[INTRODUZIONE 3](#_Toc32334189)

[1. UN QUADRO GENERALE SULL’INTELLIGENZA ARTIFICIALE 4](#_Toc32334190)

[1.1 COS’È L’INTELLIGENZA ARTIFICIALE 4](#_Toc32334191)

[1.2 CRITERI PER DEFINIRE UN’IA 7](#_Toc32334192)

[1.3 IL RAGIONAMENTO 9](#_Toc32334193)

[2. DAL PENSIERO ALLA MACCHINA: TENTATIVI DI MECCANIZZARE IL PENSIERO DAI GRECI A TURING 10](#_Toc32334194)

[2.1 PRIMA DI ARISTOTELE 10](#_Toc32334195)

[2.2 ARISTOTELE E GLI STOICI: IL SILLOGISMO 11](#_Toc32334196)

[2.3 DA RAIMONDO LULLO A BLAISE PASCAL: I COSTRUTTORI 14](#_Toc32334197)

[2.4 CARTESIO 17](#_Toc32334198)

[2.5 LEIBNIZ: IL SOGNO DEL CALCOLATORE UNIVERSALE 18](#_Toc32334199)

[2.6 BOOLE: LA LOGICA SIMBOLICA 21](#_Toc32334200)

[2.7 FREGE: LA LOGICA FORMALE 23](#_Toc32334201)

[2.8 CANTOR: LA TEORIA DEGLI INSIEMI 28](#_Toc32334202)

[2.9 RUSSEL E WHITEHEAD: IL LOGICISMO E LA TEORIA DEI TIPI 29](#_Toc32334203)

[2.10 HILBERT E BROWNER: FORMALISMO VS. INTUIZIONISMO 31](#_Toc32334204)

[2.11 HILBERT VS. GODEL 34](#_Toc32334205)

[2.11.1 ENTSCHEIDUNGSPROBLEM 34](#_Toc32334206)

[2.11.2 I TEOREMI DI INCOMPLETEZZA 35](#_Toc32334207)

[2.12 TURING: LA MACCHINA UNIVERSALE 37](#_Toc32334208)

# INTRODUZIONE

# L’obiettivo di questa tesi di laurea è quello di ricercare l’origine filosofica delle concezioni fondamentali che hanno permesso lo sviluppo delle teorie che hanno portato alla costruzione dei calcolatori digitali e alla realizzazione di ciò che oggi viene conosciuto con il nome di Intelligenza Artificiale.

# Nel primo capitolo, oltre ad alcuni cenni storici, ho cercato di delineare un quadro di definizione generale dell’IA, a partire dal significato di intelligenza. Dare una definizione di intelligenza è fondamentale per capire in quale direzione si è mossa la ricerca in IA al fine di trasferire questa facoltà alla macchina. Come vedremo, dall’amalgama di capacità attuabili da un’entità intelligente, ad emergere in questo caso sarà l’aspetto legato al raziocinio, e quindi al calcolo. Se per descrivere un essere intelligente non si può prescindere dalla sua capacità di ragionare, e se per ragionamento intendiamo un processo di pensiero rigidamente strutturato, allora per poter trasferire questo tipo di intelligenza alla macchina è necessario innanzitutto riuscire a formalizzare i meccanismi del ragionamento stesso.

# Nel secondo capitolo ho rintracciato gli snodi principali della storia della formalizzazione del ragionamento logico.

# UN QUADRO GENERALE SULL’INTELLIGENZA ARTIFICIALE

## 1.1 COS’È L’INTELLIGENZA ARTIFICIALE

Che cos’è l’intelligenza? Diverse teorie, nel corso dei secoli hanno cercato di dare una risposta esaustiva a questa domanda. In genere si pensa che una condotta intelligente sia sinonimo di condotta razionale, tuttavia alcuni studiosi hanno allargato il campo rifiutando la definizione univoca di questa parola e ipotizzando l’esistenza di diversi tipi di intelligenze che, insieme, costituiscono la vasta gamma delle potenzialità umane. Potremmo dunque riferirci all’intelligenza come a quel complesso di facoltà psichiche e mentali che consentono di pensare, comprendere o spiegare i fatti o le azioni, elaborare modelli astratti della realtà, intendere e farsi intendere dagli altri, giudicare, usare la logica, essere consapevoli, imparare, saper pianificare le proprie azioni, risolvere problemi, ma potremmo riassumere tutto ciò considerando in generale l’intelligenza come la capacità di acquisire ed elaborare le informazioni al fine di riuscire adeguatamente ad interagire ed adattarsi all’ambiente.

Il possesso di questa particolare facoltà ha fatto sì che la nostra specie, appunto l’homo sapiens, si differenziasse dalle altre specie in virtù della sua peculiare capacità di capire, comprendere, predire, manipolare il mondo circostante in modo cosciente, grazie alla capacità del pensiero.

Per migliaia di anni, suppongo in virtù della nostra coscienza[[1]](#footnote-1), abbiamo cercato di comprendere questa nostra straordinaria capacità, ponendoci domande sull’origine e sul modo di funzionare delle nostre facoltà intellettuali: come pensiamo? Come funziona la nostra mente? ad oggi, le neuroscienze, che si occupano di descrivere il modo di funzionare del nostro cervello, non sono riuscite a fornirci una risposta precisa ed esauriente e l’origine del pensiero rimane per noi ancora un mistero. Nonostante le enormi difficoltà tecniche e concettuali, sono state formulate alcune teorie della mente che, unite alla tecnica, hanno permesso di creare in principio macchine dotate di razionalità computazionale che, con il tempo e il progresso scientifico[[2]](#footnote-2) è andata ampliandosi fino a diventare ciò che oggi chiamiamo Intelligenza Artificiale (AI), cioè quel ramo della computer science che studia lo sviluppo di sistemi hardware e software dotati di specifiche capacità, tipiche dell’essere umano, in altri termini, l’IA è il campo di ricerca che studia la programmazione e progettazione di sistemi mirati a dotare le macchine di capacità prettamente umane.

Le origini di questa disciplina risalgono al periodo immediatamente successivo alla Seconda Guerra Mondiale, la quale ha rappresentato un grande stimolo allo sviluppo tecnologico per via della necessità di sviluppare macchine in grado di raggiungere un’elevata potenza di calcolo da utilizzare nelle operazioni militari. La data di nascita ufficiale dell’IA risale però all’estate del 1956, quando dieci massimi esperti di varie discipline (dalla matematica alla psicologia e dall’ingegneria alla neurologia) si riunirono al Dartmouth College, ad Hanover per tenere un convegno nel quale raccogliere molteplici contributi sul tema. L’obiettivo era quello di sviluppare «uno studio che proceda sulla base dell’ipotesi che ogni aspetto dell’apprendimento e ogni caratteristica dell’intelligenza possano, in linea di principio, essere così precisamente descritti che una macchina possa simularli. Sarà fatto un tentativo di scoprire come costruire macchine che usino il linguaggio, formulino concetti e astrazioni, e risolvano problemi oggi di competenza solo dell’uomo, e siano capaci di auto-migliorarsi»[[3]](#footnote-3).

Durante questo periodo, ci è noto che tra i partecipanti ci fu un’intensa discussione proprio sul termine “Intelligenza Artificiale” proposto da John McCarthy, poiché ad alcuni di loro tale definizione sembrava essere inappropriata, Simon e Newell per esempio continuarono a riferirsi al loro lavoro semplicemente come una complessa elaborazione dell’informazione.

Qual è dunque lo statuto epistemologico dell’IA? Come abbiamo visto, definirla risulta un compito arduo e potremmo darne varie definizioni, considerandola una tecnologia della conoscenza, o come scienza generale del trattamento dell’informazione o ancora come una scienza alla cui base c’è una teoria dell’uomo e dei suoi processi cognitivi. Qualsiasi sia la definizione che vogliamo dare all’IA, è lampante la sua trasversalità a molteplici discipline o meglio la sovrapposizione dei dominii di altre discipline quali ingegneria, fisica, informatica, linguistica, matematica, biologia, psicologia e non per ultima la filosofia, poiché la sfida di trasferire alle macchine l’intelligenza umana comporta necessariamente un fondamento teorico di uomo o di mente sul quale operare.

È ovvio che dire se la creazione di un’IA sia realmente possibile dipende, come già detto, dalla definizione che si dà di intelligenza, ma dipende anche dalla possibilità di identificare quella componente esclusivamente associata all’essere umano come una caratteristica *formalizzabile e trasferibile* in un artefatto.

Per questo motivo non esiste una definizione univoca di IA, almeno fin quando non si converrà in modo unanime sul significato di intelligenza, di mente, e quindi di uomo.

Secondo alcuni, l’IA non può essere ridotta al semplice studio di computer sempre più sofisticati, ma riguarda l’uso di calcolatori e tecniche di programmazione al fine di far luce sui principi dell’intelligenza in generale e del pensiero umano in particolare[[4]](#footnote-4), altri sostengono invece che l’IA sia la scienza che si occupa di far fare semplicemente alle macchine cose che, se fatte dall’uomo richiederebbero intelligenza.

Per avere un quadro più chiaro di questa sfida così complessa, è necessario in questo caso entrare nell’ottica di una definizione degli scopi dell’IA.

## 1.2 CRITERI PER DEFINIRE UN’IA

In linea di principio ci sono due criteri dicotomici per definire un IA[[5]](#footnote-5). Il primo fa riferimento ai processi di azione e pensiero, il secondo misura il successo di un IA in base alla somiglianza col comportamento umano oppure in base alla capacità di fare scelte razionali (quest’ultimo risponde al concetto ideale di intelligenza). Quindi, incrociando i criteri appena posti, ne risulta che potremmo avere quattro definizioni di IA in base allo scopo della creazione, i sistemi realizzabili in base ai criteri appena descritti sono i seguenti:

Sistemi che agiscono:

* Come esseri umani: a tal proposito è opportuno prendere in considerazione il Test di Turing, che ha fornito una definizione operativa dell’intelligenza. Turing suggerisce un test basato non sulle effettive doti intellettive della macchina ma semplicemente sull’impossibilità, per un umano, di distinguere il computer da entità umane.
* Razionalmente: affinché sia possibile creare un agente razionale, è necessario essere in grado di rappresentare la conoscenza e applicarvi un ragionamento. Anche in questo caso l’enfasi è posta sulla correttezza delle inferenze. Tuttavia bisogna anche considerare che il corretto utilizzo dell’inferenza è solo uno dei molteplici meccanismi utilizzabili per arrivare alla razionalità[[6]](#footnote-6), infatti l’inferenza corretta non rappresenta *tutta* la razionalità, perché esistono delle situazioni in cui non è possibile determinare aprioristicamente un’azione *giusta* da fare. Inoltre è stato dimostrato che raggiungere la razionalità perfetta non è fattibile all’interno di sistemi elevatamente complicati in quanto i requisiti computazionali sono semplicemente troppo alti.

Sistemi che pensano:

* Come esseri umani: per creare una macchina che ragioni come un essere umano, è necessario prima di tutto entrare dentro i meccanismi del nostro cervello per capire come pensiamo. A questo proposito è fondamentale sottolineare il contributo che la scienza cognitiva fornisce all’IA, poiché solo dopo che si è formulata una teoria della mente sufficientemente precisa, sarà possibile esprimerla sotto forma di un programma per computer, anche se come vedremo questo sarà possibile solo a patto di accettare teorie (come la T. C. M.) che ammettono che l’intero universo della mente umana venga ridotto ad elementi formalizzabili. Il lavoro in direzione della realizzazione di un IA di questo tipo unisce modelli per computer e tecniche di sperimentazione psicologica nel tentativo di costruire teorie precise e verificabili sul funzionamento della mente umana.

