

# Los circuitos RLC como osciladores harmónicos: estudio de su acople, y de los fenómenos de resonancia y caos.

Saúl Díaz, Álvaro Castillo  
Universidad Autónoma de Madrid

25 de abril de 2025

## Resumen

En este proyecto se busca estudiar y entender los fenómenos de resonancia y caos que aparecen en los circuitos eléctricos. Se obtiene que el circuito RLC es un oscilador harmónico cuya curva de amplitudes al variar la frecuencia es una Lorentziana con un máximo cercano a la frecuencia natural y que se corresponde con la frecuencia de resonancia. Al acoplarle al RLC otro RLC con un tercer condensador, la curva de amplitudes es una combinación de Lorentzianas con distintas frecuencias naturales y con dos máximos, dos nuevas frecuencias de resonancia distintas de las naturales. Cuando se introduce un diodo semiconductor (en un RL-diodo), el circuito tiene según la frecuencia una respuesta no caótica y una caótica. La transición al caos se produce por medio del doblado del periodo.

## 1. Introducción

Un circuito eléctrico con condensador, inductor y resistencia, impulsado por un voltaje alterno se comporta como un oscilador harmónico. Estos circuitos pueden combinarse para dar lugar a fenómenos de oscilaciones acopladas, principalmente la resonancia en varias frecuencias de oscilación de la fuente. A mayores, si se incluye algún elemento con comportamiento no lineal al circuito, como un diodo, se producen fenómenos caóticos.<sup>1</sup>

En este proyecto se busca analizar y entender cómo se comporta un circuito eléctrico de corriente alterna en presencia de diferentes elementos electrónicos. Para la toma de medidas se ha empleado un osciloscopio *Tektronix TBS1052B-EDU*. El osciloscopio muestra la respuesta como una onda sinusoidal y proporciona directamente la amplitud de dicha onda. También permite comparar la onda de la fuente con la respuesta del circuito.

## 2. Circuito RLC

El circuito más sencillo a estudiar es el RLC simple (figura (1)). Aplicando las leyes de Kirchhoff al circuito, se obtiene la siguiente ecuación diferencial.<sup>2</sup>

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{V_0}{L}e^{-i\Omega t}$$

Al resolverla se obtiene como solución:

$$V(\Omega, t) = \frac{V_0}{LC}|G(\Omega)|e^{-i(\Omega t - \Phi(\Omega))} \quad (1)$$

En la que la función de la amplitud es:<sup>1</sup>

$$|G(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_n^2)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \quad (2)$$

Donde  $\omega_n^2 = 1/LC$  y  $\beta = R/2L$ . La función del desfase  $\Phi(\Omega)$  tiene como expresión:

$$\tan(\Phi(\Omega)) = \frac{-2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_n^2} \quad (3)$$

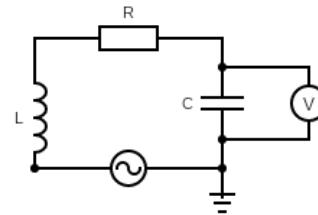


Figura 1: Representación esquemática de un circuito RLC con un voltaje alterno y con un osciloscopio conectado al condensador.

El circuito RLC tiene una única frecuencia de resonancia, para la cual la amplitud en la respuesta es máxima. La expresión para la frecuencia de resonancia es  $\omega_0 = \sqrt{\omega_n^2 - 2\beta^2}$ , pero se puede aproximar por  $\omega_0 \approx \omega_n$  si  $\beta \ll \omega_n$ . Así,  $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$ .

Para el circuito RLC, montado tal y como se muestra en la figura (1), el voltaje máximo en el condensador está dada por la expresión (2); así, se han tomado datos de la amplitud máxima para distintas frecuencias. Se tomaron como parámetros del circuito: resistencia de  $100 \pm 10\Omega$ , inductancia de  $1,0 \pm 0,1H$ , y capacidad de  $100 \pm 10nF$ , y amplitud de entrada de la fuente de  $10,4 \pm 0,1V$ .

