

# Estudio de comportamientos caóticos en sistemas pendulares

Saúl Díaz Mansilla

5 de marzo de 2025

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Teoría</b>	<b>2</b>
2.1. Exponente de Lyapunov . . . . .	2
2.2. Espacio de fases y secciones de Poincaré . . . . .	2
2.3. Diagrama de bifurcación . . . . .	3
<b>3. Métodos numéricos</b>	<b>4</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>5</b>
4.1. Péndulo real . . . . .	5
4.1.1. Exponente de Lyapunov . . . . .	6
4.1.2. Secciones de Poincaré . . . . .	8
4.1.3. Diagrama de bifurcación . . . . .	9
4.2. Péndulo paramétrico . . . . .	11
4.2.1. Exponente de Lyapunov . . . . .	11
4.2.2. Secciones de Poincaré . . . . .	12
4.2.3. Diagramas de bifurcación . . . . .	13
<b>5. Conclusión</b>	<b>15</b>

# 1. Introducción

Los sistemas caóticos, aunque poco estudiados en cursos usuales de física, debido a su impredicibilidad, son muy comunes en la realidad. Un ejemplo muy sencillo es un péndulo forzado, que tiene una solución analítica no caótica bajo la aproximación de ángulos pequeños, pero describe comportamientos caóticos para ángulos mayores.

El objetivo de este artículo es estudiar comportamientos caóticos en sistemas unidimensionales sencillos mediante experimentos numéricos. Se estudiarán parámetros clásicos de la teoría del caos como el exponente de Lyapunov y las secciones de Poincaré para dos sistemas pendulares en una dimensión: el péndulo real, y el péndulo paramétrico, que es una ligera modificación del anterior.

## 2. Teoría

### 2.1. Exponente de Lyapunov

Se define el caos como aquel movimiento con alta sensibilidad a las condiciones iniciales. Por ello, para medir si un sistema exhibe comportamiento caótico, se medirá la diferencia entre dos trayectorias con condiciones iniciales muy próximas,  $\theta_1(0)$  y  $\theta_2(0) = \theta_1 + \Delta\theta(0)$ .

Se observa que la relación entre  $\log(\Delta\theta)$  y el tiempo es aproximadamente lineal (ver figuras (1) y (2)), por lo que podemos definir un valor  $\lambda$  que verifica la siguiente relación:

$$\log(\Delta\theta) \sim \lambda t \quad (1)$$

El valor  $\lambda$  se conoce como *exponente de Lyapunov*, y determina la transición al caos. Si tiene un valor negativo, se debe a que distintas condiciones iniciales tienden a juntar sus trayectorias (comportamiento ordenado). En cambio, si tiene un valor positivo, significa que trayectorias con condiciones iniciales muy próximas divergen (comportamiento caótico).

### 2.2. Espacio de fases y secciones de Poincaré

El caos en el espacio de fases presenta comportamientos más sencillos. Sin embargo, para reducir el ruido en el espacio de fases se tomarán medidas estocásticamente, sólo representándose puntos en los que  $\Omega_{ext}t = 2\pi n$ , es decir, se toman medidas cada período de fuerza impulsora.

Al eliminar el estado transitorio, en el estado estacionario se observan comportamientos de doblado del período, esto es, el número de ángulos en

los que el sistema se encuentra en fase con la fuerza impulsora se duplica sucesivamente. Tras múltiples duplicaciones el sistema se vuelve caótico.

Los diagramas obtenidos se denominan *atractores* ya que aparecen de igual manera para cualquier elección de condiciones iniciales.

En las secciones de Poincaré se observan un punto aislado, para el caso de sincronización con el período de la fuerza impulsora, dos puntos, cuando el período se duplica, después cuatro, y en general  $2^n$  puntos para un comportamiento del tipo  $2^n T_{ext}$ . Cuando el sistema transiciona al caos se observa un patrón *extraño* con múltiples puntos.

### 2.3. Diagrama de bifurcación

Representando los valores de ángulo obtenidos en las secciones de Poincaré para distintos valores de la fuerza impulsora, se obtiene una gráfica en la que se aprecia el comportamiento de doblado del período. Una línea de puntos se va duplicando a medida que aumenta la fuerza impulsora hasta que llega al caos, momento en que aparece una agrupación de puntos.

La longitud de los intervalos con cierto comportamiento del período se reduce a medida que aumenta el período. Concretamente, para un número muy elevado de bifurcaciones  $2^n$ , el ratio entre longitudes de intervalos tiende a un cierto número:

$$\delta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta F_n}{\Delta F_{n+1}} \approx 4,669 \quad (2)$$

que es común a todos los sistemas caóticos. Este resultado es uno de los más sorprendentes en teoría de caos. Se conoce a esta constante  $\delta_\infty$  como número de Feigenbaum.

