

# BÀI TẬP ÔN TẬP TOÁN 1 (ĐH ngành Kỹ thuật)

## MA TRẬN-ĐỊNH THỨC-HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

**Bài 1.** Cho hệ phương trình  $Ax=b$  với  $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 9 & 15 \end{bmatrix}$ ,  $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ ,  $b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) Giải hệ trên

b) Chứng minh tập nghiệm S của hệ là không gian con của  $\mathbb{R}^4$

c) Tìm cơ sở và số chiều của S.

**Bài 2.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Giải hệ phương trình trên.

2. Chứng minh rằng tập hợp nghiệm S của hệ là không gian véc tơ con của KGVTV  $\mathbb{R}^4$

3. Tìm số chiều và một cơ sở tùy ý của S.

**Bài 3.** Giải và tìm cơ sở, số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Bài 4.** Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 13x_4 = 9 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

**ĐS.** Hệ có nghiệm TQ  $(x_1, -1-8x_1, 0, 1+2x_1)$

**Bài 5.** Trong KGVTV  $\mathbb{R}^3$  cho tập  $V = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \right\}$

Chứng minh V là không gian con của  $\mathbb{R}^3$ . Tìm một cơ sở và tìm số chiều của V.

**ĐS.**  $V = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \}$ ,  $\dim V = 2$

**Bài 6.**

Cho 2 họ vectơ  $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$  trong đó

$$u_1 = (-3, 0, -3), u_2 = (-3, 2, 1), u_3 = (1, 6, -1)$$

$$v_1 = (-6, -6, 0), v_2 = (-2, -6, 4), v_3 = (-2, -3, 7)$$

a) Chứng minh  $B, B'$  là các cơ sở của KGVT  $\mathbb{R}^3$

b) Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B'$  sang  $B$

c) Tính ma trận tọa độ  $[u]_{B'}$  biết  $(u)_B = (1; 1; -4)$

d) Tính ma trận tọa độ  $[w]_{B'}$  của  $w = (-5, 8, -5)$  và tính  $[w]_{B'}$  theo 2 cách khác nhau.

$$\text{Đáp số. b) } P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{17}{12} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{c) } [u]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{13}{12} \\ \frac{41}{12} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad \text{d) } [w]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{31}{21} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \end{bmatrix},$$

Tìm  $[w]_{B'}$ . Có 2 cách. **Cách 1:** Làm trực tiếp

$$\text{Cách 2: Sử dụng ma trận chuyển: } [w]_{B'} = P \cdot [w]_B = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} \\ -\frac{43}{12} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

## ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH-CHÉO HÓA MA TRẬN

**Bài 7.** Cho ánh xạ  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  xác định như sau:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3 + x_4, x_2 + x_4)$$

a) Chứng minh  $f$  là một ánh xạ tuyến tính

b) Tìm ma trận của  $f$  trong cặp cơ sở chính tắc

c) Tìm  $\text{Ker}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$ , cơ sở và số chiều của  $\text{Ker}(f)$ ,  $\text{Im}(f)$ .

**Bài 8.**

1. Tìm ánh xạ tuyến tính  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  biết ma trận của nó đối với các cơ sở chính tắc tương ứng là:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Tìm  $\text{Im}(f)$ ,  $\text{Ker}(f)$ , cơ sở và số chiều của  $\text{Im}(f)$  và  $\text{Ker}(f)$ .

$$\text{Bài 9. Cho ma trận } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Tìm các vectơ riêng và giá trị riêng của  $A$

$$\text{b) Tìm ma trận } P \text{ sao cho } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Bài 10.** Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

a) Tìm các vectơ riêng và giá trị riêng của  $A$

b) Tìm ma trận  $P$  làm chéo hóa  $A$  (tức  $P^{-1}AP$  là một ma trận chéo).

ĐS.  $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

## BÀI TOÁN QHTT

**Bài 11.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau :

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_2 - 7x_3 + 3x_4 \leq 2$$

$$-3x_3 + 2x_4 \leq 5$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 4})$$

Đưa bài toán trên về dạng chuẩn, tìm phương án cực biên và cơ sở của phương án cực biên đó.

