G_{N,1} := \{\ 〃\ \text{奇}\ 〃\ \}$$

$A_0, B_0 \in G_{N,0}$, $A_1, B_1 \in G_{N,1}$

① $A_0 B_0,\ A_1 B_1 \in G_{N,0}$, $B \in G_N$

② $A_0 B_1,\ A_1 B_0 \in G_{N,1}$

③ $[A_0, B_0] = 0$

④ $[A_0, B_1] = 0$

⑤ $\{A_1, B_1\} = 0$

⑥ $\dfrac{\partial}{\partial\theta_j}(A_0 B) = \left(\dfrac{\partial}{\partial\theta_j} A_0\right) B + A_0 \dfrac{\partial}{\partial\theta_j} B$

⑦ $\dfrac{\partial}{\partial\theta_j}(A_1 B) = \left(\dfrac{\partial}{\partial\theta_j} A_1\right) B - A_1\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta_j} B\right)$

演習問題　①〜⑦を示せ

☆ Lagrangian

$$\hat{H} = \omega \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \qquad \{\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger\} = 1$$

⇓ "古典"

$$H = \omega \psi^\dagger \psi$$

$\psi^\dagger, \psi$: Grassmann代数の独立な生成子

$$\{\psi, \psi^\dagger\}_P = i$$

Poisson 反カッコ

$$\{\psi, P_\psi\}_P = 1$$

P_ψ : ψの正準共役運動量

$$P_\psi = -i\psi^\dagger$$

$$\{A, B\}_P := \frac{\partial A}{\partial \psi}\frac{\partial B}{\partial P_\psi} - (-1)^{|A||B|}\frac{\partial B}{\partial \psi}\frac{\partial A}{\partial P_\psi}$$

$$(-1)^{|A||B|} = \begin{cases} +1 & A \in G_{N,0} \text{ or } B \in G_{N,0} \\ -1 & A \in G_{N,1} \text{ and } B \in G_{N,1} \\ \text{混ざっている場合それぞれの成分に分けて考える} & \end{cases}$$

Lagrangian

$$L = \dot{\psi} P_\psi - H$$

$$= -i\dot{\psi}\psi^\dagger - \omega\psi^\dagger\psi$$

$$L = i\psi^\dagger\dot{\psi} - \omega\psi^\dagger\psi$$

逆にもたどれる. $P_\psi = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} L = -i\psi^\dagger$

$$H = \dot{\psi} P_\psi - L = \omega\psi^\dagger\psi$$

$\boxed{\dot{\psi}\text{は何？}}$

※ 共役(†)について.

- Grassmann 代数に元々 † が備っているわけではない.

- † を使いたいなら、次を満たすように設定する

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \ , \quad a \in \mathbb{C} \Rightarrow a^\dagger = a^* \ (\text{複素共役})$$

※ $L = i\psi^\dagger \dot{\psi} - \omega \psi^\dagger \psi$

$P_\psi = \dfrac{\partial}{\partial \dot{\psi}} L = -i\psi^\dagger$ だが $P_{\psi^\dagger} = \dfrac{\partial}{\partial \dot{\psi}^\dagger} L = 0$

$$H = \dot{\psi} P_\psi + \dot{\psi}^\dagger P_{\psi^\dagger} - L = \omega \psi^\dagger \psi$$

答えは正しい.

本当は拘束系の取りあつかいをしなければいけない.
Majorana fermion のとき. 素朴にやると間違った答えを出す.

☆ 作用

$\psi(t)$, $\psi^\dagger(t)$ 　 t でラベルされる ∞ 個の生成子

（θ_i とか書いてたやつの i が t になっている）

$$\dot{\psi}(t) = \underbrace{\lim_{a\to 0}}_{\text{こういうのがあるふりをする.}} \frac{1}{a}\left(\psi(t+a) - \psi(t)\right)$$

問題なし

$$S = \int \underbrace{dt}_{\underbrace{\lim_{a\to 0}}_{\text{こういうのがあるふりをする.}} \underbrace{\sum_n a \quad t=na}_{\text{問題なし}}} \left(i\psi^\dagger(t)\dot{\psi}(t) - \omega\psi^\dagger(t)\psi(t) \right)$$

☆ 一般化

$$\{\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_m\} = 0 \ , \ \{\hat{\psi}^{\dagger n}, \hat{\psi}^{\dagger m}\} = 0$$

$$\{\hat{\psi}_n, \hat{\psi}^{\dagger m}\} = \delta_n^m$$

$$\hat{H} = \sum_{n,m} \hat{\psi}^{\dagger n} h_n{}^m \hat{\psi}_m$$

$$\Downarrow$$

$$L = \sum_n i \psi^{\dagger n} \dot{\psi}_n - \sum_{n,m} \psi^{\dagger n} h_n{}^m \psi_m$$

$$S = \int dt \ L$$

☆ 例：4次元 Dirac fermion

$$n \to (\vec{x}, a) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad a = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_n \to \int d^3x \sum_a \quad , \quad \delta_{n,m} \longrightarrow \delta_{a,b}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$n \to (\vec{x}, a)$
$m \to (\vec{y}, b)$

フェルミオン演算子

$$\hat{\psi}^a(\vec{x}), \quad \hat{\psi}^\dagger_a(\vec{x})$$

$$\{\hat{\psi}^a(\vec{x}), \hat{\psi}^\dagger_b(\vec{y})\} = \delta^a_b\, \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\hat{\psi}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}^1(\vec{x}) \\ \hat{\psi}^2(\vec{x}) \\ \hat{\psi}^3(\vec{x}) \\ \hat{\psi}^3(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) = (\hat{\psi}^\dagger_1(\vec{x}), \hat{\psi}^\dagger_2(\vec{x})\ \hat{\psi}^\dagger_3(\vec{x})\ \hat{\psi}^\dagger_4($$

$\alpha_i : i = 1, 2, 3$
$\beta :$ 4×4 エルミート行列

異なるものは互いに反交換，$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$

$$h = -i\alpha_i \partial_i + m\beta$$

$$\left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$ （iの和の記号は省略）

$$\hat{H} = \int d^3x\, \hat{\psi}^\dagger h \hat{\psi}$$

$\Downarrow$

Lagrangian 密度

$$L = \int d^3x \left(i\psi^\dagger \dot{\psi} - \psi^\dagger h \psi \right) = \int d^3x \, \mathcal{L}$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger(x) = \left(\psi^\dagger_1(x) \; \psi^\dagger_2(x) \; \psi^\dagger_3(x) \; \psi^\dagger_4(x) \right)$$

$$\cdot = \frac{\partial}{\partial t} = \partial_0$$

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger (i\partial_0 + i\alpha_i \partial_i - m\beta) \psi$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi} (-i\gamma^\mu \partial_\mu - im) \psi} \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$$

$$i\gamma^0 := \beta, \quad -\gamma^0\gamma^i := \alpha_i$$

$$(\gamma^0 = -i\beta, \quad \gamma^i = -i\beta\alpha_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}}$$

(Convention の違いに注意)

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S = \int d^4x\ \bar{\psi}\left(-i\gamma^\mu \partial_\mu - im\right)\psi}$$

- 作用は明自なLorentz不変性を持つ

- 実際の教科書、研究などで

まず 作用 ← 対称性など

正準量子化 (正則化) 経路積分量子化(書くだけ)

演算子形式の量子論 $\Longleftrightarrow$ 経路積分形式の量子論

4. 経路積分

☆ Grassmann 代数の積分

◎ θ : G数 (Grassmann代数の生成子)

$$\int d\theta := \frac{\partial}{\partial\theta}$$

定義

ふつうの積分と似たところ

$$\int d\theta \frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta) = 0$$

(cf. ふつうの積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} f(x) = 0$$

◎ 変数変換

$\theta' = A\theta$ 　 $A \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\left(\begin{array}{l} A \in G_{N,0} \\ \exists \frac{1}{A}, \ \theta\text{は入っていない} \end{array} \right)$

$$\Rightarrow \int d\theta' = \int d\theta \frac{1}{A}$$

$\theta_i \quad (i=1,\cdots,K)$: G数

$$\theta'_i = \sum_{j=1}^{K} A_{ij}\,\theta_j \qquad A_{ij} \in \mathbb{C}\ ,\ \det A \neq 0$$

$\Big($ $A_{ij} \in G_{N,0}$

$\exists(\det A)^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ $\quad \theta_1,\cdots,\theta_K$ は入っていない $\Big)$

$$\int d\theta'_1 \cdots d\theta'_K = \int d\theta_1 \cdots d\theta_K \frac{1}{\det A}$$

(普通の積分と逆)

◎ ガウス積分

- $\psi, \psi^\dagger$: G数, $A \in \mathbb{C}$

$$\int d\psi^\dagger d\psi\ e^{-\psi^\dagger A \psi} = \int d\psi^\dagger d\psi \underbrace{\left(1 - A\,\psi^\dagger\psi\right)}_{1 + A\psi\psi^\dagger}$$

$$= A$$

- $\psi_1,\cdots,\psi_K,\ \psi^\dagger_1,\cdots,\psi^\dagger_K$: G数, $A_{ij} \in G_{N,0}$

$$\boxed{\int \prod_{i=1}^{K} d\psi^\dagger_i d\psi_i\ e^{-\sum_{ij} \psi^\dagger_i A_{ij} \psi_j} = \det A}$$

◎ デルタ関数　　　　θ, ψ : G数

$$f(\theta) = a + \theta b$$

$$\int d\theta (\theta - \psi) f(\theta) = \int d\theta (\theta a - \psi a - \psi \theta b)$$

$$= a + \psi b = f(\psi)$$

$\Rightarrow$　$\delta(\theta) := \theta$　と定義するのがよさそう

積分表示

$$\int d\theta \, e^{\theta \psi} = \psi = \delta(\psi)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{ipx} = 2\pi \delta(p) \right.$$

のアナロジー)

補足：

作用とか

汎関数 〜 無限個の変数の関数

	アナロジー	
$\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N) \in \mathbb{R}^N$	$\Longleftrightarrow$	$\theta_1, \cdots, \theta_N$: G数
ϕの関数 $S(\phi)$		$S(\theta)$: G代数の元
微分 $\dfrac{\partial S}{\partial \phi_i}$		微分 $\dfrac{\partial}{\partial \theta_i} S(\theta)$
積分 $\int \prod_i d\phi_i \, e^{-S(\phi)}$		積分 $\int d\theta_1 \cdots d\theta_N \, e^{-S(\theta)}$

"$N \to \infty$"

$\phi(t) \leftarrow\!\!\!\sim \phi_i$ アナロジー $\theta(t) \leftarrow\!\!\!\sim \theta_i$

$\phi(t)$: 関数	$\Longleftrightarrow$	
$S[\phi]$ 汎関数		$S[\theta]$
微分 $\dfrac{\delta S}{\delta \phi(t)}$		微分 $\dfrac{\delta S}{\delta \theta(t)}$
積分 $\int D\phi \, e^{-S(\phi)}$ New		積分 $\int D\theta \, e^{-S(\theta)}$ New

「経路積分」量子力学の定式化に使える.

☆ Coherent 状態

例

$$\hat{\psi},\ \hat{\psi}^\dagger\ ,\quad \hat{\psi}^2=\hat{\psi}^{\dagger 2}=0$$

$$\{\hat{\psi},\hat{\psi}^\dagger\}=1$$

$$\hat{H}=\omega\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \quad\Rightarrow\quad \hat{\psi}|0\rangle=0,\ \ |1\rangle:=\hat{\psi}^\dagger|0\rangle$$

ψ : G数，（$\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ とも反交換，$|0\rangle$ は bosonic.
$\Downarrow$
$|1\rangle$ は fermionic.）

$|\psi\rangle$: $\hat{\psi}|\psi\rangle = |\psi\rangle\psi$

Coherent 状態

$$|\psi\rangle=|0\rangle+|1\rangle\psi$$

$$\left(\ \hat{\psi}|\psi\rangle=|0\rangle\psi,\ \ |\psi\rangle\psi=|0\rangle\psi\ \right)$$

$$\langle\psi|\hat{\psi}^\dagger=\psi^\dagger\langle\psi| \qquad \langle\psi|=\langle 0|+\psi^\dagger\langle 1|$$

完全性関係

$$\int d\psi^\dagger d\psi\ |\psi\rangle e^{-\psi^\dagger\psi}\langle\psi| = 1$$

内積

$$\langle\psi'|\psi\rangle=e^{\psi'^\dagger\psi}$$

計算

$$\int d\psi^\dagger d\psi\, |\psi\rangle e^{-\psi^\dagger\psi} \langle\psi|$$

$$= \int d\psi^\dagger d\psi\, (|0\rangle + |1\rangle\psi)(1-\psi^\dagger\psi)(\langle 0| + \psi^\dagger\langle 1|)$$

$$= \int d\psi^\dagger d\psi\, (\cdots\ -\psi^\dagger\psi\, |0\rangle\langle 0| + \psi\psi^\dagger |1\rangle\langle 1|)$$

$$= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$$

$$= 1$$

$$\langle\psi'|\psi\rangle = (\langle 0| + \psi'^\dagger\langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle\psi)$$

$$= 1 + \psi'^\dagger\psi$$

$$= e^{\psi'^\dagger\psi}$$

※ Bosonic な演算子

$$\mathrm{Tr}\,\hat{O} = \langle 0|\hat{O}|0\rangle + \langle 1|\hat{O}|1\rangle = -\int d\psi^\dagger d\psi\, e^{\psi^\dagger\psi} \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$$

$$= -\int d\psi^\dagger d\psi\, (1+\psi^\dagger\psi)(\langle 0| + \psi^\dagger\langle 1|)\hat{O}(|0\rangle + |1\rangle\psi)$$

$$= -\int d\psi^\dagger d\psi \left(\psi^\dagger\psi\langle 0|\hat{O}|0\rangle + \psi^\dagger\langle 1|\hat{O}|1\rangle\psi\right)$$

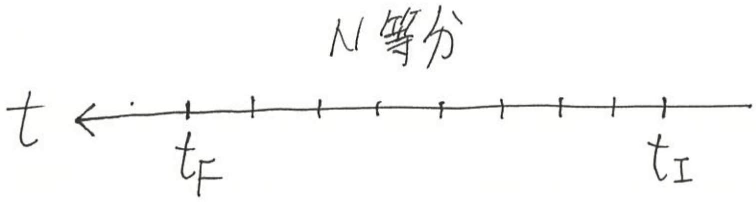
$$= \langle 0|\hat{O}|0\rangle + \langle 1|\hat{O}|1\rangle$$

$$= \mathrm{Tr}\,\hat{O}$$

☆ Lorentzian 経路積分

◎ さっきの例

$A = \langle 0 | e^{-i(t_F - t_I)\hat{H}} | 0 \rangle$ を書きかえていく



$$\frac{t_F - t_I}{N} =: a$$

$$= \langle 0 | e^{-ia\hat{H}} e^{-ia\hat{H}} \cdots e^{-ia\hat{H}} | 0 \rangle$$