### 3. Métodos numéricos

Para la integración de las ecuaciones de movimiento, se ha empleado el método de Euler-Cromer, una modificación del método de Euler que conserva la energía, por lo que es ideal para sistemas que realizan numerosas oscilaciones, ya que el método de Euler acumula energía tras pocos ciclos, dando lugar a resultados incorrectos.

Resuelve EDOs de segundo orden que se pueden escribir como el siguiente sistema de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= f(\theta, \omega, t)\end{aligned}$$

Su implementación es idéntica a la del método de Euler, pero utilizando la velocidad del paso actual en vez de la del anterior [1]:

$$\begin{aligned}\omega_{i+1} &= \omega_i + f(\theta_i, \omega_i, t_i)dt \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_{i+1}dt\end{aligned}$$

A lo largo del programa se utilizarán variaciones de este método:

- Finalización dado un tiempo final  $t_f$ . Es el método más empleado, codificado en la función *EulerCromer*.
- Finalización dada una cierta condición. Este método se emplea para el cálculo de exponentes de Lyapunov. El método integra simultáneamente dos condiciones iniciales y para cuando la diferencia entre ambas es muy pequeña, ( $\text{orden } e^{-40}$ ), ya que corre el riesgo de llegar a la precisión de la variable *float*, o cuando a transcurrido un tiempo suficientemente largo  $t_f$ . La función en la que se implementa es *EulerCromer\_stop*. Este método devuelve únicamente el tiempo final de integración.

Cabe destacar que el segundo método sólo devuelve el tiempo final y no los resultados de la integración directamente ya que al hacer la media con otras condiciones iniciales (ver sección 4.1.1) el número de elementos en cada integración debe ser igual.

Por ello se integra empleando *EulerCromer\_stop* con la primera condición inicial como prueba para hallar el tiempo de integración para todas las condiciones iniciales, y posteriormente se usa *EulerCromer* para hallar todos los valores de  $\Delta\theta$ .

## 4. Resultados

### 4.1. P\'endulo real

Como objeto de estudio tomaremos el p\'endulo no lineal amortiguado y forzado. Esto significa que la ecuaci\'on de movimiento del sistema depender\'a de la velocidad angular  $\dot{\theta}$  debido al rozamiento con constante  $q$  y no linealmente de la posici\'on, ya que para \'angulos grandes la aproximaci\'on  $\sin \theta \approx \theta$  no es v\'alida. Adicionalmente, incluiremos una fuerza impulsora.

Con esto la ecuaci\'on de movimiento queda:

$$\ddot{\theta} + q\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = F_0 \sin(\Omega_{ext} t) \quad (3)$$

Nuestro objetivo es analizar que esta ecuaci\'on basta para mostrar un comportamiento ca\'otico, y estudiaremos su naturaleza y transici\'on en funci\'on de los par\'ametros del sistema.

Tomaremos para los par\'ametros de la ecuaci\'on (3) los valores dados en la tabla (1) (valores tomados del *Giordano* [1]).

Par\'ametro	S\'imbolo	Valor
<b>Par\'ametros externos</b>		
Gravedad	$g$	$9,8 \text{ m/s}^2$
Longitud del p\'endulo	$l$	$9,8 \text{ m}$
Coeficiente de amortiguamiento	$q$	$0,5 \text{ s}^{-1}$
Amplitud de la fuerza impulsora	$F_0$	(var)
Frecuencia de la fuerza impulsora	$\Omega_{ext}$	$2/3 \text{ s}^{-1}$
Per\'odo de la fuerza impulsora	$T_{ext}$	$2\pi/\Omega_{ext}$
<b>Valores iniciales</b>		
Posici\'on inicial	$\theta_0$	$0,2 \text{ m}$
Velocidad inicial	$\omega_0$	$0 \text{ m/s}$
<b>Par\'ametros de la simulaci\'on</b>		
Paso de tiempo	$dt$	$T_{ext}/200$
Tiempo final	$t_f$	$20T_{ext}$
Diferencia en la condici\'on inicial	$d\theta(0)$	$10^{-6} \text{ m}$

Cuadro 1: Tabla de par\'ametros utilizados en la simulaci\'on del p\'endulo forzado.

#### 4.1.1. Exponente de Lyapunov

Para obtener mejores resultados, tomaremos un rango de posiciones iniciales  $\theta_0 \in [-0,5, 0,5]$  y estudiaremos el promedio de la diferencia entre las trayectorias,  $\Delta\theta = \sum_i \frac{\Delta\theta_i}{n}$ . Tras estudiar varios valores para el número de trayectorias promediadas, se observa que a partir de 5 condiciones iniciales distintas el resultado no se modifica significativamente.

