数理物理３演習問題 第２回 解答例

1. (1-a) 積分路は特異点を通らないので問題となるのは $z \to -\infty$ の部分である。しかし、e^z がこの部分で急激に小さくなるので積分は収束する。

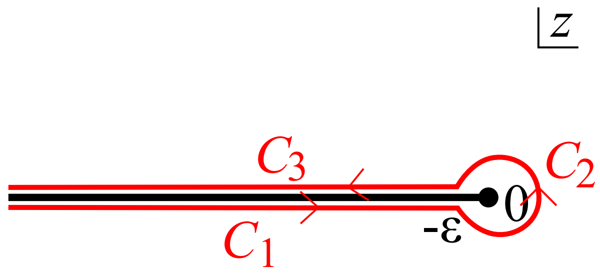

図 1

(1-b) $\mathrm{Re}\, s > 0$ で積分を評価する。問題に与えられたようなカットで $f(z) = z^{s-1}e^z$ とすると $t > 0$ として $f(-t \pm i0) = (te^{\pm i\pi})^{s-1}e^{-t} = e^{\pm i\pi(s-1)}t^{s-1}e^{-t} = -e^{\pm i\pi s}t^{s-1}e^{-t}$ である。図 1 のように積分路を変形して評価する。$\mathrm{Re}\, s > 0$ なので C_2 の半径 $\epsilon \to 0$ の極限で

$$\int_{C_2} f(z)dz \to 0$$

となる。C_1 は、

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{\infty}^{\epsilon} f(-t - i0)(-dt) \to -e^{-\pi is}\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = -e^{-\pi is}\Gamma(s)$$

となる。同様の計算で C_3 の積分は

$$\int_{C_3} f(z)dz \to e^{\pi is}\Gamma(s)$$

となる。したがって

$$I(s) = (e^{\pi is} - e^{-\pi is})\Gamma(s) = 2i\sin\pi s\Gamma(s)$$

が得られる。今は $\mathrm{Re}\, s > 0$ で示したが、一致の定理により上の式が意味のある全ての領域で成り立つ。

(1-c) s が $-n$ の近くで

$$\sin\pi s = (-1)^n\pi(s+n) + O((s+n)^3)$$

が成り立つので

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{2\pi i(s+n)}(1 + O((s+n)^2))I(s)$$

となる。$I(s)$ は複素平面全体で正則なので $\Gamma(s)$ は $s = -n$ で高々１位の極。留数は、

$$\mathrm{Res}_{s=-n}\,\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}I(-n) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_C dz z^{-n-1}e^z = (-1)^n\,\mathrm{Res}_{z=0}\, z^{-n-1}e^z = \frac{(-1)^n}{n!}$$

となる。途中の変形で、今の場合にカットが消えることを用いて、留数積分で評価した。これは 0 でないので、$\Gamma(s)$ は $s=-n$ $(n=0,1,2,\dots)$ で１位の極をもつ。ちなみに、$s=1,2,3,\dots$ の場合には、カットは消え、しかも $z=0$ の極もないので $I(s)=0$ である。したがって、$\Gamma(s)$ は $s=1,2,3,\dots$ で正則である。

(1-d) $\mathrm{Re}\,s>1$ の場合に積分を評価する。図 1 の経路で、関数 $g(z)=\frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z}$ を積分することを考える。$\mathrm{Re}\,s>1$ なので、$\epsilon\to 0$ の極限で C_2 の積分は

$$\int_{C_2} g(z)dz \to 0$$

となる。さらに C_1, C_3 では、$\mathrm{Re}\,z<0$ なので

$$\begin{aligned}\int_{C_1+C_3} g(z)dz &= \int_{C_1+C_3} dz\frac{z^{s-1}e^z}{1-e^z} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{C_1+C_3} dz z^{s-1}e^{nz}\\ &\to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}2i\sin\pi s\Gamma(s) = 2i\sin\pi s\Gamma(s)\zeta(s)\end{aligned}$$

と計算できる。途中、(1-b) の計算結果を用いた。まとめると

$$J(s) = 2i\sin\pi s\Gamma(s)\zeta(s)$$

を得た。これは $\mathrm{Re}\,s>1$ での計算結果だが、一致の定理より、この関係式の両辺が意味がある全ての領域で成り立つ。

(1-e) 先程の結果を $\zeta(s)$ について解く。途中相補公式を用いると

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}J(s)$$

を得る。これに $s=-1$ を代入すればよい。$\Gamma(2)=1$ なので

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi i}J(-1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{-2}e^z}{1-e^z} = \mathrm{Res}_{z=0}\frac{z^{-2}e^z}{1-e^z} = -\frac{1}{12}$$

を得る。ここではカットが消えるので留数積分で評価した。留数を求める際には原点は３位の極であることに注意する必要がある。$z^3\frac{z^{-2}e^z}{1-e^z}=\frac{z}{e^{-z}-1}$ の z^2 の係数が留数である。がんばって Taylor 展開すると

$$\frac{z}{e^{-z}-1} = 1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{12}z^2+O(z^3)$$

となるので留数 $-\frac{1}{12}$ を得る。ちなみに、この手の係数は Bernoulli 数と呼ばれ、頻繁に登場する数である。正確には次で定義される。

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n.$$

これを用いると $\zeta(-n)$ $(n=0,1,2,\dots)$ を表すことができる。興味があれば挑戦してみよ。