$\psi_i^\dagger, \psi_i \ (i = 1, \cdots, N-1)$ G数

$$1 = \int d\psi_i^\dagger d\psi_i \, |\psi_i\rangle e^{-\psi_i^\dagger \psi_i} \langle \psi_i |$$

- $\langle 0 | = \langle \psi_N | \Big|_{\psi_N^\dagger = 0}$, $|0\rangle = |\psi_0\rangle \Big|_{\psi_0 = 0}$
- $\langle \psi_i | e^{-ia\hat{H}} | \psi_{i-1} \rangle \simeq \langle \psi_i | (1 - ia\omega \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}) | \psi_{i-1} \rangle$

$$\simeq \underbrace{\langle \psi_i | \psi_{i-1} \rangle}_{} - ia\omega \psi_i^\dagger \underbrace{\langle \psi_i | \psi_{i-1} \rangle}_{e^{\psi_i^\dagger \psi_{i-1}}} \psi_{i-1}$$

$$\simeq e^{\psi_i^\dagger \psi_{i-1} - ia\omega \psi_i^\dagger \psi_{i-1}}$$

$$A = \int \prod_{i=1}^{N-1} d\psi_i^\dagger d\psi_i \exp\Big(\sum_{i=1}^{N}\big(\underbrace{-\psi_i^\dagger\psi_i+\psi_i^\dagger\psi_{i-1}}_{-\psi_i^\dagger\underbrace{(\psi_i-\psi_{i-1})}_{=:a\dot{\psi}_i} \;=-a\psi_i^\dagger\dot{\psi}_i} - ia\omega\,\psi_i^\dagger\psi_{i-1}\big)\Big)\Big|_{\text{B.C}}$$

$$= \int_{\text{B.C.}} \prod_{i=1}^{N-1} d\psi_i^\dagger d\psi_i \exp\Big(i\sum_{i=1}^{N} a\big(i\psi_i^\dagger\dot{\psi}_i - \omega\,\psi_i^\dagger\psi_{i-1}\big)\Big)$$

$(N\to\infty,\ a\to 0)$ $\quad \psi(t):\ \psi(t_I+ai) := \psi_i$

$$\longrightarrow \int_{\text{B.C.}} D\psi^\dagger D\psi \exp\Big[i\underbrace{\int_{t_I}^{t_F} dt\,\big(i\psi^\dagger(t)\dot{\psi}(t) - \omega\,\psi^\dagger(t)\psi(t)\big)}_{S[\psi,\psi^\dagger]}\Big]$$

B.C.: $\psi(t_I) = \psi^\dagger(t_F) = 0$

作用

$$= \int_{\text{B.C.}} D\psi^\dagger D\psi\, e^{iS[\psi,\psi^\dagger]}$$

◎ たくさんある場合

$$\hat{\psi}_n, \quad \hat{\psi}_n^\dagger, \quad \hat{H} = \sum_n \omega_n \hat{\psi}_n^\dagger \hat{\psi}_n$$

$$n = 1, \cdots, M \qquad (\omega_n > 0)$$

・ Coherent 状態

$$|\psi\rangle \qquad \psi = (\psi_1, \cdots, \psi_M)$$

$$\psi_n, \psi_n^\dagger \ : \text{G数}$$

- $\hat{\psi}_n |\psi\rangle = |\psi\rangle \psi_n$

$$\Rightarrow \ |\psi\rangle = e^{-\sum_n \psi_n \hat{\psi}_n^\dagger} |0\rangle = \prod_n (1 - \psi_n \hat{\psi}_n^\dagger) |0\rangle$$

$$(|0\rangle : \hat{\psi}_n |0\rangle = 0)$$

$$= \bigotimes_n (|0\rangle_n + |1\rangle_n \psi_n)$$

- $\langle \psi | = \langle 0 | e^{-\sum_n \hat{\psi}_n \psi_n^\dagger}$

$$\Rightarrow \circ \ \langle \psi' | \psi \rangle = e^{\sum_n \psi_n'^\dagger \psi_n}$$

$$\circ \ \int \prod_n d\psi_n^\dagger d\psi_n \ |\psi\rangle e^{-\sum_n \psi_n^\dagger \psi_n} \langle \psi | = 1$$

同様に

$$A = \langle 0 | e^{-i(t_F - t_I)\hat{H}} | 0 \rangle$$

$$= \int \left(\prod_n \prod_i d\psi^\dagger_{in} \, d\psi_{in} \right)$$

$$\times \exp\left[i \sum_{i=1}^{N} a \left(\sum_n i \psi^\dagger_{in} \dot{\psi}_{in} - \sum_n \omega_n \psi^\dagger_{in} \psi_{(i-1)n} \right) \right]$$

$$\text{B.C.} \quad \psi_n(t_I) = \psi^\dagger_n(t_F) = 0$$

$$N \to \infty, \; a \to 0$$

$$\to \int_{\text{B.C.}} D\psi^\dagger D\psi \, \exp\left[\underbrace{i \int_{t_I}^{t_F} dt \left(\sum_n i \psi^\dagger_n \dot{\psi}_n - \sum_n \omega_n \psi^\dagger_n \psi_n \right)}_{S[\psi, \psi^\dagger]} \right]$$

$$= \int_{\text{B.C.}} D\psi^\dagger D\psi \, e^{iS[\psi, \psi^\dagger]}$$

一般に $\hat{H} = \sum_{n,m} \hat{\psi}^\dagger_n h_{nm} \hat{\psi}_m$ 対角化で上に帰着

‖

ユニタリー行列

$$A = \int_{\text{B.C.}} D\psi^\dagger D\psi \, e^{iS[\psi, \psi^\dagger]}$$

$$S[\psi, \psi^\dagger] = \int_{t_I}^{t_F} dt \left(\sum_n i \psi^\dagger_n \dot{\psi}_n - \sum_{n,m} \psi^\dagger_n h_{nm} \psi_m \right)$$

B.C.は 対角化した基底で考える

※ 実際に教科書にのっている場の理論

$i\varepsilon$ 処方，$t_I \to -\infty$，$t_F \to +\infty$． B.C. は忘れてよい．

☆ Euclidean 経路積分

◎ 一般的な話

$$e^{-it\hat{H}}$$ で $t=-i\beta$ としたものと思える ⇝「虚時間形式」

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right)$$ 正準分配関数

- これを計算することが系を理解する手段になる.

例 $$Z = \sum_n \langle n| e^{-\beta\hat{H}} |n\rangle$$
$$= e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1} + \cdots$$

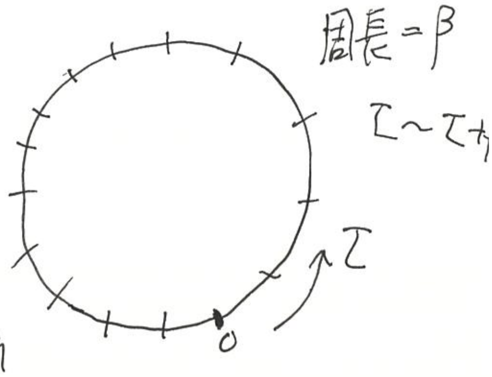
→ エネルギーのスペクトル.

- 「Lorentzian の理論」とは別に「Euclidean の理論」があるわけではない.

◎

1コの場合 $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$

$$H = \omega\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$$



$$\frac{\beta}{N} = a$$

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right)$$
$$= -\int d\psi_0^\dagger d\psi\, e^{\psi_0^\dagger\psi_0} \langle\psi_0| e^{-\beta\hat{H}} |\psi_0\rangle$$
$$= -\int d\psi_0^\dagger d\psi_0\, e^{\psi_0^\dagger\psi_0} \langle\psi_0| e^{-a\hat{H}}\, e^{-a\hat{H}} \cdots e^{-a\hat{H}} |\psi_0\rangle$$

$$\int d\psi_i^\dagger d\psi_i\, |\psi_i\rangle e^{-\psi_i^\dagger\psi_i} \langle\psi_i|$$
$$i = 1, \cdots, N$$

$$-\int d\psi_0^\dagger d\psi_0 e^{\psi_0^\dagger \psi_0} \underbrace{\langle \psi_0 | \psi_N \rangle}_{e^{\psi_0^\dagger \psi_N}} F(\psi_0)$$

$$= \int d\psi_0 \underbrace{\int d\psi_0^\dagger \, e^{\psi_0^\dagger (\psi_0 + \psi_N)}}_{\delta(\psi_0 + \psi_N)} F(\psi_0)$$

$$= F(-\psi_N)$$

$$Z(\beta) = \int \prod_{i=1}^{N} d\psi_i^\dagger d\psi_i \prod_{i=1}^{N} e^{-\psi_i^\dagger \psi_i} \langle \psi_i | e^{-a\hat{H}} | \psi_{i-1} \rangle$$

$$\boxed{\psi_0 = -\psi_N}$$

$$\langle \psi_i | e^{-a\hat{H}} | \psi_{i-1} \rangle \fallingdotseq e^{\psi_i^\dagger \psi_{i-1} - a\omega \psi_i^\dagger \psi_{i-1}}$$

$$Z(\beta) = \int_{B.C.} \prod_{i=1}^{N} d\psi_i^\dagger d\psi_i \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} a \left(\psi_i^\dagger \mathring{\psi}_i + \omega \psi_i^\dagger \psi_{i-1} \right) \right)$$

$$\mathring{\psi}_i := \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{a} \quad \cdots (*)$$

$\psi(\tau) : \psi(ia) = \psi_i$

$\psi^\dagger(\tau) : \psi^\dagger(ia) \doteq \psi_i^\dagger$

$\downarrow a \to 0,\ N \to \infty$

$$Z(\beta) = \int_{B.C.} D\psi^\dagger D\psi \, e^{-S_E[\psi, \psi^\dagger]}$$

$$S_E[\psi, \psi^\dagger] = \int_0^\beta d\tau \left(\psi^\dagger \mathring{\psi} + \omega \psi^\dagger \psi \right) \qquad \mathring{\ } = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

"Euclidean action"

元の action と比べて形式的に

$$\begin{cases} \tau = it \\ -S_E = iS \end{cases}$$ の関係にある

$$S = \int dt \left(i\psi^\dagger \dot{\psi} - \omega \psi^\dagger \psi \right)$$

$$S_E = -iS = -i\int dt \left(i\psi^\dagger \dot{\psi} - \omega \psi^\dagger \psi \right)$$

$$= \int d\tau \left(\psi^\dagger \mathring{\psi} + \omega \psi^\dagger \psi \right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} = -i \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

B.C. $\psi(\beta) = -\psi(0)$

$\psi^\dagger$? ((*)の中には $\psi_0^\dagger$ が出てこない…)

$\psi^\dagger \psi$ (bosonic) を一価にすべき

$$\Rightarrow \boxed{\psi^\dagger(\beta) = -\psi^\dagger(0)}$$

たくさんフェルミオンの自由度

$$\hat{H} = \sum_{m,n} \hat{\psi}_m^\dagger h_{mn} \hat{\psi}_n$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \hat{H}}\right) = \int_{B.C.} D\psi^\dagger D\psi \, e^{-S_E[\psi,\psi^\dagger]}$$

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \left(\sum_n \psi_n^\dagger \dot{\psi}_n + \sum_{m,n} \psi_m^\dagger h_{mn} \psi_n\right)$$

例：4次元のDiracフェルミオン

$$h = -i\alpha_i \partial_i + m\beta$$

$$x^4 := \tau \qquad \psi(x) = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger(x) = (\circ \ \circ \ \circ \ \circ)$$

$$S_E = \underbrace{\int_0^\beta d\tau \int d^3x}_{\int d^4x} \underbrace{\left(\psi^\dagger \partial_4 \psi + \psi^\dagger(-i\alpha_i \partial_i + m\beta)\psi\right)}_{\mathcal{L}_E}$$

$$\gamma^i = -i\beta\alpha_i\,, \quad \gamma^0 = -i\beta\,, \quad \gamma^4 = i\gamma^0 = \beta$$

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$$

$$\mathcal{L}_E = \bar{\psi}(\underbrace{-\gamma^0}_{i\gamma^4}\partial_4 + i\gamma^i\partial_i + im)\psi$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + im)\psi$$

$$(\mu = 1, 2, 3, 4)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}\,, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

積分変数の変換

$$\psi^\dagger \to \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$$

$$\int D\psi^\dagger D\psi = \int D\bar{\psi} D\psi$$

$$Z(\beta) = \int D\bar{\psi} D\psi\, e^{-S_E(\psi, \bar{\psi})}$$

☆ 演算子の挿入

$\hat{A}$ ：時刻0の演算子
(Schrödinger pic の)

虚時間の"Heisenberg 演算子" $(\tau < \beta)$

$$\hat{A}(\tau) := e^{\tau \hat{H}} \hat{A} e^{-\tau \hat{H}}$$

(※ $\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$ なら $\hat{A}(\tau)^{\dagger} = \hat{A}(-\tau)$)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{A}(\tau) = [\hat{H}, \hat{A}(\tau)]$$

$$\mathrm{Tr}[e^{-\beta \hat{H}} T(\hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) \hat{A}_3(\tau_3) \cdots \hat{A}_k(\tau_k))]$$

T：(虚)時間順序積

$$T(\hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2)) = \begin{cases} \hat{A}_1(\tau_1) \hat{A}_2(\tau_2) & \tau_1 > \tau_2 \\ \underbrace{(-1)^{|\hat{A}_1||\hat{A}_2|}}_{\text{両方fermionicなら} -1,\ \text{それ以外} +1} \hat{A}_2(\tau_2) \hat{A}_1(\tau_1) & \tau_2 < \tau_1 \end{cases}$$

$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \cdots > \tau_k$ を仮定

$$= \mathrm{Tr}\left[e^{-(\beta-\tau_1)\hat{H}} \hat{A}_1 \, e^{-(\tau_1-\tau_2)\hat{H}} \hat{A}_2 \cdots \right]$$

↑完全系を入れていく

$$\hat{A} \rightarrow A$$

c-number の対応物

$$\hat{A} = \hat{\psi} \rightarrow A = \psi \qquad \hat{\psi}|\psi\rangle = |\psi\rangle\psi$$

$$\hat{A} = \hat{\psi}^\dagger \rightarrow A = \psi^\dagger \qquad \langle\psi|\hat{\psi}^\dagger = \psi^\dagger\langle\psi|$$

$\vdots$

(※ψ, $\psi^\dagger$ で書けない演算子もある)

