数理物理３試験　　2021 年 8 月 5 日 2 限

次の **1** から **4** の問いに答えよ。問題が不備、不明瞭な場合は自分で説明を付け加えたうえで答えよ。

1. c は複素数の定数として、次の微分方程式を $\mathbb{C}P^1$（リーマン球面）上で考えよう。

$$x(2-x)y'' - 4(x-1)y' + cy = 0.$$

(1-a) この微分方程式の特異点をすべて挙げ、それぞれの特異点について確定特異点か不確定特異点かを述べよ。

(1-b) c が一般的な値のとき、$x=\infty$ のまわりで、べき展開の方法を用いて独立な２つの解を求めよ。解答には、決定方程式の解を表す記号（$\lambda_\pm$ 等）を残したままでよい。

(1-c) 上で求めたべき級数解のうち、どちらかが有限項の和で終わる場合の c を非負の整数を表す記号 $\ell = 0, 1, 2, 3, \cdots$ を用いて表わせ。

2. 次のような積分と、その解析接続で表される関数 $K_\nu(z)$ を考える。

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} z^\nu \int_0^\infty dt\, t^{-\nu-1} e^{-\frac{1}{2}(t+z^2/t)} \qquad (☆)$$

(2-a) z が実数で大きいとき、$K_\nu(z)$ の近似的な表式を鞍点法を用いて求めよ。

(2-b) (☆) の積分が収束するような z の値に対して $K_{-\nu}(z)$ を $K_\nu(z)$ を用いて表わせ。

(2-c) (2-b) で求めた関係式は (☆) の積分が収束しないが解析接続によって $K_\nu(z)$ が定義されるような z に対しても成り立つことを説明せよ。

3. 区間 $-1 < x < 1$ で重み関数 $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ での直交多項式 $F_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を考える。

(3-a) この直交多項式をロドリゲスの公式を用いて表わせ。

(3-b) この直交多項式が満たす微分方程式を求めよ。

(3-c) この直交多項式が超幾何関数で表されることを説明せよ。

（裏面に続く）

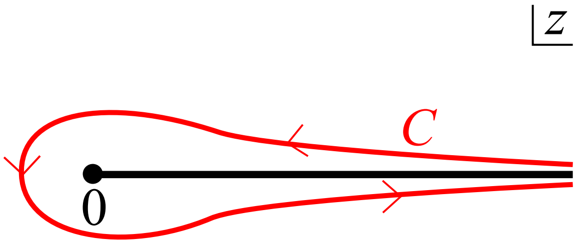

図 1　積分経路 C

4. 次の積分を考える。

$$I(s) = \int_C dz\, z^{s-1} e^{-z}. \qquad (\sharp)$$

ただし、C は、図 1 のように実軸の正の部分にカットを入れた z 平面でこのカットを囲むようにとる。これ以外の特異点は C の内側にないようにする。

(4-a) 関数 $f(z) = z^s$ を例にして、多価関数、カット、分枝、リーマン面について説明せよ。特に $I(s)$ の積分をするときの分枝を一つ選び、どの分枝を選んだかを述べよ。以下の問題では、その分枝を使用せよ。

(4-b) $(\sharp)$ の積分は任意の複素数 s について収束することを説明せよ。

(4-c) $I(s)$ をガンマ関数などを用いて表わせ。

(4-d) a を正の実数とする。フルヴィッツ・ゼータ関数 $\zeta(s,a)$ は、$\mathrm{Re}\, s > 1$ に対して無限級数の和

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$$

で定義される。また、それ以外の複素数 s に対しても、特異点を除いて解析接続で定義される。積分

$$J(s) = \int_C dz \frac{z^{s-1} e^{-az}}{1 - e^{-z}}$$

をフルヴィッツ・ゼータ関数、ガンマ関数などを用いて表わせ。

(4-e) この結果を用いて $\zeta(0,a)$ の値を求めよ。