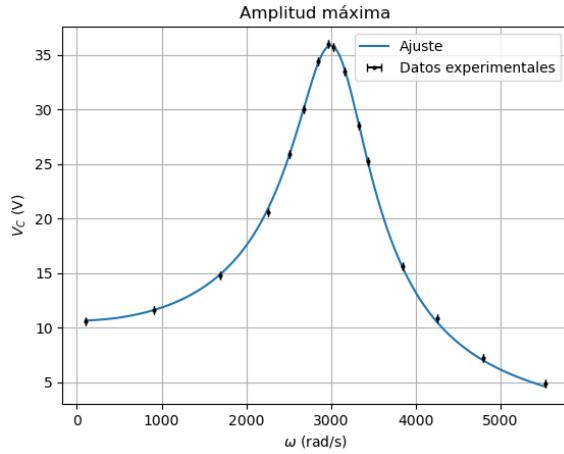


Figura 2: Datos experimentales de amplitud máxima medida por el osciloscopio con diferentes frecuencias de entrada de la fuente. En azul, la curva de ajuste de los datos a la ecuación (2).

La gráfica muestra cómo los datos experimentales coinciden con la ecuación (2), teniendo como resultado una curva conocida como Lorentziana.<sup>1</sup>

También se puede hacer la misma gráfica con el desfase entre la fuente y la respuesta.

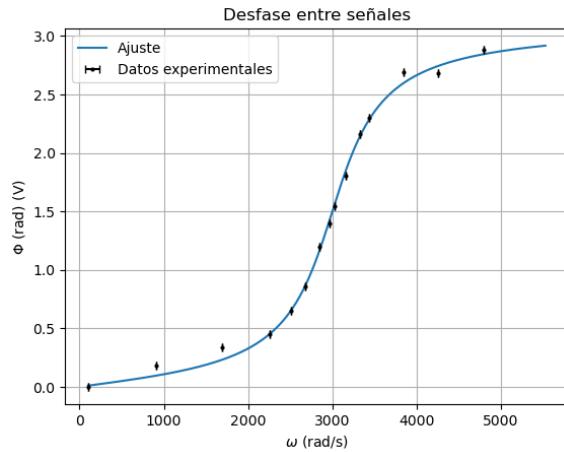


Figura 3: Datos experimentales de desfase medido por el osciloscopio con diferentes frecuencias de entrada de la fuente. En azul, la curva de ajuste de los datos a la ecuación (3).

Nuevamente, los datos ajustan correctamente a la predicción teórica dada por la expresión (3).

Los datos correspondientes a frecuencias altas y bajas, con desfases de 0 y  $\pi$  grados, se desvían ligeramente. Esto probablemente se deba a la forma de obtener los datos de desfase; ésta fue calculando la distancia entre dos picos sucesivos de las ondas fuente y respuesta mostradas en el osciloscopio. Como estos picos se determinaban visualmente, los datos obtenidos, especialmente en los regímenes de alta y baja frecuencia están algo desviados.

La curva del voltaje máximo presenta un pico en una frecuencia de  $3000 \pm 10s^{-1}$ . De igual modo, la derivada del desfase también presenta un máximo en  $\omega = 3000 \pm 10s^{-1}$ . Según la teoría este valor debe coincidir con la frecuencia de resonancia del sistema, la cual es  $3100 \pm 300s^{-1}$ ; precisamente así sucede.

Otro estudio relevante sobre el circuito RLC es ver la dependencia de la frecuencia de resonancia del circuito con los parámetros de resistencia, inductancia y capacidad. Para obtener dicha frecuencia, introducimos en la fuente, en lugar de un voltaje alterno, una onda cuadrada. Esta onda es una suma de todos los múltiplos impares de la frecuencia de entrada, pero la respuesta sobre el circuito es la de una onda amortiguada con exactamente la frecuencia de resonancia (ver anexo). Así, podemos obtener la frecuencia de resonancia para distintas inductancias del circuito sin necesidad de tomar gran cantidad de datos.<sup>3</sup>

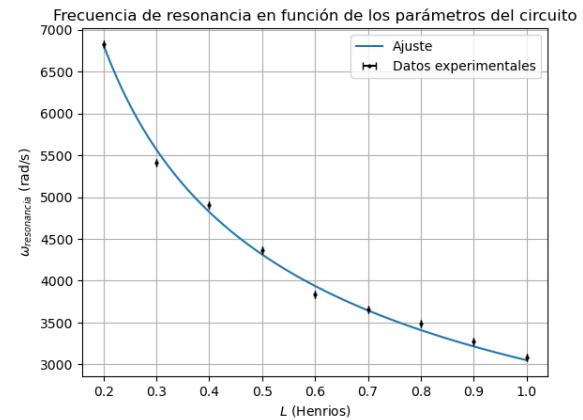


Figura 4: Datos experimentales de frecuencia de resonancia medida por el osciloscopio con diferentes inductancias del circuito. En azul, la curva de ajuste de los datos a la expresión  $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$ .

