

3Ο ΜΑΘΗΜΑ

Παράσταση αριθμών
Αριθμητικές και λογικές Πράξεις

Εκπαιδεύτρια: Μαρία Πολίτη

ΔΥΑΔΙΚΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Η πρόσθεση γίνεται με αντίστοιχο τρόπο όπως και στο δεκαδικό σύστημα ενώ πάντοτε υπάρχει ειδικό hardware στον μικροεπεξεργαστή για τη συγκεκριμένη λειτουργία (κύκλωμα αθροιστή).

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ανάμεσα σε δύο αριθμούς n-bit μπορεί να είναι έως n+1 bit.

Παραδείγματα πρόσθεσης στα 8 bit:

$$\begin{array}{r} 10001010 \\ + 00100100 \\ \hline 10101110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111111 \\ + 11111111 \\ \hline 111111110 \end{array}$$

Παράσταση προσημασμένων ακέραιων αριθμών

- Για να παρασταθεί ένας τέτοιος αριθμός, χρειάζεται να εκφραστεί τόσο η απόλυτη τιμή του, όσο και το πρόσημό του με 0 ή 1. Για το πρόσημο χρησιμοποιείται το πρώτο από αριστερά δυαδικό ψηφίο της λέξης, ενώ στα υπόλοιπα $n-1$ τοποθετείται η απόλυτη τιμή του αριθμού σε δυαδική μορφή.
- Αν ο αριθμός είναι θετικός, το πρόσημο παριστάνεται με το 0, ενώ αν είναι αρνητικός, με το 1.

Παράσταση προσημασμένων ακέραιων αριθμών

- Παράδειγμα

Έτσι αν το $n=6$

ο αριθμός $+13$ παριστάνεται με το 001101

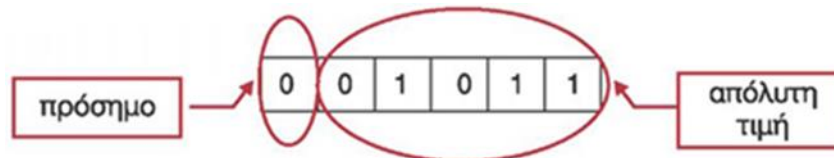
ενώ ο αριθμός -13 με το 101101

Παράσταση συμπληρώματος ως προς 1

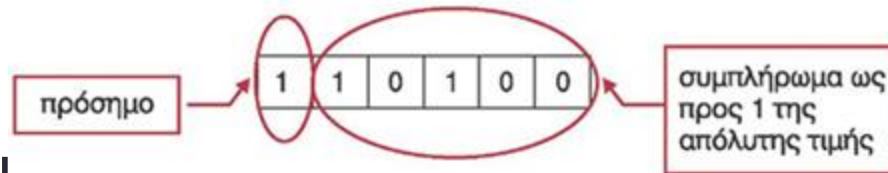
- Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, για την παράσταση ενός θετικού δυαδικού αριθμού τοποθετείται στο πρώτο από αριστερά bit το 0 και στα υπόλοιπα η απόλυτη τιμή του από δεξιά προς τα αριστερά. Αν ο αριθμός είναι αρνητικός παριστάνεται με το συμπλήρωμα ως προς 1 του αντίστοιχου θετικού αριθμού. Το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός δυαδικού αριθμού βρίσκεται αν αντικατασταθούν όλα τα 0 με 1 και όλα τα 1 με 0 (συμπεριλαμβανομένου και του προσήμου).