Nei primi tempi dello sviluppo dell’IA non era insolita l’argomentazione secondo la quale se un algoritmo eseguiva efficacemente un’attività, allora era considerato un buon modello dell’esecuzione umana;

* Razionalmente: il tentativo di codificare formalmente il pensiero risale agli antichi greci, ed in particolare ad Aristotele che attraverso l’invenzione del sillogismo ha fornito un modello logico di deduzione che porta sempre a conclusioni valide. Si riteneva che queste leggi logiche fossero le stesse leggi del pensiero e che quindi governassero la nostra mente. Questa concezione è stata portata avanti nei secoli fino a quando i logici del 1800 sono riusciti finalmente a sviluppare una notazione precisa per formulare proposizioni riguardanti tutti gli aspetti del mondo (sempre nel limite della possibilità della loro formalizzazione) e le relazioni tra essi. La tradizione logicista vuole raggiungere l’obiettivo di costruire sistemi intelligenti a partire dallo sviluppo di programmi siffatti, nel prossimo capitolo vedremo nello specifico le tappe fondamentali dello sviluppo dei sistemi formali che, a partire dalle antiche intuizioni di Aristotele, si sono sviluppati fino a fornirci la base sulla quale è nata la moderna informatica e l’IA.

## 1.3 IL RAGIONAMENTO

Uno degli aspetti più interessanti dell’essere umano è la sua propria, peculiare capacità di ragionare. Il raziocinio che caratterizza la specie umana e la distingue dalle altre specie in quanto capacità essenziale, è una facoltà fondamentale che fin dai tempi antichi, nella cultura occidentale, è stata posta alla base della definizione stessa di *uomo*. Potremmo fare riferimento alle grandi religioni monoteiste e trovarvi sempre l’Uomo come essere distinto e posto al di sopra del resto del creato, uomo creato a immagine di Dio in virtù della sua capacità di intendere la suprema *ratio.* La filosofia stessa, nata intorno al VI-VI sec a. C. è sorta a causa della nostra intrinseca necessità di comprendere il reale, oltre l’analogia del mito, alla luce di un’indagine logico-razionale che potesse svelarne gli aspetti universali. La capacità di pensare, ragionare, astrarre è parte della natura più intima di ciò che Aristotele aveva definito come animale razionale, cioè come entità vivente dotata di un’anima superiore che rendeva possibile la capacità di una comprensione profonda e veritiera della realtà circostante e soprattutto della realtà non immediatamente visibile, quella raggiungibile attraverso la capacità di astrarre.

Ma cosa è, per definizione, un ragionamento? Un ragionamento è un processo di pensiero strutturato sulla base di regole definibili ed esplicabili in quanto universalmente valide (o almeno valide all’interno del sistema a cui si fa riferimento). La disciplina che si occupa dello studio delle leggi e delle funzioni che caratterizzano la struttura del pensiero in sé è la logica, che significa scienza del λόγος, cioè scienza del pensiero. Individuare le tappe fondamentali dello sviluppo del pensiero logico è necessario per far luce su quei nodi cruciali che hanno condotto allo sviluppo di ciò che oggi chiamiamo Intelligenza Artificiale. Il tentativo di ridurre il ragionamento logico a una serie di regole formali risale ad Aristotele, ed era alla base del sogno leibniziano di un linguaggio computazionale universale, nonché del successo di Turing nel dimostrare che la sua macchina universale poteva svolgere qualsiasi calcolo. Tutt’oggi vi è un’interazione profonda che continua a crescere tra logica e informatica, la logica è infatti per l’informatica lo strumento fondamentale per costruire modelli. Calcolo e ragionamento logico sono due facce della stessa medaglia, e questa intuizione viene usata non soltanto per programmare i calcolatori in modo che sappiano eseguire un’impressionante varietà di compiti, ma anche per progettarli e costruirli.

Uno dei primi logici della storia è senza dubbio Aristotele, al quale si attribuisce il merito di aver tentato di compiere per la prima volta una formalizzazione del ragionamento attraverso l’invenzione del sillogismo.

# DAL PENSIERO ALLA MACCHINA

## 2.1 PRIMA DI ARISTOTELE

L'origine del pensiero razionale si suole far risalire agli antichi filosofici greci.

Con Talete di Mileto, filosofo del VI secolo a.C. ebbe inizio la trasposizione in ambito filosofico del modo di pensare matematico-razionale, pensiero che ebbe origine a partire dallo studio delle proporzioni fra le grandezze geometriche e astronomiche. Se nelle proporzioni o rapporti matematici si confrontano fra loro varie grandezze geometriche o fisiche, allo stesso modo nella filosofia, da Talete in poi, si iniziarono a confrontare fra loro, secondo criteri di necessità razionale, le ipotesi, le cause, le spiegazioni e le dimostrazioni relative a diversi fenomeni naturali e ai quesiti fondamentali dell'esistenza umana.

Ai fini dell’argomentazione di questa tesi non possiamo non ricordare la filosofia di Pitagora e della sua scuola, poiché Pitagora per primo ritiene che nei numeri vi sia il principio e la spiegazione di tutti gli aspetti della realtà. La filosofia pitagorica identifica dunque nel numero il principio di tutte le cose. I pitagorici giungono a questa conclusione a partire dalla constatazione che tutti i fenomeni naturali (dalla musica alle stagioni, dai cicli astronomici ai cicli vitali) si realizzano con una certa regolarità, secondo rapporti calcolabili che fanno pensare a una loro dipendenza da principi numerici insiti in essi. I filosofi pitagorici però non hanno una chiara concezione della natura astratta dei numeri, ma ne hanno piuttosto un'idea fisico-geometrica, concepiscono, cioè, i numeri come un insieme di punti disposti nello spazio, raffigurati concretamente, inoltre connettendo l'uno al punto, il due alla linea, il tre alla superficie e il quattro al solido, possono facilmente costruire con questi elementi geometrici le figure solide. Su questa base i pitagorici possono definire il mondo come cosmo, cioè come un tutto ordinato, regolato da rapporti matematici. Se è vero che il numero è un arché di tipo fisico-naturale, di fatto esprime non semplicemente la sostanza di cui sono fatte le cose ma la loro struttura logica. Secondo questa visione pitagorica dunque, esistono delle leggi razionali che sono il fondamento il quale si regge tutta la struttura della realtà, ciò significa che la realtà stessa potrebbe essere, in linea di principio, totalmente descrivibile, una volta comprese e descritte le leggi matematico-razionali del suo funzionamento.

## 2.2 ARISTOTELE E GLI STOICI: IL SILLOGISMO

Aristotele assegna alla logica un ruolo fondamentale in filosofia in virtù della sua possibilità di garantire la correttezza del pensiero. Il termine logica tuttavia è di derivazione posteriore, il metodo di risoluzione del ragionamento attraverso le inferenze dei suoi elementi costitutivi era indicato da Aristotele con il termine *Analitica*, che deriva dal greco ἀνάλυσις e che non a caso vuol dire *scomporre, risolvere nei suoi elementi*.

Aristotele non si limita solo a riconoscere l’importanza di questa scienza in quanto capace di garantire la validità dei ragionamenti, ma cerca per primo di “codificare” il pensiero razionale e formalizzarne il meccanismo formulando il *sillogismo aristotelico*: un metodo di deduzione di conclusioni a partire dalle premesse ossia il primo passo verso l’automazione del pensiero.

Secondo Aristotele, affermare o negare una proposizione non vuol dire ancora ragionare, il ragionamento sorge nel momento in cui si attua una connessione tra proposizioni stabilendo tra di loro un nesso inferenziale. Il ragionamento per eccellenza è formalizzato nel sillogismo, cioè un discorso nel quale sono poste alcune premesse e dalle quali si deduce necessariamente una conclusione per via del fatto che tali premesse sono state poste:

*A⇒B (Socrate è un uomo)*

*B⇒C (Tutti gli uomini sono mortali)*

*A⇒C (Socrate è mortale)*

Osservando la struttura del sillogismo riconosciamo un processo che individua concetti fondamentali mettendoli in relazione sulla base di leggi universali.

Secondo Aristotele, gli enunciati che compaiono nei sillogismi devono avere tutti la medesima struttura, devono cioè contenere un soggetto, rappresentato da un termine particolare, ad esempio *Socrate*, o universale, ad esempio *umano*, e un predicato.

La struttura proposizionale presa in considerazione da Aristotele, tuttavia, soffre di alcuni difetti. C’è innanzitutto da considerare la riduzione delle relazioni logiche alle relazioni grammaticali tra soggetto e predicato, prendiamo per esempio gli enunciati **1** e **2**:

1. *Luca* (sogg.) *mangia la mela* (predicato)
2. *La mela* (sogg.) *è mangiata da Luca* (predicato)

Secondo la logica aristotelica, se questi enunciati hanno una struttura sintattica diversa, ne risulteranno diverse anche le conseguenze logiche.

È evidente inoltre che in questo tipo di ragionamento, la validità della conclusione dipende dalla validità delle premesse iniziali, le quali, non essendo a loro volta dedotte, non sono necessariamente vere. Per poter porre rimedio a questa “falla” che avrebbe potuto inficiare la validità del ragionamento, gli stoici elaborarono un modello inferenziale chiamato *Modus tollendo tollens*. Questo modello sostituiva le proposizioni ipotetiche alle proposizioni assertorie di stampo aristotelico, ed aveva la seguente forma:

***Se*** *A* ***allora*** *B;*

***Se*** *non A,* ***allora*** *non B*

In questo modo la validità delle conclusioni non dipende più dalla verità delle premesse iniziali, le quali possono anche essere false, ma dipende esclusivamente dalla coerenza del ragionamento. In questa sorta di evoluzione del sillogismo aristotelico possiamo individuare il passaggio dalla *logica dei termini*, ad un primitivo modello di *logica proposizionale* in quanto l’inferenza è valida esclusivamente in virtù della forma dell’enunciato. La differenza sostanziale tra i due tipi di ragionamento sta nel fatto che la prima produce un ragionamento universalmente valido ma non necessariamente vero, in quanto la verità della conclusione dipende dalla verità delle premesse iniziali, che come abbiamo detto potrebbero anche essere false, tuttavia tale ragionamento soddisfa il requisito di coerenza. La logica proposizionale invece produce un ragionamento necessariamente vero, rispondendo dunque al requisito di verità, ma non universalmente valido in quanto è riferito ad un singolo individuo soltanto, come nel seguente esempio:

***Se*** *tutti gli uomini sono mortali*

***E*** *Socrate è un uomo*

***Allora*** *Socrate è mortale.*

Sarà poi Frege nel XIX sec., come vedremo, ad unificare logica dei termini e logica proposizionale elaborando un modello di ragionamento che potesse soddisfare allo stesso tempo i requisiti di verità e di coerenza.

L’invenzione del modello concettuale del sillogismo è in ogni caso di straordinaria importanza perché una tale possibilità di manipolazione dei concetti funge da base per lo sviluppo di ciò che in seguito diventerà, a distanza di secoli, la capacità di manipolare in modo automatico le informazioni alla base di algoritmi e programmi che oggi girano nei nostri computer.

L’invenzione del *congegno logico[[7]](#footnote-7)* del sillogismo riduce il ragionamento ad uno schema semplice che usa simboli generici e le loro inferenze per giungere ad una conclusione, e le basi dell’intelligenza artificiale, almeno in principio, erano proprio queste: l’utilizzo di sistemi simbolici astratti generali e un meccanismo che permetta di giungere ad una conclusione. Osservando a posteriori il quadro generale della situazione, si potrebbe guardare alla logica in AI come estensione continua della tradizione della logica filosofica[[8]](#footnote-8). Ma facciamo un passo indietro. La grande sfida di meccanizzare il pensiero, prima di giungere agli straordinari esiti contemporanei, ha interessato molte altre menti geniali del passato.

## 2.3 DA LULLO A PASCAL: I COSTRUTTORI

Dalla premessa secondo cui il ragionamento umano ha una primitiva natura numerica nella nostra mente, nasce il tentativo dell’uomo di costruire dei sistemi, o meglio delle macchine in grado di eseguire le operazioni logiche.