Estudiamos varios comportamientos de trayectorias para diferentes valores de la fuerza impulsora, observándose resultados de orden, en los que las diferencias entre trayectorias disminuyen (figura (1)), y otros caóticos, en los que aumenta significativamente (figura (2)).

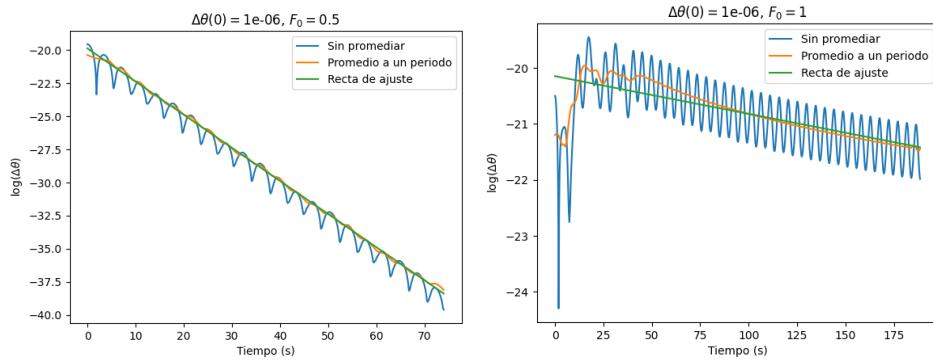


Figura 1: Comportamiento de dos condiciones iniciales para fuerzas impulsoras “bajas”. Se observa que la diferencia entre ambas trayectorias decrece con el tiempo.

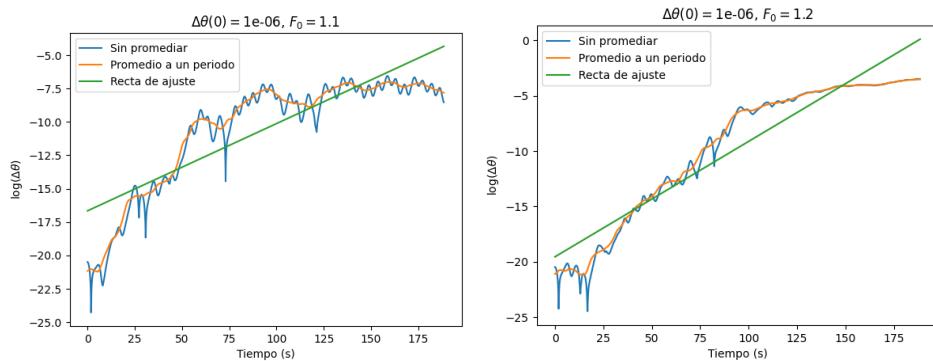


Figura 2: Comportamiento de dos condiciones iniciales para fuerzas impulsoras “altas”. El comportamiento es caótico ya que la diferencia entre las trayectorias aumenta.

Además, como se observa en la figura (1), el comportamiento de  $\Delta\theta$  en el régimen de orden presenta múltiples oscilaciones. Para atenuar su efecto en el cálculo del exponente de Lyapunov, trabajaremos con datos promediados a un período de la fuerza impulsora  $T_{ext}$ .

Se ha realizado el estudio del exponente de Lyapunov para distintas fuerzas impulsoras. Para calcular el exponente, se han seguido dos rutas distintas:

**Ajuste a una recta** Usando la librería `scipy.optimize`, se ajustan los datos para cada fuerza impulsora a una recta del tipo  $\log(\Delta\theta) = \lambda t + n$  por mínimos cuadrados. La pendiente de esta recta coincide aproximadamente con el exponente de Lyapunov.

**Valor medio** Se toman sólamente los valores inicial y final para evitar comportamientos extraños entre medias, y se calcula el exponente de Lyapunov como la pendiente media entre los extremos [3]:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \Delta\theta(t) - \log \Delta\theta(0)}{t} \quad (4)$$

En la figura (3) se puede observar la comparación entre ambos métodos de cálculo para  $\lambda$ . Por un lado, observamos que ambos métodos dan resultados similares, excepto en algunas regiones.