Los valores de la frecuencia se ajustan correctamente a la ecuación (3). A mayores, del ajuste<sup>1</sup> se puede obtener la capacidad, que es un parámetro constante. Para esa curva, la capacidad es de

<sup>1</sup>Para hacer todos los ajustes se usó la librería de *Python* llamada *scipy* en concreto la función *curve\_fit*.

$107 \pm 1nF$ , la cual coincide con la capacidad del circuito experimental de  $100 \pm 10nF$ .

### 3. Acople capacitivo

Teniendo este circuito resuelto, se puede dar el salto a dos circuitos RLC acoplados por un tercer condensador (figura (5)). De resolver las de este circuito, se obtienen soluciones oscilatorias con la misma frecuencia que la fuente pero desfasadas y con una amplitud distinta. Este circuito tiene dos frecuencias naturales,  $\omega_{n,1,2}^2 = 1/LC + 1/LC_3 \pm 1/LC_3$ . Las amplitudes en cada condensador son combinaciones de Lorentzianas:<sup>2</sup>

$$\mathcal{A}_1 = \frac{V_0}{2LC} \sqrt{|G_1|^2 + |G_2|^2 + 2|G_1||G_2| \cos(\Delta\Phi)} \quad (4)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{V_0}{2LC} \sqrt{|G_1|^2 + |G_2|^2 - 2|G_1||G_2| \cos(\Delta\Phi)} \quad (5)$$

$G_1$  y  $G_2$  son curvas dadas por (2) en las que  $\beta = R/2L$  y  $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ ;  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  se obtienen de (3), usando la correspondiente frecuencia natural.

Los desfases del potencial en cada condensador son:

$$\tan(\Theta_1) = \frac{|G_1|\sin(\Phi_1) + |G_2|\sin(\Phi_2)}{|G_1|\cos(\Phi_1) + |G_2|\cos(\Phi_2)} \quad (6)$$

$$\tan(\Theta_2) = \frac{-|G_1|\sin(\Phi_1) + |G_2|\sin(\Phi_2)}{-|G_1|\cos(\Phi_1) + |G_2|\cos(\Phi_2)} \quad (7)$$

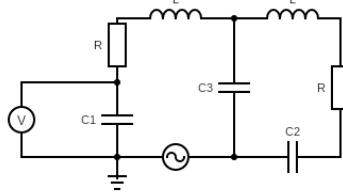


Figura 5: Representación esquemática de dos circuitos RLC acoplados con un osciloscopio midiendo en uno de los condensadores.

Para este circuito se realizó un cambio en la obtención de datos. Esta vez se extrajo del osciloscopio la función completa, es decir, varios períodos completos de la onda sinusoidal. A mayores, como el circuito está compuesto por dos osciladores RLC, se tomaron las medidas de voltaje en ambos condensadores.

Como antes, se busca estudiar la amplitud del potencial para distintas frecuencias. En este circuito conviene medir el voltaje tanto en el condensador del circuito de la fuente (C1) como en el

condensador del circuito acoplado (C2). Se tomó la media de los picos que tiene la función sinusoidal, para posteriormente representarla en función de la frecuencia.<sup>4</sup> Se tomaron como parámetros del circuito, inductancias, resistencias y capacidades idénticas en cada RLC, valiendo  $L = 1,0 \pm 0,1H$ ,  $R = 1000 \pm 10\Omega$  y  $C = 100 \pm 10nF$ ; la capacidad C3 del condensador de acople es  $50 \pm 10nF$ , mientras que  $V_0 = 10,1 \pm 0,1V$ .