**Bài 12.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 30 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 23 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \geq -10 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5} \end{cases}$$

**Bài 13.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = -6x_1 + 14x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq -72 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = 60 \\ -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 36 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4} \end{cases}$$

**Bài 14.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \geq -4 \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ x_3 \leq 5 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3} \end{cases}$$

**Đáp số:** không có patur ( $\Delta_3 > 0, z_{i3} \leq 0, \forall i$ )

**Bài 15.** Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

**Đáp số:** Thêm 2 ẩn phụ và 2 ẩn giả.

-Sau 3 bảng thu được patur  $x_M^* = (0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, \frac{9}{2}, 0, 0, 0) \Rightarrow x^* = (0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0), f_{\max} = 9$

**Bài 16.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_6 = -50 \\ x_4 + x_5 + 2x_6 = 14 \\ -2x_1 + 6x_3 + 2x_4 + x_6 = 12 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Chứng tỏ  $x^0 = (0, 38, 0, 6, 8, 0)$  là phương án cực biên không suy biến. Xuất phát từ  $x^0$  giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

**HD.** -Biến đổi sơ cấp hệ điều kiện để đưa bài toán về dạng chuẩn với cơ sở chính tắc  $J = \{A_2, A_5, A_4\}$  (tức là  $x_2, x_5, x_4$  là biến cô lập)

-Sau 2 bảng được  $x^* = (8, 22, 0, 14, 0, 0), f_{\min} = -50$

**Bài 17.** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 37 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_3 + x_4 \geq 15 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Đưa bài toán trên về dạng chuẩn với các biến cô lập là  $x_2, x_3, x_5$ . Từ đó hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

**Đáp số:** -Đưa về dạng chuẩn được pacb xuất phát là  $x^0 = (0, 14, 3, 0, 32, 0)$ .

-Sau 2 bảng được  $x^* = (0, 29, 28, 0, 25), f_{\min} = -47$

**Bài 18.** Giải bài toán vận tải sau:

Thu \ Phát	78	56	65	100
84	7	2	3	11
60	3	7	7	9
75	10	14	15	8
80	9	12	17	10

Tìm phương án cực biên của bài toán theo phương pháp chi phí nhỏ nhất (cực tiểu cước phí) và kiểm tra tính tối ưu của phương án đó.

**Bài 19.** Giải bài toán vận tải sau:

Thu Phát	25	38	25	30	20
30	2	5	7	9	4
58	4	6	8	10	3
50	4	6	9	7	4

$$\text{ĐS. PATU } x^* = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 25 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 30 & 0 \end{bmatrix}, f_{\min} = 743.$$

**Bài 20.** Giải bài toán vận tải sau:

Thu Phát	86	66	76	81
57	2	7	14	12
79	7	3	10	9
52	11	9	8	10
66	4	7	15	17

**Bài 21.** Cho bài toán vận tải sau:

Thu Phát	76	62	88	45	40
79	10	19	9	6	8
102	13	11	8	7	4
70	12	17	10	5	3
60	12	18	18	7	9

a) Tìm phương án cực biên

b) Giải bài toán

$$\text{ĐS phương án tối ưu } x^* = \begin{pmatrix} 31 & 0 & 48 & 0 & 0 \\ 0 & 62 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 40 \\ 45 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

## SƠ ĐỒ MẠNG

**Bài 22.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời gian (ngày)
$x_1$	Bắt đầu ngay	2
$x_2$	Bắt đầu ngay	4
$x_3$	Sau $x_1$	3
$x_4$	Sau $x_1, x_2$	2
$x_5$	Sau $x_1, x_2$	3
$x_6$	Sau $x_1, x_2$	5
$x_7$	Sau $x_3, x_6$	1
$x_8$	Sau $x_4$	4

- a) Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên
- b) Tính chỉ tiêu thời gian tại đỉnh, xác định đường găng

**Bài 23.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời gian (ngày)
$x_1$	Bắt đầu ngay	3
$x_2$	Bắt đầu ngay	2
$x_3$	Sau $x_2$	5
$x_4$	Sau $x_2$	3
$x_5$	Sau $x_1, x_4$	3
$x_6$	Sau $x_1, x_3, x_4$	7
$x_7$	Sau $x_1, x_3, x_4$	5
$x_8$	Sau $x_5, x_7$	4

- a) Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên
  - b) Tính chỉ tiêu thời gian tại đỉnh, xác định đường găng
- ĐS. Có 2 đường găng,  $T_g = 14$ . ( 6 đỉnh, 1 cung giả)

**Bài 24.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời gian (ngày)
$x_1$	Bắt đầu ngay	2
$x_2$	Bắt đầu ngay	3
$x_3$	Bắt đầu ngay	4
$x_4$	Sau $x_2$	2
$x_5$	Sau $x_1, x_2$	8
$x_6$	Sau $x_5, x_4$	3
$x_7$	Sau $x_5, x_4$	3
$x_8$	Sau $x_5$	6

- Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên
- Tính chỉ tiêu thời gian tại đỉnh, xác định đường găng