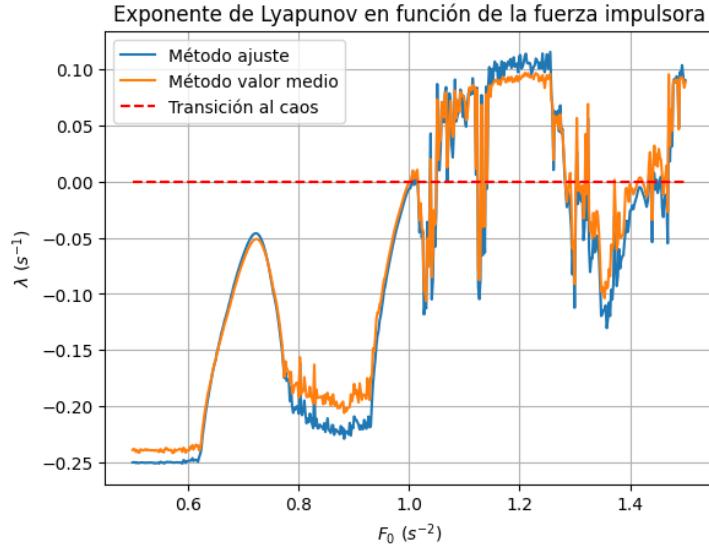


Figura 3: Exponente de Lyapunov en función de la amplitud de la fuerza impulsora.

El comportamiento esperado por el sistema es que al aumentar la fuerza impulsora, aumentará la amplitud de las oscilaciones del péndulo, por lo que el término no lineal tendrá mayor efecto para ángulos mayores, y por tanto fuerzas impulsoras mayores. Por tanto se esperaría una tendencia creciente entre la fuerza impulsora  $F_0$  y el exponente de Lyapunov  $\lambda$ .

Sin embargo, aunque se observa que el régimen caótico aparece al aumentar  $F_0$ , el exponente de Lyapunov en ocasiones decrece para valores mayores de  $F_0$ , llegando incluso a encontrarse islas de orden en torno a los valores de la fuerza de  $1,35 \text{ s}^{-2}$ .

#### 4.1.2. Secciones de Poincaré

Se estudian las secciones de Poincaré del péndulo real para distintos valores de la fuerza impulsora. Se observa claramente el fenómeno del doblado del periodo en la figura (4). Observamos que para  $F_0 = 1,4 \text{ s}^{-2}$ , se tiene un único valor en el espacio de fases, que se corresponde con un comportamiento de sincronización a un período. Para  $F_0 = 1,44 \text{ s}^{-2}$ , el período se duplica y se observan claramente dos puntos. Similarmente, para  $F_0 = 1,465 \text{ s}^{-2}$  se observan 16 puntos ya que el comportamiento es del tipo  $16T_{ext}$ .

Por último, para el caso  $F_0 = 1,2 \text{ s}^{-2}$ , que se encuentra en una región altamente caótica (recordar la figura (3)), la sección de Poincaré observada contiene gran cantidad de puntos distribuidos en un cierto patrón, conocido como *atractor extraño*.

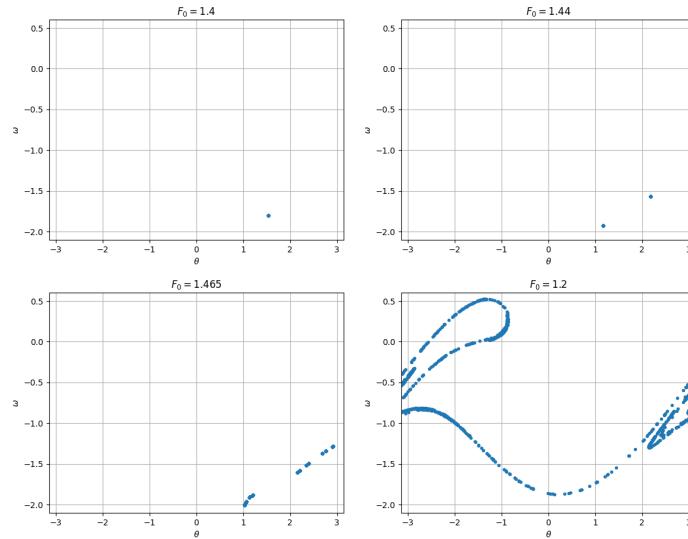


Figura 4: Secciones de Poincaré para distintos valores de la fuerza impulsora (medida en  $\text{s}^{-2}$ ).

#### 4.1.3. Diagrama de bifurcación

Los datos de doblado del período obtenidos en las secciones de Poincaré se representan en un diagrama de bifurcación (figura (5)), en el que se observan los diferentes ángulos en fase con la fuerza impulsora. Se observa como, a medida que aumenta la amplitud de la fuerza impulsora, el número de bifurcaciones aumenta, como cabe esperar.

