2019年度数理物理3配布物
担当：山口哲

第4章 複素関数論

間違い、誤植等、見つけた場合はお知らせください。

実数から複素数に対象を広げて考える事は、複雑にしているように見えて、実は見通しがよくなるということがしばしば起こる。例えば、n 次方程式を実数の範囲内で考えると解の個数は場合によって異なるが、複素数の範囲内なら重複を含めるといつも n 個である。

これから紹介する複素関数論も、実数の範囲内だけでは見えなかった物事に対する、よい見通しを与えてくれる。正則関数という概念を始めとして、実数の範囲内では難しかった積分の評価や微分方程式の解の空間などにも系統だった手法を与えてくれる。

この章で最も重要なことは、正則関数と、単に平面上のなめらかな関数の違いである。この違いに注目して読み進めてほしい。

4.1 正 則 関 数

この章の主役は複素平面内の領域 D 上[1]で定義された複素数に値をもつ関数 $f(z)$ である。複素数を虚部と実部に分けて $z = x + \mathrm{i}y$ と書けば、f は x と y の関数 $f(x, y)$ と考えることもできる。つまり 3.1 節で取り扱ったものと、同じである。ただし、ここでは複素数に値を取るとする。

次のような z による微分を考えよう。h を小さな複素数として

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z) \tag{4.1}$$

が存在するとき、f は z で**正則** (holomorphic) であるという。f が領域 D 内の全ての点で正則なとき、f は領域 D で正則であると呼ぶ。領域 D で正則な関数を**正則関数** (holomorphic function) と呼ぶ。

一見、式 (4.1) は実数の微分の定義を複素数に置き換えただけであり、わ

[1] ここで領域とは連結な開集合のことである。

ざわざ「正則関数」というような名前をつけることを大げさと感じるかもしれない。しかし、実は (4.1) はとても強い条件であり、それは h をどの方向から 0 に近づけても同じ値に収束するという要請から来ている。これを詳しく見てみよう。例えば h を実数にとって考えてみると $z+h=x+h+\mathrm{i}y$ なので (4.1) の左辺は、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

となる。一方で $h=\mathrm{i}h'$ として h' を実数とすると $z+h=x+\mathrm{i}(y+h')$ なので (4.1) の左辺は、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h'\to 0}\frac{f(x,y+h')-f(x,y)}{\mathrm{i}h'}=-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

となる。式 (4.1) が成り立つとすると、この 2 つは単に h を別の方向から 0 に近づけただけなので、同じにならなければならない。つまり f が点 z で正則だとすると

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

つまり

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f=0 \tag{4.2}$$

となっていなければならない。式 (4.2) を**コーシー・リーマン関係式**と呼ぶ。逆に f が x,y の関数として C^1 級でコーシー・リーマン関係式 (4.2) が成り立つなら、f は正則であることが知られている。

コーシー・リーマン関係式 (4.2) を少しだけ別の形に書き直しておこう。f を実部と虚部に分けて $f=u+\mathrm{i}v$ としたとき、式 (4.2) の実部と虚部はそれぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{4.3}$$

となる。この形の関係式も**コーシー・リーマン関係式**と呼ばれる。

例題 4.1 複素平面上の関数

$$f(z) = \mathrm{Re}\, z = x$$

は、複素平面上で x, y についてなめらかな関数である。ではこれは正則関数か。

解答例　コーシー・リーマン関係式 (4.3) が成り立つかどうかを調べよう。今、f の実部と虚部はそれぞれ $u = x,\ v = 0$ となるので、(4.3) の 2 つの式の左辺はそれぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

となるので (4.3) の最初の式を満たさない。したがって $f(z)$ は正則関数ではない。▌

この例が示すように、x, y のなめらかな関数であっても、ほとんどの関数は正則関数ではない。では、どのような関数が正則関数だろうか。

最初の例は、どんな z に対しても決まった数 c を与える定数関数 $f(z) = c$ である。定数関数は $\boldsymbol{C}$ 上正則関数である。定義にしたがって微分を計算してみると

