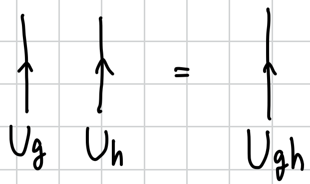
4. 高次形式対称性

☆ 定義 : p形式対称性

群 $G \ni g$,　codim $p+1$ 向きついた面 M

$\Rightarrow$　$U_g(M)$: トポロジカル欠陥

次を満たすもの

◦ 

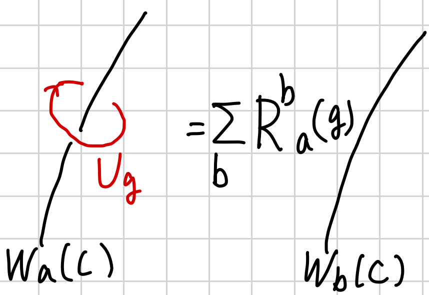
($\Rightarrow$ $p>0$ なら
Gはアーベル群 $gh=hg$)

◦ $U_1 = 1$, $U_g(-M) = U_{g^{-1}}(M)$

▨ 演算子への作用

$W_a(C)$: p次元 (トポロジカルとは限らない) 欠陥

C : p次元面



$R^b{}_a(g)$: Gの表現

(※ Gはアーベル群
$\Rightarrow$ $R^b{}_a(g) = (\text{phase})\,\delta^b_a$
となる基底がとれる)

※ 例: ゲージ理論の中心対称性
(後で詳しく)

※ 昔から知られていたが、局所的な記述が発見されたのが最近

[Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willet 14]

☆ 格子ゲージ理論の中心対称性

▨ 格子ゲージ理論

d 次元立方格子 , ゲージ群 SU(N) (例)

Lie代数でなくて群

各リンク $\langle ij \rangle$ に $U_{ij} \in SU(N)$

・ 分配関数

$$Z = \int \prod_{\langle ij \rangle} dU_{ij} \ \exp(-S(U))$$

Haar測度

$$S(U) = -K \sum_{\substack{\langle ijkl \rangle \\ \text{plaquettes}}} \left[\mathrm{tr}\left(U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li} \right) + (\text{c.c.}) \right]$$

$$\left(※ \quad K \sim \frac{1}{g_{YM}^2} \right)$$

・ ゲージ変換パラメータ : 各サイト i に $g_i \in SU(N)$

$$U_{ij}' = g_i U_{ij} g_j^\dagger \Rightarrow S(U') = S(U)$$

▨ 中心対称性

さっきの格子ゲージ理論に $^\exists$ 1形式対称性) $\mathbb{Z}_N^{[1]}$
群 $\mathbb{Z}_N$

- (群の話)

$SU(N) \ni \omega 1_N \qquad \omega := e^{\frac{2\pi i}{N}}$

$Z := \{\omega^k 1_N : k=0,1,\cdots,N-1\} \subset SU(N)$
部分群

Z の元は $^\forall g \in SU(N)$ と可換

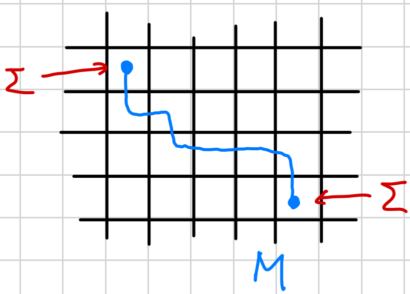
こういう Z を「$SU(N)$ の中心 (center)」

$Z \simeq \mathbb{Z}_N$

- 前にやった時空の一部で変換 ⇒ トポロジカル欠陥

M: codim 1 surface , $\partial M = \Sigma$
サイトと交わらない.
向き付き

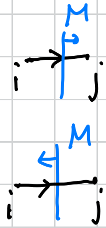
(双対格子の codim 1 要素をつないでできる面)



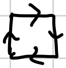
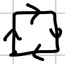
- 積分の変数変換

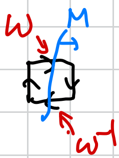
$$U_{ij}' = \begin{cases} U_{ij} \\ U_{ij}\,\omega \\ U_{ij}\,\omega^{-1} \end{cases}$$

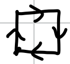
⟨ij⟩はMと交わらない



- $S(U')$ vs $S(U)$

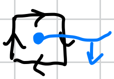
 = 　変わってなければ自明に変わらない



= 　変わらない

Σの上のplaquette

$$S = \cdots - K\left(\omega\,\mathrm{tr}(U\cdots) + (c.c)\right)$$

 = ω 　変わる!!