Ramon Llull è stato un intellettuale ispanico vissuto nel XIII secolo. A questo pensatore si deve uno dei primi tentativi di realizzare un metodo che potesse condurre, seguendo delle procedure formali, a delle conoscenze certe. Ciò egli che intendeva sviluppare era una metodologia intesa come

«scienza generale applicabile a tutte le conoscenze con dei principi generalissimi in cui è contenuto il principio delle scienze particolari come il particolare dell’universale»[[9]](#footnote-9).

Tale metodologia (*Ars magna*) finalizzata alla costruzione di una sorta di scienza del reale è esposta nell’opera che va sotto il nome di *Ars compendiosa inveniendi veritatem*, la quale può essere considerata come un vero e proprio trattato di logica. L’assunto di partenza del pensiero lulliano è che tutta la realtà, per quanto abbia una struttura complessa, sia sempre riducibile a una combinazione di termini semplici e determinabili. In seguito alla scomposizione della realtà in unità fondamentali, e successivamente alla riduzione di questi in lettere dell’alfabeto, Lullo dimostra che è possibile operare su tali termini per mezzo di un calcolo effettuabile su un congegno meccanico composto da ruote e figure mobili, che egli provvide a costruire concretamente, e che ruotando in base a delle precise regole razionali (*calculus ratiocinator*) avrebbe fornito una serie di molteplici combinazioni. La ruota di Lullo è una macchina logica che incarna materialmente, per la prima volta, il principio secondo il quale è possibile automatizzare il ragionamento. Perché questo potesse avvenire occorreva che concetti complessi potessero scomporsi sino alla loro primitiva semplicità e che fosse possibile realizzare un linguaggio unico per tutte le scienze, una specie di “alfabeto del pensiero umano” composto da simboli (*characteristica universalis*) che potessero combinarsi tra loro così come avviene per le idee con l'attività di pensiero. Dalla combinazione in tutti i modi possibili di questi simboli si otterranno tutte le proposizioni vere possibili: nasce così l'*Ars Magna* che sarà poi ripresa in modo approfondito da Leibniz circa quattro secoli dopo, col nome di *Ars combinatoria* e che prevede una simbolizzazione del pensiero con cui operare calcoli logico-matematici.

L’automazione vera e propria della computazione proseguì nel 1500 con il progetto di Leonardo da Vinci di creare una macchina calcolatrice. La storia di questa presunta invenzione inizia con la riscoperta, avvenuta nel 1965, di due voluminosi codici leonardeschi nella Biblioteca nazionale di Spagna, oggi noti come Codex Madrid[[10]](#footnote-10), tra i fogli ritrovati ci sono giunti dei disegni progettuali di ciò che sarebbe dovuto essere, secondo le ricostruzioni, un calcolatore meccanico. Il progetto Leonardo da Vinci riporta la rappresentazione di un insieme di ingranaggi e numerose rotelle simili tra loro. La descrizione dell’uso cui sarebbe stato destinato lo strumento, fatta negli anni ’60 da un ingegnere che lavorava per l’IBM allo scopo di creare repliche dei macchinari leonardeschi, identificherebbe il macchinario come una primitiva calcolatrice meccanica. Nonostante da Vinci non ebbe modo di portare concretamente a termine il suo progetto, le moderne ricostruzioni ci dimostrano che esso era, in linea di principio corretto.

Anche se si ritiene che la prima calcolatrice mai costruita sia la famosa “pascalina” di Pascal, in realtà la prima vera e propria macchina calcolatrice fu realizzata attorno all’anno 1623 dallo scienziato tedesco Wilhelm Schickard. Solo qualche anno dopo, Pascal costruì la sua macchina ad ingranaggi che, a partire da una base in legno e una scocca in metallo contenente svariati meccanismi interni, era in grado di compiere le operazioni di addizione e sottrazione, basandosi come un abaco sul valore di posizione. È interessante ricordare, ai fini dell’argomentazione di questa tesi, di come Pascal si riferisse alla sua macchina in questi termini:

«Codesta macchina facilita ed elimina nelle sue operazioni tutto questo superfluo; il più ignorante vi trova altrettanto vantaggio che il più esperto; lo strumento supplisce al difetto dell’ignoranza o della scarsa abitudine e, attraverso movimenti necessari, fa da solo, senza neppure l’intenzione di colui che se ne serve, tutte le abbreviazioni possibili alla natura ogni volta che i numeri vi acconsentono. Tu sai parimenti come, operando mediante la penna, si sia in ogni momento obbligati a riportare o a prendere a prestito o a prendere in prestito i numeri necessari, e quanti errori si insinuino in questi riporti e prestiti a meno di una lunga abitudine, oltre ad una profonda attenzione che affatica ben presto la mente. Codesta macchina libera colui che se ne serve da tale vessazione; basta che egli abbia il giudizio ed essa lo libera dal difetto della memoria; e senza riporti né prestiti essa fa da sola ciò che egli desidera, senza che neanche ci pensi. […] Quanto alla comodità di questo movimento è sufficiente dire che è insensibile, andando da sinistra a destra ad imitazione della nostra maniera volgare [corsivi nostri] di scrivere tranne che procede circolarmente […] La macchina calcolatrice produce effetti che si avvicinano al pensiero più di tutto ciò che fanno gli animali; ma essa non fa nulla che possa far dire che ha una volontà, come gli animali. »[[11]](#footnote-11)

Da questo frammento emerge la concezione pascaliana di una macchina calcolatrice vincolata al rigore del pensiero calcolante, essa si avvicina al pensiero degli uomini perché è in grado di compiere l’attività logica delle operazioni matematiche, ma Pascal in pochissime parole ci ricorda anche che non basta la sola capacità computazionale a descrivere un uomo.

## 2.4 LA MATHESIS UNIVERSALIS

Aristotele, nella sua opera di logica formale (gli Analitici), aveva già intravisto la possibilità di una scienza unica, dove i concetti semplici potevano essere simboleggiati dalle lettere dell'alfabeto, e manipolati in modo da effettuare dei veri e propri calcoli.

Llull svilupperà una metodologia che servirà a risolvere ogni problema, attraverso la scomposizione di ogni quesito in parti più piccole e successivamente l'ulteriore riduzione di queste in lettere dell'alfabeto che fanno parte di ruote che saranno in grado di fornire infinite combinazioni, arrivando a descrivere non tanto una logica quanto una tecnica di ricerca.

Lullo parte dal presupposto che ogni proposizione sia scomponibile in elementi costitutivi e che i termini complessi siano riducibili in molteplici termini semplici o principi. Una volta descritti tutti i termini semplici della realtà, combinandoli in tutti i modi possibili si otterranno tutte le proposizioni vere possibili, con precisione matematica: nasce così il progetto teorico dell'"arte combinatoria" ripreso da Leibniz e dal razionalismo cartesiano che ne individua però l'astrattezza.

L’arte lulliana fu dimenticata per un po’ di secoli, ma fu ripresa da Thomas Hobbes, che cercò di applicarla ad ogni campo del sapere. Hobbes afferma che la natura del ragionamento sia molto simile ad un calcolo: «Quando uno ragiona non fa altro che ottenere una somma totale tramite una addizione di parti, o un resto sottraendo una somma da un'altra; il che se è fatto con le parole consiste nel ricavare dai nomi di tutte le parti il nome del tutto o dai nomi del tutto o da una singola parte il nome della parte rimanente. Sommando insieme due nomi si ha una affermazione, sommando due affermazioni si ha un sillogismo, sommando alcuni sillogismi si ha una dimostrazione; e dalla somma o conclusione di un sillogismo i logici sottraggono una proposizione per trovarne un'altra. Gli scrittori di politica sommando insieme i patti stipulati per trovare quali sono gli obblighi degli uomini, e i legislatori sommano le leggi e i patti per trovare che cos'è il diritto e che cos'è il torto nelle azioni dei privati. Insomma, in qualunque campo in cui c'è posto per l'addizione e la sottrazione c'è anche posto per la ragione; dove queste cose mancano la ragione non ha niente da fare»[[12]](#footnote-12)

L’idea che il ragionamento debba essere sottoposto alle leggi universali del calcolo è ripresa dal filosofo francese Renè Descartes, meglio noto come Cartesio. Cartesio è ritenuto il fondatore del Razionalismo: un movimento filosofico del ‘600 che esalta la ragione come unico strumento in grado di condurci ad una reale conoscenza della realtà.

Si definiscono razionalisti quei sistemi filosofici in cui la realtà è vista come governata da una serie di leggi e principi che sono perfettamente comprensibili con la ragione umana e che coincidono con il pensiero stesso[[13]](#footnote-13).

In generale i filosofi razionalisti sostengono che, partendo da principi fondamentali, individuabili intuitivamente o sperimentalmente, come gli assiomi della geometria, i principi della meccanica e della fisica, si possa arrivare tramite un processo deduttivo ad ogni altra forma di conoscenza. Come vedremo, questa concezione sarà sviluppata in seguito e svolgerà un ruolo cardine nelle teorie dei logici dell’ottocento e soprattutto nella teoria formalista.

Ai fini dell’argomentazione di questa tesi è necessario tenere in considerazione la visione razionalista perché fonda, in un certo senso, la possibilità di una comprensione profonda e veritiera della realtà da parte dell’uomo, proprio attraverso la facoltà della ragione, che diventa strumento di verità. Col razionalismo si afferma non solo che il mondo è comprensibile mediante delle leggi, ma soprattutto che l’uomo è in grado di entrare in contatto diretto con la realtà e conoscere attraverso l’utilizzo rigoroso della sola ragione calcolante.

Cartesio individua gli elementi costitutivi della conoscenza umana nell’*intuitus* e nella *deductio*, ciò che tramite essi viene conosciuto necessiterà di un’elaborazione sistematica, le cui regole e procedure sono stabilite nella cosiddetta *Mathesis universalis*, o nel più famoso Metodo, il quale si occupa di stabilire una procedura universalmente valida del conoscere.

Nelle *Regulae ad diretione ingenii*, ricorrono due definizioni di metodo, l’una impostata sul concetto di regola o norma:

«per metodo intendo delle regole certe e facili, osservando le quali fedelmente non si supporrà mai come vero ciò che è falso, e senza inutili sforzi da parte della mente, ma con un graduale e continuo progresso della scienza si perverrà alla vera conoscenza di tutte le cose di cui si è capaci»[[14]](#footnote-14)

L’altra, che corrisponde alla quinta Regola, la quale afferma che:

«tutto il metodo consiste nell’ordine e nella disposizione di quelle cose alle quali deve essere rivolta l’acutezza della mente, per scoprire qualche verità. E lo avremo osservato con esattezza, se ridurremo gradualmente le proposizioni involute e oscure ad altre più semplici, e in seguito, con l’intuizione delle più semplici di tutte, tenteremo di salire per gradi alla conoscenza di tutte le altre»[[15]](#footnote-15).

In realtà queste due definizioni sono complementari perché l’ordine prescritto nella seconda esplicita la natura del graduale procedere secondo le regole della prima. La seconda in particolare è da intendersi come espressione della caratterizzazione del procedere naturale della mente nella sua naturale attività conoscitiva che procede secondo un processo che potremmo definire inferenziale.

La deduzione, secondo Cartesio, è l’atto con cui si conosce con certezza qualcosa che è di per sé non immediatamente evidente, a partire da altre conoscenze «con movimento continuo e mai interrotto del pensiero, che intuisce con evidenza ciascuna cosa; non diversamente da come conosciamo che l’ultimo anello della catena si connette col primo, anche se non abbracciamo in un’unica e medesima intuizione degli occhi tutti gli anelli intermedi da cui dipende quella connessione, pur che li abbiamo successivamente colti con lo sguardo uno dopo l’altro e ci ricordiamo che ognuno, dal primo all’ultimo, è connesso ai più vicini»[[16]](#footnote-16). Nell’oggetto conosciuto mediante la deduzione viene meno l’evidenza, ma è mantenuta la certezza nella successione dei passaggi proprio in quanto l’attenzione intellettuale viene tenuta fissa sul passaggio stesso, da un oggetto all’altro, anziché su un singolo oggetto come avviene nell’intuizione.