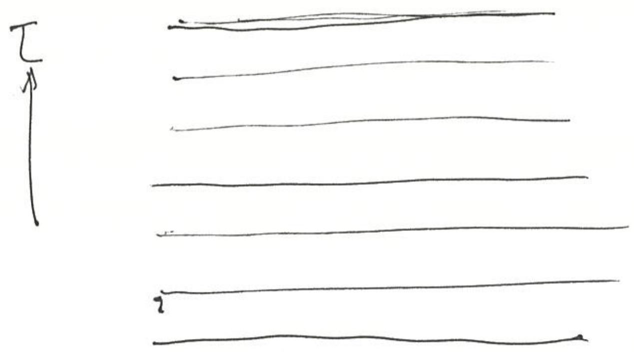
$$= \int D\psi^\dagger D\psi \, A_1(\tau_1) A_2(\tau_2) \cdots A_k(\tau_k) \, e^{-S_E(\psi,\psi^\dagger)}$$

$$=: Z(\beta) \langle A_1(\tau_1) A_2(\tau_2) \cdots A_k(\tau_k) \rangle$$

☆ 演算子形式 $\longleftrightarrow$ EPI

時空 d 次元 の場の理論　演算子

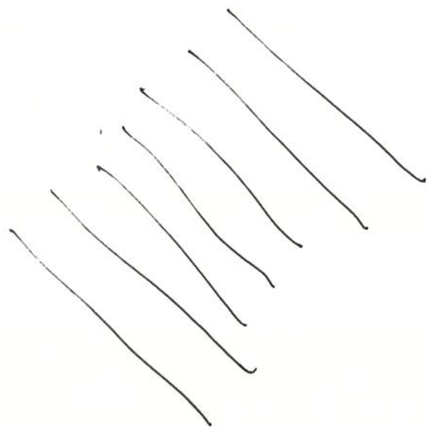
空間 $d-1$ 次元　$\vec{x}$　$\hat{\psi}(\vec{x}),\ \hat{\psi}^{\dagger}(\vec{x})$

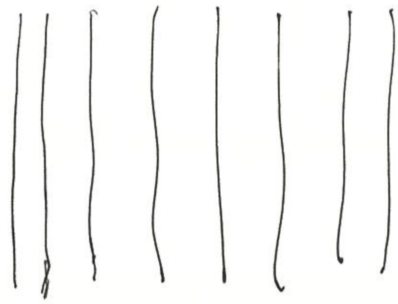


$\Longleftrightarrow$ EPI

$$\int D\bar{\psi} D\psi\, e^{-S_E}$$

すべての方向が対等





別の演算子形式

Euclidean 経路積分の使い方の例：保存カレント

保存カレント $\hat{J}^\mu(x)$: $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$\partial_\mu \hat{J}^\mu(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ {}^\forall \alpha, \beta \quad \langle \alpha | \partial_\mu \hat{J}^\mu(x) | \beta \rangle = 0$$

$$\partial_\mu \hat{J}^\mu = \partial_0 \hat{J}^0 + \partial_i \hat{J}^i$$

$$= i[\hat{H}, \hat{J}^0] + \partial_i \hat{J}^i$$

$$= [\hat{H}, \hat{J}^4] + \partial_i \hat{J}^i \qquad \hat{J}^4 := i\hat{J}^0$$

$$= \partial_4 \hat{J}^4 + \partial_i \hat{J}^i$$

$$= \underline{\partial_\mu \hat{J}^\mu} \qquad \underline{\mu = 1, 2, 3, 4}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}} T\left(\partial_\mu \hat{J}^\mu(x) \hat{A}_1(x_1) \hat{A}_2(x_2) \cdots \right)\right] = 0$$

$${}^\forall \hat{A}_1(x_1), \cdots$$

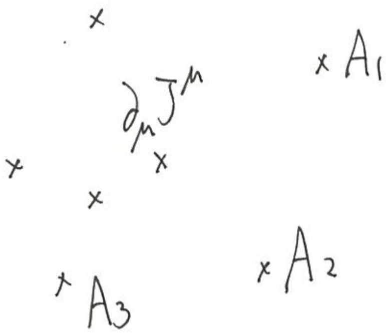
$x_1, \cdots$ は x と異なる点

$$\Leftrightarrow \frac{1}{Z(\beta)} \int D\Psi D\Psi \, \partial_\mu J^\mu(x) A_1(x_1) \cdots e^{-S_E} = 0$$

$$= \langle \partial_\mu J^\mu(x) A_1(x_1) \cdots \rangle$$

保存カレント ⟺ $\langle \partial_\mu J^\mu(x) \cdots \rangle = 0$

任意の演算子の挿入
xとは異なる点



これのことを

$\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ と略記

保存カレントがある（対称性がある）	⟺	Euclidean 経路積分で $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$

※ † に注意

例：$\langle \alpha | \hat{J}^0 | \alpha \rangle \in \mathbb{R}$

$(\hat{J}^{0\dagger} = \hat{J}^0)$

$\Rightarrow \langle \alpha | \hat{J}^4 | \alpha \rangle \in i\mathbb{R}$

Euclidean 経路積分の中で
† を定義してもいいが、それが有用とは限らない。
演算子形式の † と合っているとは限らない。

6. 群とLie代数

対称性を表すための数学的構造

☆群

定義　G：集合

- かけ算　$g, h \in G \Rightarrow gh \in G$
- $^\exists 1 \in G$　$g1 = 1g = g$
- $^\exists g^{-1}$　$gg^{-1} = g^{-1}g = 1$

・準同型（homomorphism）

写像 $f : G \to H$

$$f(gh) = f(g)f(h)$$（かけ算の構造を保つ）

- 同型　全単射（bijection）で準同型のこと
- $^\exists$同型 $f : G \to H \Rightarrow G \simeq H$

"GとHは同型"

GとHはかけ算の構造が同じ

◎ 同型類を考える!!

（かけ算の構造以外は無視）

例：V：ベクトル空間

$$GL(V) := \{ f : V \to V \text{ linear, bijection} \}$$

$\sim$（$\det \neq 0$ の行列）

$U(N) = \{ N \times N$ ユニタリー行列 $\}$

$SU(N) = \{ g \in U(N) \mid \det g = 1 \}$

$O(N) = \{ N \times N$ 実直交行列 $\}$

$SO(N) = \{ g \in O(N) \mid \det g = 1 \}$

$O(M,N) = \{ (M+N) \times (M+N)$ 実行列 $g \mid$

$$g^T Y g = Y \}$$

$$Y := \begin{array}{c} M\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ N\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & +1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & +1 \end{pmatrix}$$

例

$O(1,3)$: 4次元 Lorentz 群

☆ 群の表現

G 群　　V : ベクトル空間

$$\rho : G \longrightarrow GL(V) \quad \text{hom}$$

(ρ, V) のことを "G の表現"

ρ が単射 $\Longleftrightarrow$ "忠実 (faithful) な表現"

☆ Lie代数

定義 ～（無限小変換が作る数学的構造）
$\mathfrak{g}$

- ベクトル空間
- $[\ ,\ ]$ ：カッコ積

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad \text{bilinear}$$

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

準同型

$f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$

linear, $f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$

同型：bijection, hom

$^{\exists}$同型 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h} \iff \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$

$\mathfrak{g}$と$\mathfrak{h}$は同型

（Lie代数の構造が同じ）

◎ 同型類を考える!!

（Lie代数の構造以外は無視）

◎ $\mathfrak{g}$: Lie代数

T_a : $a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{g}$　ベクトル空間としての basis

$$[T_a, T_b] = \sum_c i f_{ab}{}^c T_c$$

$f_{ab}{}^c$: 構造定数

構造定数が同じ ⇒ 同型

☆ 表現

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathfrak{g}$: Lie代数, V : ベクトル空間

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V) \quad \text{hom}$$

(ρ, V) "$\mathfrak{g}$の表現"

ρ : 単射 ⇒ "忠実な表現"

(ρ, V) $\mathfrak{g}$の表現

$\big\downarrow \exp$

$\tilde{G}$の表現

・不変部分空間

(ρ, V) $\mathfrak{g}$ の rep

$\underset{\text{部分ベクトル空間}}{V \supset W}$ $\quad {}^\forall X \in \mathfrak{g} \quad \rho(X)W \subset W$

W :「不変部分空間」

・既約表現

(ρ, V) $\{0\}$, V 以外に不変部分空間がない

「既約表現」

- 直和

(ρ_1, V_1) , (ρ_2, V_2)

$$\Rightarrow (\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$$

- 完全可約

(ρ, V) が 1つ以上の既約表現の直和で書ける

- Unitary表現

V にエルミート内積がある

(ρ, V) が Unitary表現 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \rho(X)^\dagger = \rho(X) \quad {}^\forall X \in \mathfrak{g}$

- <u>定理</u>：Unitary表現は完全可約

$$\text{Lie群(〜連続的な群)}\ G \xrightarrow{\text{1の近く}} \text{Lie代数}\ \mathfrak{g}$$

exp

だいたい戻れる

こちらで考える方がやさしい

$$\tilde{G}:\text{単連結} \underset{\text{1対1}}{\longleftrightarrow} \mathfrak{g}$$

例：

$$\mathrm{End}(V) := \{ f : V \to V \ \text{linear} \}$$

$\uparrow$

$(GL(V))$

$$u(N) := \{ N \times N \ \text{エルミート行列} \}$$

$$su(N) := \{ X \in u(N),\ \mathrm{tr}X = 0 \}$$

$$so(N) := \{ N \times N \ \text{純虚反対称行列} \}$$

$$so(M,N) := \{ (M+N) \times (M+N) \ \text{純虚行列} \quad X^{T}Y + YX = 0 \}$$

☆ Lie代数とLie群

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie群} & & \text{Lie代数} \\ SO(3) & \longrightarrow & so(3) \\ \cancel{\cong} & & \cong \\ SU(2) & \longrightarrow & su(2) \end{array}$$

（構造定数が同じ）

ここの説明

$T_a : \quad a = 1, 2, 3$

$$[T_a, T_b] = \sum_c i\, \varepsilon_{abc} T_c$$

$T_a^{(1)}$: スピン1表現

$\varepsilon_{123} = +1$
完全反対称

$$SO(3) \ni e^{i\alpha T_3^{(1)}}$$

3軸まわりα回転

$$T_a^{(1/2)} = \frac{1}{2}\sigma_a$$

（スピン$\frac{1}{2}$表現）

$$SU(2) \ni e^{i\alpha T_3^{(1/2)}}$$

$\alpha = 2\pi$ のとき.
$$e^{2\pi i \frac{1}{2}\sigma_3} = e^{\pi i \sigma_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2π回転すると元にもどらず、−1倍になる

⇒ SO(3)の表現ではない

SU(2)：単連結　（SO(3) は単連結ではない）

$$SU(2) \longrightarrow SO(3) \quad \text{hom}$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$-1 \longrightarrow 1$$

2 : 1　の対応

2重ひふく

物理では空間の回転として
SU(2) を考えている
（でないと電子とかが表せない）

一般に

$$SO(N) \rightsquigarrow SO(N)$$

単連結ではない

$$\updownarrow$$

Spin(N)　"スピン群"
単連結

$$Spin(N) \xrightarrow[\text{hom}]{} SO(N)$$

2重ひふく

7. スピノール

Clifford代数の表現 $\Rightarrow$ $so(N)$の表現
(Spin(N)の表現)

☆ Clifford代数

$\gamma^\mu : \mu = 1, \cdots, N$

(0ならGrassmann代数)

関係 $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu}$

$(\mu \neq \nu \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu)$

$(\gamma^\mu)^2 = 1$

γ^μと$\mathbb{C}$のかけ算, たし算 $\longrightarrow Cl_N$

☆ Clifford代数と$so(N)$

$so(N) \subset Cl_N$

$M^{\mu\nu} \longrightarrow S^{\mu\nu}$

$S^{\mu\nu} := \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}$

$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}]$
$= i\delta^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} + i\delta^{\mu\sigma}S^{\nu\rho}$
$- i\delta^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - i\delta^{\nu\sigma}S^{\mu\rho}$

$$\left(\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} &= \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu]} \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= \begin{cases} \gamma^\mu\gamma^\nu & \mu \neq \nu \\ 0 & \mu = \nu \end{cases} \end{aligned} \right)$$

Clifford 代数の表現 $\Rightarrow$ so(N) の表現

$\Rightarrow$ Spin(N) の表現

例：$N=3$　$\gamma^\mu = \sigma_\mu$　パウリ行列

$$\begin{cases} S^{12} = \frac{i}{2}\sigma_1\sigma_2 = -\frac{1}{2}\sigma_3 \\ S^{23} = -\frac{1}{2}\sigma_1 \\ S^{31} = -\frac{1}{2}\sigma_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ so(3) の表現

$\Rightarrow$ $SU(2) = Spin(3)$ の表現

☆ $N=2n$ 偶数

$Cl_N \Leftrightarrow$ フェルミオンの生成消滅演算子

$$b_a := \frac{1}{2}(\gamma^{2a-1} + i\gamma^{2a})$$
$$b_a^\dagger := \frac{1}{2}(\gamma^{2a-1} - i\gamma^{2a})$$
$a = 1, \cdots, n$

$\{b_a, b_b^\dagger\} = \delta_{ab}$, 他は反交換

(計算は演習問題)

$\Rightarrow$ すでに知っている

既約表現は 1 種類　2^n 次元

既約表現が唯一であること

V : 表現

($|v\rangle \in V$ 任意に1つとってくる) $\langle v|v\rangle = 1$

$\Downarrow$

($b_a|v\rangle = 0$ $a=1,\cdots,n$?) $\xRightarrow{\text{Yes}}$ ($|0\rangle = |v\rangle$ とおいて Fock空間を作る S)

有限回で終わる.

$\Downarrow$ No

$\boxed{|v'\rangle = b_a|v\rangle \quad (\neq 0)}$

$|v'\rangle$ をNormalizeしたものを $|v\rangle$ として

$\Downarrow$

($V = S \oplus S^{\perp}$ $S^{\perp}$は部分表現 $S^{\perp} = \{0\}$?) $\xRightarrow{\text{No}}$ Vは既約ではない

$\Downarrow$ Yes

($V = S$)

$$b_1 = \overbrace{\sigma_+ \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1}^{n\text{個}} \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1^\dagger = \sigma_+^\dagger \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$$b_2 = \sigma_3 \otimes \sigma_+ \otimes 1 \otimes \cdots$$

$$b_2^\dagger = \sigma_3 \otimes \sigma_+^\dagger \otimes 1 \otimes \cdots$$

$\Downarrow$

$$\gamma^1 = \sigma_1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$$\gamma^2 = \sigma_2 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$$\gamma^3 = \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots \otimes 1$$

$$\gamma^4 = \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes 1$$

$\vdots$

$\Downarrow$

$so(2n)$ の 2^n 次元表現

(Dirac) spinor 表現 $\quad S$

<u>既約ではない</u>

$\because$

$$\bar{\gamma} := (-i)^n \gamma^1 \gamma^2 \cdots \gamma^{2n} = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3$$

$$\not\propto 1$$

$$\Rightarrow \{\bar{\gamma}, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\Rightarrow [\bar{\gamma}, S^{\mu\nu}] = 0$$

Schur の補題より

既約ではない $\blacksquare$

$$S_+ = \langle \underbrace{b^+ \cdots b^+}_{\text{偶数個}} |0\rangle \rangle \rightarrow \bar{\gamma} = +1$$

…ではられるベクトル空間

$$S_- = \langle \underbrace{b^+ \cdots b^+}_{\text{奇数個}} |0\rangle \rangle \rightarrow \bar{\gamma} = -1$$

$$S = S_+ \oplus S_- \qquad (\bar{\gamma}^2 = 1)$$

S_+、S_- ：「Weyl spinor(表現)」 既約

$\bar{\gamma}$の固有値 ： カイラリティ

☆ $N = 2n+1$ 奇数

$\gamma^1, \ldots, \gamma^{2n}$ 　$N=2n$ のときのもの

- $\gamma^{2n+1} = +\bar{\gamma}$
- $\gamma^{2n+1} = -\bar{\gamma}$

両方既約
同値でない表現

$\gamma^1 \cdots \gamma^{2n}\gamma^{2n+1} = \pm i^n$

ここの符号が異なる

$$\boxed{\text{N が奇数のとき } Cl_N \text{ の表現は 2 種類ある}}$$

しかし

$$\boxed{so(N)\text{, } Spin(N) \text{ の Spinor 表現は 1 種類}}$$

$N=2n+1$ のとき.

