Complexe Scolaire " Jean Michel Le FAUCON "

BP : 211 Abomey-Calavi ; Tél : +229 21 06 22 04

Année Scolaire : 2020 - 2021 Classe : Tle D Durée : 4h

COMPOSITION DU PREMIER TRIMESTRE

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

Contexte : Réalisation d'un rêve d'enfance.

Monsieur Itisagame est un ingénieur spécialisé en décoration (Designer). Comme rêve d'enfance, il souhaite avoir une maison dans les arbres à partir d'un modèle mathématique minutieusement conçu. Afin de réaliser son rêve d'enfance dans son domaine de plantation d'hévéa (arbre pouvant atteindre plus de 30m de hauteur, servant à fabriquer le caoutchouc), il munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et sépare le domaine en deux portions à l'aide de l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}$ avec $A(-1;1;2)$, $B(1;1;-2)$ et $C(1;2;3)$. Le toit et la façade de la maison auront pour supports respectifs les plans (P) et (Q) perpendiculaires suivant la droite (D) de systèmes d'équations cartésiennes $\begin{cases} x-1=0 \\ z=y+3 \end{cases}$ où

une représentation paramétrique du plan (Q) est : $\begin{cases} x = \propto +3\beta-1 \\ y = 2\propto -\beta \\ z = 3\propto +2\beta+1 \end{cases}$ $(\propto;\beta)\in\mathbb{R}^2$

Pour la décoration du salon, il prévoit fixer dans le plan du sol, un jeu de lumière aux points E, F, G et H d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 *et* z_4 telles que

$z_1\times z_2\times z_3 = 15$; $i\times z_3 = -\bar{z}_2$; $z_1\times z_2 = -3(1+2i)$
($\bar{z}_2$ est le nombre complexe conjugué de z_2 et i est tel que $i^2=-1$) et
$z_4 = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ puis construire trois figures (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3) sur les murs à l'intérieur du salon.

En informant sa petite famille du projet, sa fille Anne, élève en classe de terminale scientifique a identifié certaines notions mathématiques étudiées en classe et désire connaître la position relative de l'ensemble (Δ) et la droite (D) ; la nature du triangle EFG ; le module et un argument de z_4 ainsi que (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3)

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux différentes préoccupations de Anne en résolvant les problèmes ci-après :

Problème 1

1) Justifie qu'une équation cartésienne du plan (Q) est $x+y-z+2=0$

2) Détermine une équation cartésienne du plan (P)

3) a) Justifie que le point I milieu du segment [BC] appartient à (Δ)

b) Démontre que $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MI} = \vec{0}$

c) Déduis-en la nature de (Δ) puis donne une représentation paramétrique de (Δ)

4) Démontre que les droites (D) et (Δ) sont non coplanaires

Problème 2

Itisagame a muni le plan du sol de son salon du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

5) a) Justifie que $\overrightarrow{OE} = -3\overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$

b) Détermine la nature du triangle EFG.

6) Soit G′ le symétrique de G par rapport à F et E' le point du plan tel que le quadrilatère EGE′G′ soit un parallélogramme.

Détermine les affixes des points E' et G′.

7) On pose $a = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $c = a \times b$

a) Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de c

b) Écris c sous forme exponentielle

c) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

8) a) Vérifie que $z_4 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$

b) Déduis-en le module et un argument de z_4.

Problème 3

Dans le plan du sol du salon muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les trois figures (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3) sont définies respectivement de la façon suivante :

Etant donné un nombre complexe z d'écriture algébrique $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, différents de $-i$, et en notant $f(z)$ le nombre complexe $\frac{iz+2}{z+i}$

- (Γ_1) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre imaginaire,
- (Γ_2) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel,
- (Γ_3) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que le point image de $f(z)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1

9) a) Calcule $(f(z) - i)(z + i)$

b) Démontre que lorsque le point M d'affixe z appartient au cercle de centre $J(0; -1)$ et de rayon 1 alors le point N d'affixe $f(z)$ appartient à un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon

10) a) Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de $x\ et\ de\ y$

b) Détermine (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_3)

Bonne Composition