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

となるので、$f'(z) = 0$ である。

次の例は、恒等関数 $f(z) = z$ である。これも定義にしたがって計算すると、$f'(z) = 1$ となる。

ここまでの 2 つの例はつまらないものだったかもしれない。しかし、これらを元にしてたくさんの他の例が作れる。f と g を領域 D で正則な関数とすると、次のような正則関数が作れる。

- 和 $f(z) + g(z)$ は領域 D で正則関数である。
- 積 $f(z)g(z)$ は領域 D で正則関数である。
- 領域 D で $g(z) \neq 0$ なら商 $\frac{f(z)}{g(z)}$ は領域 D で正則関数である。

ここまでと、上の 2 つの例を合わせると z の多項式は $\mathbb{C}$ 上正則関数、分数式は $\mathbb{C}$ から分母が 0 となる点を除いた領域で正則関数である。さらに、f を領域 D 上正則関数とし、その値域を $D' = \{f(z) | z \in D\}$ とする。g を D' 上正

則関数とすると

- 合成関数 $g(f(z))$ は領域 D で正則関数である。
- 領域 D' で逆関数 f^{-1} が存在するなら、f^{-1} は D' で正則関数である。

これらの命題は、和、積、商、合成関数、逆関数の微分の公式を導くのと同じ計算をすることで示せる。

もう少し、多くの例を見つけるために、次のようなことを考えよう。a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を数列とし、c を定数とする。このとき、無限級数（べき級数）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \tag{4.4}$$

が c を含む領域 D 内で収束したとする。すると $f(z)$ は領域 D で正則関数である。実際の証明には細かい議論が必要だが、素朴には任意の大きい N で切った時に多項式になるので D 内で正則関数になるが、収束するなら極限も正則関数になるのである。これを適用することにより、次のような関数は正則関数であることが分かる。

- $\exp z, \sin z, \cos z$ は (1.8) で定義され $\mathbb{C}$ で正則関数である。
- $\log(1-z)$ は (1.9) の展開で定義すると $|z| < 1$ で収束し、この領域で正則関数である。

このべき級数についてもう少しだけ説明しよう。式 (4.4) の右辺のべき級数の各項の絶対値をとった級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z-c|^n$$

が収束するとき、式 (4.4) の右辺のべき級数は、**絶対収束**するという。級数は絶対収束するなら収束する。$|z-c| < r$ のとき絶対収束するような r の最大値をべき級数の**収束半径**と呼ぶ。r を収束半径として $|z-c| < r$ の円板領域を**収束円板**と呼ぶ。これらの言葉を用いるなら、べき級数で定義された関数 (4.4) は、収束円板で正則関数となる。逆に $|z-c| < r$ でべき級数が収束するなら、絶対収束することが知られている。つまり収束半径は $|z-c| < r$ でべき級数が収束するような r の最大値と言い換えてもよい。

最後のべき級数の例は本質的に重要である。ある意味で正則関数は、このべき級数の例で尽きている。このことを詳しく見るためには、積分という道

具が必要なので、次の節では複素関数の積分について述べよう。

4.2 正則関数の積分

$f(z)$ を複素平面内の領域 D での関数、C を領域 D 内の経路とする。積分

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

を式 (3.11) の 2 次元の線積分として定義する。もう少し詳しく述べよう。$z = x + \mathrm{i}y,\ f = u + \mathrm{i}v$ とすると、

$$f(z)\,\mathrm{d}z = (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y) = \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathrm{i}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

と書き直せる。ここで

$$\boldsymbol{A} = (u, -v), \quad \boldsymbol{B} = (v, u) \tag{4.5}$$

とした。この記号を用いて

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z := \int_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathrm{i}\int_C \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.6}$$