(I) Cl_N の2つの表現が同値でないこと

$$\gamma^1 \cdots \gamma^N = +i^n \quad \cdots ①$$

$$\gamma'^1 \cdots \gamma'^N = -i^n \quad \cdots ②$$

同値, つまり

$$\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^{-1} \qquad \exists U$$

と書けたとすると.

② に代入

$$\text{l.h.s} = U\gamma^1 U^{-1} U\gamma^2 U^{-1} \cdots U\gamma^N U^{-1}$$

$$= U\underbrace{\gamma^1 \cdots \gamma^N}_{①} U^{-1}$$

$$= +i^n$$

$$\text{r.h.s} = -i^n \quad \Rightarrow \quad \text{矛盾}$$

(II) 上の2つの Cl_N の表現から導かれる

$SO(N)$ の表現が同値であること

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}, \quad S'^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma'^{\mu\nu}$$

$$US^{\mu\nu}U^{-1} = S'^{\mu\nu} \quad \text{if} \quad U = \bar{\gamma}$$

実際 $i, j = 1, \cdots, N-1$

$$S^{ij} = S'^{ij} \quad , \quad S^{iN} = - S'^{iN}$$

$$(\bar{\gamma}^{-1} = \bar{\gamma}) \qquad \{\bar{\gamma}, \gamma^i\} = 0 , \ [\bar{\gamma}, \gamma^N] = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\gamma} S^{ij} \bar{\gamma} = S^{ij} \quad , \quad \bar{\gamma} S^{iN} \bar{\gamma} = - S^{iN} \qquad \blacksquare$$

☆ 群論の補足

複素共役表現

群 G の表現

$$R=(\rho, V) \rightsquigarrow R^*=(\rho^*, V^*)$$

$V^*=$ (ある基底をとって成分ごとに複素共役)

$\rho^*(g)=\rho(g)^*$ (成分ごとの複素共役)

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現

$$\rho^*(T_a)=-\rho(T_a)^*$$

似た感じのもの

双対表現．反傾表現 (ユニタリー表現のときは複素共役表現と同じ)

$$R=(\rho, V) \rightsquigarrow \bar{R}=(\bar{\rho}, \bar{V})$$

$\bar{V}=\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ 双対空間

$=\{(\circ\circ\circ\circ\circ)\}$ $\quad V=\left\{\begin{pmatrix}\circ\\\circ\\\circ\\\circ\end{pmatrix}\right\}$

$\bar{w}\in\bar{V}$

$$\bar{\rho}(g)(\bar{w}):=\bar{w}\,\rho(g)^{-1}$$

Lie 代数

$$\bar{\rho}(T_a)=-\rho(T_a)^T$$

☆ Spinor bilinear　　N: even or odd

S ; Dirac spinor 表現

$\bar{S}$: S の双対表現（複素共役表現）

コニタリーだから同じ

テンソル積

$\bar{S} \otimes S = 1 \oplus \cdots\cdots$

例: $N=3$　S : spin $\frac{1}{2}$ 表現

$\bar{S} \simeq S$

$S \otimes S = 1 \oplus V$

ベクトル表現

∘ $v \in S$, $\bar{w} \in \bar{S}$

$v = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \end{pmatrix}$　　$\bar{w} = (\circ \ \circ \circ \ \circ \circ)$

無限小パラメータ $\omega_{\mu\nu}$

無限小変換行列 $S_\omega := \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$ $\Rightarrow S_\omega^\dagger = -S_\omega$

$$\begin{cases} \delta v = S_\omega v \\ \delta \bar{w} = -\bar{w} S_\omega \end{cases}$$

$$\delta(\bar{w} v) = \delta\bar{w}\, v + \bar{w}\,\delta v$$
$$= -\bar{w} S_\omega v + \bar{w} S_\omega v = 0$$

$\Rightarrow$ $\bar{w} v$ は不変

。 $\bar{w}\gamma^\mu v$?

$$\delta(\bar{w}\gamma^\mu v) = \bar{w}(\underline{-S_\omega\gamma^\mu + \gamma^\mu S_\omega})v$$

計算 ⇒ $[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = -(V^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma \gamma^\sigma$

$V^{\mu\nu}$：ベクトル表現の表現行列

$(V^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma := i(\delta^\rho_\mu \delta_{\nu\sigma} - \delta^\rho_\nu \delta_{\mu\sigma})$

$$= (V_\omega)^\mu{}_\nu \bar{w}\gamma^\nu v$$

⇒ $\bar{w}\gamma^\mu v \in V$ ベクトル表現

$$\bar{S} \otimes S = 1 \otimes V \otimes \cdots$$

。 $\bar{w}\gamma^\mu\gamma^\nu \cdots v$

⇒ テンソル表現

既約，独立

$\bar{w}\gamma^\mu v$, $\bar{w}\gamma^{\mu\nu} v$, $\bar{w}\gamma^{\mu\nu\rho} v$, $\cdots$

$$\gamma^{\mu\nu\rho\cdots} := \gamma^{[\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho\cdots]}$$

$$= \begin{cases} \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\cdots & (\mu,\nu,\rho\cdots \text{がすべて異なる}) \\ 0 & (\mu,\nu,\rho\cdots \text{の中に同じやつがある}) \end{cases}$$

◎ N 奇数

$$\gamma^{\mu_1\cdots\mu_N} = \underbrace{\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_N}(\pm i)^n}_{\text{(スカラー)}}$$

⇒ $\gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}$ は $\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{N-p}}$ で書ける.

→ $\gamma^{\mu_1\cdots\mu_p}$ $p=0,1,\cdots,\frac{N-1}{2}$ が独立

$$\bar{S}\otimes S = 1\oplus V\oplus\Lambda^2 V\oplus\cdots\oplus\Lambda^{\frac{N-1}{2}}V$$

$\Lambda^p V$: p 階反対称テンソル

演習問題
左辺と右辺で
次元が合っている
ことを確かめよ.

◎ N : 偶数

$$\bar{S}\otimes S = 1\oplus V\oplus\Lambda^2 V\oplus\cdots\oplus\Lambda^N V$$

※ $\bar{S}\simeq S$ (後で)

☆ Weyl spinor の bilinear

○ $v \in S_+$, $\bar{w} \in \overline{S_+}$ $\Rightarrow$ $\bar{w} v$ 不変

○ $\bar{\gamma} \gamma^\mu v = -\gamma^\mu \bar{\gamma} v = -\gamma^\mu v$

$\gamma^\mu v \in S_-$

$\Rightarrow \bar{w} \gamma^\mu v = 0$

○ 同様に $\bar{w} \gamma^{\mu_1 \cdots \mu_p} v = 0$

○ $\bar{\gamma} = (-i) \gamma^{1 \cdots N} = 1$ in S_+

計算で示せる関係式

$$\gamma^{\mu_1 \cdots \mu_N} \underbrace{\bar{\gamma}}_{\substack{\shortparallel \\ 1 \\ \text{on } S_+}} = (-i)^n (-1)^{[\frac{p}{2}]} \underbrace{\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_N}}_{\substack{\text{完全反対称テンソル} \\ \varepsilon^{1 \cdots N} = +1}} \gamma^{\mu_{p+1} \cdots \mu_N}$$

$\Rightarrow$
- $\gamma^{\mu_1 \cdots \mu_p}$ と $\gamma^{\mu_{p+1} \cdots \mu_N}$ は独立でない
- $\gamma^{\mu_1 \cdots \mu_{\frac{N}{2}}}$ は半分だけ独立

$\overline{S}_+ \otimes S_+ = 1 \otimes \Lambda^2 V \otimes \cdots$

V がない!!

$\overline{S}_- \otimes S_+ = V \otimes \Lambda^3 V \otimes \cdots$

$N = 2n$

- n : even

$$\bar{S}_+ \otimes S_+ = 1 \otimes \Lambda^2 V \otimes \cdots \otimes \Lambda^{n-2} V \otimes (\Lambda^n V)_+$$

(anti-) self-dual

$$\bar{S}_- \otimes S_+ = V \otimes \Lambda^3 V \otimes \cdots \otimes \Lambda^{n-1} V$$

- n : odd

$$\bar{S}_+ \otimes S_+ = 1 \otimes \Lambda^2 V \otimes \cdots \otimes \Lambda^{n-1} V$$

$$\bar{S}_- \otimes S_+ = V \otimes \Lambda^3 V \otimes \cdots \otimes (\Lambda^n V)_+$$

imaginary (anti-) self-dual

☆ Euclidean action

スカラー場 $\phi(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
関数

回転 $x \to x' = x + V_\omega x$

$\left(V_\omega := \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} V^{\mu\nu} \right)$

$\phi'(x') = \dot{\phi}(x)$

$$\Rightarrow \delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = -V_\omega{}^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)$$

$$= \mathcal{L}_\omega \phi(x)$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{L}_\omega := \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{\mu\nu} := i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \end{array} \right)$$

◦ Lagrangian density $\mathcal{L}$

$\mathcal{L}$ がスカラー場 $\Rightarrow$ $\delta \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_\omega \mathcal{L}(x)$
= total derivative

$S_E = \int d^dx \, \mathcal{L}$ は回転不変

・ フェルミオン場　$\mathbb{R}^d$

$$\psi(x) \in S \ , \ \text{G数}$$
$$\bar{\psi}(x) \in \bar{S}$$

$$\delta\psi(x) = S_\omega \psi(x) + \mathcal{L}_\omega \psi(x)$$
$$\delta\bar{\psi}(x) = -\bar{\psi}(x) S_\omega + \mathcal{L}_\omega \bar{\psi}(x)$$

$\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)$, $\bar{\psi}\psi(x)$ はスカラー場

$$S_E = \int d^dx \left(i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + im\bar{\psi}\psi \right)$$

は回転不変

・ d: even, Weyl

$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$

表示 (Weyl 表示) をとる

$$\psi(x) \in S_+$$
$$\bar{\psi}(x) \in \bar{S}_- \qquad \text{G数}$$

$$\gamma^\mu = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma^\mu \\ \hline \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu = 2\delta^{\mu\nu} \\ \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\nu = 2\delta^{\mu\nu} \end{cases}$$

$$\bar{\gamma} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & -1 \end{array}\right)$$

$$S_E = \int d^dx \left(i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi(x) \right) \quad \text{は回転不変}$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi(x) \in S_- \\ \bar{\psi}(x) \in \bar{S}_+\end{array}\right.$$ も同様

$$S_E = \int d^d x \left(i\bar{\psi}\sigma^\mu \partial_\mu \psi(x) \right)$$

※ $\bar{\psi}\psi$ という形の質量項は無い。

$\psi\psi$, $\bar{\psi}\bar{\psi}$ は次元によっては、ありうる。

(U(1) 対称性 $\begin{array}{l}\psi \to e^{i\alpha}\psi \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\alpha}\end{array}$ を破る)

☆ Lorentzian

Cl_d : $\gamma^1, \cdots \gamma^d$ で生成

$\gamma^0 := -i\gamma^d$ $\Rightarrow$ $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$

$(Cl_{1,d-1})$ $\mu, \nu = 0, \cdots, d-1$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(実数、複素共役とかが関係ない部分は、さっきと同じ)

$so(1, d-1)$ の生成子

$S^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, \cdots, d-1)$ $\Rightarrow$ $Spin(1, d-1)$ の表現

違い：ユニタリー表現ではない.

(※ 非コンパクトLie代数 ($so(1, d-1)$ みたいなもの) の有限次元ユニタリー表現は自明な表現しかない.)

・ 複素共役表現 $\neq$ $\underbrace{\text{双対表現}}_{\text{さっきと同じ}}$

$u^* \in S^*$

$\delta u^* = S_\omega^* u^*$ $S_\omega := \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$

$\delta \psi^\dagger = \psi^\dagger S_\omega^\dagger$

今、さっきと違って $S_\omega^\dagger \neq -S_\omega$ …(*)

→ $\psi^\dagger \psi$ は不変ではない!!

∘ (*)をくわしく　$i, j = 1, \cdots, d-1$

($\gamma^{\mu\dagger}$?

γ^μ が $Cl_{1,d-1}$ の表現 ⇒ $\gamma^{\mu\dagger}$ も $Cl_{1,d-1}$ の表現

↓

Spin(1, d-1) の Dirac spinor ⇒ Spin(1, d-1) の Dirac spinor

同型 (1種類しかない)

($U^{-1}\gamma^{\mu\dagger}U = \begin{cases} \gamma^\mu \\ \text{or} \\ -\gamma^\mu \end{cases}$ となる U が存在

実際

$U = \gamma^0$

$$(\gamma^0)^{-1}\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = -\gamma^\mu$$

§ $(\gamma^0)^{-1} S^{\mu\nu\dagger}\gamma^0 = S^{\mu\nu}$

⇒ $(\gamma^0)^{-1} S_\omega^\dagger \gamma^0 = -S_\omega$

$\bar{w} := w^\dagger \gamma^0$

$\delta \bar{w} = \delta w^\dagger \gamma^0 = w^\dagger \underbrace{S_\omega^\dagger \gamma^0}_{\gamma^0 (\gamma^0)^\dagger}$

$= -\bar{w} S_\omega$

$(\Rightarrow \bar{w} \in \bar{S} \quad)$

$\Longrightarrow \bar{w} v$ は不変

∘ Weyl

$v \in S_+$

$w^* \in S_+^* \Rightarrow \bar{\gamma} w^* = w^*$

$\Rightarrow w^\dagger \bar{\gamma} = w^\dagger$

$\bar{w} = w^\dagger \gamma^0$

$\bar{w} \bar{\gamma} = w^\dagger \gamma^0 \bar{\gamma} = -w^\dagger \bar{\gamma} \gamma^0 = -w^\dagger \gamma^0 = -\bar{w}$

$\Rightarrow \bar{w} \in \bar{S}_-$

$\bar{w} v = 0$

$\bar{w} \gamma^\mu v \in V$

☆ Lorentian 作用

$\psi(x) \in S$

作用を実にしたい

$\Rightarrow$ $\psi^\dagger(x)$ を必ず入れる必要がある

($\psi^\dagger(x) = \psi(x)^T U$ $\quad {}^\exists U$:行列
ということはありうる "Majorana")

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \in \bar{S}$$

$$S = \int d^d x \left(-i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - im\bar{\psi}\psi\right)$$

Weyl

$\psi(x) \in S_+$

$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \in \bar{S}_-$

$$S = \int d^d x \left(-i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi\right)$$

☆ 群論について補足

群 G (or Lie代数 $\mathfrak{g}$) の既約ユニタリー表現 $R=(\rho, V)$
内積

双対表現 $\bar{R}=(\bar{\rho}, \bar{V})$

$\dagger : V \to \bar{V}$ (反線型)
$\bar{V} \to V$

$v, w \in V$

$w^\dagger v$ は不変

・ $R \simeq \bar{R}$?

