

ゼータ関数の解析接続

1 Hurwitz ゼータ関数

Hurwitz ゼータ関数は、 $\operatorname{Re} a > 0$ として、 $\operatorname{Re} s > 1$ で収束する級数

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \quad (1)$$

を解析接続したものとして定義される。ここではこの解析接続についてまとめる。特に $s = -1$ の場合が弦理論でよく現れる。また η 不変量の計算に $s = 0$ の場合が現れる。Hurwitz ゼータ関数については文献 [1] の 12 章に詳しい解説がある。

2 積分表示

解析接続において有用なのは積分表示

$$\zeta(s, a) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1} e^{az}}{1-e^z} dz \quad (2)$$

である。ここで C は図 1 のように実軸の負の部分 (s が整数ではない場合にカットを入れる) を囲む経路である。

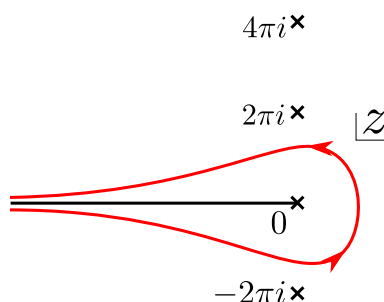


図 1

式 (2) を証明しよう。 $\operatorname{Re} s > 1, \operatorname{Re} A > 0$ の場合、

$$\frac{1}{A^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-At} \quad (3)$$

が成り立つことを利用すると、式 (1) は

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-(n+a)t} \quad (4)$$

となる。和と積分の順序を入れ替えて（入れ替えてよいことの証明は省略）和をとると

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - e^{-t}} \quad (5)$$

を得る。さて、(2) の積分

$$I = \int_C \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz \quad (6)$$

について考えよう。経路 C を実軸の下を $-\infty$ から 0 付近まで来る部分 C_1 と原点まわりの小さな円を反時計回りに一周する部分 C_2 と実軸上を原点付近から $-\infty$ までの部分 C_3 に分けて考える。 $\operatorname{Re} s > 1$ の場合、 C_2 の部分の積分は半径を小さくする極限で消える。

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz = 0 \quad (7)$$

一方 C_1 に関する積分は $t = -z$ とおいて t について ∞ から 0 の積分に書きかえる。分岐のとり方の注意すると

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz \quad (8)$$

$$= \int_\infty^0 \frac{(-t)^{s-1} e^{-at}}{1 - e^{-t}} (-dt) \quad (9)$$

$$= -e^{-\pi i s} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - e^{-t}} dt \quad (10)$$

$$= -e^{-\pi i s} \Gamma(s) \zeta(s, a) \quad (11)$$

となる。最後のところでは、式 (5) の結果を用いた。同様にして C_3 の積分も

$$I_3 = \int_{C_3} \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz = e^{\pi i s} \Gamma(s) \zeta(s, a) \quad (12)$$

となる。まとめると

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = (e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}) \Gamma(s) \zeta(s, a) = 2i \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s, a) = 2\pi i \frac{1}{\Gamma(1-s)} \zeta(s, a) \quad (13)$$

を得る。最後の変形では Gamma 関数の公式

$$\sin(\pi s) \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \pi \quad (14)$$

を用いた。したがって

$$\zeta(s, a) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} I = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{z^{s-1} e^{az}}{1 - e^z} dz \quad (15)$$

となって式 (2) を得る (証明終わり)。

3 s が 0 以下の整数の場合の値

さて式 (2) を用いて $s = -m$ が 0 以下の整数の場合に $\zeta(-m, a)$ を評価してみよう。
この場合カットがなくなるので原点での留数を拾うだけである。 $s = -m$ として

$$\zeta(-m, a) = m! \operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{z^{-m-1} e^{az}}{1 - e^z} dz \quad (16)$$

となる。留数は、 $\frac{e^{az}}{1 - e^z}$ を原点まわりでローラン展開したときの z^m の係数となる。これは次のようにして計算できる。まず、Bernoulli 数 B_n が