と定義する。右辺は (3.11) の線積分である。特に C が閉じた経路である場合、

$$\oint_C f(z)dz$$

と書く場合が多い。

積分そのものは一般の連続関数で定義できるが、特に正則関数の場合には非常に興味深いことが起こる。これを表すのが複素関数論で最も重要な**コーシーの積分定理**である。図 4.1 のように、$f(z)$ を複素平面内の領域 D で正則な関数とし、領域 D 内の面 S と S の境界の閉じた経路 C を考える。このとき

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{4.7}$$

となる。つまりコーシーの積分定理の意味するところは、**正則である部分においては、積分経路を連続変形しても値は変わらない**ということである。

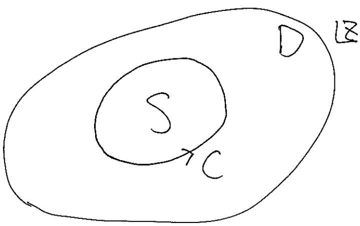

図 4.1　コーシーの積分定理の経路 C と面 S。面 S を境界 C も合わせて含む領域 D で正則な関数を考える。

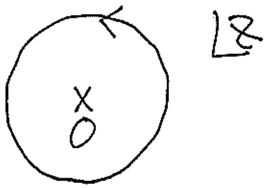

図 4.2 原点まわりを反時計回りに一周する経路。

このコーシーの積分定理の証明は、グリーンの定理 (3.18) とコーシー・リーマン関係式 (4.3) を用いれば簡単にできる。実際、式 (4.5) の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を用いると式 (4.6) のように書けるので、実部虚部それぞれについてグリーンの定理 (3.18) を適用する。実部は、

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

となる。ここで (4.3) の 2 つめの式を用いると被積分関数が 0 であることが分かるので、積分自体も 0 であることが分かる。同様に虚部に関しても

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

となるが (4.3) の 1 つめの式を用いると被積分関数が 0 となるので、積分が 0 になる。これでコーシーの積分定理 (4.7) が証明された。

例題 4.2 C を図 4.2 のように原点まわりを反時計回りに一周する経路とする。

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

を計算せよ。

解答例 線積分と同じように積分経路をパラメータ表示する。今被積分関数 $\frac{1}{z}$ は原点を除く複素平面上で正則である。コーシーの積分定理により原点を除く部分で積分経路を連続変形しても良いわけだが、例えば原点中心の半径

r の円周にとる。このとき、この経路は例えば、

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

とパラメータ表示できる。すると

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta$$

となる。したがって

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}$$

となる。▮

この演習問題の結果は有用である。例えば $f(z)$ を原点を含む領域で正則な関数、C を原点を反時計回りに一周する経路とすると、コーシーの積分定理 (4.7) より

$$\oint_C (f(z) + \frac{1}{z})\,\mathrm{d}z = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i}$$

となる。つまり、積分に寄与するのは、$z = 0$ で正則でない部分のみである。また、$f(z)/z$ の図 4.2 の経路での積分を考えてみよう。この場合、積分経路を好きなだけ小さくとってよいので、積分経路上で $f(z) \cong f(0)$ であり、誤差は好きなだけ小さくできる。つまり

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z = f(0)\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i}f(0) \tag{4.8}$$

となる。これを原点まわりではなく、一般の w のまわりで考えよう。$f(z)$ を w を含む領域で正則な関数として C を w のまわりを反時計回りに一周する経路とする。このような積分は今後よく出てくるので $\oint_C =: \oint_w$ と略記することにしよう。これは、$z' = z - w$ の変数変換をすると式 (4.8) に帰着できて

$$\oint_w \frac{f(z)}{z - w}\,\mathrm{d}z = \oint_0 \frac{f(z' + w)}{z'}\,\mathrm{d}z' = 2\pi\mathrm{i}f(w)$$