Παράσταση συμπληρώματος ως προς 1

- Ας φτιάξουμε το συμπλήρωμα ως προς 1 του αριθμού +11



- Και του αριθμού -11 είναι

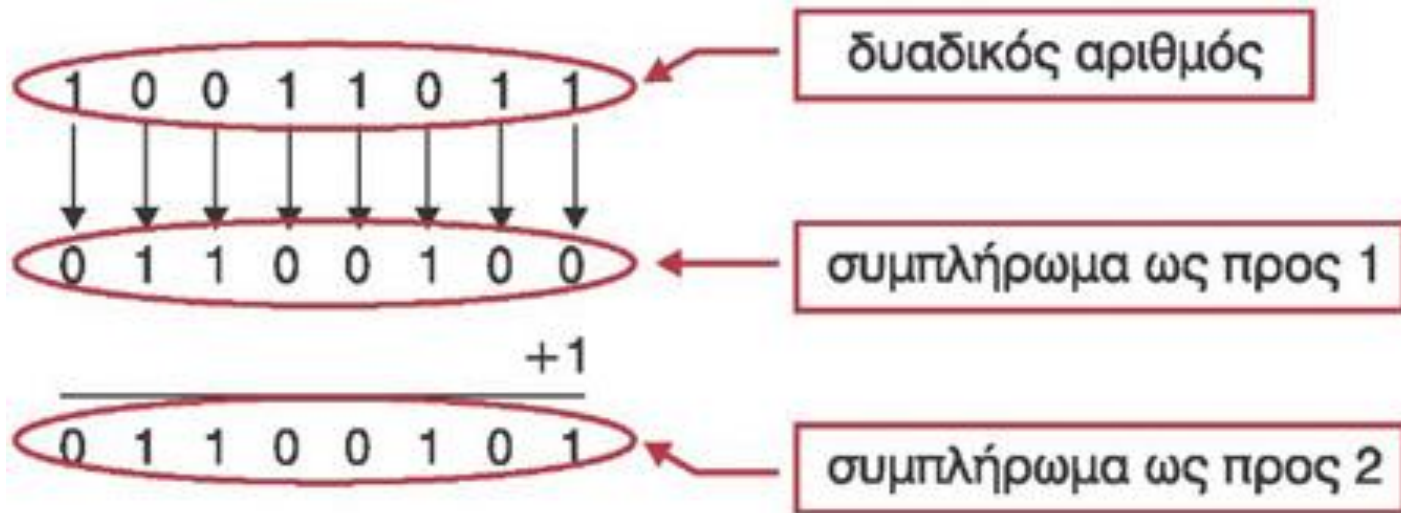


- Μπορούμε να αναπαραστήσουμε όλους τους αριθμούς από -127 έως 127

Παράσταση συμπληρώματος ως προς 2

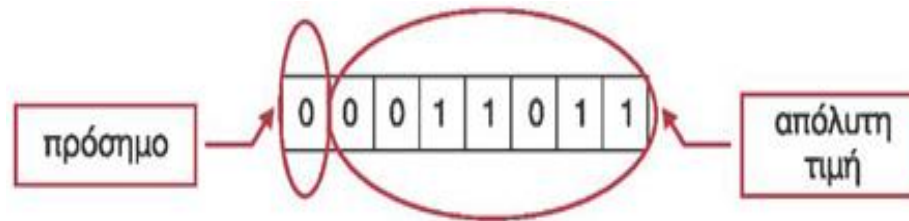
- Αυτή η μέθοδος παράστασης είναι ίδια με την προηγούμενη, μόνο που, αντί για το συμπλήρωμα ως προς 1 ενός αριθμού, χρησιμοποιείται το συμπλήρωμα ως προς 2.
- Το συμπλήρωμα ως προς 2 ενός δυαδικού αριθμού βρίσκεται αν βρεθεί πρώτα το συμπλήρωμά του ως προς 1 και σε αυτό προστεθεί το 1. Για παράδειγμα στον επόμενο πίνακα υπολογίζεται το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού 1 0 0 1 1 0 1

Παράσταση συμπληρώματος ως προς 2

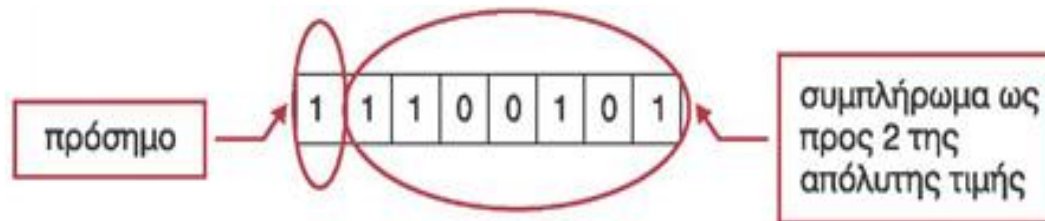


Παράσταση συμπληρώματος ως προς 2

- Έτσι η παράσταση, με τη μέθοδο του συμπληρώματος ως προς 2, του αριθμού +27 με 8 bit είναι:



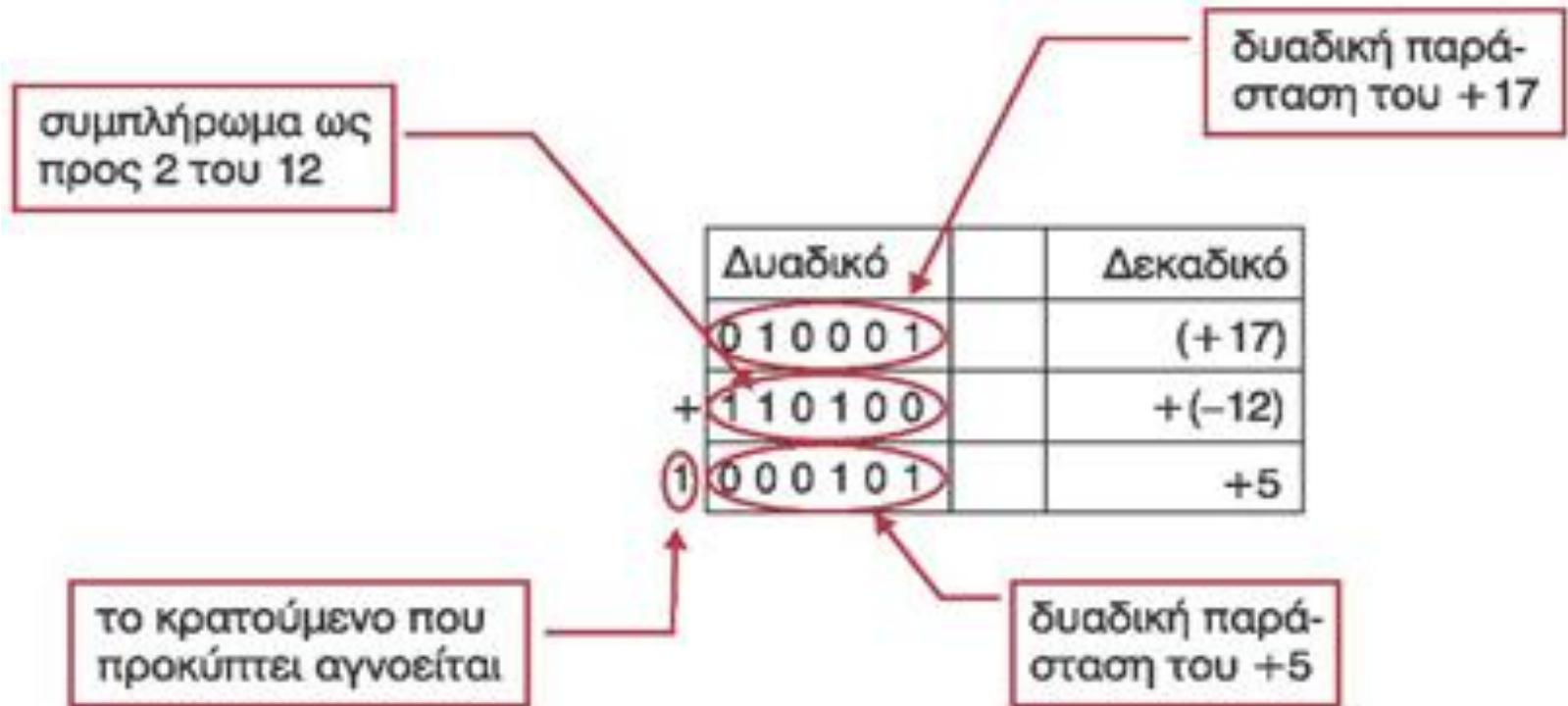
και του αριθμού -27 είναι:



Πλεονέκτημα

- Το πλεονέκτημα των μεθόδων «συμπληρώματος ως προς 1 και 2» είναι ότι ο υπολογιστής δεν χρειάζεται να διαθέτει ειδικά κυκλώματα για την αφαίρεση, μια και για να αφαιρεθεί ένας αριθμός από έναν άλλο αρκεί να προστεθεί στο μειωτέο το συμπλήρωμα ως προς 2 ή προς 1 του αφαιρετέου. Μάλιστα, τα κυκλώματα που χρησιμοποιούνται για την αντιστροφή των δυαδικών ψηφίων κατασκευάζονται πολύ πιο εύκολα από αυτά της αφαίρεσης.

- Για παράδειγμα, αν θέλουμε να αφαιρέσουμε τον αριθμό +12 από τον +17 με τη χρήση 6 bit, έχουμε:



ΔΥΑΔΙΚΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Αν και μπορεί να υπολοιηθεί κύκλωμα αφαιρέτη σε υλικό ωστόσο η πράξη της αφαίρεσης γίνεται σχεδόν πάντοτε με το συμπλήρωμα ως προς δύο του αφαιρέτη κάνοντας χρήση του κυκλώματος του αθροιστή. Έτσι χρησιμοποιώντας το ίδιο κύκλωμα τόσο για την πρόσθεση όσο και για την αφαίρεση γίνεται οικονομία χώρου πάνω στο τσιπ ενώ επίσης επιτυγχάνεται ταυτόχρονα και μείωση του κόστους. **Η αφαίρεση δύο αριθμών στο δυαδικό σύστημα γίνεται κάνοντας πρόσθεση του αφαιρετέου με το συμπλήρωμα ως προς δύο του αφαιρέτη.**

Αν υπάρξει υπερχείλιση τότε απορρίπτουμε την υπερχείλιση, το αποτέλεσμα της πράξης είναι θετικό και βρίσκεται σε κανονική μορφή.