Con Cartesio abbiamo dunque una formalizzazione del processo conoscitivo, che nelle Regulae si esplicita nel concetto di Mathesis universalis. La Mathesis è infatti ciò che accomuna tutte le scienze, in virtù della sua funzione regolativa nei confronti di qualunque disciplina. Nel 1620 afferma «ho cominciato a capire il fondamento della scoperta mirabile. Si tratta dell’intuizione che tutte le scienze, al di là dei diversi oggetti specifici, sono unificate e unificabili in un fondamento comune, che è la Mathesis universalis, o disciplina universale dei rapporti formali secondo l’ordine e la misura»[[17]](#footnote-17).

Mathesis è dunque l’insieme dei principi non matematici grazie ai quali tutte le discipline, matematiche e non, sono sistematiche e complete, è la scienza generale che dà conto dell’ordine e della misura non riferita ad una materia specifica. I semi di tale Mathesis, dice Cartesio, sono rinvenibili negli antichi, per esempio allo stesso Aristotele, che già nel sillogismo aveva individuato in nuce la natura della Mathesis di cui parla Cartesio, caratterizzata come un insieme di princìpi capaci di organizzare qualunque sapere, e proprio in quanto tale è *universalis*.

Ma come si applica la Mathesis universalis ad ogni ambito del sapere? Bisogna anche qui ricondurci alla natura della ragione intesa come calcolo, l’aritmetica e la geometria si pongono come paradigma del processo conoscitivo, riportandoci alla necessità di seguire nella conoscenza, quel processo inferenziale e strutturato tipico delle scienze matematiche. Analogamente a quelle, la prescrizione fondamentale della VI regola impone infatti di disporre in serie le conoscenze in una disposizione gerarchica, non considerandole dal punto di vista del contenuto, ma formalmente, in quanto “le une siano conosciute a partire dalle altre”[[18]](#footnote-18). Uno dei temi più noti delle Regulae è la *naturae simplices*, cioè la certezza che è possibile risolvere qualsiasi problema rintracciandone la struttura formale, grazie ad essa infatti è possibile escludere qualsiasi riferimento ontologico, e istituendo una connessione delle conoscenze tra loro, in funzione della derivabilità delle une dalle altre, in modo da raggiungere un primitivo conosciuto, che Cartesio chiama semplice o assoluto. Le nature semplici sono colte mediante un’intuizione, e le proposizioni che le esprimono risultano essere quelle che fondano il sistema del conoscere.

Potremmo paragonare queste intuizioni agli assiomi di Hilbert che vedremo nel paragrafo

## 2.5 LEIBNIZ: IL SOGNO DEL CALCOLATORE UNIVERSALE

Gottfried Leibniz è un filosofo e matematico tedesco vissuto nel XVII secolo, il suo talento emerse precocemente quando i suoi precettori gli presentarono il sistema logico di Aristotele elaborato nel IV sec a. C. che prevedeva la suddivisione dei concetti in categorie. L’approccio a questo antico tentativo di mettere in ordine la realtà contribuì a far nascere in lui l’idea che lo impegnerà per gran parte della sua vita, il suo obiettivo era sostanzialmente quello di ridurre il pensiero umano a unità fondamentali allo stesso modo in cui le parole possono essere scomposte nelle lettere che le compongono. Queste unità fondamentali del pensiero erano chiamate da Leibniz *characteristica universalis* e la manipolazione di tali unità o “alfabeto del pensiero” avrebbe permesso, secondo il filosofo, la possibilità di automatizzare il ragionamento:

«Quando da ragazzo stavo imparando la logica, ed ero già solito indagare più profondamente le ragioni di ciò che mi veniva esposto, ponevo la questione ai miei precettori del perché, dal momento che si avevano le categorie (*praedicamenta*) dei termini incomplessi, mediante le quali vengono ordinate le nozioni, non vi fossero anche le categorie dei termini complessi, mediante le quali si potessero ordinare le verità; (…) Mi sembrava tuttavia che la questione in generale sarebbe stata in nostro potere se si fossero avute prima le categorie vere dei termini semplici e se, per ottenerle, si fosse costituito qualcosa di nuovo come un alfabeto del pensiero, ossia un catalogo dei generi sommi come *a, b, c, d, e, f*, dalla combinazione dei quali risultassero formate le combinazioni inferiori»[[19]](#footnote-19)

Il primo passo da compiere verso la creazione di un alfabeto dei concetti era proprio l’enumerazione di tutti i concetti e di tutte le combinazioni possibili di tali concetti. La difficoltà è evidente se si pensa alla mole immensa delle possibilità esistenti da tenere in considerazione se parliamo del pensiero umano, come è possibile individuare tutti gli elementi base dell’alfabeto del pensiero? Leibniz tratta il problema di come affrontare l’enorme numero delle disposizioni complesse di tutti gli elementi di base nella *Dissertatio de arte combinatoria* del 1666. La notazione da lui creata per il calcolo integrale e differenziale, utilizzata tutt’oggi, gli permetteva di eseguire facilmente calcoli dalla complessità molto elevata, come se fosse la notazione stessa a sbrigare tutto il lavoro, ma egli era animato da un’ambizione grandissima poiché non intendeva limitarsi al calcolo matematico in quanto era convinto che si potesse fare qualcosa di simile a anche per l’intera conoscenza umana, paragonando il ragionamento logico a un meccanismo, egli voleva trasferire la logica applicata al calcolo su proposizioni di altra natura, nelle quali non erano i numeri ad essere protagonisti ma il nostro pensiero, catalogato, ridotto ad unità di base in modo da poter essere manipolato alla stregua di qualsiasi elemento matematico, in virtù della sua possibilità di essere sottomesso alle medesime leggi logiche.

Leibniz sognava un linguaggio matematico artificiale universale in cui fosse possibile esprimere ogni minima sfaccettatura delle nostre conoscenze, un linguaggio che avrebbe permesso di definire, per mezzo di calcoli simbolici, le relazioni tra gli enunciati così da poter stabilire quali di questi erano veri o falsi, e regole di calcolo che mettessero in luce tutte le interrelazioni logiche esistenti tra le proposizioni del linguaggio stesso.

Leibniz non ebbe modo di assistere in vita alla realizzazione di questo progetto grandioso, riuscì però, nel 1673 a costruire un modello di macchina calcolatrice che, a differenza di quella costruita precedentemente da Pascal che era solo in grado di effettuare addizione e sottrazione, era capace di eseguire tutte le quattro operazioni fondamentali della matematica, poiché dotata di un meccanismo ingegnoso chiamato *ruota di Leibniz* spesso in uso ancora in pieno Novecento nelle macchine calcolatrici.

Nel 1674 egli descrisse addirittura una macchina in grado di risolvere equazioni algebriche, e la costruzione di queste macchine alimentò in lui la convinzione che potesse essere possibile la costruzione di una macchina capace di *ragionare* in senso generale. Bisogna però aspettare almeno fino al secolo successivo per avere i primi esemplari di macchine *programmabili*, in grado cioè di modificare il proprio lavoro in base alle istruzioni ricevute.[[20]](#footnote-20)

Le importantissime scoperte matematiche del Seicento, come la sistemazione della manipolazione delle espressioni algebriche, la scoperta cartesiana di poter ricondurre la geometria all’algebra, la sua stessa personale invenzione del calcolo infinitesimale e l’invenzione di un efficace simbolismo utilizzato nei calcoli di integrazione e derivazione, contribuirono ad alimentare in lui la convinzione che fosse fondamentale la scelta di simboli adatti e la ricerca di regole che ne governassero la manipolazione:

«ogni simbolo utilizzato non era un suono privo di significato ma stava per un concetto, e forniva un modello di quella meravigliosa idea che egli aveva in mente fin da ragazzo, di un alfabeto che rappresentasse tutti i concetti fondamentali».[[21]](#footnote-21)

Per mostrare quanto essenziale fosse per il pensiero deduttivo l’utilizzo di simboli ben scelti, Leibniz utilizza proprio l’algebra e non fa segreto della sua convinzione secondo la quale parte del segreto di questa disciplina risiedesse proprio nell’arte di usare correttamente le espressioni simboliche.[[22]](#footnote-22)

Tuttavia, per realizzare il suo programma di macchinazione del ragionamento umano, era necessario e fondamentale cercare dei simboli adeguati (da manipolare con quello che lui chiamava *calculus ratiocinator*) che potessero rappresentare i mattoncini del pensiero, ma per fare ciò era necessario possedere la conoscenza umana in tutta la sua estensione. La sua pretenziosa ambizione di onniscienza è più o meno comprensibile se contestualizzata nella sua concezione del mondo che, essendo conforme a un piano perfettamente definito nella mente di Dio, non prevede nulla di indeterminato e quindi di indeterminabile. La volontà di assoggettare completamente il ragionamento umano alle leggi matematiche e deterministiche del calcolo, però, ci lascia intravedere una modello di uomo ambivalente, glorificato nella sua grandezza di animale razionale che è, allo stesso tempo, anche il suo limite.

A Leibniz si deve inoltre il merito di aver introdotto in occidente[[23]](#footnote-23) uno dei sistemi più importanti utilizzati per codificare informazioni: i numeri binari, in uso tutt’oggi nella scienza informatica. Questo sistema fu poi ripreso da George Boole.

## 2.6 DALLA LOGICA PROPOSIZIONALE ALLA LOGICA DEI PREDICATI

### 2.6.1.BOOLE

Il contributo che George Boole, matematico e logico britannico vissuto nel XIX sec. fornisce alla storia della macchinazione del pensiero, consiste nell’aver matematizzato la logica, cioè l’aver fatto della matematica un metodo basato su simboli le cui leggi sono note e generali, creando una logica simbolica utilizzabile nella pratica, dando così vita a una parte del sogno leibniziano. Egli racconta di come, già all’epoca della scuola, gli fosse venuta in mente l’idea che dovesse essere possibile esprimere relazioni logiche in forma algebrica[[24]](#footnote-24), testimoniando una sorta di fede nell’idea leibniziana di poter creare un formalismo matematico capace di produrre da sé, automaticamente, la risposta corretta ai problemi. Boole procedette a un riesame della sillogistica, riprese l’antica logica aristotelica e stoica e ne fornì una nuova visione alla luce di ciò che era riuscito ad ottenere in campo matematico grazie all’introduzione di simboli e metodi algebrici.