**Bài 25.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời hạn (ngày)
$x_1$	Làm ngay	2
$x_2$	Làm ngay	3
$x_3$	Làm sau $x_1$	2
$x_4$	Làm sau $x_1$	5
$x_5$	Sau $x_1, x_2$	2
$x_6$	Sau $x_1, x_2$	4
$x_7$	Làm sau $x_6, x_5$	3
$x_8$	Làm sau $x_3$	3

- Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên
- Tính chỉ tiêu thời gian của đỉnh, xác định đường găng

**Bài 26.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời hạn (ngày)
$x_1$	Làm ngay	2
$x_2$	Làm ngay	2
$x_3$	Làm ngay	3
$x_4$	Sau $x_1, x_3$	2
$x_5$	Sau $x_2, x_4$	4
$x_6$	Sau $x_4$	7
$x_7$	Sau $x_5, x_6$	6
$x_8$	Sau $x_5, x_6$	2

- Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên
- Tính chỉ tiêu thời gian của đỉnh, xác định đường găng

**Bài 27.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời hạn (ngày)
$x_1$	Làm ngay	4
$x_2$	Làm sau $x_1$	2
$x_3$	Làm sau $x_1$	3
$x_4$	Làm ngay	1
$x_5$	Làm sau $x_1$	5
$x_6$	Làm sau $x_3, x_4$	4
$x_7$	Làm sau $x_3, x_4$	2
$x_8$	Làm sau $x_2, x_3, x_4$	7
$x_9$	Sau $x_5, x_8$	5

a) Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên

b) Tính chỉ tiêu thời gian của đỉnh, xác định đường găng

**Bài 28.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời hạn (ngày)
$x_1$	Làm ngay	3
$x_2$	Làm ngay	4
$x_3$	Làm ngay	6
$x_4$	Làm sau $x_1$	5
$x_5$	Làm sau $x_3$	5
$x_6$	Làm sau $x_2, x_3, x_4$	2
$x_7$	Làm sau $x_1$	5
$x_8$	Làm sau $x_1$	3
$x_9$	Sau $x_5$	4
$x_{10}$	Sau $x_6, x_7, x_8, x_9$	5

a) Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên

b) Tính chỉ tiêu thời gian của đỉnh, xác định đường găng .

**Bài 29.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời hạn
$x_1$	Làm ngay	4
$x_2$	Làm ngay	5
$x_3$	Làm ngay	3
$x_4$	Làm sau $x_1, x_3$	4
$x_5$	Làm sau $x_1, x_3$	7
$x_6$	Làm sau $x_1, x_3$	4
$x_7$	Làm sau $x_2, x_4$	5
$x_8$	Làm sau $x_5, x_7$	4
$x_9$	Làm sau $x_6$	8

- a) Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên  
b) Tính chỉ tiêu thời gian của đỉnh, xác định đường găng

**Bài 30.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời hạn
$x_1$	Làm ngay	4
$x_2$	Làm ngay	5
$x_3$	Sau $x_1$	3
$x_4$	Sau $x_1$	4
$x_5$	Sau $x_2, x_4$	7
$x_6$	Sau $x_2, x_3, x_4$	4
$x_7$	Sau $x_2, x_3, x_4$	5
$x_8$	Làm sau $x_5, x_6$	4

- a) Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên  
b) Tính chỉ tiêu thời gian của đỉnh, xác định đường găng

**Bài 31.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời hạn (ngày)
$x_1$	Làm ngay	3
$x_2$	Làm ngay	4
$x_3$	Làm ngay	3
$x_4$	Làm sau $x_1$	4
$x_5$	Làm sau $x_1$	2
$x_6$	Làm sau $x_1$	1
$x_7$	Làm sau $x_2, x_4$	4
$x_8$	Làm sau $x_3, x_5$	2
$x_9$	Làm sau $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$	4

- a) Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên  
b) Tính chỉ tiêu thời gian của đỉnh, xác định đường găng  
ĐS.  $T_g = 11$  (6 đỉnh, 2 cung giả)

**Bài 32.** Một quá trình thi công gồm các bước công việc cho ở bảng sau

Công việc	Trình tự	Thời hạn (ngày)
$x_1$	Làm ngay	3
$x_2$	Làm ngay	5
$x_3$	Làm ngay	7
$x_4$	Làm sau $x_1$	9
$x_5$	Làm sau $x_1$	6
$x_6$	Làm sau $x_3$	12
$x_7$	Làm sau $x_3$	11
$x_8$	Làm sau $x_2, x_4, x_5, x_6$	8
$x_9$	Làm sau $x_2, x_5, x_6$	4
$x_{10}$	Sau $x_7$	5

- a) Lập sơ đồ mạng của quá trình thi công trên  
b) Tính chỉ tiêu thời gian của đỉnh, xác định đường găng  
ĐS.  $T_g = 27$