$$S_{M,\omega}(U) := S(U')$$

$S_{M,\omega}(U)$ と $S(U)$ は Σ 上だけで異なる

$\Rightarrow$ codim 2 トポロジカル欠陥

$V_{\omega^{-1}}(\Sigma)$

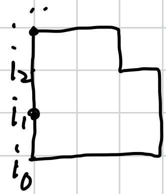
$V_{\omega^k}(\Sigma)$ も同様に定義

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_N^{[1]}$ 対称性　「中心対称性

Wilson loop への作用

- Wilson loop

  C : リンクをつないでできるループ



$$W_{\square}(C) = \mathrm{tr}\left(U_{i_0 i_1} U_{i_1 i_2} \cdots U_{i_{k-1} i_k}\right)$$

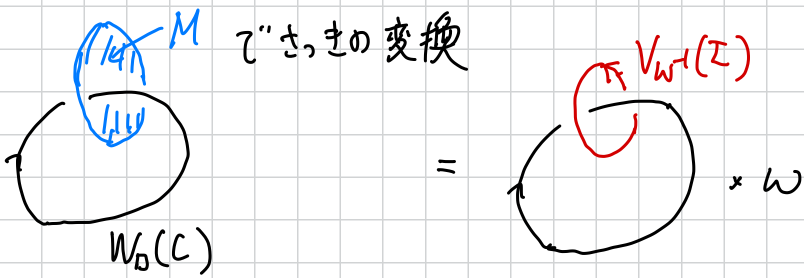
↑ 基本表現

ゲージ不変，次元1欠陥（一般にはトポロジカルではない）

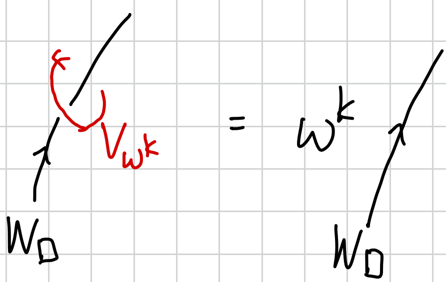
$$W_{\rho}(C) = \mathrm{tr}\left(\rho\left(U_{i_0 i_1} U_{i_1 i_2} \cdots\right)\right)$$

↑ SU(N)の表現

-

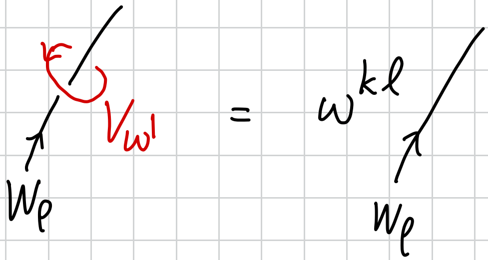


$\Rightarrow$ WT id



ρ：既約表現， $\underbrace{\square \otimes \square \otimes \cdots \otimes \square}_{\ell \text{個}} = \rho \oplus \cdots$

$\ell \bmod N$ ： "N-ality"



☆背景ゲージ場 その1

普通の対称性のとき、

$\boxed{\text{flatな背景ゲージ場の配位} = \text{対称性欠陥の配位}}$

p形式対称性の場合も同様

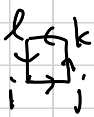
ゲージ場？

■ 格子，$\mathbb{Z}_N^{(1)}$ の場合 ⇒ $\mathbb{Z}_N$ 2-form ゲージ場

(0-form 対称性 ⇒ 1-form ゲージ場)

• ゲージ場 B

各プラケット $\langle ijkl \rangle$ に $B_{ijkl} \in \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \cdots, N-1\}$



逆向き. $B_{lkji} = -B_{ijkl}$

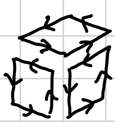
• ゲージ変換

パラメータ：各リンク $\langle ij \rangle$ に $\Lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_N$ $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$

$$B'_{ijkl} = B_{ijkl} + \underbrace{\Lambda_{ij} + \Lambda_{jk} + \Lambda_{kl} + \Lambda_{li}}_{=: \delta\Lambda_{ijkl}}$$

• 場の強さ

cube (向き付き) c



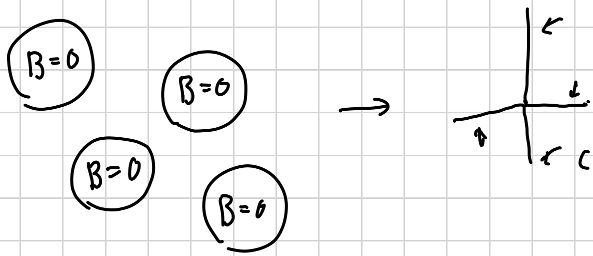
$$\delta B_c = \sum_p B_p$$

cubeの中のplaquette, cubeの向きから導かれる向き.