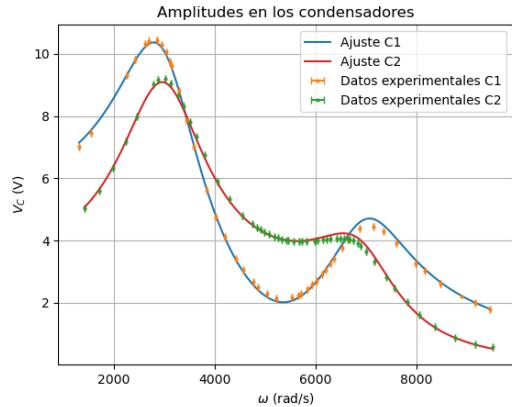


Figura 6: Datos experimentales de amplitud medida por el osciloscopio con diferentes frecuencias de entrada de la fuente. Los datos en C1 y su ajuste se corresponden a tomar las medidas en el condensador que está en el mismo circuito que la fuente. Los datos de C2 son los que se toman en el condensador del circuito acoplado. En azul, el ajuste a la expresión (4); en rojo el ajuste a la expresión (5).

La gráfica muestra cómo los datos experimentales coinciden con la predicción teórica dada por las expresiones (4) y (5). En la gráfica se aprecian dos máximos, que son las dos frecuencias de resonancia del circuito. Estas dos curvas son una combinación de dos Lorentzianas, cada una correspondiente a una frecuencia natural del circuito.

La curva de ajuste tiene, para el circuito con medición en C1 una resistencia de  $1750 \pm 10\Omega$ . Esta resistencia es notablemente mayor que los  $1000 \pm 10\Omega$  que ponemos al circuito. Esto se debe a que el osciloscopio tiene una resistencia propia; cabe destacar que la resistencia del ajuste es la resistencia efectiva del circuito completo, incluyendo las dos resistencias de  $1000 \pm 10\Omega$  y la del osciloscopio. Por otro lado la resistencia del circuito cuando se mide en C2 es  $1840 \pm 10\Omega$ .

Los picos de las curvas de medición en C1 y C2 son las dos frecuencias de resonancia del circuito. Cuando se mide en C1, las frecuencias de resonancia son  $w_1 = 2767 \pm 5s^{-1}$  y  $w_2 = 7120 \pm 5s^{-1}$ , mientras que cuando se mide en C2,  $w_1 = 2898 \pm 5s^{-1}$  y  $w_2 = 6409 \pm 5s^{-1}$ . A diferencia del circuito RLC, estas frecuencias no se pueden aproximar a la expresión analítica de las frecuencias naturales del

circuito. Además, las frecuencias de resonancia en cada condensador tampoco son iguales (pero sí cercanas), según dónde se mida.

Por otro lado, también se puede comparar el desfase que hay en la onda respuesta, tanto en C1 como en C2.

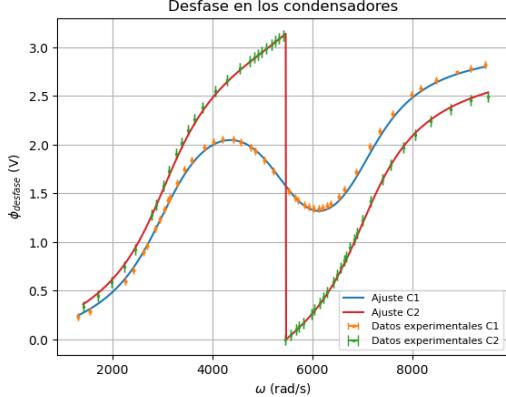


Figura 7: Datos experimentales de desfase (módulo  $\pi$ ) entre fuente y respuesta medida por el osciloscopio con diferentes frecuencias de entrada de la fuente. Los datos en C1 y su ajuste se corresponden a tomar las medidas en el condensador que está en el mismo circuito que la fuente. Los datos de C2 son los que se toman en el condensador del circuito acoplado. En azul, el ajuste a la expresión (6); en rojo el ajuste a la expresión (7).

Los datos vuelven a coincidir con la predicción teórica. A diferencia del circuito RLC, la gráfica del desfase no proporciona una información directa acerca de las frecuencias de resonancia. Además, el comportamiento del desfase en un circuito y en otro es notablemente distinto, mientras que la amplitud tiene una curva similar.