La logica aristotelica operava su enunciati come *tutti gli uomini sono mortali*, a*lcuni uomini sono biondi*, *nessun gatto sa volare* e Boole capì che ai fini del ragionamento logico non era importante il significato di mortale o biondo, ma era importante il fatto che tale parola indicasse una classe di individui, fin qui nulla di nuovo. La novità fu introdotta nel momento in cui Boole indicò tali classi con delle lettere allo stesso modo in cui le utilizzava per rappresentare numeri e operatori in algebra. Arrivò a formulare un’algebra di tali classi, per esempio, se *x* e *y* stavano ad indicare due classi distinte, la notazione *xy* stava ad indicare l’insieme (oggi diremmo intersezione) degli oggetti presenti sia in *x* che in *y*, ma entriamo di più nel dettaglio:

«Assumendo la nozione di classe, siamo in grado di separare con un atto mentale, da una qualunque collezione concepibile di oggetti, quelli che appartengono alla data classe e di considerarli a parte dal resto. Possiamo concepire che tale atto di elezione, o un altro simile, sia ripetuto. Il gruppo di individui preso in considerazione può essere ulteriormente delimitato, selezionando mentalmente quelli tra di essi che appartengono, oltre che alla classe appena considerata, a qualche altra classe nota. E tale processo può esser ripetuto con altri elementi di distinzione, finché non arriviamo a un individuo che possiede tutti i caratteri distintivi che abbiamo preso in considerazione e che è un membro, al tempo stesso, di ogni classe che abbiamo enumerato. In effetti impieghiamo un metodo simile tutte le volte che, nel linguaggio comune, accumuliamo epiteti descrittivi per amore di una descrizione più precisa. Ora, le molteplici operazioni che abbiamo supposto di eseguire nel caso richiamato sopra sono soggette a leggi particolari (…) a qualcuno tali leggi appariranno così ovvie da essere annoverate tra le verità necessarie, e così poco importanti da non dover prestare loro speciale attenzione. (…) e se fossero diverse da come sono, l’intero meccanismo del ragionamento, anzi le autentiche leggi e la stessa struttura dell’intelletto umano, verrebbero modificate in modo essenziale. (..) si troverà che ogni proposizione logica, categorica o ipotetica, è suscettibile di espressione esatta e rigorosa. Ogni processo rappresenterà una deduzione, ogni conseguenza matematica esprimerà un’inferenza logica. La generalità del metodo ci permetterà di esprimere qualsiasi operazione dell’intelletto.»[[25]](#footnote-25)

La forza innovatrice del pensiero di Boole consiste nell’aver compreso l’autonomia del ragionamento simbolico-formale, infatti se la logica aristotelica si presentava sotto forma di una *lista di verità logiche*[[26]](#footnote-26), la logica booleana permetteva, grazie alla sua generalità, di creare *formule* applicabili in un numero elevatissimo di contesti, dalle normali interazioni umane ai ragionamenti più complessi, in quanto a differenza della logica aristotelica che operava su delle semplici proposizioni, la sua logica operava su proposizioni secondarie ben più complesse. Alla luce di ciò, il sillogismo aristotelico, che si occupa di una parte limitata di inferenze, viene ampiamente superato e inglobato in un metodo deduttivo molto più generale che trova la sua espressione nel calcolo algebrico.

Boole, inoltre, riprese da Leibniz l’interesse per il sistema binario che utilizzò per costruire la sua algebra, nella quale gli 0 e gli 1 assumevano rispettivamente valore di vero e falso in un sistema in cui, al posto delle operazioni aritmetiche erano utilizzati degli operatori logici come AND (congiunzione), OR (disgiunzione), NOT (negazione) i quali si riveleranno fondamentali nella programmazione e costruzione dei moderni computer. Senza saperlo infatti Boole aveva elaborato un’algebra capace di descrivere il funzionamento di circuiti elettrici dove 0 e 1 sarebbero stati utilizzati per descrivere i due stati fondamentali di acceso e spento.

Bisogna sottolineare come, per Boole, i principi e le leggi logiche che governano il nostro ragionamento, non siano generalizzazioni di osservazioni empiriche ma siano assolutamente necessarie, alla stregua delle leggi generali dell’aritmetica ed essendo tali, riflettono la struttura stessa della mente umana. Questo assunto è di fondamentale importanza perché ci permette di afferrare in pieno il filo conduttore che da Aristotele, passando per Leibniz, giunge fino al XIX secolo e che consiste nella comune pretesa di riuscire a formalizzare il pensiero umano.

### 2.7 FREGE

A Friedrich Ludwig Gottlob Frege, matematico vissuto tra il XIX e il XX sec. si deve il merito di aver realizzato il primo sistema logico pienamente sviluppato, capace di abbracciare tutti i ragionamenti deduttivi della matematica ordinaria.

Frege è considerato il padre del logicismo e il suo obiettivo primario era quello di fondare la matematica su basi logiche. Questa concezione della matematica come linguaggio formalizzabile sulla base di proposizioni analitiche si pone in netto contrasto con la visione kantiana che fondava la matematica sulle intuizioni pure interpretandola come una conoscenza sintetica a priori, per Frege al contrario, la matematica è una conoscenza analitica che si fonda sulla scienza logica. Per procedere a questa fondazione, però, Frege si scontra con un problema di non poco conto che consiste nel rischio che il ragionamento venga inficiato dalla limitatezza e dall’equivocità del linguaggio naturale, ed è proprio dalla necessità di superare questo ostacolo che nasce quell’esigenza di creare un linguaggio formale, generalissimo e privo di ambiguità attraverso lo sviluppo di una particolare simbologia che, in un certo senso richiama alla mente la *characteristica universalis* di impronta leibniziana[[27]](#footnote-27):

«Per evitare che in questo tentativo si introducesse inavvertitamente alcunché di intuitivo, tutto doveva svolgersi senza la minima lacuna entro la catena deduttiva.

Cercando di soddisfare nel modo più rigoroso a questa esigenza, incontrai un ostacolo nell’inadeguatezza della lingua: infatti, malgrado la crescente pesantezza d’espressione, la lingua tanto meno mi permetteva di raggiungere quella precisione che il mio intento esigeva»[[28]](#footnote-28)

Il problema dello sviluppo di un linguaggio adeguato è affrontato nell’*Ideografia* del 1879, il cui titolo originale è *Begriffsschrift*, termine che la dice lunga sul contenuto dell’opera, costruito da Frege a partire dalla parola *Begriff* che significa «concetto» e *Schrift* che vuol dire «scrittura», con il sottotitolo *Linguaggio in formule del pensiero puro modellato su quello dell’aritmetica*.

Nell’*Ideografia,* che non fu accolta con grande entusiasmo dai suoi contemporanei, è possibile rintracciare la prima e rigorosa sistematizzazione formale della logica sia proposizionale che dei predicati, che scardina in modo definitivo il vecchio paradigma logico aristotelico. In sostanza Frege riformula il modello della logica tradizionale basato sullo schema soggetto-predicato, sostituendo a quello un modello aritmetico basato sullo schema funzione-argomento, gettando così le basi della moderna logica matematica.

Se Boole aveva compiuto dei passi avanti rispetto alla logica classica individuando correlazioni tra proposizioni che, a differenza di quanto faceva Aristotele, potevano essere espresse a loro volta da altre proposizioni secondarie, Frege comprese che queste correlazioni potevano essere usate anche per analizzare la struttura di una singola proposizione e ne fece il fondamento della sua logica.

La principale novità della logica fregeana, come appena accennato, consisteva nella considerazione della proposizione secondo la dicotomia di funzione-argomentoe nell’introduzione dei quantificatori.

Abbiamo già detto che la proposizione aristotelica era composta da soggetto e predicato[[29]](#footnote-29), ma purtroppo questa dicotomia non riusciva ad esprimere enunciati più complessi e particolareggiati, come nel caso delle espressioni in cui sono presenti dei quantificatori quali *tutti, alcuni, nessuno* all’interno del predicato, la proposta fregeana invece riesce a risolvere anche il problema della logica aristotelica di come rendere una quantificazione interna a un predicato, facciamo qualche esempio per comprendere meglio considerando quest’enunciato:

1. *Alcuni studenti di filosofia* (A) *studiano qualche libro di matematica* (B).

Analizzando la proposizione da un punto di vista logico aristotelico, ne verrà fuori che tutte le A sono B, ma ciò risulta in contrasto col significato della frase stessa.

La dicotomia soggetto-predicato della proposizione aristotelica risulta inoltre limitante perché non permette di esprimere predicati relazionali. Se per esempio dicessi:

1. [*2* (A) ] *è* [*maggiore di 1*(B) ]

dall’analisi aristotelica ne risulterebbe semplicemente che A è B, e verrebbe completamente ignorata la relazione che intercorre tra *2* e *1*.

Per far fronte al problema degli enunciati relazionali, Frege introduce la dicotomia *funzione-argomento* che recupera proprio dalla matematica, in questo modo, prendendo sempre in considerazione l’enunciato **2**, avremmo che *2* e *1* sono argomenti, mentre l’espressione *è maggiore di* risulterebbe come funzione.

Una funzione è infatti un’espressione definita dalla forma f(x) che contiene uno o più costituenti indeterminati (x) tali ché, quando a questi componenti si assegnano dei valori, essa acquista un senso e un significato definiti, possiamo fare un esempio di funzione proposizionale dicendo:

*Socrate è “x”*

Finché x resta indeterminato essa non è né vera né falsa, ma quando ad x si assegna un significato definito, diventa una proposizione vera o falsa: vera, se questo significato rientra nella classe dei predicati attribuibili a Socrate (uomo, filosofo, ateniese ecc.), falsa in tutti gli altri casi.

La proposizione *Tutti gli uomini sono mortali* può interpretarsi come:

1. derivata dall’aver saturato con l’argomento *uomini* la funzione proposizionale: Tutti gli *x* sono mortali;
2. derivata dall’aver saturato con l’argomento *mortali* la funzione proposizionale: Tutti gli uomini sono *y*;
3. derivata dall’aver saturato con gli argomenti *uomini* e *mortali* la funzione predicativa: Tutti gli *x* sono *Y*.
4. derivata dall’aver saturato con l’argomento *sono* la funzione predicativa “Tutti gli x … y”, dove lo stesso verbo *sono* è una variabile sostituibile con un verbo diverso, come ad esempio *cercano*, *mangiano*, *inseguono* ecc.

Una volta stabilito il significato (valore di verità) delle singole proposizioni formate solo da soggetto e predicato e non più scomponibili, è poi sempre possibile, mediante l’impiego dei *connettivi logici****,*** verificare il valore di verità delle proposizioni composte e dell’intero discorso. I connettivi logici sono i seguenti:

* negazione  **¬** (*non*)
* congiunzione **∧** (*et*)
* disgiunzione  **∨** (*vel/aut*)
* implicazione **⇒** (*se.. allora..*)
* equivalenza  **⇔** (*se e solo se*)

Frege introduce inoltre l’utilizzo di quantificatori grazie ai quali diventa possibile, partendo da un sistema di assiomi, verificare se un qualunque asserto è o non è coerente con esso. I quantificatori si distinguono in:

* ***quantificatore esistenziale***: specifica se una proprietà riguarda l’insieme degli elementi componenti una classe, ovvero *ogni* elemento di quella classe **[∀*x* P(x)];**
* ***quantificatore universale***: specifica se una proprietà riguarda solo alcuni elementi **[∃*x* P(*x*)].**

Le novità introdotte da Frege resero possibile presentare le inferenze logiche come operazioni puramente meccaniche condotte per mezzo di cosiddette *regole d’inferenza* che riguardavano solo le configurazioni in cui erano disposti i simboli, pertanto potremmo definire un sistema formale come un sistema dotato delle seguenti caratteristiche:

1. un ***alfabeto***, ovvero un insieme finito di simboli;
2. una ***grammatica***, cioè un insieme di regole che specifica quali sequenze finite di simboli sono *formule ben formate* e quali no, la grammatica deve essere basata su un algoritmo;
3. Un insieme di ***Assiomi***, ovvero un sottoinsieme dell'insieme delle formule ben formate;
4. alcune ***regole di* inferenza** che permettono di dedurre teoremi dagli assiomi, associando formule ben formate ad altre formule ben formate.

Fu così che nacque il primo esempio formale di linguaggio artificiale dotato di una sintassi precisa; da questo punto di vista la *Begriffsschrift* fu l’antenata di tutti i linguaggi di programmazione comunemente usati al giorno d’oggi[[30]](#footnote-30). Il tentativo di Frege di creare un linguaggio artificiale dotato di regole grammaticali e sintattiche di una precisione così approfondita, era sicuramente stato incentivato dall’antico sogno leibniziano di creare un linguaggio formale e universale che contenesse e derivasse in maniera automatica tutte le verità della filosofia e della scienza. È necessario riconoscere a Frege il merito di aver introdotto delle innovazioni estremamente importanti che hanno dato origine a quell’enorme mole di ricerche che, indirettamente hanno condotto Alan Turing all’idea di un calcolatore generale

## 2.8 CANTOR: LA TEORIA DEGLI INSIEMI

Alla fine del XIX sec. Georg Cantor, sulla scia dell’introduzione del sistema della logica formale, formulò la Teoria degli insiemi. Questa teoria, nata in un contesto storico-scientifico nel quale era forte la necessità di cercare i fondamenti della scienza matematica, ha assunto un’importanza fondamentale nella matematica moderna perché giustifica il rigore delle dimostrazioni sulla base delle assunzioni fatte riguardo agli oggetti matematici e alle loro proprietà, a loro volta giustificate attraverso questa teoria.