となる。こうして

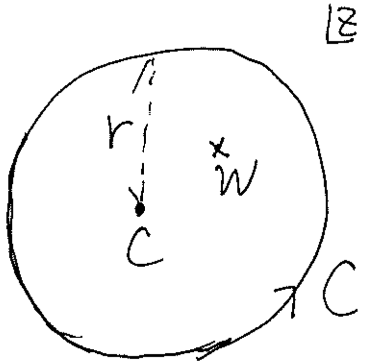

図 4.3

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_w \frac{f(z)}{z-w} \tag{4.9}$$

という**コーシーの積分公式**を得る。

コーシーの積分公式 (4.9) を用いると、正則関数が非常に特別な関数であることが分かる。まず、(4.9) の右辺は w で何回でも微分可能なので、[2]左辺も何回でも微分可能である。正則関数の定義は 1 回微分可能であることのみであったが、それを仮定すると何回でも微分可能であることが言えてしまうのである。

さらに、正則関数が解析的であることも言える。大雑把言いうと、式 (4.9) の右辺は w について解析的である関数を積分したものなので解析的であるということである。もう少し細かい議論をしよう。図 4.3 のように C を c を中心に半径 r の円周上 $|z-c|=r$ を反時計回りに一周する経路とする。$f(z)$ は C とその内部を含む領域で正則であるとしてコーシーの積分公式 (4.9) を用いると $|w-c|<r$ を満たす w に対して

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z$$

[2]積分と微分を入れ替えてよいことの証明には若干の議論が必要であるが、ここでは省略する。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-c)-(w-c)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-c}\frac{1}{1-\frac{w-c}{z-c}}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-c}{z-c}\right)^n \mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-c)^n, \\
a_n &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

となるので $f(w)$ は、解析的であり $|w-c| < r$ で収束する。展開するところでは、$|(w-c)/(z-c)| < 1$ であることを用いた。[3] つまり、前節で予告したように、c を中心とする円板をふくむ領域での正則関数関数は、この円板内でべき級数と等しくなる。このべき級数の収束半径はこの円板の半径以上である。

さて、式 (4.10) で表される係数 a_n は、

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)$$

と表すことができる。つまり、c を中心とする半径 r の円板の内部 D で $f(z)$ が正則だとすると、c のまわりの非常に小さな領域での $f(z)$ が決まれば、D の内部での $f(z)$ が決まるということになる。言い換えると、小さな円板領域での正則関数を大きな円板領域での正則関数に広げるやり方は、（出来たとすると）一意的であるということである。

このことをさらに推し進めると、次の解析接続という概念にいたる（図 4.4 参照)。ある c_0 のまわりの小さな領域で定義された正則関数 $f(z)$ があるとする。まず、これは c_0 を中心とする収束円板内部 D_0 まで広げることができる。次に D_0 の端の方に c_1 をとり、このまわりのべき級数展開を考えれば、その収束円板 D_1 まで $f(z)$ の定義を広げることができる。これは一般には

[3] 最後のところの変形では、積分と微分を入れ替えた。これには少々議論が必要であるが、ここでは省略する。

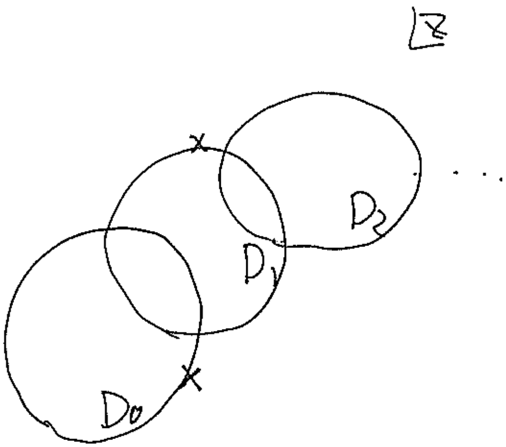

図 4.4　解析接続の様子。最初は D_0 で定義されていた正則関数が、それと重なりをもつ D_1 へ、さらに D_1 と重なりをもつ D_2 へと接続して定義域を広げていくことができる。