Un estudio más que conviene hacer sobre este circuito es ver cómo cambian las frecuencias naturales en función de las capacidades del circuito. Para obtener las frecuencias naturales con el osciloscopio, se introdujo una onda cuadrada con la fuente; la respuesta del circuito es una combinación de dos ondas con las frecuencias de resonancia del circuito. Usando la funcionalidad del osciloscopio de hacer la transformada de fourier de la onda, se obtiene una distribución de frecuencias que coincide con la curva (5) (para mediciones en C2).

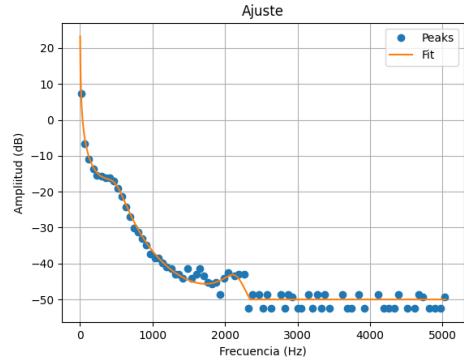


Figura 8: Picos de la transformada de Fourier hecha por el osciloscopio. El osciloscopio mide la respuesta en C2 a un potencial cuadrado cuando el circuito tiene  $L = 1,0 \pm 0,1H$ ,  $R = 1000 \pm 10\Omega$ ,  $C = 100 \pm 10nF$  y  $C_3 = 50 \pm 10nF$ . El fit es el ajuste de los picos a la ecuación (5).

Del ajuste a esa curva, se obtienen los valores de las frecuencias naturales del circuito. Su expresión teórica es:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_3}} \quad (9)$$

Con esto, se pueden estudiar las frecuencias naturales del circuito en función de los parámetros.

Por un lado, se varía la capacidad del condensador de acople; se toma  $L = 1,0 \pm 0,1H$ ,  $R = 1000 \pm 10\Omega$ ,  $C = 100 \pm 10nF$ .

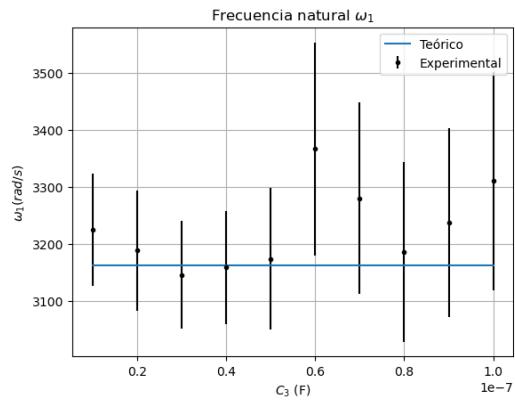


Figura 9: Frecuencia natural  $\omega_1$  del circuito para diferentes capacidades en el condensador de acople, con  $L = 1,0 \pm 0,1H$ ,  $R = 1000 \pm 10\Omega$ ,  $C = 100 \pm 10nF$ . En azul la curva teórica de la ecuación (8).

Como es de esperar,  $\omega_1$  es constante, puesto que no depende de la capacidad de acople. La pequeña variación que se da en los datos pone de manifiesto que el método de obtención de la frecuencia natural, por tener dos ajustes involucrados, es algo impreciso.

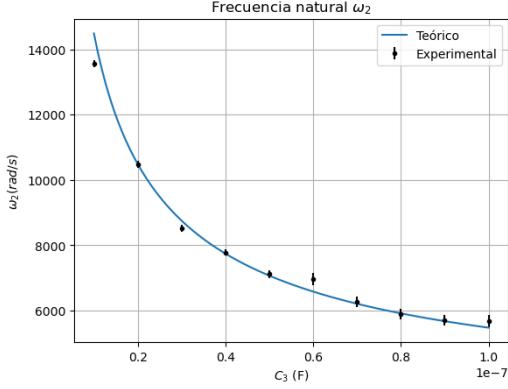


Figura 10: Frecuencia natural  $\omega_2$  del circuito para diferentes capacidades en el condensador de acople, con  $L = 1,0 \pm 0,1H$ ,  $R = 1000 \pm 10\Omega$ ,  $C = 100 \pm 10nF$ . En azul la curva teórica de la ecuación (9).

Nuevamente los datos experimentales coinciden con la predicción teórica dada por la ecuación (9). Algunos están ligeramente desviados por el método de obtención de las frecuencias.