Alla base della teoria degli insiemi vi è il concetto di *insieme* (collezione di elementi), *sottoinsieme* e *appartenenza*.

La teoria degli insiemi di Cantor faceva uso di strumenti matematici analoghi a quelli utilizzati da Frege, tuttavia tale teoria risultò contraddittoria, o meglio contenente un’antinomia[[31]](#footnote-31) messa in luce dal paradosso di Russel[[32]](#footnote-32). Successivamente alla formulazione di questa teoria, sono sorti i problemi riguardanti la completezza dei sistemi di assiomi (teorema incompletezza di Goedel) e si sono approfonditi i suoi rapporti con la teoria della calcolabilità, in tal modo si sono alimentate discussioni, ricerche e dispute che avrebbero prodotto intuizioni decisive, destinate a sfociare nella creazione di calcolatori generali.

## 2.9 RUSSEL E WHITEHEAD: IL LOGICISMO E LA TEORIA DEI TIPI

La posizione sviluppata da Frege secondo cui per lo sviluppo dell’aritmetica e della matematica stessa, siano necessari e sufficienti solamente i concetti della logica, è detta logicismo. La visione logicista considera la matematica riducibile alle regole e ai concetti generali della logica, come se fosse nient’altro che un’applicazione particolare della logica stessa, a partire dalla quale è possibile dedurre concetti, leggi e teoremi sulla base di assiomi[[33]](#footnote-33). L’indirizzo logicista, che ha avuto una grande importanza sia per lo sviluppo di sistemi automatici di calcolo sia per una definizione e limitazione delle potenzialità del calcolo stesso, concentra la sua attenzione sul ruolo della definizione e in primo luogo, proprio per evitare ogni infiltrazione di abitudini di pensiero consolidate, “intuizioni” mal definite o assunzioni non esplicitate, punta alla costruzione di un linguaggio “asettico”, assolutamente simbolico.[[34]](#footnote-34)

I Principia Mathematica, opera scritta a quattro mani da Bertrad Russel e Alfred Nortyh Whitehead nasce dalla volontà di rilanciare il programma logicista nato con Frege, in seguito al fallimento di quest’ultimo con la scoperta dell’antinomia da parte di Russel stesso.

L’opera di Russel e Whitehead si propone l’obiettivo di tentare una sistematizzazione delle basi della matematica partendo da un insieme definito di assiomi e di regole logiche, come possiamo leggere nella prefazione dell’opera:

«The present work has two main objects. One of these, the proof that all pure mathematics deals exclusively with concepts definable in terms of a very small number of fundamental logical concepts, and that all its propositions are deducible from a very small number of fundamental logical principles.

(Il presente lavoro ha due oggetti principali. Uno di questi, la prova che tutta la matematica pura tratta esclusivamente concetti definibili in termini di un numero molto piccolo di concetti logici fondamentali e che tutte le sue proposizioni sono deducibili da un numero molto piccolo di principi logici fondamentali)[[35]](#footnote-35)»

I Principia dunque, perfettamente in linea con il proposito logicista, affrontano il medesimo problema trattato nell'opera di Frege, che però come sappiamo si era arenata in alcune contraddizioni. Quest’opera tenta di superarle grazie all’elaborazione di una nuova teoria chiamata teoria dei tipi. La teoria dei tipi è una teoria logico-matematica che trova oggi applicazione nell’informatica, e si occupa di classificare generiche entità, raggruppandole in collezioni chiamate tipi. Questa teoria ha trovato un significativo campo di applicazione soprattutto nell'ambito della progettazione dei linguaggi di programmazione, in sostanza un sistema di tipi divide i valori manipolati dai programmi in insiemi chiamati appunto tipi attraverso l’esecuzione di un'operazione chiamata assegnazione del tipo o tipizzazione. Tale assegnazione serve affinché certi determinati comportamenti del programma siano, o non siano, possibili in base al tipo dei valori coinvolti in questi comportamenti.

Con un semplice esempio è possibile comprendere facilmente di cosa si sta parlando: supponiamo che un sistema di tipi classifichi il valore “casa” come stringa e il valore 8 come intero e sulla base di queste assegnazioni differenti, proibisca al programmatore di sommare l’elemento “casa” a 8. All'interno di questo sistema, non sarebbe assolutamente possibile, ad esempio, eseguire l'istruzione di programma “casa” + 8 in quanto elementi appartenenti a due differenti tipizzazioni.

Il vantaggio di questa "proibizione", ovvero dell'impossibilità di far eseguire al programma questa operazione, consiste nel fatto che non potrà mai capitare di sommare stringhe a numeri poiché sarebbe un’operazione che produrrebbe risultati privi di senso.

Il sistema di logica proposizionale formulato nei Principia Mathematica, può essere visto come un sistema di logica sentenziale costituito da un linguaggio e regole di inferenza[[36]](#footnote-36).

Nonostante l’opera di Whitehead e Russel aveva dato alla matematica un linguaggio artificiale che permetteva di affidare le dimostrazioni di teoremi a operazioni formali puramente simboliche. i Principia lasciavano però irrisolte alcune questioni, infatti non risolvono la questione riguardante le eventuali contraddizioni che potevano essere derivate dagli assiomi adottati, né tantomeno risolvevano il problema riguardante l’esistenza di verità matematiche che non possono essere provate o confutate nel sistema stesso. Le questioni sono state poi risolte dai teoremi di incompletezza formulati da Gödel nel 1931.

## 2.10 HILBERT E BROWNER: FORMALISMO VS. INTUIZIONISMO

Un altro brillante logico matematico che contribuì alla successione di quegli studi che condussero alle intuizioni di Turing sul processo di calcolo, fu David Hilbert, anch’egli guidato da un profondo interesse per i fondamenti della matematica. Nel suo programma, matematica e logica sarebbero state sviluppate insieme come linguaggio simbolico puramente formale, che appariva come un sistema di formule e manipolazioni di simboli che potevano essere eseguite prescindendo da ogni significato, questo approccio è detto formalista. Diversamente dal logicismo che intendeva ridurre metafisicamente le entità della matematica alle entità della logica, il *formalismo* hilbertiano sostiene che gli enunciati matematici possono essere pensati come affermazioni intorno alle conseguenze di certe regole di manipolazione di elementi: in base alle regole logiche si possono derivare teoremi dagli assiomi e, di conseguenza, scoprire nuove proposizioni aritmetiche, ma il punto cruciale della visione formalista è che non importa affatto che le proposizioni derivate da una tale macchinazione siano vere nei termini di una corrispondenza metafisica con qualcosa di realmente esistente, potremmo pertanto dire che il sistema matematico deve la sua validità solamente dagli aspetti formali dei suoi teoremi e dei suoi processi intrinsechi, per cui un sistema matematico è valido se non presenta alcuna contraddizione al suo interno[[37]](#footnote-37). Per comprendere meglio questo concetto è necessario dare una definizione di sistema formale: potremmo definire un sistema formale come un sistema di assiomi dotato di regole di inferenza che consentono di volta in volta di generare nuovi teoremi. È necessario però che l'insieme di assiomi sia finito o almeno decidibile, ciò significa che ci deve essere necessariamente un algoritmo (un metodo efficace) che consente di decidere meccanicamente attraverso una sequenza finita di formule se una determinata affermazione è provata, quindi può essere assunta come un assioma oppure no.

Un sistema formale deve essere dotato di proposizioni di partenza in grado di definire astrattamente gli enti della teoria, gli assiomi A, e un insieme di regole di inferenza R. Sia A che R sono espressi in un linguaggio L sintatticamente preciso e a-semantico, un insieme di simboli e di operatori formali per la manipolazione di simboli. Un sistema formale deve possedere una serie di requisiti generali come coerenza o non-contraddittorietà, completezza sintattica (un sistema formale si dice completo quando, data una qualsiasi proposizione P, ben formata secondo le regole del linguaggio formale L, è possibile dimostrare che P può essere ricavata da A utilizzando le regole R), decidibilità (un sistema è decidibile se data una proposizione P è possibile dimostrare in un numero finito di passi se la proposizione appartiene o no al sistema utilizzando R)[[38]](#footnote-38). inoltre un sistema formale è completo se per ogni affermazione della lingua del sistema, l'istruzione o la sua negazione possono essere provate nel sistema stesso, inoltre un sistema formale può dirsi coerente se non esiste un'affermazione tale che l'affermazione stessa e la sua negazione siano entrambe derivabili nel sistema

.

In sostanza Hilbert intendeva utilizzare la matematica per giustificare la matematica stessa, si doveva cioè «dimostrare con la pura logica che i teoremi seguivano degli assiomi, senza l’influenza corruttrice di quello che possiamo “vedere” guardando una figura»[[39]](#footnote-39), assiomi per i quali non era possibile ricavare una dimostrazione. L’intento di Hilbert era dunque quello di fondare tutte le teorie matematiche su un insieme finito di assiomi che non conducevano a contraddizioni, comprimere cioè tutta la matematica all’interno di sistemi formali, fondando il csiddetto metodo assiomatico. In tal modo, tutte le teorie complesse potevano essere fondate su teorie più semplici, retrocedendo in questo modo fino a fondare tutta la matematica sull’aritmetica, (ben presto però, Goedel dimostrò, nel suo teorema di incompletezza, che non era possibile utilizzare l’aritmetica per dimostrare l’aritmetica stessa!).

Al polo opposto della teoria formalista, si pone l’intuizionismo. L’intuizionismo si fonda su alcuni punti essenziali circa lo statuto della matematica formulati dal matematico olandese Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Innanzitutto egli considera ogni oggetto matematico non come qualcosa di esistente di per sé ma come un prodotto esclusivo dell’attività costruttiva della mente umana. Per l'intuizionismo la validità della matematica, in quanto scienza costruttiva, è indipendente dalla logica, proprio perché quest'ultima si riferisce a espressioni linguistiche, cioè a un momento che è successivo a quello del concepimento delle costruzioni mentali, quello della loro estrinsecazione verbale. Non è quindi possibile fondare la matematica sulla logica. La matematica quindi non è formale; i suoi oggetti sono semplicemente delle costruzioni mentali, e in quanto tali, la comunicazione di esse mediante il linguaggio può servire a suggerire ad altri costruzioni di pensiero analoghe alle proprie, ma non c'è alcuna garanzia che tali altre costruzioni siano le stesse. Ciò detto è facile intuire che secondo la visione intuizionista la matematica non dipende dalla logica; per contro, la logica è una componente della matematica.[[40]](#footnote-40)

## 2.11 HILBERT VS. GODEL

### 2.11.1 ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

Quello di Hilbert può essere definito come un programma che aveva lo scopo di ridurre a processi algoritmici tutta la matematica. In un sistema del genere, in cui ogni proposizione deriva da una precedente ed ogni passaggio è perfettamente definito all’interno di un sistema formale, sarebbe stato possibile abbracciare l’intero ambito del sapere matematico senza eccezione alcuna.

Lo stesso Hilbert però, in occasione del Congresso dei matematici tenutosi a Parigi nel 1900 aveva posto un problema circa la possibilità dell’esistenza in matematica di alcune questioni non decidibili per via algoritmica, il cosiddetto Entscheidungsproblem, ovvero il problema della decisione.

Il problema consiste nel chiedere di eseguire meccanicamente (quindi tramite algoritmo) una procedura che per ogni formula espressa, dimostri che tale formula è o meno decidibile all’interno del sistema stesso. Il problema può considerarsi risolto se, per ogni proposizione dedotta nel sistema, si individuano una serie di operazioni e passaggi definiti e finiti che ne dimostrano la validità o la falsità[[41]](#footnote-41).