Αν δεν υπάρξει υπερχείλιση τότε το αποτέλεσμα της πράξης είναι αρνητικό και βρίσκεται σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο. Δηλαδή για να δούμε την απόλυτη τιμή του αποτελέσματος πρέπει να πάρουμε το συμπλήρωμα ως προς δύο.

ΔΥΑΔΙΚΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Παράδειγμα αφαίρεσης στα 4 bit

$$12 - 7 = 5$$

12: 1100

7: 0111

Συμπλήρωμα ως προς 2 του 7: 1001

Πρόσθεση με το συμπλήρωμα ως προς 2:

$$\begin{array}{r} 1100 \\ + 1001 \\ \hline \cancel{1}0101 \end{array}$$

Υπάρχει υπερχείλιση άρα το αποτέλεσμα είναι θετικό και είναι ο αριθμός 0101 = 5

ΔΥΑΔΙΚΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Παράδειγμα αφαίρεσης στα 4 bit

$$7 - 12 = -5$$

7: 0111

12: 1100

Συμπλήρωμα ως προς 2 του 12: 0100

$$\begin{array}{r} \text{Πρόσθεση με το συμπλήρωμα ως προς 2:} \\ \\ + \underline{0100} \\ 1011 \end{array}$$

Δεν υπάρχει υπερχείλιση άρα το αποτέλεσμα είναι αρνητικό και βρίσκεται σε μορφή συμπληρώματος ως προς δύο.

Δηλαδή η απόλυτη τιμή του είναι το συμπλήρωμα ως προς δύο του αριθμού 1011 το οποίο είναι $0101 = 5$

ΔΥΑΔΙΚΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ο πολλαπλασιασμός σε προηγμένους μικροεπεξεργαστές γίνεται χρησιμοποιώντας hardware πολλαπλασιαστή. Σε πιο απλούς μικροεπεξεργαστές πραγματοποιείται με χρήση software υλοποιώντας κάποιον αλγόριθμο πολλαπλασιασμού.

Το αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού δύο αριθμών n bit μπορεί να έχει εύρος έως $2n$ bit.

α) Ο πιο απλός αλγόριθμος υλοποιείται πραγματοποιώντας διαδοχικές προσθέσεις. Για παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός 3×8 μπορεί να υλοποιηθεί προσθέτοντας 3 φορές το 8.

$$\begin{array}{r} \text{(α)} \quad 1000 \quad 8 \\ \quad 1000 \quad 8 \\ \quad \underline{1000} \quad \underline{8} \\ 11000 \quad 24 \end{array}$$

β) Ένας πιο γρήγορος αλγόριθμος είναι ο κλασικός αλγόριθμος που χρησιμοποιείται και στο δεκαδικό σύστημα. Υλοποιείται πραγματοποιώντας προσθέσεις και ολισθήσεις.

$$\begin{array}{r} \text{(β)} \quad 0101 \quad 5 \\ \quad \underline{1001} \quad \underline{\times 9} \\ \quad 0101 \quad 45 \\ \quad 0000 \\ \quad 0000 \\ \quad \underline{0101} \\ 101101 \end{array}$$

Μαθηματική λογική - Άλγεβρα Boole

- Ο υπολογιστής, εκτός από αριθμητικές πράξεις, έχει τη δυνατότητα να εκτελεί και συγκρίσεις, δηλαδή να επεξεργάζεται λογικά δεδομένα. Τα δεδομένα αυτά μπορεί να είναι απλές ή σύνθετες λογικές προτάσεις.
- Μια πρόταση λέγεται **λογική**, όταν μπορεί να χαρακτηριστεί αληθής ή ψευδής. Ένας τέτοιος χαρακτηρισμός μιας πρότασης λέγεται **τιμή αλήθειας** ή απλά **τιμή** της πρότασης

Άλγεβρα Boole

- Ο πρώτος που διατύπωσε τους βασικούς κανόνες με τους οποίους οι λογικές προτάσεις μπορούν να παρουσιαστούν με μαθηματικά σύμβολα, ήταν ο Άγγλος μαθηματικός **George Boole**
- Στην Άλγεβρα Boole υπάρχουν μόνο δύο είδη προτάσεων, αυτές που είναι αληθείς και αυτές που είναι ψευδείς. Δηλαδή οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα αυτή μπορούν να πάρουν μόνο δύο τιμές.