Por otro lado, se varían las capacidades de los circuitos RLC, pero manteniéndolas idénticas. Como parámetros del circuito,  $L = 1,0 \pm 0,1H$ ,  $R = 1000 \pm 10\Omega$ ,  $C_3 = 50 \pm 10nF$ .

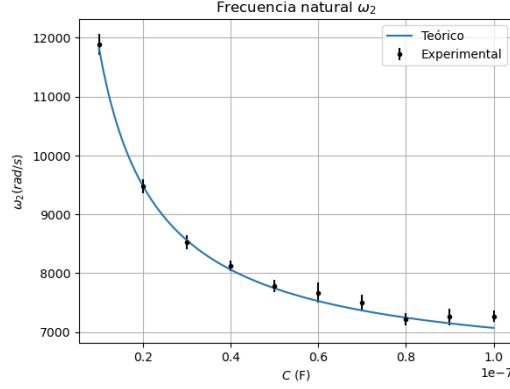


Figura 12: Frecuencia natural  $\omega_2$  del circuito para diferentes capacidades en los circuitos RLC, con  $L = 1,0 \pm 0,1H$ ,  $R = 1000 \pm 10\Omega$ ,  $C_3 = 50 \pm 10nF$ . En azul la curva teórica de la ecuación (9).

Los datos experimentales coinciden correctamente con las expresiones (8) y (9). Ambas frecuencias naturales tienen un comportamiento cualitativamente igual.

#### 4. RL-Diodo

El tercer circuito a estudiar en este trabajo es el RL-diodo (figura (13)). El diodo es un semiconductor que hace que la corriente circule sólo en un sentido. La ecuación diferencial del circuito se puede expresar mediante la función de Heaviside<sup>5</sup>

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V_0}{L}e^{-i\Omega t}H(V_0e^{-i\Omega t}) \quad (10)$$

donde  $H(x) = 1$  si  $x > 0$  y  $H(x) = 0$  si  $x < 0$ . Esta ecuación hace que el circuito tenga un comportamiento no lineal, y por tanto aparezcan fenómenos típicos del caos.

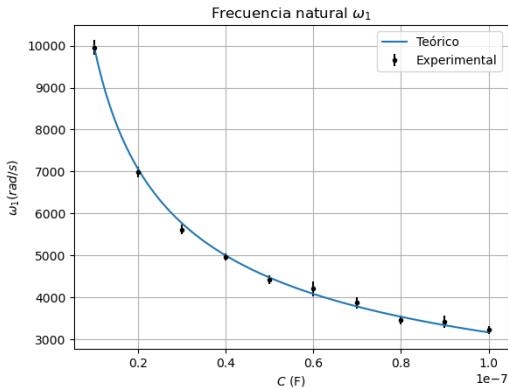


Figura 11: Frecuencia natural  $\omega_1$  del circuito para diferentes capacidades en los circuitos RLC, con  $L = 1,0 \pm 0,1H$ ,  $R = 1000 \pm 10\Omega$ ,  $C_3 = 50 \pm 10nF$ . En azul la curva teórica de la ecuación (8).

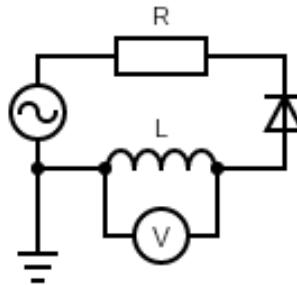


Figura 13: Representación esquemática de un circuito RL-diodo con un osciloscopio midiendo sobre el inductor.

Este sistema en particular, no tiene comportamiento caótico en todas las situaciones. Para fre-

cuencias de en torno a 100 kHz, la oscilación respuesta en el circuito es una onda con la misma frecuencia que la fuente. Al aumentar la frecuencia, se produce un doblado del periodo, y la onda respuesta realiza dos periodos por cada periodo de la fuente. Si se siguen aumentando las frecuencias, se producen sucesivos doblados del periodo, hasta llegar al régimen caótico.<sup>6</sup>

Para observar este fenómeno se usan las secciones de Poincaré y el diagrama de bifurcación. Las secciones de Poincaré, para una frecuencia determinada de la fuente, son los valores de potencial que se dan en los instantes de tiempo que son múltiplos del periodo de la fuente (o lo que es equivalente, cuando el potencial en la fuente es cero). Al representar las secciones de Poincaré del circuito para diferentes frecuencias, se obtiene el diagrama de bifurcación.