D_0 の外部を含んでいる。同様に D_1 の端の方に c_2 をとり、そのまわりのべき級数展開の収束円板 D_2 に広げ…ということを繰り返すと $f(z)$ の定義を

$$D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup \cdots$$

という領域まで広げることができる。このようにして正則関数の定義域を広げていくことを**解析接続**と呼ぶ。

一つだけ注意することは、解析接続は必ずしも一意的とは限らず、解析接続していく経路によっている場合がある。例えば $f(z) = \sqrt{1-z}$ を $z = 0$ のまわりの十分小さい領域でべき級数で定義し

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad a_n = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{3}{2} + j \right)$$

とする。このべき級数の収束半径は 1 であり、$|z| < 1$ で不定性なく定義される。これを解析接続し実軸の $z > 1$ を含む領域に解析接続する場合、$\mathrm{Im}\, z > 0$ の方を回っていく場合と $\mathrm{Im}\, z < 0$ の方を回っていくので値が異なる。この

ような様々な解析接続の仕方をまとめて考えることにより、多価関数さらにはリーマン面といった非常に有用な概念につながるのだが、これらは本書の範囲を超えるので割愛する。

4.3　孤立特異点と留数積分

複素関数論の重要な応用の一つは積分の評価である。コーシーの積分定理 (4.7) のために、正則な部分は経路を自由に変形していくことができる。したがって、重要なところは（解析接続したとしても）正則にならない点である。このような点は、**特異点**と呼ばれる。この節では、孤立した特異点（**孤立特異点**）に焦点をしぼって、その性質を調べよう。また、それを利用して積分を評価する方法について考えよう。

$z=c$ に孤立した特異点をもつ正則関数 $f(z)$ を考えよう。もう少し詳しく述べると、$z=c$ を中心とする、ある円板領域を D' とし、D' から c を除いた領域 $D=D'\setminus\{c\}$ を考える。$f(z)$ は D で正則な関数とする。このとき、$f(z)$ は次のように**ローラン展開**が可能であることが知られている。

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n \tag{4.11}$$

証明は省略する。テイラー展開との違いは、一般には負べき $z^n,\ (n<0)$ を含むことである。

このような特異点は、次の三つのタイプに分類できる。

(1)　解析接続で正則にできる。つまりローラン展開 (4.11) の係数が $a_n=0,\ (n<0)$ となる。

(2)　負べきの部分が途中で切れる。つまり、ある整数 $m>0$ があって、$a_{-m}\neq 0,\ a_n=0,\ (n<-m)$ となる。このような特異点を**極**と呼び、m を極の**位数**と呼ぶ。

(3)　負べきの部分が途中で切れない。このような特異点を**真性特異点**と呼ぶ。

さて、この特異点のまわりでの積分を考えよう。ローラン展開 (4.11) の各項ごとに積分すればよいことが知られているので、積分

$$I_n=\oint_c(z-c)^n\,\mathrm{d}z \tag{4.12}$$

を考えよう。積分経路を c 中心の小さな半径 r の円周に選び $z-c=re^{i\theta}$, $(0\le\theta\le2\pi)$ とパラメータ表示する。すると $\mathrm{d}z=re^{i\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta$ となる。$n\neq-1$ の場合 (4.12) は

$$I_n=\int_0^{2\pi}r^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta=\left[r^{n+1}\frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi}=0$$

となる。一方 $n=-1$ の場合

$$I_{-1}=\int_0^{2\pi}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta=2\pi\mathrm{i}$$

となる。これらを用いてローラン展開で表された形 (4.11) を積分すると

$$\oint_c f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\oint_c(z-c)^n\,\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nI_n=2\pi\mathrm{i}a_{-1}$$

となる。このようにローラン展開 (4.11) の $(z-c)^{-1}$ の係数 a_{-1} が非常に重要なので特別な名前がついていて**留数**と呼ばれている。また、記号 Res が

$$\mathrm{Res}_{z=c}\,f(z)=a_{-1}$$

と定義されている。この記号を用いて結果を書くと

$$\oint_c f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=c}\,f(z) \tag{4.13}$$