Hilbert era dell’idea che non ci fosse nulla che potesse sfuggire alla logica serrata dei suoi sistemi, come abbiamo visto, la sua costruzione della matematica all’interno di un sistema formale non ammetteva la possibilità dell’esistenza di proposizioni indecidibili, se tale sistema era definito come coerente e completo, sosteneva quindi che tutte le proposizioni potessero essere dimostrabili e affermava che la veridicità o falsità di tali proposizioni potesse essere deducibile nel sistema. I sistemi di procedure di calcolo destinati alla soluzione di problemi specifici, (cioè gli algoritmi), componevano buona parte del programma tradizionale degli studi matematici, Hilbert però cercava un algoritmo di un’ampiezza senza precedenti: l’algoritmo per l’Entscheidungsproblem avrebbe dovuto ridurre tutti i ragionamenti deduttivi umani a calcolo bruto, realizzando in buona misura il sogno di Leibniz. Secondo la visione hilbertiana, che parte dal presupposto che tutte le proposizioni matematiche sono derivabili da alcuni assiomi di partenza, se un sistema matematico contiene proposizioni indecidibili vuol dire che è basato su un insieme incompleto di assiomi e, quindi, nel caso della presenza di una proposizione apparentemente indecidibile, basterà semplicemente integrare quest’ultima tra gli altri assiomi![[42]](#footnote-42) Questa possibilità però venne presto negata ed Hilbert dovette ben presto ricredersi. Le pretese di onniscienza del sistema formalista vennero messe in crisi da un giovane matematico tedesco: Kurt Godel.

### 2.11.2 I TEOREMI DI INCOMPLETEZZA

I due teoremi di incompletezza dimostrati da Kurt Godel nel 1931 sono dei teoremi che mettono in luce i limiti dei sistemi formali. Secondo Godel ogni sistema formale che abbia la complessità minima dell’aritmetica è necessariamente ed incorregibilmente incompleto, e a nulla potevano valere i tentativi Hilbertiani di integrare assiomi. Il problema infatti, non deriva da un’incompletezza di assiomi, in quanto pur integrando assiomi su assiomi il problema dell’indecidibilità rimarrebbe invariato semplicemente perché ci sarebbero sempre, all’interno del sistema, alcune conseguenze logiche che non possono essere descritte da un algoritmo!

La risposta all’Entscheidungsproblem è quindi per Godel negativa in quanto riesce a dimostrare l’esistenza di problemi che sono indecidibili per via algoritmica.

Il concetto fondamentale dei suoi teoremi di incompletezza è che per ogni sistema che formalizzi coerentemente la matematica, è possibile costruire una proposizione sintatticamente corretta che non può essere né dimostrata né confutata all'interno dello stesso sistema. Questa affermazione va decisamente contro la pretesa logicista e formalista di poter ridurre la matematica ad una concatenazione di inferenze, dando così un contributo ampiamente significativo al dibattito che si teneva tra gli studiosi dell’epoca circa i fondamenti della matematica. L’importanza dell’intuizione godeliana però va ben oltre, aprendo la strada a tutte quelle teorie matematiche e imprescindibilmente filosofiche che, attraverso tentativi di conferma o smentita del suo teorema, riguardano la possibilità di costruire un sistema (o programma, per utilizzare un termine proprio della scienza informatica) sulla base di algoritmi che possano descrivere in maniera assoluta il funzionamento di un’intelligenza in grado di riprodurre o simulare quella umana.

In particolare, se consideriamo il funzionamento della nostra mente analogamente a quello di un sistema formale, nei termini di inferenze logiche codificabili, è evidente che in seguito alla formulazione del primo teorema di Godel, non sarà più possibile sostenere questo paragone.[[43]](#footnote-43)

Ma vediamo nello specifico di cosa si tratta. Il primo teorema di incompletezza di Godel afferma che qualsiasi sistema formale coerente S entro il quale può essere eseguita una certa quantità di aritmetica elementare è incompleto. Questo significa che ci sono dichiarazioni del linguaggio di S che non possono né essere dimostrate né smentite in S stesso, questo equivale a dire che all’interno del sistema esistono delle proposizioni che sono indecidibili, rispondendo così positivamente all’Entschedungsproblem proposto precedentemente da Hilbert.

Il teorema di Gödel non afferma semplicemente l'esistenza di tali affermazioni: il metodo della dimostrazione di Gödel produce esplicitamente una frase particolare che non è né dimostrabile né confutabile in S, e l'affermazione "indecidibile" può essere trovata meccanicamente da una specifica di S.[[44]](#footnote-44) La dimostrazione matematica effettuata da Godel è molto tecnica e complessa, ma potremmo comprenderla attraverso un esempio relativamente semplice:

Supponiamo che esista una proposizione P che dica "P non è dimostrabile in S", dove S è il sistema formale di riferimento. Assumiamo inoltre che ogni proposizione dimostrabile in S sia necessariamente vera. Ora, se P fosse dimostrabile in S, essa risulterebbe falsa perché andrebbe in contraddizione con il suo stesso contenuto, ma abbiamo detto che ogni proposizione dimostrabile in S non può essere falsa. Possiamo dunque dire che P è vera in quanto non può essere dimostrabile in S (quindi è indecidibile in S).

Questo teorema ci svela l’esistenza di una proposizione vera, ma la straordinarietà di questa dimostrazione sta nel fatto che la veridicità della proposizione P non è deducibile per via algoritmica. La sua indecidibilità all’interno del sistema fa sì che un computer, che lavora sulla base di algoritmi, non potrebbe mai dedurne la veridicità, al contrario di quanto è in grado di fare la mente umana, la quale è in grado di stabilire se quella proposizione è vera o no andando al di là di ogni possibilità di deduzione sistemica.

Ciò detto, potremmo affermare che l’intelletto umano è dotato di un surplus di capacità rispetto alla mera facoltà computazionale replicabile per mezzo degli algoritmi alla base dei programmi eseguibili dalle macchine, ma come potremmo definire questa sfuggente capacità? Intuizione?[[45]](#footnote-45) Oppure si tratta in ogni caso di un meccanismo il cui algoritmo ci è ancora sconosciuto?

## 2.12 TURING: LA MACCHINA UNIVERSALE

Dopo la formulazione del teorema di incompletezza di Godel, era difficile pensare che potesse esistere un algoritmo come quello cercato da Hilbert. Ricordiamo che la questione era stata posta da Hilbert più o meno nei seguenti termini: esiste sempre, almeno in linea di principio, un metodo meccanico, algoritmico, rigoroso attraverso cui, dato un qualsiasi enunciato matematico, si possa stabilire se esso sia vero o falso? Un’ altra risposta negativa all’Entscheidungsproblem venne data da Alan Turing negli anni Trenta del ‘900.

Nella primavera del 1935, Turing si trovava a Cambridge ed ebbe la possibilità di frequentare un corso sui fondamenti della matematica, fu in seguito alla frequentazione di quel corso che decise di cimentarsi nell’impresa di dimostrare anch’egli che un algoritmo come quello congetturato da Hilbert, non esisteva. Questo tentativo condusse indirettamente a fondare le basi della teoria della computazione, in quanto per dimostrare la sua tesi dovette inventare un modello matematico di calcolatore generale onnifunzionale (noto col nome di macchina di Turing) che fosse in grado di calcolare tutto ciò che è calcolabile mediante un processo algoritmico, tanto che oggi, per definire in modo formalmente preciso la nozione di algoritmo, si tende a ricondurlo alle elaborazioni effettuabili con macchine di Turing. Di conseguenza ne deriva che se si può dimostrare che un certo compito non può essere eseguito da una macchina di Turing, è certo che non esiste un processo algoritmico in grado di eseguirlo, e fu così che Turing dimostrò che non esisteva un algoritmo per l’Entscheidungsproblem (Dimostrò cioè che nessuna macchina in grado di eseguire solo tali azioni di calcolo, poteva stabilire se una data conclusione era derivabile da premesse date usando le regole di Frege, infatti se di un qualche problema matematico si può dimostrare che è algoritmicamente insolubile, ne consegue che sarà insolubile lo stesso Entscheidungsproblem). Concluse così che l’algoritmo tanto agognato da Hilbert non esisteva.

Ma come si poteva realizzare una tale dimostrazione? Turing incominciò da una minuziosa e approfondita analisi del processo di calcolo, o meglio, incominciò proprio dal concetto di algoritmo, il quale consiste in un procedimento che risolve un determinato problema attraverso un numero finito di passi elementari, chiari e non ambigui. L’algoritmo è tipicamente definito da un elenco di regole che una persona può eseguire in modo meccanico e preciso. In particolare, un algoritmo deve avere queste cinque caratteristiche:

1. I passi che costituiscono lo schema devono essere “elementari”, ovvero non ulteriormente scomponibili;
2. I passi che costituiscono lo schema devono essere interpretabili in modo univoco dall’esecutore, sia esso umano o artificiale;
3. L’algoritmo deve essere finito, ossia composto da un numero definito di passi legati ad una quantità definita di dati in ingresso;
4. L’esecuzione dello schema deve avvenire entro un tempo finito;
5. L’esecuzione dello schema algoritmico deve condurre ad un unico risultato.

Eliminando ogni dettaglio inessenziale, Turing riuscì ad individuare le azioni di base necessarie per lo svolgimento di un calcolo. È importante premettere che una persona che esegua un calcolo è soggetta ad alcuni vincoli: innanzitutto in ogni stadio del calcolo l’attenzione deve essere rivolta solo a pochi simboli, e inoltre in ogni stadio l’azione intrapresa dipende solo da quei simboli su cui si focalizza la sua attenzione e dal suo stato mentale del momento.

Detto ciò, il calcolo può essere inteso come un processo con le seguenti caratteristiche:

1. viene eseguito scrivendo dei simboli nelle caselle di un nastro di carta;

2. a ogni passo la persona che esegue il calcolo fa attenzione al simbolo scritto in una sola di queste caselle;

3. l’azione successiva dipenderà da questo simbolo e dallo stato mentale della persona;

4. tale azione consisterà nello scrivere un simbolo nella casella osservata ed eventualmente nello spostare l’attenzione sulla casella immediatamente a destra o a sinistra.

Le analisi del processo di calcolo (cioè delle azioni fondamentali eseguite da un essere umano nel calcolo) portò alla conclusione che le medesime azioni potevano benissimo essere eseguite da una macchina capace di svolgere quelle stesse azioni di base, e fu così che Turing arrivò all’idea della sua macchina calcolatrice, cioè uno di quegli strumenti dalle caratteristiche rigidamente definite che oggi chiamiamo macchine di Turing[[46]](#footnote-46).

Già nel 1834, poco più di un secolo prima, Charles Babbage aveva avuto l’idea di costruire una macchina calcolatrice automatica, la cosiddetta *macchina analitica* che avrebbe dovuto essere in grado di svolgere ogni tipo di calcolo numerico. Babbage tuttavia intendeva costruire una macchina usando solo componenti meccaniche, utilizzando schede perforate simili a quelle utilizzate nel telaio di Jacquard (tecnologia che verrà in ogni caso utilizzata nella costruzione dei primi calcolatori), tale macchina però era priva del meraviglioso apparato concettuale che caratterizzava la macchina di Turing.

A livello tecnico, la macchina di Turing si compone di un nastro magnetico sul quale i simboli scritti sono rappresentati da informazioni in codice. Il nastro si muove avanti e indietro, mentre agli stati mentali dell’operatore corrispondono differenti configurazioni delle componenti interne della macchina. Quest’ultima va progettata in modo da scandire, istante per istante, uno solo dei simboli del nastro e a seconda della sua configurazione interna e del simbolo scandito, scriverà sul nastro un certo simbolo che rimpiazzerà quello scandito precedentemente, dopodiché o continuerà a scandire la stessa casella o si sposterà di un passo verso destra o verso sinistra. Ai fini del calcolo però conta solo che la macchina abbia la capacità di assumere un certo numero di configurazioni, anche dette stati.