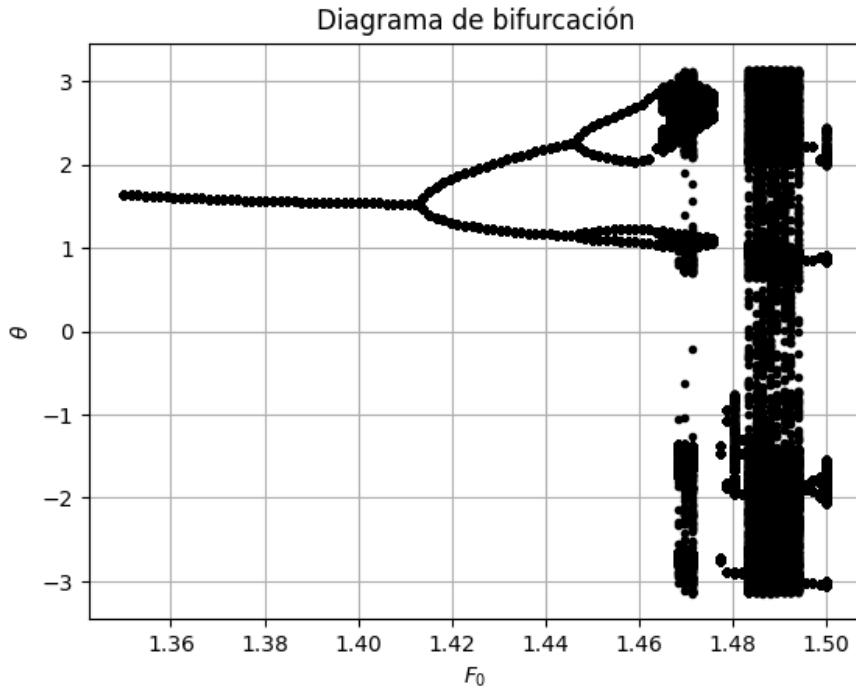


Figura 5: Diagrama de bifurcación del péndulo real para valores de  $F_0 \in [1,35, 1,5] s^{-2}$

Sin embargo, observamos que la longitud de los intervalos en los que se dobla el período decrece al aumentar el orden de la bifurcación. Describiremos este comportamiento con el siguiente ratio:

$$\delta_n = \frac{\Delta F_n}{\Delta F_{n+1}} = \frac{F_n - F_{n-1}}{F_{n+1} - F_n} \quad (5)$$

Como la longitud de los intervalos decrece, debe suceder que  $\delta_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Para los intervalos de período 2 y período 4 en este experimento, se obtiene un valor de  $\delta_1 \approx 2,13$ .

Continuamos estudiando el comportamiento caótico del sistema para distintas fuerzas impulsoras. Para ello ampliamos el diagrama de bifurcación a un mayor número de valores de  $F_0$ .

En la figura (6) observamos los resultados de este estudio. Se observa la parte anterior del diagrama, pero también se ve que aparece un comportamiento caótico para un rango de fuerzas en torno a  $F_0 = 1,2 \text{ s}^{-2}$ , que luego transiciona a una isla de orden ya vista en el diagrama de bifurcación ampliado (figura (5)).

Este comportamiento coincide con el observado en la figura (3), en el que se estudiaba el exponente de Lyapunov, por lo que ambos métodos devuelven los mismos resultados.