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \quad (17)$$

と定義されているのを思い出す。ちなみに B_n の具体的な値は、

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \dots, \quad (18)$$

$$B_{2k+1} = 0, (k \geq 1 \text{ 整数}) \quad (19)$$

である。また、 $e^{az} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} z^k$ であることも用いると

$$\frac{e^{az}}{1 - e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n a^k}{n! k!} z^{k+n-1} \quad (20)$$

となる。求める留数は、 z^m の係数なので $k + n - 1 = m$ のところの係数を拾ってくればよい。

$$\operatorname{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{z^{-m-1} e^{az}}{1 - e^z} dz = - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{B_{m+1-k} a^k}{(m+1-k)! k!} = - \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} B_{m+1-k} a^k \binom{m+1}{k} \quad (21)$$

となるので、

$$\zeta(-m, a) = - \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m+1} B_{m+1-k} a^k \binom{m+1}{k} \quad (22)$$

を得る。これを用いると、例えば

$$\zeta(0, a) = -\frac{1}{1} (B_1 a^0 + B_0 a^1) = \frac{1}{2} - a, \quad \zeta(-1, a) = -\frac{1}{2} (B_2 a^0 + 2B_1 a^1 + B_0 a^2) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a^2 \quad (23)$$

などを得る。

4 物理的手法

ここで物理的な手法（正則化と繰り込み）を用いて、発散する級数から有限の値を得ることを考えよう。結果として、上で解析接続で得た値と同じ値を得る。この部分は [2] の 1 章を参考にした。

ゼータ関数を定義する級数を正則化したしたもの

$$\zeta_{\text{reg}}(-m, a, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^m \exp(-\epsilon(n+a)). \quad (24)$$

を考えよう。ここで ϵ は小さな正則化のためのパラメーターである。 $m \geq -1$ のときには $\epsilon \rightarrow 0$ の極限でこの和は発散する。

m が非負の整数の場合、関係式

$$\zeta_{\text{reg}}(-m, a, \epsilon) = \left(-\frac{\partial}{\partial \epsilon} \right)^m \zeta_{\text{reg}}(0, a, \epsilon) \quad (25)$$

が成り立つ。また、 $\zeta_{\text{reg}}(0, a, \epsilon)$ は簡単に評価できて

$$\zeta_{\text{reg}}(0, a, \epsilon) = \frac{e^{-a\epsilon}}{1 - e^{-\epsilon}} \quad (26)$$

を得る。

さて、この繰り込みをやるわけだが、ここでは ϵ の負ベキの項のみを引き算し、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとるスキーム¹⁾を採用しよう。

$$\zeta_{\text{ren}}(-m, a) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\zeta_{\text{reg}}(-m, a, \epsilon) - (\text{負ベキの項})) \quad (27)$$

言い換えると繰り込まれた値 $\zeta_{\text{ren}}(-m, a)$ はローラン展開で ϵ^0 の項である。式 (25) と式 (26) を組み合わせ $z = -\epsilon$ の変数を用いると

$$\zeta_{\text{ren}}(-m, a) = m! \times \left(\frac{e^{az}}{1 - e^z} \text{のローラン展開で } z^m \text{の係数} \right) \quad (28)$$

を得る。この $\zeta_{\text{ren}}(-m, a)$ は解析接続で定義された $\zeta(-m, a)$ と一致する（式 (16) とその下の文を見よ）。

参考文献

- [1] T. M. Apostol, “Introduction to Analytic Number Theory,” Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

1) スキームによって答えが変わる場合、局所性、対称性などの観点からどのスキームを採用すべきかを考える必要がある。弦理論においては、このスキームは、(1) 導入する相殺項が局所的であることと、(2) Weyl 対称性を壊さない、という意味で正しいスキームである。有限部分を余分に引くことは (1) あるいは (2) に抵触する。

- [2] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” Cambridge University Press, 1998.