Se obtuvo del osciloscopio la función de entrada y la respuesta del circuito en la resistencia para unos parámetros de  $R = 200 \pm 10\Omega$  (más la resistencia intrínseca del osciloscopio) y  $L = 2,0 \pm 0,1mH$ . De esos datos se obtienen las secciones de Poincaré al variar la frecuencia de la fuente.

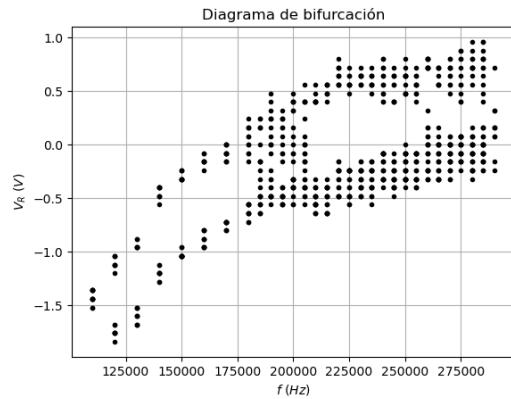


Figura 14: Diagrama de bifurcación del circuito RL-diodo, cuyos parámetros son  $R = 200 \pm 10\Omega$  (más la resistencia intrínseca del osciloscopio) y  $L = 2,0 \pm 0,1mH$ . Los puntos son las secciones de Poincaré para distintas frecuencias de entrada en el osciloscopio

El diagrama muestra para cada frecuencia de la fuente cuáles son los potenciales en los instantes de tiempo que coinciden con el periodo de la fuente oscilatoria. Al inicio solo hay un periodo, el cual se duplica hasta llegar al caos. El aumento necesario en la frecuencia para que se produzca un doblado es sucesivamente menor; esto explica que no se pueda apreciar entre dos y cuatro periodos y del primer doblado se pase directamente al régimen caótico. El régimen caótico a partir de 180 kHz se plasma en que hay múltiples potenciales distintos en las secciones de Poincaré.

Para entender mejor la diferencia entre los com-

portamientos caótico y no caótico, conviene estudiar el espacio de fases y la sección de Poincaré para una frecuencia del régimen no caótico.

La señal que se registra en el osciloscopio de la fuente y la respuesta es, para una frecuencia de  $110 \pm 5\text{kHz}$ :

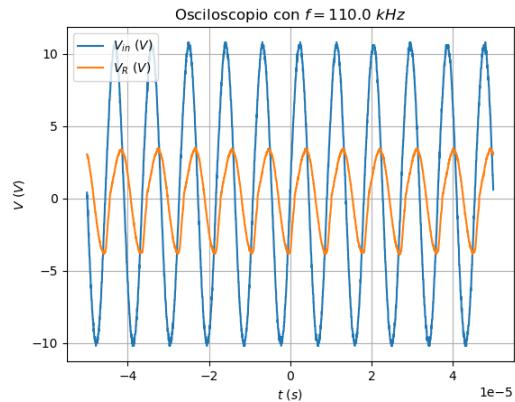


Figura 15: Medidas del osciloscopio para el circuito RL-diodo con parámetros:  $R = 200 \pm 10\Omega$  (más la resistencia intrínseca del osciloscopio) y  $L = 2,0 \pm 0,1mH$  y  $f = 110 \pm 5\text{kHz}$ . En azul la onda de entrada de la fuente; en naranja la respuesta del circuito.

La respuesta del osciloscopio vista en (15) es claramente periódica y tiene el mismo período que la señal de entrada.