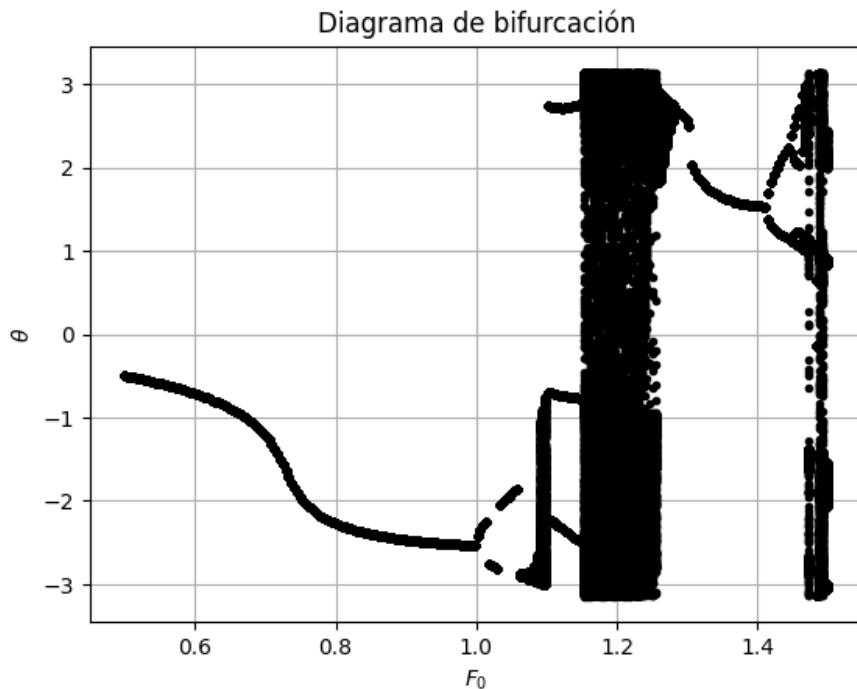


Figura 6: Diagrama de bifurcación del péndulo real para valores de  $F_0 \in [0,5, 1,5] \text{ s}^{-2}$ .

## 4.2. Péndulo paramétrico

Consideramos ahora un sistema en el que el pivote del péndulo es móvil. Consideramos además que este movimiento sobre el pivote está forzado por una fuerza impulsora sinusoidal [2], de manera que la ecuación de movimiento es similar a la del péndulo pero en la que un término depende de un parámetro (de aquí el nombre), el tiempo en este caso:

$$\ddot{\theta} + q\dot{\theta} + \frac{g(t)}{l} \sin \theta = 0 \quad (6)$$

La movilidad sobre el pivote supone una gravedad efectiva dada por:

$$g(t) = g_0 + g_1 \cos(\Omega_{ext}t) \quad (7)$$

Es importante añadir una fuerza impulsora que actúe sobre al ángulo del péndulo, ya que en caso contrario el rozamiento acabaría mermando la amplitud de las oscilaciones. La fuerza sobre el pivote no es suficiente ya que para menores ángulos tiene menos efecto. Añadiendo ambas fuerzas, la ecuación de movimiento quedaría:

$$\ddot{\theta} + q\dot{\theta} + \frac{g_0}{l}(1 + h \cos(\Omega_{ext}t)) \sin \theta = F_0 \sin(\Omega_{ext}t) \quad (8)$$

con  $h = g_1/g_0$ . Para estudiar únicamente el caos generado por la fuerza sobre el pivote, tomaremos valores muy pequeños de  $F_0$  (ver tabla (??)).

Se estudiarán las propiedades caóticas de este sistema para distintos valores del parámetro  $h$ . Nótese que el signo de  $h$  puede ser positivo o negativo, refiriéndose a si el movimiento del pivote actúa a favor o en contra de la gravedad, respectivamente.

### 4.2.1. Exponente de Lyapunov

Estudiaremos el exponente de Lyapunov para distintos valores del parámetro  $h$ . En la figura (7) se observan algunos de los resultados obtenidos empleando los métodos descritos previamente.

Como se observa en la primera gráfica, el comportamiento en cuanto a caos es sorprendentemente simétrico. Esto es inusual ya que el término  $1 + h \cos(\Omega_{ext}t)$  de la ecuación (8) sugiere una simetría en torno al número 1 en vez de respecto al 0.

Una repentina transición al caos sucede para valores de  $h$  entre 1,4 y 1,6. Obteniéndose exponentes de Lyapunov muy cercanos al 0 pero positivos para valores mayores de  $h$ . En la segunda gráfica se representa la continuación

del comportamiento anterior. Se observa una pronunciada oscilación en el exponente de Lyapunov para  $h \in [2,5, 3]$ .

Posteriormente se contrastarán estos valores con los obtenidos en los diagramas de bifurcación (véase sección 4.2.3).

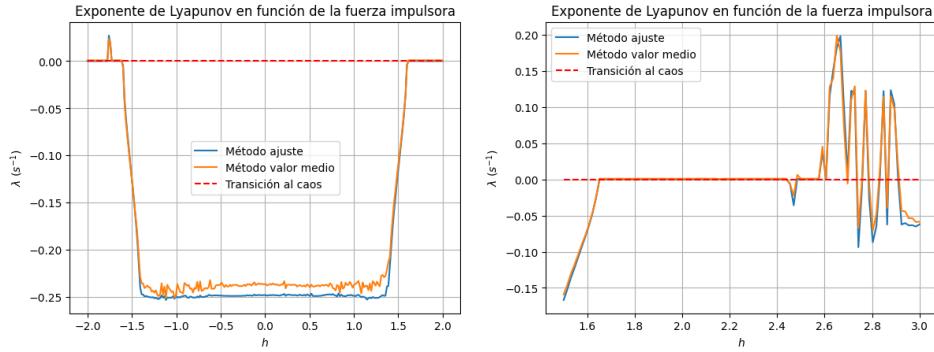


Figura 7: Exponente de Lyapunov para valores de  $h \in [-2, 2]$  y  $h \in [1,5, 3]$

#### 4.2.2. Secciones de Poincaré

Brevemente se comentarán los datos de diferentes secciones de Poincaré. Cabe notar que se puede usar el método de muestreo estocástico ya que hemos incluido la fuerza impulsora sobre el ángulo en el término  $F_0 \sin(\Omega_{ext} t)$  en la ecuación (8). De esta manera, esta fuerza impulsora sincronizará al sistema a su frecuencia, permitiendo tomar datos por el método de Poincaré.

