

レポート問題と解説

担当：山口哲

問題

講義の最後の方に扱った \mathbb{Z}_2 ゲージ理論のについて考えよう。この理論は4次元の超立方格子の各リンク ℓ に $a_\ell = 0, 1$ の自由度をおいたもので、その作用は K を定数として

$$S(a) = -K \sum_{p: \text{plaquettes}} (-1)^{\sum_{\ell \in p} a_\ell} \quad (1)$$

である。ただし、 $\sum_{\ell \in p}$ はplaquette p を構成する4つのリンクについての和を表している。この理論の分配関数は

$$Z = \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} e^{-S(a)} \quad (V \text{ は頂点の数}) \quad (2)$$

である。

この理論の Wilson ループを考えよう。リンクを繋いでいってできるループ C に対して Wilson ループ $W(C)$ が定義され、その期待値は

$$\langle W(C) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} e^{-S(a)} (-1)^{\sum_{\ell \in C} a_\ell} \quad (3)$$

と表される。

$K \ll 1$ の場合、この Wilson ループの期待値が「面積則」になることを次のようにして示せ。簡単のため、ループ C を12平面上で辺の長さが L_1, L_2 の長方形に取る。長さの単位は格子間隔が1となるようにとることにする。 $\langle W(C) \rangle$ を K でべき展開し、0にならない最低次を見ることにより、 L_1, L_2 依存性が

$$\langle W(C) \rangle \sim \exp(-TL_1L_2) \quad (4)$$

となることを示せ。また定数 T を求めよ。

ヒント：以下に挙げる書籍や他の文献で、ゲージ群が $SU(N)$ ($SU(3)$)の場合の解説がある。これらの文献では群の積分の公式を導いて用いている。今回考えたモデルのように、ゲージ群が \mathbb{Z}_2 の場合には、代わりに必要な公式は $b = 0, 1$ として $\sum_{a=0,1} (-1)^{ab}$ がどうなるかというものである。

- M. Creutz, “Quarks, Gluons and Lattices,” Oxford University Press, 1983, doi:10.1017/9781009290395
- H. J. Rothe, “Lattice Gauge Theories : An Introduction (Fourth Edition),” World Scientific Publishing Company, 2012, doi:10.1142/8229
- 青木慎也, “格子上の場の理論,” 丸善出版.

解説

$$S(a) = -K \sum_{p: \text{plaquettes}} (-1)^{\sum_{\ell \in p} a_\ell} \quad (5)$$

として、分配関数は

$$Z = \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} e^{-S(a)}, \quad (6)$$

Wilson ループの期待値は

$$\langle W(C) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} e^{-S(a)} (-1)^{\sum_{\ell \in C} a_\ell} \quad (7)$$

と表される。これらを $K \ll 1$ の場合に K でべき展開し、その最低次を考える。

まず、分配関数は

$$Z = \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} (1 + O(K)) = 2^{E-V} + O(K) \quad (8)$$

となる。ここで E はリンクの数である。

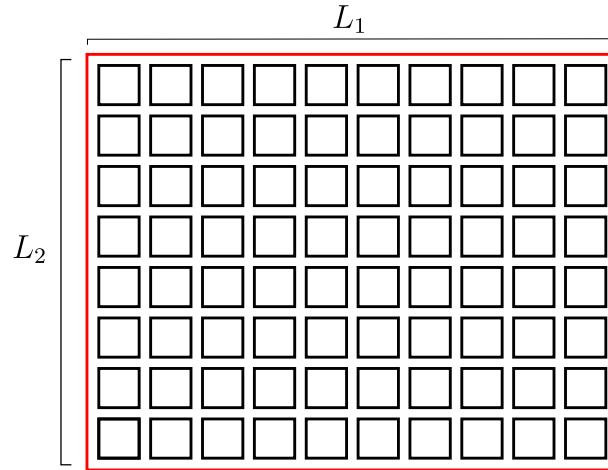


図1: Wilson ループの期待値への0でない K の最低次の寄与。赤線、黒線はともにリンク変数の $(-1)^{a_\ell}$ 寄与があることを表す。赤線は Wilson ループの挿入から、黒線は作用からの寄与を表す。すべてのリンクに関して線は偶数個 (0 または 2) になっているので $(-1)^{a_\ell}$ の寄与はキャンセルしている。作用からの plaquettes は $A := L_1 L_2$ 個ある。

次に Wilson ループの期待値 (7) の和について考える。 $e^{-S(a)}$ を展開すると各項は $(-1)^{a_\ell}$ の単項式になる。このとき、あるリンク ℓ に対して $(-1)^{a_\ell}$ を非自明に因子に持つ項があったとすると、 $\sum_{a_\ell=0,1} (-1)^{a_\ell} = 0$ となるために、その項からの寄与は0になってしまう。したがって、残る項はすべてのリンクに対して $(-1)^{a_\ell}$ が偶数回入っているものである。その中で K の最低次の項は、図1のように作用から来る plaquettes が Wilson ループを端に持つ最小面積の面を埋め尽くすものである。これは $A := L_1 L_2$ 個の plaquettes が入っているので、 K^A に比例する項である。

ここまでで(7)の0でない最低次の項は K^A であることが分かったので、その項を計算していく。

$$\begin{aligned}
\langle W(C) \rangle &= \frac{1}{Z} \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} \frac{K^A}{A!} \left(\sum_p (-1)^{\sum_{m \in p} a_m} \right)^A (-1)^{\sum(\ell \in C) a_\ell} + O(K^{A+1}) \\
&= \frac{1}{Z} \frac{1}{2^V} \sum_{\{a\}} K^A + O(K^{A+1}) \\
&= K^A + O(K^{A+1}) \sim \exp(-(-\log K)A).
\end{aligned} \tag{9}$$

ただし、一行目から二行目へは $(\dots)^A$ の展開で、面をきっちり埋め尽くすような項が $A!$ 項あり、それぞれがWilsonループからの寄与を合わせて1であることを用いた。また二行目から三行目へは分配関数の結果(6)を用いた。

(9)は面積則を示していて、 $T = -\log K$ である。