No : R は complex

Yes : R は real

$\Rightarrow C : R \to \bar{R}$: 線型 (ユニタリー)
スカラーのphaseを除いて一意
(Schur's Lemma)

Cは対称か反対称

pseudo real
$^\exists$不変反対称双線形形式

(truely) real

$C=1$, $\rho(T_a)$をすべて純虚反対称にできる

$^\exists$不変対称双線形形式

$\rho(g)$をすべて実直交行列にできる.

$$C T_a C^{-1} = -T_a^T$$

$C^{-1T} \rightarrow \quad \leftarrow C^T$

$$C^{-1T} C T_a (C^{-1T} C)^{-1} = -C^{-1T} T_a^T C^T$$

$$= -(C T_a C^{-1})^T$$

$$= (T_a^T)^T$$

$$= T_a$$

$\therefore$ $C^{-1T}C$ は T_a と可換

Schur's lemma, C はユニタリー

$$\Rightarrow C^{-1T} C = e^{-ia}$$

$$C^T = e^{+ia} C$$

両辺 T 代入

$$C = e^{+ia} C^T = e^{2ia} C$$

$$\Rightarrow e^{2ia} = 1$$

$$\Rightarrow e^{ia} = \pm 1$$

☆ C行列 : Euclidean , $N=2n$

S : Dirac spinor表現 1種数しかない
(既約ではない)

$\Rightarrow \bar{S} \simeq S$ ←

$\Rightarrow C : S \to \bar{S}$ Unitary

$$C S^{\mu\nu} C^{-1} = -(S^{\mu\nu})^T$$

演習 これを示せ

○ Cl_Nの表現で

$$C_+ \gamma^\mu C_+^{-1} = \gamma^{\mu T}$$

or

$$C_- \gamma^\mu C_-^{-1} = -\gamma^{\mu T}$$

・$\gamma^{\mu T}$もCl_Nの表現
・1種類しかない。
$\Rightarrow \exists C_\pm$

($C_- = C_+ \bar{\gamma}$ とすればよい)

$C_{\eta'}$, $\eta' = \pm$

○ 最初にとった行列表現で

$$C_+ = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \cdots$$

$$C_- = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots$$

とすればよい。

これを見る.

$$C_{\eta'}^T = \varepsilon' C_{\eta'} \qquad \varepsilon' = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \eta'^n$$

($\varepsilon' = +$ or $-$)

◦ 荷電共役

$v \in S$

$\Rightarrow \quad C^{-1} v^* \in S$

$=: v^c$ $\qquad\qquad C^{-1} = C^\dagger$

$$(v^c)^c = C^{-1}(C^{-1}v^*)^* = C^{-1} C^T v = \varepsilon' v$$

$\Rightarrow \quad \varepsilon' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad {}^\exists v : \; v^c = v$

"Majorana spinor"

v : Majorana

$\Rightarrow \quad C^{-1} v^* = v$

両辺 $\dagger$

$v^\dagger = v^T C$

☆ Weyl

$$\bar{S}_+ , \bar{S}_- \underset{?}{\longleftrightarrow} S_+ , S_-$$

$$C \bar{\gamma} C^{-1} = \zeta' \bar{\gamma}^T \qquad \zeta' = (-1)^n$$

$$v \in S_+ \quad : \bar{\gamma} v = + v$$

$$\Rightarrow \quad v^\dagger \in \bar{S}_+ , \quad v^c = C^{-1} v^* \in S = S_+ \oplus S_-$$

どっちか？

$$\bar{\gamma} v^c = \bar{\gamma} C^{-1} v^*$$

$$= C^{-1} \underbrace{C \bar{\gamma} C^{-1}}_{\zeta' \bar{\gamma}^T = \zeta' \bar{\gamma}^*} v^*$$

$$= \zeta' C^{-1} (\underbrace{\bar{\gamma} v}_{v})^*$$

$$= \zeta' v^c$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \zeta' = +1 \Leftrightarrow n = \text{even} \Rightarrow \bar{S}_+ \simeq S_+ , \quad \bar{S}_- \simeq S_- \\ \zeta' = -1 \Leftrightarrow n : \text{odd} \Rightarrow \bar{S}_+ \simeq S_- , \quad \bar{S}_- \simeq S_+ \end{array}}$$

	n mod 4	1	2	3	4
ε'	$\eta' = +$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\eta' = -$	$-$	$-$	$+$	$+$
ξ'		$-$	$+$	$-$	$+$
C, R, PR		C	PR	C	R

$\uparrow$

$\exists$ Majorana かつ Weyl

"Majorana-Weyl spinor"

☆ $N = 2n+1$

$\eta' = \xi'$ の方のみが正しい C

(Dirac spinor は既約)

$\varepsilon' = +1 \Rightarrow$ real

$\varepsilon' = -1 \Rightarrow$ pseudo real

☆ Lorentzian

$$v \in S$$

$$\bar{v} := v^\dagger \gamma^0 \in \bar{S}$$

$$v^c := C^{-1} \bar{v}^T = C^{-1} \gamma^{0T} v^*$$

$$= B^{-1} v^*$$

$B := -\gamma^{0T} C$: B 行列.

$$B \gamma^\mu B^{-1} = \eta \gamma^{\mu *}$$

$$B^T = \varepsilon B$$

$$\varepsilon = (-1)^{\left[\frac{d-2}{4}\right]} \eta^{\left[\frac{d-2}{2}\right]}$$

$$\xi := (-1)^{\left[\frac{d-2}{2}\right]}$$

even dim : ηは選べる

odd : $\eta = \xi$ のみ

S^*, $S^*_\pm$ のふるまい

$N = d-2$ のときと同じ

☆例： 4次元 Lorentzian

$$S_+^* \simeq S_- \simeq \bar{S}_- \quad , \quad S_-^* \simeq S_+ \simeq \bar{S}_+$$

$$\gamma^0 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad \overset{2\times 2}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B^T = B , \quad B \gamma^\mu B^\dagger = +\gamma^{\mu *}$$

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: \gamma_5$$

Dirac spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varepsilon \xi^\dagger \end{pmatrix} \qquad \chi , \xi \in S_+ \quad \Rightarrow \varepsilon \xi^\dagger \in S_-$$

(たて、よこは †で区別していない. かかっている順番で区別)

$$\psi^c := B^{-1}\psi^* = \begin{pmatrix} \xi \\ \varepsilon\chi^\dagger \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Majorana $\psi^c = \psi \Leftrightarrow \chi = \xi$

◦ 作用

$$\mathcal{L} = -i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - im\bar{\Psi}\Psi$$

$$\bar{\Psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\xi\varepsilon & -\chi^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\mu\partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu\partial_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\mathcal{L} = -i\Big(\underbrace{-\xi\varepsilon\sigma^\mu\partial_\mu\varepsilon\xi^\dagger}_{①}\ \underbrace{-\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi}_{②}\Big)$$

$$+im\left(\xi\varepsilon\chi + \chi^\dagger\varepsilon\xi^\dagger\right)$$

※ $\varepsilon\sigma^\mu\varepsilon = \bar{\sigma}^{\mu T}$

$\Rightarrow ① = \partial_\mu\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi = -\xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\xi$ + (total der)

②で単に$\chi\to\xi$としたもの

※ Lorentz 対称性のみ

$\Rightarrow$ 質量項 $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ も O.K.

$\Rightarrow$ $m \in \mathbb{C}$

$m\xi\varepsilon\chi - m^*\chi^\dagger\varepsilon\xi^\dagger$

※ Majorana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$$

$$= i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + m\chi\varepsilon\chi - m^*\chi^\dagger\varepsilon\chi^\dagger$$

☆ 例：2次元 Lorentzian

$$S_+^* = \bar{S}_- = S_+$$

$$S_-^* = \bar{S}_+ = S_-$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = 1 \qquad B\gamma^\mu B^{-1} = \gamma^{\mu *}$$

ψ : Dirac

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \qquad \psi^c = \begin{pmatrix} \psi_-^\dagger \\ \psi_+^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = -i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - im\bar{\psi}\psi$$

$$= 2i\psi_+^\dagger\partial_-\psi_+ + 2i\psi_-^\dagger\partial_+\psi_-$$

$$-im\psi_+^\dagger\psi_- + im\psi_-^\dagger\psi_+$$

Weyl $\Rightarrow$ $\psi_+, \psi_+^\dagger$ のみ

mass term は入らない.

$$\mathcal{L} = 2i\psi_+^\dagger \partial_- \psi_+$$

Majorana $\Rightarrow$ $\psi_+^\dagger = \psi_+ \ , \ \psi_-^\dagger = \psi_-$

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} m \bar{\Psi}\Psi$$

$$= i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_- - im\psi_+\psi_-$$

Majorana-Weyl $\Rightarrow$ 上の両方

$$\mathcal{L} = i\psi_+ \partial_- \psi_+$$

8. 対称性

一般論：

場 $\phi_a(x)$ ：boson or fermion

Euclidean 作用 $S_E = \int d^dx\, \mathcal{L}_E(\phi, \partial\phi)$

☆ 大域的連続対称性

無限小変換 $\delta\phi_a = \varepsilon f_a(\phi, \partial\phi)$

$\phi_a \to \phi'_a = \phi_a + \delta\phi_a$ ε：無限小，定数パラメータ

が

$\delta\mathcal{L}_E = \varepsilon\, \partial_\mu K^\mu$， ${}^\exists K^\mu$（形式的に $\delta S_E = 0$）

のとき．この変換「対称性」

⇓

物理量（相関関数）の満たす関係式

Ward-Takahashi 恒等式（WT id）

☆ Schwinger - Dyson 方程式

$$\langle \underbrace{\mathcal{O}_1(x_1)\,\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)}_{\cdots} \rangle := \frac{1}{Z}\int D\phi\, \underbrace{\mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)}_{\cdots}\, e^{-S_E[\phi]}$$

$$Z := \int D\phi\, e^{-S_E[\phi]}$$

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x)$$ 任意，$x_1, \cdots, x_n$ の近くでは 0.

← ϕ_a によらない.

$$d\phi'_a(x) = d\phi_a(x)$$

$$\langle \cdots \rangle = \frac{1}{Z}\int D\phi \cdots e^{-S_E[\phi]}$$

$$= \frac{1}{Z}\int D\phi' \cdots' e^{-S_E[\phi']}$$ ← 積分変数の文字を変えただけ

$$= \frac{1}{Z}\int D\phi \cdots \underbrace{e^{-S_E[\phi+\delta\phi]}}_{e^{-S_E}(1-\delta S_E)}$$

$$\Rightarrow\quad 0 = \frac{1}{Z}\int D\phi \cdots \delta S_E\, e^{-S_E}$$

$$= \langle \cdots \delta S_E \rangle$$

$$\delta S_E = \int d^dx \sum_a \frac{\delta S_E}{\delta \phi_a(x)} \delta \phi_a(x)$$

$\dfrac{\delta S_E}{\delta \phi_a(x)}$ の定義

$$0 = \sum_a \int d^dx \, \underbrace{\delta \phi_a(x)}_{} \left\langle \cdots \frac{\delta S_E}{\delta \phi_a(x)} \right\rangle$$

$x \neq x_1, \cdots, x_n$ で任意

$$0 = \left\langle \cdots \frac{\delta S_E}{\delta \phi_a(x)} \right\rangle \qquad \underline{x \neq x_1, \cdots, x_n}$$

これのことを $\dfrac{\delta S_E}{\delta \phi_a(x)} = 0$ と略記することがある.

"Schwinger-Dyson 方程式" (運動方程式)

重なる場合

$$\langle \cdots \rangle = \langle (\cdots)' (1 - \delta S_E) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle \delta(\cdots) \rangle - \langle \cdots \delta S_E \rangle$$

例：d次元 Dirac フェルミオン

$$S_E = \int d^dx \left(i\bar{\Psi}(\underbrace{\gamma^\mu \partial_\mu}_{\not\partial} + m)\Psi \right)$$

$$\cdots = \bar{\Psi}_\alpha(x) \qquad (\alpha = \text{スピノールの足})$$

$$\delta\bar{\Psi}_\alpha(x) \neq 0 \ , \quad \delta\Psi(x) = 0$$

$$0 = \underbrace{\langle \delta\bar{\Psi}_\alpha(y) \rangle}_{\int d^dx\, \delta^\beta_\alpha\, \delta^d(x-y)\, \delta\bar{\Psi}_\beta(x)} \qquad \langle 1 \rangle = 1$$

$$- \langle \bar{\Psi}_\alpha(y) \int d^dx\, i\,\delta\bar{\Psi}_\beta(x) \left((\not\partial + m)\Psi \right)^\beta(x) \rangle$$

$$0 = \int d^dx\, \delta\bar{\Psi}_\beta(x) \Big[\delta^\beta_\alpha\, \delta^d(x-y) - i(\not\partial + m)^\beta{}_\gamma \langle \Psi^\gamma(x)\, \bar{\Psi}_\alpha(y) \rangle \Big]$$

$\Downarrow$

$$i(\not\partial_x + m)^\beta{}_\gamma \langle \Psi^\gamma(x)\, \bar{\Psi}_\alpha(y) \rangle = \delta^\beta_\alpha\, \delta^d(x-y)$$

$\Downarrow$ 足を省略

$$i(\not\partial_x + m) \langle \Psi(x)\, \bar{\Psi}(y) \rangle = \delta^d(x-y)$$

☆ WT id

$$\delta \phi_a = \varepsilon \quad f_a(\phi, \partial\phi)$$ が対称性

$$\tilde{\delta} \phi_a = \varepsilon(x) f_a(\phi, \partial\phi)$$ を考える.

$$\Rightarrow \quad \phi'_a = \phi_a + \tilde{\delta}\phi_a$$

$\varepsilon(x)$ は $x = x_1, \cdots, x_n$ のまわりで 0

でも任意

有限のはんいのみで $\neq 0$

$D\phi' = D\phi$ の場合

さっきと同じ議論

$$0 = \langle \cdots \tilde{\delta} S_E \rangle$$

$$\tilde{\delta} S_E = \int d^d x \, \tilde{\delta} \mathcal{L}_E$$ ε が定数のとき. total derivative

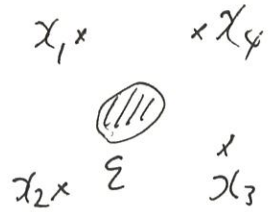
↓ 部分積分とかする

$$\tilde{\delta} S_E = \int d^d x \left(-\partial_\mu \varepsilon \; J^\mu(x) \right)$$ $^\exists J^\mu(x)$

"current"

$$= \int d^d x \; \varepsilon(x) \, \partial_\mu J^\mu(x)$$

$$0 = \int d^dx\ \varepsilon(x) \langle \cdots \partial_\mu J^\mu(x) \rangle$$



$\Downarrow$

$$0 = \langle \cdots \partial_\mu J^\mu(x) \rangle \qquad x \neq x_1, \cdots, x_n$$

これを $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ と略記することが多い.