となる。

一般に反時計回りの閉じた経路 C とそれを含む領域 D での正則関数 $f(z)$ を考えよう (図 4.5 参照)。$f(z)$ は C の内側でも孤立特異点 c_j, $(j=1,\cdots,N)$ 除いて正則であるとする。積分 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ は特異点を除いて正則であるので縮めていくことができて、特異点 c_j のまわりの積分のみ残り

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{N}\oint_{c_j}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}_{z=c_j}\,f(z) \tag{4.14}$$

となる。最後の部分では、式 (4.13) を用いた。式 (4.14) のように留数の値を用いて積分を評価することを**留数積分**と呼ぶ。

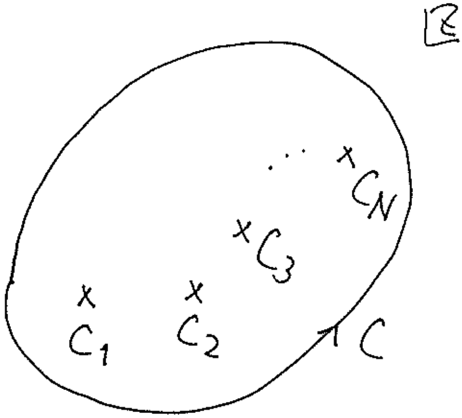

図 4.5

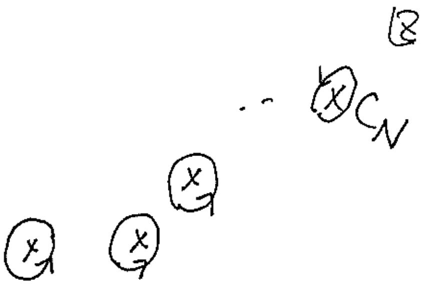

図 4.6

例題 4.3

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}, \quad a > 0 \tag{4.15}$$

を求めよ。

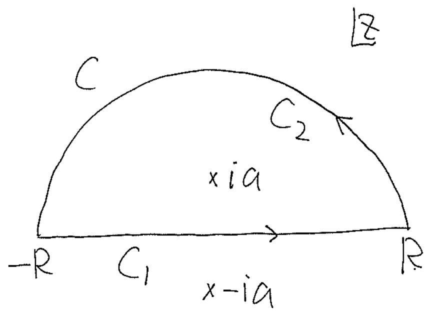

図 4.7

解答例　図 4.7 のように、実軸上 $-R$ から R までの経路 C_1 と原点中心で半径 R の半円で $z = R$ から $z = -R$ までのもの C_2 を合わせた閉じた経路 C を考える。ここでの $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ の積分を考えよう。R が非常に大きく、$|z| = R$ のとき $|f(z)| \sim \frac{1}{R^2}$ で、C_2 の長さが πR なので

$$\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \sim \frac{\pi}{R} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

となる。したがって式 (4.15) の I は、

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{C} f(z)\,\mathrm{d}z$$

となる。この C での積分を留数を用いて評価しよう。$f(z)$ の特異点は $z = \pm \mathrm{i}a$ だが、C の内側にあるのは $z = \mathrm{i}a$ である。$z = \mathrm{i}a$ の近くで $f(z)$ は

$$f(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i}a)(z-\mathrm{i}a)} = \frac{1}{2\mathrm{i}a(z-\mathrm{i}a)} + (\text{正則})$$

となるので留数は

$$\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}a}\, f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}a}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}a}\, f(z) = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}a} \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

となる。▮

演習問題

(1)　$f(z)$ を領域 D 内で定数でない正則関数とする。このとき、$\mathrm{Re}\, f(z)$ は領域 D の内点で最大値を持たないことを示せ。ここで領域とは、連結な開集合であることに注意せよ。

(2)　次の積分の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax^2}\,\mathrm{d}x\,,\ (a > 0 \text{ は定数})$$