δB はゲージ不変

"flat" $\Leftrightarrow$ $\delta B = 0$

- flat $\Rightarrow$ ゲージ変換で局所的には $B=0$ にできる



codimension 2 の defect

$\Rightarrow$ symmetry defect.

格子ゲージ理論とのcoupling

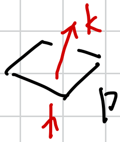
$$S(U,B) = -K\sum_{\langle ijkl\rangle}\left[e^{\frac{2\pi i}{N}B_{ijkl}}\,\mathrm{tr}(U_{ij}\cdots) + (\mathrm{c.c.})\right]$$

- U_{ij}のゲージ変換

$$U'_{ij} = e^{-\frac{2\pi i}{N}\Lambda_{ij}}\,U_{ij} \quad \Rightarrow \quad S(U,B)\text{は不変}$$

- Vの配位 $\Leftrightarrow$ flatなB

$V_{wk}(M)$, Mが交わるplaq. p (正の向き



$\Rightarrow \quad B_p = k$

flat $\Leftarrow$ 端がないので
cube の中に入ったら必ず出ていく

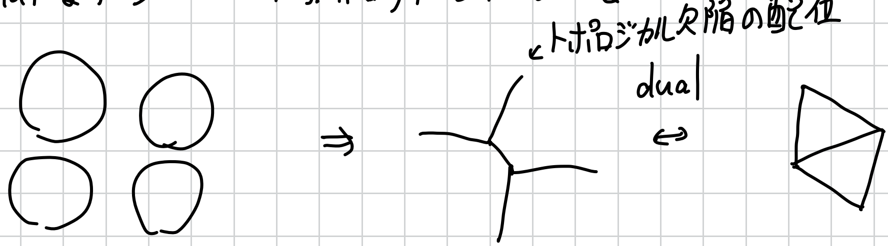
- $\mathbb{Z}_N^{[1]}$をゲージ化 $\rightarrow$ 別の理論

$$Z_{\text{gauged}} = \sum_b \int DU\, e^{-S(U,b)}$$

☆背景ゲージ場その2：単体コホモロジー

アイデア

flatなゲージ場：局所的に0にできる



⇒荒い格子で十分

三角形の格子でもよい。
(単体)

⇒ 数学の道具：単体コホモロジー

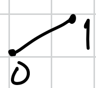
▨ Chain

- X：閉じたd次元多様体

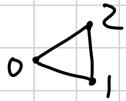
  単体分割 ⇒ K

  頂点に通し番号 $0, 1, 2, 3, \cdots$

- 単体：頂点，リンク，三角形，4面体，… p単体



$\langle 01 \rangle$



$\langle 012 \rangle$ …

一般に $\langle i_0 i_1 \cdots i_p \rangle$

$i_0 < i_1 < \cdots < i_p$

(以下めんどうなので $\langle 0 1 \cdots p \rangle$ の場合だけ書くこともある)

- G : アーベル群 ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_N$, $\cdots$)

  $C_p(K, G)$: p 単体の形式的な G 係数線型結合

  $\Rightarrow$ アーベル群

- ∂ : boundary

  $\partial : C_p(K, G) \longrightarrow C_{p-1}(K, G)$ hom

$$\partial \langle 0 1 \cdots p \rangle = \langle 1 2 \cdots p \rangle - \langle 0 2 \cdots p \rangle + \cdots$$
$$= \sum_{j=0}^{p} \langle 0 1 \cdots \underset{\substack{\wedge \\ j\text{ぬけ}}}{} \cdots p \rangle (-1)^j$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial^2 = 0}$$

- $Z_p(K, G) := \{ c \in C_p(K, G) \mid \partial c = 0 \}$ "cycle"