WT id.

$x = x_1$ で $\varepsilon(x) \neq 0$ も考える

$$0 = \langle \cdots \tilde{\delta} O_1(x_1) \rangle - \langle \cdots O_1(x_1) \tilde{\delta} S_E \rangle$$

$\varepsilon(x)$

x_1 ある近傍（どんなに小さくてもいい）で $\varepsilon(x) = \varepsilon(x_1)$

ε 定数のとき

$$\delta O_1(x_1) = \varepsilon F_1(x_1)$$

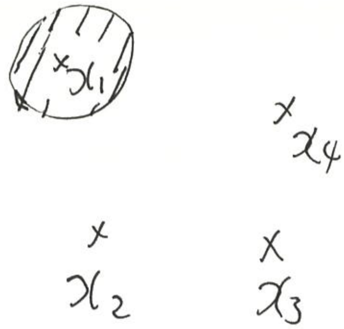
$$\Rightarrow \tilde{\delta} O_1(x_1) = \varepsilon(x_1) F_1(x_1) = \int d^dx\ \delta^d(x - x_1) \varepsilon(x) F_1(x_1)$$

$$0 = \int d^dx\ \varepsilon(x) \langle \cdots (\delta^d(x-x_1) F_1(x_1) - \partial_\mu J^\mu(x) O_1(x_1)) \rangle$$

$(x \neq x_2, \cdots)$

$$\Rightarrow \langle \partial_\mu J^\mu(x) O_1(x_1) \cdots \rangle = \delta^d(x - x_1) \langle F_1(x_1) \cdots \rangle$$

これを



$$\partial_\mu J^\mu(x)\,\mathcal{O}_1(x_1) = \delta^d(x-x_1)F_1(x_1) \cdots (☆)$$

と略記することが多い

WT id

領域 D : $x_1 \in D$

$x_2, \cdots, x_n \notin D$

$\Sigma = \partial D$

(☆)の両辺を D で積分

$$\int_D d^dx\, \partial_\mu J^\mu(x)\,\mathcal{O}_1(x_1) = F_1(x_1)$$

$$= \underbrace{\int_{\Sigma=\partial D} dS_\mu\, J^\mu(x)}_{=:\, iQ_\Sigma}\,\mathcal{O}_1(x_1)$$

WT id

$$iQ_\Sigma\,\mathcal{O}_1(x_1) = F_1(x_1)$$

$= F_1(x_1)$

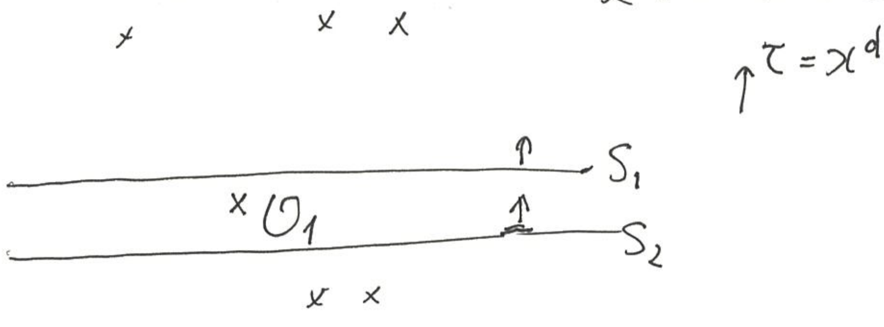
iQ_Σ

Q_Σ は Σ の連続変形によらない

"トポロジカル" $\Rightarrow$ 特に時間によらない.

演算子形式での電荷Qの関係

空間が閉じている or 空間の無限であることで
変なことが起こらないことを仮定



$$\Sigma = S_1 - S_2$$

$$Q_\Sigma = Q_{S_1} - Q_{S_2}$$

x_1と同時刻に他の演算子はないことを仮定

$$\langle \cdots i Q_\Sigma \mathcal{O}_1(x_1) \rangle$$

↓演算子形式へ

$$= \langle 0 | T(\cdots i \hat{Q}_\Sigma \hat{\mathcal{O}}_1(x_1)$$

$$= \langle 0 | \cdots \underbrace{i(\hat{Q}_{S_1}\hat{\mathcal{O}}_1(x_1) - \hat{\mathcal{O}}_1(x_1)\hat{Q}_{S_2})}_{i[\hat{Q}, \hat{\mathcal{O}}_1]} \cdots | 0 \rangle$$

$\cdots$ は任意

$$\Rightarrow \quad i[\hat{Q}, \hat{\mathcal{O}}_1] = F_1$$

$$\hat{Q} = -i \int_{\text{空間}} d^{d-1}x \, \hat{J}^d = \int_{\text{空間}} d^{d-1}x \, \hat{J}^0$$

※空間が無限体積の場合
この積分が定義できないかもしれない

cf. 自発的対称性の破れ

例：d 次元 Dirac フェルミオン

$$S_E = \int d^dx \left(i\bar{\Psi} (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi \right)$$

- $U(1)_V$ (vector $U(1)$)

$$\delta\Psi = i\varepsilon\Psi, \quad \delta\bar{\Psi} = -i\varepsilon\bar{\Psi}$$

$$\tilde{\delta} S_E = \int d^dx \Big(i\tilde{\delta}\bar{\Psi} (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi + i\bar{\Psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\tilde{\delta}\Psi \Big)$$

$$= \int d^dx \Big(i(-i\varepsilon)\bar{\Psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi + i\bar{\Psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\varepsilon\Psi) \Big)$$

$$= \int d^dx \Big[-\partial_\mu\varepsilon \underbrace{\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi}_{J_V^\mu} \Big]$$

- d : even

$m=0$ のとき、$U(1)_A$ (axial $U(1)$)

$$\delta\Psi = i\varepsilon\bar{\gamma}\Psi$$
$$\delta\bar{\Psi} = i\varepsilon\bar{\Psi}\bar{\gamma}$$

$$\tilde{\delta} S_E = \int d^dx \Big(-\partial_\mu\varepsilon \underbrace{\bar{\Psi}\gamma^\mu\bar{\gamma}\Psi}_{J_A^\mu} \Big)$$

9. 背景場

☆ 電磁場

(復習)

電磁場背景中のDirac場

$A_\mu(x)$; 電磁場のベクトルポテンシャル

$$\partial_\mu \psi \to D_\mu \psi := \partial_\mu \psi - i A_\mu \psi$$

$$S_E = \int d^dx \left(i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi + i m \bar{\psi} \psi \right)$$

はゲージ変換で不変

$$\begin{cases} A_\mu \to A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \\ \psi \to \psi' = e^{i\alpha(x)} \psi \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi} \end{cases}$$

$U(1)_V$ を場所によるパラメータで変換したもの

(演習問題：確かめよ.
ヒント：まず $D_\mu' \psi' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi$ を確かめよ)

☆ 一般のゲージ理論

G : Lie群　: $\mathfrak{g}$: GのLie代数

$R = (\rho, V)$: Gのユニタリー表現, $\dim V = N$

Vにエルミート内積
$\rho(g)$がユニタリー

$\rho : G \longrightarrow GL(V)$　V ベクトル空間　($\mathfrak{g}$の)

準同型(積の構造を保つ)

$\psi(x) \in S \otimes V$

$\bar{\psi}(x) \in \bar{S} \otimes \bar{V}$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

←それぞれDirac

$$\rho(g)\psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & & & \\ \circ & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}}_{N\times N \text{ 行列}} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

$$S_E = \int d^dx \left(i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + im\bar{\psi}\psi \right)$$

は大域的G対称性を持つ

$$\begin{cases} \psi \to \psi' = \rho(g)\psi \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}\rho(g)^{-1} \end{cases} \quad (g \in G)$$

⇓ 場所による変換　$g(x)$

$$S_E[\psi', \bar{\psi}'] = S_E[\psi, \bar{\psi}] + \int d^dx\, i\bar{\psi}\gamma^\mu \left(\rho(g)^{-1}\partial_\mu \rho(g)\right)\psi$$

アイデア.

ゲージ場, Covariant derivative

$$D^{\rho}_{\mu}\psi \quad : \quad D'^{\rho}_{\mu}\psi' = \rho(g) D^{\rho}_{\mu}\psi$$

$$= \rho(g) D^{\rho}_{\mu} \rho(g)^{-1}\psi'$$

$$\Rightarrow \quad D^{\rho\prime}_{\mu} = \rho(g) D^{\rho}_{\mu} \rho(g)^{-1}$$

$$D^{\rho}_{\mu}\psi := \partial_{\mu}\psi - i\rho(A_{\mu})\psi$$

$A_{\mu}(x)$: (とりあえず)(正確ではない) $\mathfrak{g}$に値を持つベクトル場

$A_{\mu}(x)$の変換性？

$$D'^{\rho}_{\mu}\psi' = \partial_{\mu}\psi' - i\rho(A'_{\mu})\psi'$$

$$= \rho(g)\left(\partial_{\mu} - i\rho(A_{\mu})\right)\rho(g)^{-1}\psi'$$

$$\Downarrow$$

$$-i\rho(A'_{\mu}) = \rho(g)\partial_{\mu}\rho(g)^{-1} - i\rho(g)\rho(A_{\mu})\rho(g)^{-1}$$

$$\rho(A'_{\mu}) = \rho(g)\rho(A_{\mu})\rho(g)^{-1} + i\rho(g)\partial_{\mu}\rho(g)^{-1}$$

$$= \rho(gA_{\mu}g^{-1} + ig\partial_{\mu}g^{-1})$$

$$\boxed{A'_\mu := g A_\mu g^{-1} + i g \partial_\mu g^{-1}}$$ とする.

$$S_E[\psi, \bar{\psi}, A] := \int d^d x \left(i \bar{\psi} \gamma^\mu D^\rho_\mu \psi + i m \bar{\psi} \psi \right)$$

$$S_E[\psi', \bar{\psi}', A'] = S_E[\psi, \bar{\psi}, A]$$

無限小変換

$g(x) = 1 + i\Lambda(x)$, $\Lambda(x)$: $\mathfrak{g}$ に値を持つ関数
無限小

$$A'_\mu = (1 + i\Lambda) A_\mu (1 - i\Lambda) + i(1 + i\Lambda)\partial_\mu(1 - i\Lambda)$$

$$= A_\mu - i[A_\mu, \Lambda] + \partial_\mu \Lambda$$

$$=: A_\mu + \delta_\Lambda A_\mu$$

$$\delta_\Lambda A_\mu = \partial_\mu \Lambda - i[A_\mu, \Lambda] = \partial_\mu \Lambda - i\,\mathrm{ad}(A_\mu)\Lambda$$

$$=: D^{ad}_\mu \Lambda$$

adjoint表現の cov. der.

Adjoint表現 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$

$$\mathrm{ad}(X)Y := [X, Y]$$

※ 文献では $\rho(A_\mu)$ を単に A_μ と書いたり（あるいは別の書[illegible]をしたり…）
D^ρ_μ を単に D_μ と書いてある.

※ ユニタリー表現は $\overbrace{\text{既約}}^{\text{ユニタリー}}$表現に分解できる.
（完全可約）

⇒ R としてはユニタリー既約表現の直和のみ
考えればよい

☆ Axial U(1) symmetry

さっきの理論 , d : even , $m=0$

$$S_E = \int d^dx \, \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi$$

$U(1)_A$ 大域的対称性

$$\begin{cases} \psi \to \psi' = e^{i\alpha\bar{\gamma}} \psi \\ \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\alpha\bar{\gamma}} \end{cases}$$

(演習問題: S_Eが不変であることを確かめよ)

(後で)

量子論では$U(1)_A$は存在しない.

"$U(1)_A$ アノマリー"

"ABJ アノマリー"

例：$G = U(1) := \{ g \in \mathbb{C} \mid g^* g = 1 \}$

既約表現： charge n 表現　1次元

$$\rho_n(g) = g^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

charge 1 表現の A_μ を単に A_μ と書く.

charge n Dirac fermion

$$S_E = \int d^d x \left[i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - i n A_\mu) \psi + i m \bar{\psi} \psi \right]$$

例：$G = SU(N_c)$, $R =$ 基本表現 N_f コの直和

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{N_f} \end{pmatrix} \qquad \psi_i = \begin{pmatrix} \psi_{i1} \\ \vdots \\ \psi_{iN_c} \end{pmatrix}$$

基本表現

$$\underbrace{\psi_{ia}}_{\text{Dirac}} \qquad \begin{array}{ll} i = 1, \cdots, N_f & \text{"flavor"} \\ a = 1, \cdots, N_c & \text{"color"} \end{array}$$

基本表現の $\underset{D_\mu}{A_\mu}$ を単に $\underset{D_\mu}{A_\mu}$ と書く.

$$S_E = \int d^d x \sum_{i=1}^{N_f} \left(i \bar{\psi}_i \gamma^\mu D_\mu \psi_i + i m_i \bar{\psi}_i \psi_i \right)$$

一般化したQCDのフェルミオンの作用

☆ カイラルゲージ理論

$d=4$

$R=(\rho, V)$ Gのユニタリー表現

$\dim V = N$

$\psi(x) \in S_+ \otimes V$

$\bar{\psi}(x) \in \bar{S}_- \otimes \bar{V}$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$ ← 1つ1つが S_+

$$S_E = \int d^4x \left(i \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi \right)$$

表現 Rによって 質量が入ったり入らなかったりする.

$$M^{ij} \psi_i C \psi_j$$

$M^{ij} \in \bar{V} \otimes \bar{V}$, G不変 , symmetric

$\bar{R} \neq R \Rightarrow$ すべてのfermionに質量を入れることができない!!