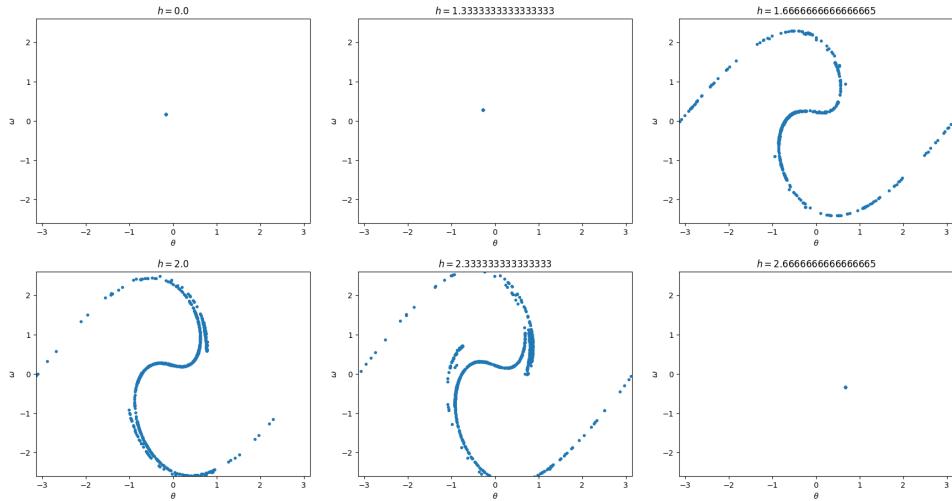


Figura 8: Secciones de Poincaré para valores en aumento de  $h$

En la figura (8) se observa el comportamiento para distintos valores de  $h$ . De nuevo aparece una región intermedia con caos para valores de  $h$  cercanos a 2, que posteriormente da lugar a una región de orden para valores más cercanos a 3.

Sin embargo, sólo se captan secciones con o bien un único punto en el diagrama, indicando sincronización con el período externo, o un comportamiento extraño. Este fenómeno quedará corroborado en el diagrama de bifurcación.

#### 4.2.3. Diagramas de bifurcación

En las figuras (9) (10) observamos los diagramas de bifurcación para distintos valores del parámetro  $h$ . Al igual que en el péndulo real, se observan comportamientos alternantes entre estabilidad y caos.

Reafirmando los resultados obtenidos con el exponente de Lyapunov, se observa un comportamiento simétrico para valores positivos y negativos de  $h$ , y una transición repentina al caos para  $h \approx 1,6$ .

Por otro lado, en la figura (10) observamos un comportamiento caótico mucho más marcado que lo que el exponente de Lyapunov sugiere (figura (7)). Esto demuestra que un exponente de Lyapunov pequeño pero positivo exhibe un comportamiento caótico muy marcado.

Además, las oscilaciones en torno a la recta  $\lambda = 0$  del exponente de Lyapunov se manifiestan en el diagrama de bifurcación, en el que aparecen pequeñas regiones de orden. También se observa la vuelta al orden a partir de valores de  $h \approx 2,6$ .

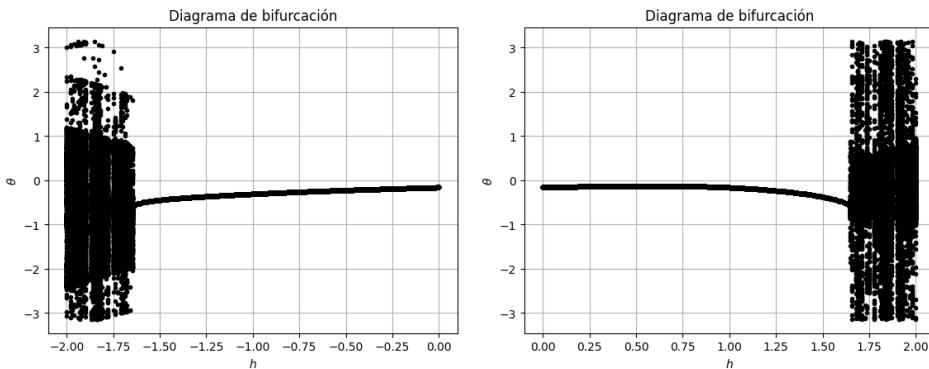


Figura 9: Diagrama de bifurcación del péndulo paramétrico para valores de  $h \in [-2, 2]$

Finalmente, cabe destacar que, al igual que en el péndulo real, la primera transición al caos no presenta un fenómeno apreciable de doblado del período (ver figura (6)), pero este fenómeno sí aparece para siguientes transiciones.