  $B_p(K, G) := \partial C_{p+1}(K, G)$

  両方アーベル群

  $Z_p \supset B_p \quad (\because \partial^2 = 0)$

$$H_p(K, G) := Z_p(K, G) / B_p(K, G)$$

$\boxed{\text{ホモロジー}}$

定理： $H_p(K, G)$ はKのとり方によらない

$H_p(X, G)$ と書く。

Cochain

p単体にGの元を割りふるやり方

$\langle i_0 i_1 \cdots i_p \rangle$ に $A_{i_0 \cdots i_p} \in G$ を割りふる

例：$p = 1$ ：リンク $\langle ij \rangle$ に $A_{ij} \in G$ を割りふる。

p-cochain全体 $C^p(K, G)$ アーベル群

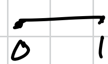
（深いことを考えない p-formゲージ場全体）

- Coboundari $\delta : C^p \to C^{p+1}$

$A \in C^p$

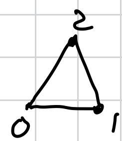
$$(\delta A)_{0 \cdots (p+1)} := A_{1 \cdots (p+1)} - A_{02 \cdots (p+1)} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j A_{0 \cdots \hat{j} \cdots (p+1)}$$



例 $\lambda \in C^0 \Rightarrow (\delta\lambda)_{01} = \lambda_1 - \lambda_0$

$A \in C^1 \Rightarrow (\delta A)_{012} = A_{12} - A_{02} + A_{12}$



$\Rightarrow \boxed{\delta^2 = 0}$

・ $Z^p(K,G) = \{A \in C^p(K,G) \mid \delta A = 0\}$

"p-cocycle"

$B^p(K,G) = \delta C^{p-1}(K,G)$

$Z^p \supset B^p \quad \Leftarrow \delta^2 = 0$

$H^p(K,G) := \underbrace{Z^p(K,G)}_{\text{"flat"}} / \underbrace{B^p(K,G)}_{\text{ゲージ変換}}$

定理：$H^p(K,G)$はKによらない

$H^p(X,G)$と書く

▨ $G = \mathbb{Z}_N$の場合　($\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, …)

+で群

かけ算もある　($\mathbb{Z}$に代表元をとって mod N)

以下、こういうものだけ考える.

▨ 積分

$A \in C^p(K,G)$, $\Sigma \in C_p(K,G)$

$\int_c A$ を定義

$$\int_{a\langle 01\cdots p\rangle} A := aA_{01\cdots p} \quad , \quad a \in G$$

bilinear

▨ カップ積

$$C^p(K, G) \times C^q(K, G) \longrightarrow C^{p+q}(K, G)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ A & & B \end{array}$$

$$(A \smile B)_{01\cdots(p+q)} = A_{01\cdots p}\, B_{p\cdots(p+q)}$$

性質

∘ $\delta(A \smile B) = \delta A \smile B + (-1)^p A \smile \delta B$

$\Downarrow$

$$H^p(X, G) \times H^q(X, G) \longrightarrow H^{p+q}(X, G)$$

$$A \smile B = (-1)^{pq} B \smile A$$

☆ 自発的対称性の破れ

ふつうの対称性

秩序変数 $\langle \sigma(0) \rangle \neq 0$

⇓ ちゃんという

$$\lim_{|x|\to\infty} \langle \sigma(0)\,\sigma(x) \rangle \neq 0$$

(Volume → ∞)

$\sigma(0)$ $\sigma(x)$

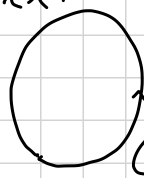
保っている $\langle \sigma(0)\sigma(x) \rangle \sim e^{-m|x|}$

1-form 対称性の場合

秩序変数 $W(C)$ ← 1次元欠陥 (例：Wilsonループ)

とりあえず

$$\lim_{C\to \text{大}} \langle W(C) \rangle \neq 0$$



C

周長則の場合.

← Cの長さ

$$\langle W(C) \rangle \sim e^{-m\int_C ds} \longrightarrow 0$$

だけど

local counter term

$$\tilde{W}(C) = W(C)\, e^{-m\int_C ds}$$ ← まともな1次元欠陥

$$\langle W(C) \rangle \to \text{定数} \neq 0$$

つまり

対称相

$$\lim_{C\to\text{大}} \langle W(C) \rangle = 0 \quad \text{(どんな local counter term を入れても)}$$

$\iff$ 面積則

破れ相

$$\lim_{C\to\text{大}} \langle W(C) \rangle = (\text{定数}) \neq 0 \quad \text{(ある counter term で)}$$

$\iff$ Coulomb則, 周長則, …

中心対称性の場合

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{対称相} \iff \text{閉じ込め} \\ \text{破れの相} \iff \text{非閉じ込め} \end{array}}$$