"chiral gauge theory (のフェルミオン)"

例: • $G = Spin(10)$, $R = S_+$ of $Spin(10)$

• 標準模型のフェルミオン

※ カイラルゲージ理論は量子論的にゲージ対称性が破れる場合がある

"ゲージアノマリー"

⇒ ゲージ場を dynamical にすると病的な理論になる。

(後で)

☆ 場の強さ

$$D_\mu := \partial_\mu - iA_\mu$$

⇒ ゲージ変換

$$D'_\mu = g\, D_\mu\, g^{-1} \qquad g(x) \in G$$

「共変」

⇒ $[D_\mu, D_\nu] =: -iF_{\mu\nu}$ も共変

$$\boxed{F'_{\mu\nu} = g\, F_{\mu\nu}\, g^{-1}}$$

$F_{\mu\nu}$ は微分演算子ではない

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]}$$

field strength（場の強さ）

☆ 曲がった時空

計量 $g_{\mu\nu}(x)$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu$$

このゲージ対称性 ⇨ 一般座標変換

（微分同相写像）

$$x'^\mu = x'^\mu(x)$$

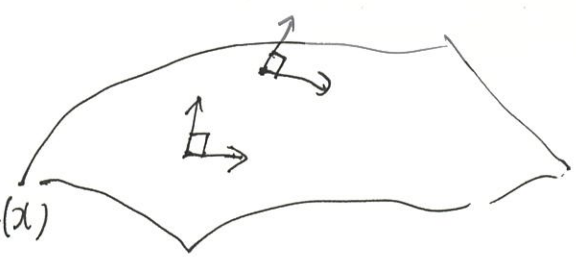
$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\, g_{\rho\sigma}(x)$$

spinor ? ⇒ 無い!! ?

◎ Vielbein（多脚場）

各点で共変ベクトルの正規直交基底

$$e^a_\mu(x),\quad a = 1, \cdots, d$$



$$e^a(x)\cdot e^b(x) = g^{\mu\nu}(x)\, e^a_\mu(x)\, e^b_\nu(x)$$

$$= \delta^{ab}$$

$$\Rightarrow\quad g_{\mu\nu}(x) = \delta_{ab}\, e^a_\mu(x)\, e^b_\nu(x)$$

◎ スピン接続

$e^{a}_{\mu}(x)$ のとり方に任意性がある

局所 $SO(d)$ 変換 $(SO(d)_L)$

$$e'^{a}_{\mu}(x) = \Lambda^{a}{}_{b}(x)\, e^{b}_{\mu}(x) \qquad \Lambda^{a}{}_{b}(x) \in SO(d)$$

⇓ これのゲージ場

$\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}(x)$ (ベクトル表現の行列)

$v^{a}(x)$: $SO(d)_L$ ベクトル表現

$$\nabla_{\mu} v^{a}(x) = \partial_{\mu} v^{a}(x) + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}\, v^{b}(x)$$

(i とかの convention はふつうのゲージ場と異なる)

$Spin(d)_L \longrightarrow SO(d)_L$

"Spin 構造" ← 持ち上げ ※障害，任意性がありうる。

$\psi(x)$: $Spin(d)_L$ spinor 表現
$\wedge$ Dirac

$$\nabla_{\mu}\psi(x) := \partial_{\mu}\psi(x) + \frac{1}{4}\omega_{\mu}{}^{ab}(x)\gamma_{ab}\psi(x)$$

γ^{a} : Cl_d の生成子 $\{\gamma^{a}, \gamma^{b}\} = 2\delta^{ab}$

$\gamma_{a} = \gamma^{a}$, $\gamma_{ab} = \gamma_{[a}\gamma_{b]}$

◦ Levi-Civita connection

$\nabla_\mu e^a_\nu = 0$ を要請

$$\partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu$$

$\Gamma^\rho_{\mu\nu}$: Christoffel 記号

SO(d) ベクトル ⟷ diff ベクトル

$v^a = e^a_\mu v^\mu$　　$v^\mu = e^\mu_a v^a$

e^μ_a: e^a_μ の逆行列.

⇓ ω について解く

$$\omega_\mu{}^a{}_b = -e^\nu_b\left(\partial_\mu e^a_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} e^a_\rho\right)$$

9. $U(1)_A$ アノマリー

$d = 2n$

ゲージ群 G

$\psi(x) \in S \otimes V$

$R = (\rho, V)$: Gの表現

$\bar\psi(x) \in \bar S \otimes \bar V$

$S_E = \int d^dx \, i \bar\psi \not{D} \psi$

$\not{D} := \gamma^\mu D_\mu$

$D_\mu \psi = (\partial_\mu - i A_\mu)\psi$

$U(1)_A$ 対称性

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha\bar\gamma}\psi$$
$$\bar\psi \to \bar\psi' = \bar\psi e^{i\alpha\bar\gamma}$$

α : 定数 $\Rightarrow$ S_Eは不変

$\Downarrow$ WT id

$\alpha \to \alpha(x)$

以前は $D\bar\psi' D\psi' = D\bar\psi D\psi$ を仮定していた.

$\boxed{\text{今の場合 成り立たない!!}}$

「$U(1)_A$ アノマリー
ABJ アノマリー」

"藤川の方法"

◎ x とかも行列の足と思う

$\psi_{(a,i,x)}$

ゲージの足

スピノールの足

時空の座標

$$\psi' = B\psi$$

$$\bar{\psi}' = B^T\bar{\psi}$$

$$B_{(a,i,x)(b,j,y)} = \left(e^{i\alpha(x)\bar{\gamma}}\right)_{ab} \overbrace{\delta_{ij}}^{id} \underbrace{\delta^d(x-y)}_{id}$$

$$D\bar{\psi}' D\psi' = D\bar{\psi} D\psi \, (\det B)^{-1} (\det B^T)^{-1}$$

$$= (\det B)^{-2}$$

$$= \exp(-2\,\mathrm{Tr}\log B)$$

$$= \exp\left(-2i\,\underbrace{\mathrm{Tr}\left(\alpha(x)\bar{\gamma}\right)}_{I}\right)$$

$G_{(a,i,x)(b,j,y)}$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Tr}\,G := \int d^dx \sum_a \sum_i G_{(a,i,x)(a,i,x)}$$

$$I \underset{?}{=} \int d^dx\, \alpha(x) \underbrace{\sum_a \sum_i \delta_{ii}\, \bar{\gamma}_{aa}}_{=0} \underbrace{\delta^d(x-x)}_{=\infty}$$

$$\boxed{\text{正則化が必要}}$$

正則化（ノリ）

$$\delta^d(x-x) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} e^{ik\cdot(x-x)}$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} e^{ik\cdot(x-x)} e^{-\frac{k^2}{M^2}}$$

全部計算したあとで
$M\to\infty$

。これをゲージ不変にやる

$$I = \mathrm{Tr}\left(\alpha(x)\bar{\gamma}\, e^{\frac{\cancel{D}^2}{M^2}}\right) \quad \left(\begin{array}{c}\text{計算したあとで}\\ M\to\infty\end{array}\right)$$

$$= \int d^dx\, \alpha(x) \underbrace{\mathrm{tr}_S\, \mathrm{tr}_C\, \bar{\gamma} \langle x| e^{\frac{\cancel{D}^2}{M^2}} |x\rangle}_{K(x)}$$

。$$\cancel{D}^2 = \underbrace{\gamma^\mu\gamma^\nu}_{=\delta^{\mu\nu}+\gamma^{\mu\nu}} D_\mu D_\nu = D^2 + \gamma^{\mu\nu} \underbrace{\frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu]}_{-\frac{i}{2}F_{\mu\nu}}$$

$$= D^2 - i\cancel{F}$$

$$\left(\cancel{F} := \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\right)$$

方針：$\frac{1}{M}$ の高次は無視

ただし

- ∂ と M はどちらが大きいか分からない
- γ 行列のべきの leading は残す. $\frac{\gamma^\mu}{M}$ は $O(1)$

← 最後 $\mathrm{tr}_S(\bar{\gamma}\ \cdots)$ ここに γ 行列が足りないと消える.

$$e^{\frac{\not{D}^2}{M^2}} = e^{\frac{D^2}{M^2} - i\frac{\not{F}}{M^2}} = e^{\frac{D^2}{M^2}} e^{-i\frac{\not{F}}{M^2}}$$

交換関係 $\left[\frac{D^2}{M^2}, \frac{\not{F}}{M^2}\right]$ は

$$\frac{D^2}{M^2} = \frac{\partial^2}{M^2}\left(1 + O\left(\frac{1}{M}\right)\right)$$

$\frac{1}{M}$ の高次なので無視

$$K(x) = \operatorname*{tr}_s \bar{\gamma} \operatorname*{tr}_c e^{-i\frac{\not{F}}{M^2}} \underline{\langle x | e^{\frac{\partial^2}{M^2}} | x \rangle}$$

$$\langle x | e^{\frac{\partial^2}{M^2}} | x \rangle$$

$$= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \langle x | k \rangle \underbrace{\langle k | e^{\frac{\partial^2}{M^2}} | x \rangle}_{e^{-\frac{k^2}{M^2}} \langle k | x \rangle}$$

$$= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-\frac{k^2}{M^2}} \qquad (d = 2n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sqrt{\pi M^2}^{\,2n} = \frac{M^{2n}}{(4\pi)^n}$$

$$K(x) = \operatorname*{tr}_s \bar{\gamma} \operatorname*{tr}_c \underbrace{e^{-i\frac{\not{F}}{M^2}}}_{\text{消えない最低次は } n \text{ 次}} \frac{M^{2n}}{(4\pi)^n} \quad ④$$

$$\frac{1}{n!} (-i)^n \frac{1}{M^{2n}} \not{F}^n$$

②

③

△

$$\not{F}^n = \frac{1}{2^n} F_{\mu_1\mu_2} \cdots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}} \underbrace{\gamma^{\mu_1\mu_2}\gamma^{\mu_3\mu_4}\cdots\gamma^{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}}_{\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{2n}} + (\gamma\text{行列の低}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{①} F_{\mu_1\mu_2}\cdots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}\, \varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{2n}} \underbrace{\gamma^{1\cdots(2n)}}_{②}$$

※ $(-i)^n \gamma^{1\cdots(2n)} =: \bar{\gamma}$

$$K(x) = \mathrm{tr}_s\left(\bar{\gamma}\, \mathrm{tr}_c\left(F_{\mu_1\mu_2}\cdots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}\right) \overset{②}{\bar{\gamma}}\right)$$

$$\times \underbrace{\frac{1}{2^n}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{2n}}}_{①} \underbrace{\frac{1}{n!}\frac{1}{M^{2n}}}_{③} \underbrace{\frac{M^{2n}}{(4\pi)^n}}_{④}$$

$$\left(\bar{\gamma}^2 = 1 ,\quad \mathrm{tr}_s\, 1 = 2^n\right)$$

$$\boxed{K(x) = \frac{1}{n!(4\pi)^n}\, \mathrm{tr}_c\left(F_{\mu_1\mu_2}\cdots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}\right) \varepsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n-1}\mu_{2n}}}$$

$\Downarrow$

$$D\bar{\Psi}' D\Psi' = D\bar{\Psi} D\Psi \exp\left(-2i\int d^dx\, \alpha(x) K(x)\right)$$

$\rightsquigarrow$ $U(1)_A$ に関する WT id.

☆ 微分形式

反対称テンソルをうまく取りあつかう方法

dx^μ : G数 ， 積は $\wedge$ (ウェッジ)

で書いたり書かなかったりする。

$B_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)$ 反対称テンソル場

$$B := \frac{1}{p!} B_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)\, dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$$

"p-form" (p-形式)

◦積

B : p-form ， C : q-form

$B\wedge C$: (p+q)-form

◦外微分

$$dB := \frac{1}{p!}\partial_\nu B_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)\, dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$$

$\Downarrow$

$$ddB = \frac{1}{p!}\underbrace{\partial_\rho\partial_\nu}_{\text{対称}} B_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)\, \overbrace{dx^\rho\wedge dx^\nu}^{\text{反対称}}\wedge\cdots$$

$$= 0$$

$$\boxed{d^2=0}$$

$$d(B \wedge C) = dB \wedge C + (-1)^p B \wedge dC$$

("d は G-odd")

- Poincaréの補題

$\mathbb{R}^d$ 上　p-form B

$$dB = 0 \Rightarrow {}^\exists C : (p-1)\text{-form}$$
$$B = dC$$

※ C は dF (F: $(p-2)$-form) の不定性

- ゲージ場

$$A = A_\mu(x)\, dx^\mu$$

$$F := \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = dA - iA \wedge A$$

- $U(1)_A$ アノマリー

$$K(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} = \mathrm{tr}_c \left(e^{\frac{F}{2\pi}} \right) \Big|_{2n\text{-form}}$$

10. 摂動論的アノマリー

('t Hooft アノマリー)

$d=4$

ゲージ群 G, 表現 $R=(\rho, V)$

$$\psi(x) \in S_+ \otimes V \ , \quad \bar{\psi}(x) \in \bar{S}_- \otimes \bar{V}$$

カイラルゲージ理論(のフェルミオンのところ.
Aは背景ゲージ場)

$$S_E[\psi, \bar{\psi}, A] = \int d^4x \left(i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi \right)$$

non-local (Lagrangian 密度の積分では書けない)

$$Z[A] := e^{-W[A]} := \int D\bar{\psi} D\psi \, e^{-S_E[\psi, \bar{\psi}, A]}$$

ゲージ変換 $g(x) \in G$

$$A_\mu^g = g A_\mu g^{-1} + i g \partial_\mu g^{-1}$$

$$W[A^g] \overset{?}{=} W[A]$$

素朴に

$$e^{-W[A^g]} = \int D\bar{\psi} D\psi \, e^{-S_E[\psi, \bar{\psi}, A^g]}$$

↓ 積分変数の名前の変更

$$= \int D\bar{\psi}^g D\psi^g \, e^{-S_E[\psi^g, \bar{\psi}^g, A^g]}$$

$$\psi^g = \rho(g)\psi$$

$$\bar{\psi}^g = \bar{\psi}\rho(g)^{-1}$$, $D\bar{\psi}^g D\psi^g = D\bar{\psi}D\psi$ を仮定

$$e^{-W[A^g]} = \int D\bar{\psi}D\psi\, e^{-S_E[\psi,\bar{\psi},A]}$$

$$= e^{-W[A]}$$

$$\rightsquigarrow W[A^g] = W[A]$$

実際

$\boxed{\text{正則化が必要}}$ しかし、 $\boxed{\text{ゲージ対称性を保つ正則化が存在しない（知らない）}}$

うまくやらないと、

$$W[A^g] \neq W[A]$$ （正則化による）

local counter term 分しかよらない。

あきらめない

$$\tilde{W}[A] = W[A] + \underbrace{S_{ct}[A]}_{\text{Local counter term}}$$

$$S_{ct}[A] = \int d^4x\, \mathcal{L}_{ct}(A, \partial A, \partial^2 A, \ldots)$$

有限

$$\tilde{W}[A^g] = \tilde{W}[A]$$

⇒ ゲージ不変 ⇒ 最初から

$$\tilde{S}_E[\psi,\bar{\psi},A] = S_E[\psi,\bar{\psi},A] + S_{ct}[A]$$

を使え。

どんなLCTをとってもゲージ不変にできない

「アノマリー」

言葉

- 無限小変換に対するアノマリー

  「摂動論的アノマリー」
  (perturbative anomaly)