Άλγεβρα Boole

- Επίσης στην Άλγεβρα Boole ορίζονται και οι λογικές σταθερές. **Λογική σταθερά** ονομάζεται μια πρόταση που είναι πάντοτε αληθής ή πάντοτε ψευδής και διαφέρει από τη **λογική μεταβλητή**, η οποία είναι μια πρόταση που μπορεί να είναι άλλοτε αληθής και άλλοτε ψευδής.
- Ο Boole, μετά τις λογικές μεταβλητές και σταθερές, όρισε και τους κανόνες που καθορίζουν τις βασικές λογικές πράξεις. Για να ορίσει τις πράξεις αυτές, χρησιμοποίησε πίνακες στους οποίους περιλαμβάνονται όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των τιμών που μπορούν να πάρουν οι λογικές μεταβλητές καθώς και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτούς τους συνδυασμούς. Στα επόμενα βλέπουμε τις βασικές πράξεις της Άλγεβρας Boole.

Άρνηση - NOT

- Η πράξη αυτή λέγεται και **αντιστροφή** ή **συμπλήρωμα** και συμβολίζεται με \bar{A} .

A	NOT A
Σήμερα θα βρέξει	Σήμερα δεν θα βρέξει

Πίνακας αλήθειας	
A	NOT A
αληθής	ψευδής
ψευδής	αληθής

Σύζευξη-AND

- Με την πράξη της σύζευξης συνθέτουμε δύο προτάσεις με τη λέξη «και», οπότε σχηματίζεται μια νέα πρόταση, η οποία είναι αληθής μόνο όταν και οι δύο αρχικές είναι αληθείς.
- Η πράξη αυτή λέγεται και **λογικός πολλαπλασιασμός** και συμβολίζεται με **A • B**.

A	B	A AND B
Το 12 διαιρείται από το 6	Το 4 είναι διαιρέτης του 8	Το 12 διαιρείται από το 6 και το 4 είναι διαιρέτης του 8

Πίνακας αλήθειας		
A	B	A AND B
αληθής	αληθής	αληθής
αληθής	ψευδής	ψευδής
ψευδής	αληθής	ψευδής
ψευδής	ψευδής	ψευδής

Διάζευξη - OR

- Με την πράξη της διάζευξης συνθέτουμε δύο προτάσεις με τη λέξη «ή», οπότε σχηματίζεται μια νέα πρόταση, η οποία είναι αληθής όταν τουλάχιστον η μία από τις δύο αρχικές είναι αληθής.
- Η πράξη αυτή λέγεται και **λογική πρόσθεση** και συμβολίζεται με **A + B**.

A	B	A AND B
Το 12 διαιρείται από το 6	Το 12 διαιρείται από το 5	Το 12 διαιρείται από το 6 ή το 12 διαιρείται από το 5

Διάζευξη - OR

Πίνακας αλήθειας

A	B	A OR B
αληθής	αληθής	αληθής
αληθής	ψευδής	αληθής
ψευδής	αληθής	αληθής
ψευδής	ψευδής	ψευδής

Αποκλειστική διάζευξη - XOR

- Με την πράξη της αποκλειστικής διάζευξης συνθέτουμε δύο προτάσεις βάζοντας το διαζευκτικό «είτε» μπροστά σε καθεμία, οπότε σχηματίζεται μια νέα, η οποία είναι αληθής μόνο όταν η μία από τις αρχικές είναι αληθής και η άλλη ψευδής.
- Η πράξη αυτή συμβολίζεται με $A \oplus B$

A	B	A XOR B
Το 12 διαιρείται από το 6	Το 12 διαιρείται από το 5	Είτε το 12 διαιρείται από το 6 είτε το 12 διαιρείται από το 5

Αποκλειστική διάζευξη - XOR

Πίνακας αλήθειας

A	B	A XOR B
αληθής	αληθής	ψευδής
αληθής	ψευδής	αληθής
ψευδής	αληθής	αληθής
ψευδής	ψευδής	ψευδής

Λογικές Συναρτήσεις

- Οι πράξεις σύζευξη, διάζευξη και αποκλειστική διάζευξη, εφαρμόζονται και για περισσότερες από δύο λογικές μεταβλητές.
- Οι συναρτήσεις που δέχονται ως είσοδο λογικές μεταβλητές και δίνουν ως έξοδο το αποτέλεσμα λογικών πράξεων καλούνται **λογικές συναρτήσεις**.