En el caso del péndulo paramétrico se observa este fenómeno ligeramente en torno a los valores  $h \approx 2,17$ ,  $h \approx 2,47$ .

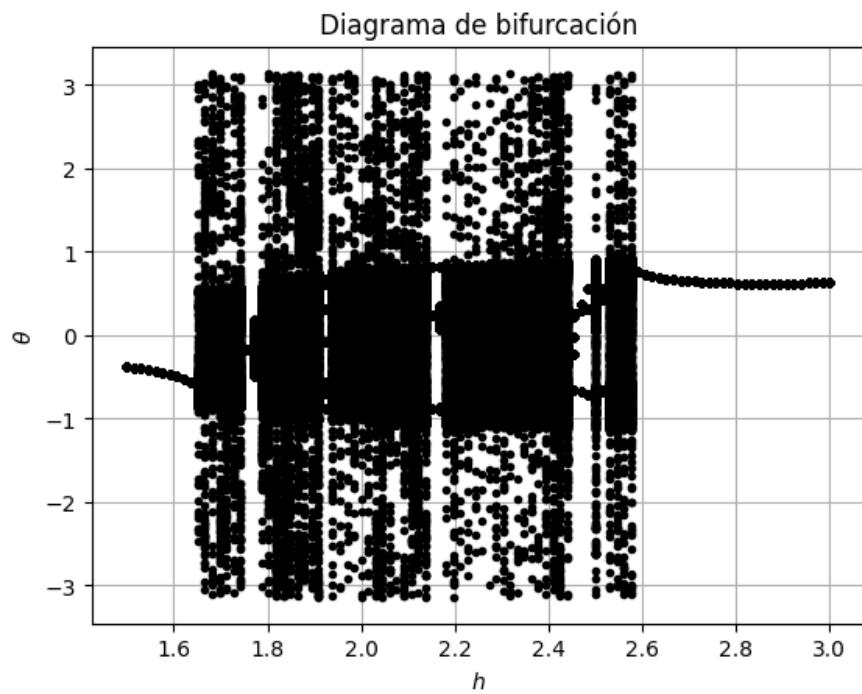


Figura 10: Diagrama de bifurcación del péndulo paramétrico para valores de  $h \in [1,5, 3]$

## 5. Conclusión

El comportamiento del péndulo real ha revelado un nivel de complejidad mucho mayor al esperado en este sistema. Por un lado, se han estudiado las transiciones al caos haciendo uso del exponente de Lyapunov, y se ha observado que existen islas de orden en el comportamiento caótico, de manera opuesta a lo que dice la intuición.

Este comportamiento ha sido contrastado con los diagramas de bifurcación, que además han permitido el estudio del fenómeno de doblado del período.

Los métodos numéricos empleados, en particular el método de Euler-Cromer, han demostrado ser adecuados para la integración de las ecuaciones de movimiento sin introducir errores significativos en la conservación de la energía.

El estudio del péndulo paramétrico ha revelado dinámicas aún más ricas. Se ha observado que la inclusión de un pivote móvil genera resultados inesperados, como una simetría en torno al valor de  $h = 0$ , y el retorno de fenómenos ya observados anteriormente, como la alternación entre orden y caos, y el doblado del período, aunque en pequeña escala.

Finalmente, se reafirma que el caos no solo vuelve impredecibles los sistemas, sino que *es* impredecible en sí mismo. Sin embargo, la existencia de patrones universales, como los descritos por el número de Feigenbaum, nos permite entrever que incluso dentro del aparente desorden subyacen estructuras matemáticas que organizan la dinámica del caos.

## Referencias

- [1] Giordano, Nakanishi. *Computational Physics*. Addison Wesley, 2006.
- [2] Massachusetts Institute of Technology. *Lecture Notes 6: Structural Dynamics*. <https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/84612/12-006j-fall-2006/contents/lecture-notes/lecnotes6.pdf>, consultado el 2 de marzo de 2025
- [3] Wikipedia contributors, *Lyapunov exponent* , Wikipedia, The Free Encyclopedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov\\_exponent](https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_exponent), consultado el 2 de marzo de 2025.