- 摂動論的アノマリーは無いが
  無限小変換をつみ重ねてたどりつけない $g(x)$
  に対するアノマリー

  「大域的アノマリー」
  (global anomaly)
  (大域的対称性の「大域的」とは関係ない)

- ゲージ場を動的にしたときのアノマリー
  (理論が病的)　「ゲージアノマリー」

- ゲージ場を背景にしたときのアノマリー
  「't Hooft アノマリー」
  (理論を調べるための便利なツール)

アノマリー　〜「ゲージ対称性の無さ」

正則化, LCT に基準がない…

※ある正則化を取って, 実際に計算してみるのは良い練習 ⇒ 教科書

㋐ 取りあつかい方

- WZ consistency condition
- Anomaly descent equation ⇒ 高次元との関係

〜 anomaly inflow

☆ WZ consistency condition

無限小変換

$v(x)$: $\mathfrak{g}$ に値を持つ関数

$= v^a(x) T_a$: T_a $\mathfrak{g}$ の生成子

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

$$\delta_v A_\mu = D_\mu v = \partial_\mu v - i[A_\mu, v]$$

$$= (\partial_\mu v^a + f_{abc} A_\mu^b v^c) T_a$$

$$\delta_v W[A] = \int d^4x\, \delta_v A_\mu^a(x) \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu^a(x)}$$

$$(A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a)$$

$$\delta_v W[A] = \int d^4x \, (D_\mu v(x))^a \frac{\delta W[A]}{\delta A^a_\mu(x)}$$

$$= \int d^4x \, (-v^a(x)) \left(D_\mu \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu(x)}\right)_a$$

$$=: \int d^4x \, v^a(x) \mathcal{A}_a[A, x]$$

$$\mathcal{A}_a[A, x] = J^a(x) \, W[A]$$ ← "アノマリー" 局所的

$$J^a(x) = -\left(D_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\right)^a = -\left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)} + f_{abc} A^b_\mu(x) \frac{\delta}{\delta A^c_\mu(x)}\right)$$

A の配位全体の空間のベクトル場
（1階の微分演算子）

交換関係

$$\boxed{[J^a(x), J^b(y)] = f_{abc} \, \delta^4(x-y) \, J^c(y)}$$

計算で確かめられる

$$\left[\frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)}, A^b_\nu(y)\right] = \delta^b_a \, \delta^\mu_\nu \, \delta^4(x-y)$$

Jacobi id を使う.

$W[A]$に当てる

$$J^a(x)\mathcal{A}_b[A,y] - J^b(y)\mathcal{A}_a[A,x]$$
$$= f_{abc}\,\delta^4(x-y)\,\mathcal{A}_c[A,y]$$

WZ consistency condition

※ 汎関数 $W[A]$が存在するなら、自明に成り立つ

※ $\mathcal{A}_a$を直接計算しようとして、正則化などが consistent でないと成り立たない。

cf. 共変アノマリー

☆ BRST 形式

（アノマリーをうまく取り扱うために導入）

ghost 場：フェルミオン的，スカラー，$\mathfrak{g}$ に値を持つ

$$C(x) = C^a(x)\, T_a$$

BRST 変換

$$\delta A_\mu^a = (D_\mu C)^a = \partial_\mu C^a + f_{abc} A_\mu^b C^c$$

（～ C をパラメータとするゲージ変換）

$$\delta C^a = -\frac{1}{2} f_{abc} C^b C^c$$

$$\Rightarrow \quad \delta^2 = 0$$

（計算で確かめられる）
（そうなるように作った）

$$(\delta W[A] =) \int d^4x\, C^a(x)\, \mathcal{A}_a[A, x] =: \mathcal{A}[C, A]$$

WZ condition $\Leftrightarrow \delta \mathcal{A}[C, A] = 0$

・LCTについて

$F[A]$: 局所汎関数

$$\tilde{W}[A] = W[A] + F[A]$$

$$\tilde{\mathcal{A}}[c,A] = \mathcal{A}[c,A] + \delta F[A]$$

（局所相殺項は"アノマリー"を変えない）

アノマリー

$\in \{$ 局所汎関数 $\mathcal{A}[c,A]$, ghost数 1 $\mid \delta\mathcal{A}=0 \}$

（cの次数）

$/ \, \delta F[A]$

↑

局所汎関数

"コホモロジー"

☆ Anomaly descent equation

$$\mathcal{A} \overset{\text{local}}{=} \int_{\mathbb{R}^4} \alpha_4^{(1)}$$

← ghost 数

↑ form の次数

$\{c^a, dx^\mu\} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{d\delta + \delta d = 0}$$

WZ condition

$$\delta \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow \delta \alpha_4^{(1)} = d\alpha_3^{(2)} \qquad {}^\exists \alpha_3^{(2)}$$

◎ こういうものの作り方：6次元を考える.

$\alpha_6^{(0)}$ s.t. $d\alpha_6^{(0)} = 0$, $\delta\alpha_6^{(0)} = 0$

を持ってくる

$$\Rightarrow \alpha_6^{(0)} = d\alpha_5^{(0)}. \qquad {}^\exists \alpha_5^{(0)}$$

$$\Rightarrow \delta\alpha_6^{(0)} = 0$$
$$= \delta d \alpha_5^{(0)} = d\delta\alpha_5^{(0)}$$

$$\Rightarrow \delta\alpha_5^{(0)} = d\alpha_4^{(1)} \qquad {}^\exists \alpha_4^{(1)}$$

$$\Rightarrow \delta^2 \alpha_5^{(0)} = 0$$

$$= \delta d\alpha_4^{(1)} = -d\,\delta\alpha_4^{(1)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\delta\alpha_4^{(1)} = d\alpha_3^{(2)}, \quad {}^\exists\alpha_3^{(2)}}_{\Downarrow}$$

WZ condition!

◯ 良いこと: LCT

$\alpha_5'^{(0)} = \alpha_5^{(0)} + d\beta_4^{(0)}$ も $\alpha_6^{(0)} = d\alpha_5'^{(0)}$ を満たす.

$$\delta\alpha_5'^{(0)} = \delta\alpha_5^{(0)} + \delta d\beta_4^{(0)}$$

$$= d\alpha_4^{(1)} - d\,\delta\beta_4^{(0)}$$

$$= d\alpha_4'^{(1)} \qquad \Rightarrow \alpha_4'^{(1)} = \alpha_4^{(1)} - \delta\underset{\substack{\uparrow \\ \text{LCT}}}{\beta_4^{(0)}}$$

アノマリーそのもの $\alpha_4^{(1)}$ (◦ゲージ不変でない. ◦ δF の不定性

を考えるよりも

$\alpha_6^{(0)}$ (◦ $\delta\alpha_6^{(0)} = 0$ (ゲージ不変) ◦ $d\alpha_6^{(0)} = 0$

を考える方が便利. 「アノマリー多項式」

事実：

$$\alpha_6^{(0)} = 2\pi i \ \mathrm{tr}_R \left(e^{\frac{F}{2\pi}} \right) \Big|_{6\text{-form}}$$

表現Rでのtr（前 tr_c と書いていたもの）

$$= 2\pi i \ \frac{1}{3!(2\pi)^3} \mathrm{tr}_R (F \wedge F \wedge F)$$

（$U(1)_A$ アノマリーで出てきたものと同じ）

$\Rightarrow$ $\alpha_4^{(1)}$, $\int \alpha_4^{(1)}$ がアノマリー

4 dim，表現 R Weyl フェルミオン

摂動論的アノマリー $\Leftrightarrow$ アノマリー多項式

$$\propto \mathrm{tr}_R (F \wedge F \wedge F)$$

☆ 性質：

。

$$\mathrm{tr}_{\bar{R}} (F \wedge F \wedge F) = \mathrm{tr}\left(-\rho(F)^T \wedge -\rho(F)^T \wedge -\rho(F)^T\right)$$

$$\left(\bar{\rho}(F) = -\rho(F)^T \right)$$

$$= -\mathrm{tr}\left(\rho(F) \wedge \rho(F) \wedge \rho(F)\right)$$

$$= -\mathrm{tr}_R (F \wedge F \wedge F)$$

$$\boxed{\mathrm{tr}_{\bar{R}} (F \wedge F \wedge F) = -\mathrm{tr}_R (F \wedge F \wedge F)}$$

$\Rightarrow$ (R が real or pseudo real $R \simeq \bar{R}$ なら $\mathrm{tr}_R (F \wedge F \wedge F) = 0$)

◦ 事実

$\mathfrak{g}$: simple

$\mathfrak{g} = su(N) \quad N \geq 3$ 以外は $\mathrm{tr}_R(F \wedge F \wedge F) = 0$

for $^\forall R$

例: $\mathfrak{g} = so(10)$

S_+ は complex だがアノマリー無し.

◦

$$\mathfrak{g} = u(1)_1 \oplus \cdots \oplus u(1)_M \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_N$$

$$F = f_1 + \cdots + f_M + F_1 + \cdots + F_N$$

$\mathrm{tr} F_i = 0$, $\mathrm{tr}(F_i \wedge F_j) = 0 \quad i \neq j$

, $\mathrm{tr}(F_i \wedge F_j \wedge F_k) = 0$ (i, j, k すべて同じではない or $\mathfrak{g}_i \neq su(N)$ $N \geq 3$)

$\Downarrow$

$\mathrm{tr}_R(F \wedge F \wedge F)$ の中で残るもの

◦ $\mathrm{tr}_R(f_a \wedge F_i \wedge F_i)$, ◦ $\mathrm{tr}_R(F_i \wedge F_i \wedge F_i)$ ($\mathfrak{g}_i = su(N)$ $N \geq 3$)

◦ $\mathrm{tr}_R(f_a \wedge f_b \wedge f_c)$

☆ 例：標準模型

$$\mathfrak{g} = \underset{f}{u(1)} \oplus \underset{F_2}{su(2)} \oplus \underset{F_3}{su(3)}$$

⇓

残りうるアノマリーの項

$u(1)^3$, $u(1)\,su(2)^2$, $u(1)\,su(3)^2$, $su(3)^3$

○ フェルミオン（S_+ Weyl，（su(3)の表現，su(2)の表現）$_{u(1)電荷}$）

1世代分

$$\left.\begin{aligned} L_L &: (1,2)_{-\frac{1}{2}} \\ e_R^c &: (1,1)_{+1} \end{aligned}\right\} \text{レプトン}$$

○

$$\left.\begin{aligned} Q_L &: (3,2)_{\frac{1}{6}} \\ u_R^c &: (\bar{3},1)_{-\frac{2}{3}} \\ d_R^c &: (\bar{3},1)_{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \text{クォーク}$$

- $su(3)^3$

$$\mathrm{tr}_R(F_3\wedge F_3\wedge F_3)$$

$$= 2\,\mathrm{tr}_3(F_3\wedge F_3\wedge F_3) + 2\,\underbrace{\mathrm{tr}_{\bar{3}}(F_3\wedge F_3\wedge F_3)}_{-\mathrm{tr}_3(F_3\wedge F_3\wedge F_3)}$$

$$= 0$$

- $u(1)\,su(3)^2$

$$\mathrm{tr}_R(f\wedge F_3\wedge F_3)$$

(f_1 : charge 1表現 での field strengt

$$= \frac{1}{6}\times f_1\,\mathrm{tr}_3(F_3\wedge F_3) + \left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) f_1\,\underbrace{\mathrm{tr}_{\bar{3}}(F_3\wedge F_3)}_{=\mathrm{tr}_3(F_3\wedge F_3)}$$

$$= 0$$

- $u(1)\,su(2)^2$

$$\mathrm{tr}_R(f\wedge F_2\wedge F_2)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 3\right) f_1\,\mathrm{tr}_2(F_2\wedge F_2)$$

$$= 0$$

- $u(1)^3$

$$\operatorname{tr}_R (f \wedge f \wedge f)$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 + 1^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times 6 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 3 \right) f_1^3$$

$$= 0$$

$\boxed{\text{補足}}$ 重力場背景

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$\Updownarrow$

Vielbein $\quad e^a := e^a_\mu\, dx^\mu$

各点で共変ベクトルの正規直交基底

$$ds^2 = \delta_{ab}\, e^a e^b \quad \left(g_{\mu\nu} = \delta_{ab}\, e^a_\mu\, e^b_\nu \right)$$

取り方の任意性 $\quad \Lambda^a{}_b(x) \in SO(d)$

$e'^a(x) = \Lambda^a{}_b(x)\, e^b(x)$ も正規直交

局所 $SO(d)$ （Lorentzian の場合 "局所 Lorentz"）

$\Downarrow$

ゲージ場 $\quad so(d)$ に値を持つベクトル場

$$\omega^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b(x)\, dx^\mu$$

γ 行列 $\quad \gamma^a,\ a = 1, \cdots, d$

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}$$

Dirac spinor ψ

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\psi$$

作用

$$S_E = \int d^dx \sqrt{g}\, \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi$$

$$\gamma^\mu := e^\mu{}_a \gamma^a$$

($e^\mu{}_a$: $e^a{}_\mu$ の逆行列)

$$R^a{}_b := d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$$

曲率 2-form (Riemann tensor)

$d=2n$, axial $U(1)$ アノマリー

$$\int D\bar{\Psi}' D\Psi' = \int D\bar{\Psi} D\Psi \, e^{-2i \int d^dx\, \alpha(x) K(x)}$$

$$K(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n} = \mathrm{tr}_R \left(e^{\frac{F}{2\pi}} \right) \hat{A}(R) \Big|_{2n\text{-form}}$$

$$\hat{A}(R) = \sqrt{\det \frac{R/2}{\sinh(R/2)}} \quad \left(= \exp\left(-\frac{1}{2} \mathrm{tr} \log \left(\frac{\sinh R/2}{R/2} \right) \right) \right)$$

↑ べき級数で定義

例

$$\hat{A}(R) \Big|_{4\text{-form}} = \frac{1}{48 \times (2\pi)^2} \int_X \mathrm{tr}(R \wedge R)$$

4k-form しかない

◎ 4次元カイラルゲージ理論のアノマリー

$\Updownarrow$

アノマリー多項式

$$2\pi i \ \mathrm{tr}_R\left(e^{\frac{F}{2\pi}}\right)\hat{A}(R)\Big|_{6\text{-form}}$$

$$= (\text{前にやったやつ}) + \underbrace{(F\text{とRが混ざった項})}$$

$$\propto \underbrace{\mathrm{tr}_R(F)}_{\text{U(1)しか残らない.}}\ \mathrm{tr}(R\wedge R)$$

「混合アノマリー」

例：標準模型

$$\mathrm{tr}_R(f)\,\mathrm{tr}(R\wedge R)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\times 2 + 1 + \frac{1}{6}\times 6 - \frac{2}{3}\times 3 + \frac{1}{3}\times 3\right) f_1\, \mathrm{tr}(R\wedge R)$$

$$= 0$$