Che cosa è dunque necessario per descrivere una di queste macchine? Ci serve innanzitutto un elenco di tutti i suoi possibili stati, per ciascuno di essi e per ogni simbolo che possiamo trovare sul nastro è necessario specificare l’azione svolta dalla macchina quando è in quello stato e si trova davanti a quel simbolo, questa azione consiste semplicemente nell’eventuale sostituzione del simbolo nella casella scandita, nello spostamento di una casella verso destra o verso sinistra e in un eventuale cambio di stato secondo il seguente enunciato:

*quando la macchina si trova nello stato* ***R*** *e legge sul nastro il simbolo* ***a****, sostituisce* ***a*** *con* ***b*** *e passa nello stato* ***S***.

Questo enunciato può essere formulato in un’espressione chiamata quintupla, perché occorrono esattamente cinque simboli per descriverlo:

**R a : b → S**

Turing aveva creato il modello matematico di un calcolatore generale per dimostrare che non si poteva usare una tale macchina per risolvere l’Entscheidungsproblem, ma per passare da questo risultato alle conclusioni che non esisteva nessun algoritmo, di nessun genere, capace di risolvere un tale problema, avrebbe dovuto dimostrare che la sua macchina era in grado di svolgere davvero *qualsiasi* calcolo. Fu così che Alan Turing formulò il modello matematico di un calcolatore universale in grado di svolgere in modo automatico qualsiasi tipo di computazione, formulò cioè il modello di una macchina che fosse in grado, da sola, di svolgere tutti i compiti di qualunque macchina di Turing.

In poche pagine di quella che oggi chiameremmo programmazione riuscì a descrivere come fosse possibile produrre le quintuple di una simile macchina universale che, partendo dal codice numerico di una macchina T, seguito sul nastro dal numero dato in ingresso a T, facesse esattamente ciò che avrebbe fatto T se le fosse stato fornito quell’ingresso, in pratica aveva creato il modello di una macchina che eseguisse da sola i compiti di molteplici macchine di Turing, più o meno come un programma è in grado di trattare altri programmi come dati, ed è proprio per questo motivo che tale macchina è detta universale.

La macchina universale di Turing può essere considerata come il primo esempio di programma interprete, in quanto il suo funzionamento si basa sull’interpretazione di una successione di quintuple analogamente a quanto succede nei moderni programmi scritti in un determinato linguaggio di programmazione che altro non è se non un insieme di dati che deve a sua volta essere interpretato.

Era da tempi remotissimi che si pensava alla realizzazione di macchine calcolatrici, ma è con Turing e con la sua macchina universale che per la prima volta l’uomo si affaccia finalmente alla possibilità concreta di riuscire a costruire un meccanismo in grado di poter calcolare tutto il calcolabile, riuscendo così finalmente a realizzare l’antico sogno di Leibniz e di chi prima di lui aveva mosso, più o meno inconsapevolmente, i primi passi verso quella che potremmo definire come *macchinazione del pensiero*.

1. [↑](#footnote-ref-1)
2. [↑](#footnote-ref-2)
3. John McCarthy, Marvin L. Minsky, Nathaniel Rochster, Claude E. Shannon, *A proposal for Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence*, ripubblicato in “AI Magazine”, vol.27 n. 4, p.12. [↑](#footnote-ref-3)
4. Margaret Boden, Artificial Intelligence and natural Man [↑](#footnote-ref-4)
5. Stuart Russell, Peter Norvig, *Intelligenza Artificiale, un approccio moderno*, vol. 1, 2° edizione, Pearson Education Italia S.r.l., Milano 2005 [↑](#footnote-ref-5)
6. A tal proposito ritengo opportuno tenere in considerazione i più moderni sistemi sviluppati nell’ambito delle Reti Neurali, i quali, a differenza di IA basata su sistemi inferenziali in cui è nota la rappresentazione delle conoscenze all’interno di un dominio e quindi anche le regole di inferenza, accumulano informazione sui pesi della rete e non rendono conto dei passaggi logici che utilizzano. [↑](#footnote-ref-6)
7. Lorenzo Pinna, *Intelligenza Artificiale*, Edizioni Cento Autori, Villaricca 2018 [↑](#footnote-ref-7)
8. Thomason, Richmond, "Logic and Artificial Intelligence", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/logic-ai/>. [↑](#footnote-ref-8)
9. Andrea Cusimano, *Storia del pensiero occidentale*, ISBN 978-1-291-59170-5 p. 149 [↑](#footnote-ref-9)
10. Silvio Hénin, La calcolatrice di Leonardo, Mondo digitale, ottobre 2018

    http://mondodigitale.aicanet.net/2018-5/Rubriche/01\_MD78\_Henin\_IlCalcolatoreDiLeonardo.pdf [↑](#footnote-ref-10)
11. B. Pascal, Oeuvres complètes, cit., pp. 189-190. Trad. it. La macchina aritmetica di Blaise Pascal, a cura di M. Sangoi e P. Graziani, Isonomia 2005, p. 6. [↑](#footnote-ref-11)
12. Th. Hobbes, Leviatano, I, 5 [↑](#footnote-ref-12)
13. Ludovico Geymonat, Dizionario dei termini filosofici, p. 77, allegato a Immagini dell'Uomo, Garzanti, 1989. [↑](#footnote-ref-13)
14. René Descartes, Regole per la guida dell’intelligenza, titolo originale Regulae ad diretione ingenii, Fabbri Editori, Milano 2000, pp. 163-165 [↑](#footnote-ref-14)
15. P. 179 [↑](#footnote-ref-15)
16. p [↑](#footnote-ref-16)
17. P 16 [↑](#footnote-ref-17)
18. P381 [↑](#footnote-ref-18)
19. Goffredo Guglielmo Leibniz, *Scritti di logica, Sulla sintesi e sull’analisi universale, ossia sull’arte dello scoprire e del giudicare*, a cura di Francesco Barone, Zanichelli editore, Bologna 1968 pp. 216-217 [↑](#footnote-ref-19)
20. Si tratta dei telai da tessitura della seta utilizzati a partire dal XVIII sec. nel quale le diverse operazioni venivano programmate prima attraverso l’utilizzo di nastri e cilindri e successivamente attraverso l’utilizzo di schede perforate. Ciò consentiva di cambiare trama e disegni con pochissima fatica. [↑](#footnote-ref-20)
21. Martin Davis, *Il calcolatore universale, da Leibniz a Turing*, tr. it. Gianni Rigamonti, Adelphi edizioni, Milano 2003 [↑](#footnote-ref-21)
22. Lettera a L’Hôpital, 28 aprile 1693. [↑](#footnote-ref-22)
23. È credenza comune che la notazione binaria, che è alla base dell’odierna tecnologia computazionale, sia stata inventata da Leibniz. In realtà lo studioso tedesco prese spunto da un sistema già utilizzato e descritto dagli antichi cinesi nel libro dei I-Ching ben 5000 anni prima. [↑](#footnote-ref-23)
24. Martin Davis, *Il calcolatore universale*, da Leibniz a Turing, tr. it. Gianni Rigamonti, Adelphi edizioni, Milano 2003 [↑](#footnote-ref-24)
25. George Boole, *L’analisi matematica della logica*, Bollati Boringhieri editore, Torino 1993 pp-3-4 [↑](#footnote-ref-25)
26. Andrea Pedeferri, *George Boole*, APhEx, Portale italiano di filosofia analitica, n. 2 giugno 2010 http://www.aphex.it/public/file/Content20141210\_08.APhEx2,2010ProfiliBoolePedeferri.pdf [↑](#footnote-ref-26)
27. Francesca Boccuni, *Gottlob Frege*, APhEx, Portale italiano di filosofia analitica, n. 3 gennaio 2011 [↑](#footnote-ref-27)
28. Frege, *Begriffsschrift*, 1879, trad. it. p. 104 [↑](#footnote-ref-28)
29. Cfr. p. 3 [↑](#footnote-ref-29)
30. Martin Davis, *Il calcolatore universale*, da Leibniz a Turing, tr. it. Gianni Rigamonti, Adelphi edizioni, Milano 2003 [↑](#footnote-ref-30)
31. Quello di Russel, più che un paradosso (che è una conclusione logica e non contraddittoria che si scontra con il nostro modo abituale di vedere le cose) è un'antinomia in quanto si tratta di una proposizione che risulta autocontraddittoria sia nel caso che sia vera, sia nel caso che sia falsa. [↑](#footnote-ref-31)
32. Consideriamo «l’insieme A di tutti gli insiemi che non contengono sé stessi come elementi». Ci sono infatti insiemi che contengono sé stessi come elementi (per esempio l’insieme di tutti i concetti astratti è a sua volta un concetto astratto) e insiemi che non contengono sé stessi come elementi (per esempio l’insieme di tutti i numeri reali non è un numero reale). L’antinomia consiste nel chiedersi se l’insieme A contenga o meno sé stesso. Infatti, se A contiene sé stesso allora A è, per definizione, uno degli insiemi che non contengono sé stessi come elemento, e quindi non contiene sé stesso. Se invece A non contiene sé stesso allora non è uno degli insiemi che non contengono sé stessi e quindi contiene sé stesso. [↑](#footnote-ref-32)
33. Questo pensiero si trova già in Gottfried Leibniz che cercava una characteristica universalis, una scienza universale, da cui potessero essere dedotte tutte le altre scienze come istanze specifiche. [↑](#footnote-ref-33)
34. http://www.treccani.it/enciclopedia/logicismo\_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/ [↑](#footnote-ref-34)
35. Bertrad Russel- Alfred North Whitehead*, Principia Mathematica*, Cambridge University press, 1910, vol. I, Preface. [↑](#footnote-ref-35)
36. Linsky, Bernard and Irvine, Andrew David, "Principia Mathematica", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/principia-mathematica/>. [↑](#footnote-ref-36)
37. https://www.riflessioni.it/dizionario\_filosofico/formalismo.htm [↑](#footnote-ref-37)
38. Ignazio Licata, La logica aperta della mente pg 84 [↑](#footnote-ref-38)
39. Martin Davis, Il calcolatore universale, da Leibniz a Turing, tr. it. Gianni Rigamonti, Adelphi edizioni, Milano 2003 p. 117 [↑](#footnote-ref-39)
40. La seconda rivoluzione scientifica: matematica e logica. L'intuizionismo di Brouwer

    di Anne L. Troelstra - Storia della Scienza (2004), http://www.treccani.it/enciclopedia/la-seconda-rivoluzione-scientifica-matematica-e-logica-l-intuizionismo-di-brouwer\_%28Storia-della-Scienza%29/ [↑](#footnote-ref-40)
41. Immerman, Neil, "Computability and Complexity", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/computability/>. [↑](#footnote-ref-41)
42. https://www.enzopennetta.it/2018/01/godel-e-lintelligenza-artificiale/ [↑](#footnote-ref-42)
43. Il teorema di Godel sarà ripreso da alcuni pensatori, come ad esempio Penrose, a difesa delle teorie contrarie a quelle che sostengono la possibilità della creazione di un AI forte. [↑](#footnote-ref-43)
44. Raatikainen, Panu, "Gödel's Incompleteness Theorems", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/goedel-incompleteness/>. [↑](#footnote-ref-44)
45. A proposito di ciò, ritengo opportuno citare una frase di Aristotele che negli Analitici II affermava: «non esiste alcun genere di conoscenza superiore alla dimostrazione se non l’intuizione» [↑](#footnote-ref-45)
46. Martin Davis, *Il calcolatore universale*, da Leibniz a Turing, tr. it. Gianni Rigamonti, Adelphi edizioni, Milano 2003 [↑](#footnote-ref-46)