En el espacio de fases se representa el potencial en la resistencia frente al potencial en la fuente

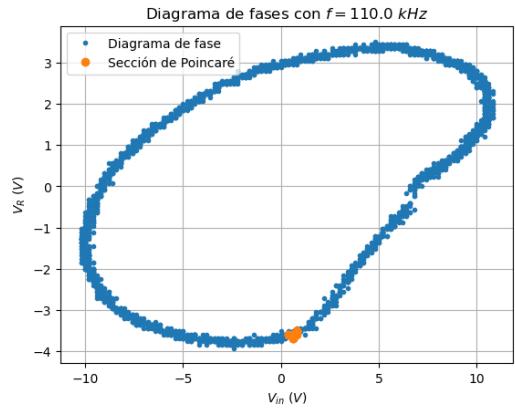


Figura 16: Diagrama de fases y sección de Poincaré del circuito RL-diodo, cuyos parámetros son  $R = 200 \pm 10\Omega$  (más la resistencia intrínseca del osciloscopio) y  $L = 2,0 \pm 0,1mH$  y  $f = 110 \pm 5\text{kHz}$ . En el diagrama de fases se pinta el potencial en la fuente frente al potencial en la resistencia. En naranja las secciones de Poincaré

El diagrama de fases muestra cómo el circuito tiene un comportamiento periódico y estable. Además, las secciones de Poincaré están en el mismo

sitio, lo que demuestra que el comportamiento es no caótico.

En cambio, la respuesta del circuito a una frecuencia de  $200 \pm 5\text{kHz}$  es:

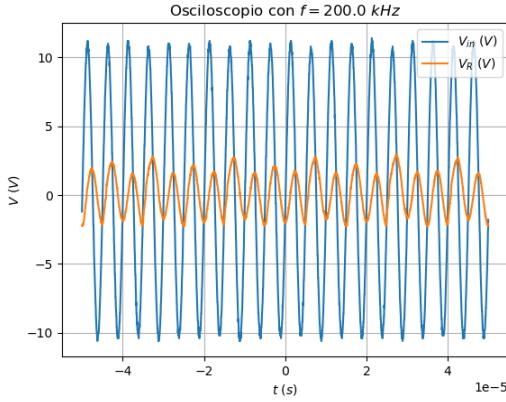


Figura 17: Medidas del osciloscopio para el circuito RL-diodo con parámetros:  $R = 200 \pm 10\Omega$  (más la resistencia intrínseca del osciloscopio) y  $L = 2,0 \pm 0,1\text{mH}$  y  $f = 200 \pm 5\text{kHz}$ . En azul la onda de entrada; en naranja la respuesta del circuito.

En esta frecuencia la respuesta del circuito ya es caótica. La sección de Poincaré es:

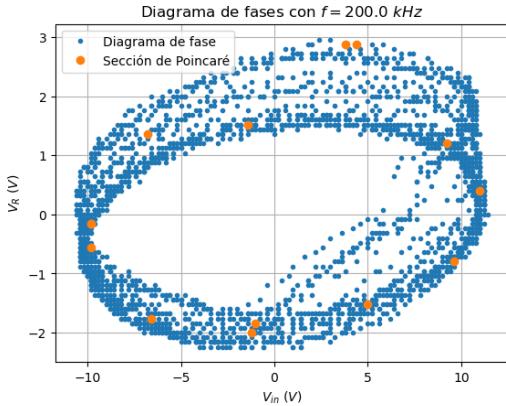


Figura 18: Diagrama de fases y sección de Poincaré del circuito RL-diodo, cuyos parámetros son  $R = 200 \pm 10\Omega$  (más la resistencia intrínseca del osciloscopio) y  $L = 2,0 \pm 0,1\text{mH}$  y  $f = 200 \pm 5\text{kHz}$ . En el diagrama de fases se pinta el potencial en la fuente frente al potencial en la resistencia. En naranja las secciones de Poincaré

En este caso no hay un comportamiento periódico; el diagrama de fase nunca volvería al punto de partida. Además, las secciones de Poincaré están en lugares distintos del espacio de fases, lo que pone de manifiesto el comportamiento caótico.

## 5. Conclusión

El estudio del circuito RLC simple muestra cómo se comporta como un oscilador harmónico forzado. La curva de amplitudes del potencial medido en el condensador es una Lorentziana, con un pico en la frecuencia de resonancia del circuito; la resonancia hace que el potencial respuesta aumente significativamente, siendo incluso tres veces mayor que la fuente. Esta frecuencia de resonancia, para  $\beta \ll \omega_n$  coincide con la frecuencia natural del circuito  $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$ . La derivada del desfase entre las señales presenta también un máximo en la misma frecuencia.

Al acoplar a un circuito RLC otro circuito idéntico en paralelo mediante un tercer condensador, se combinan los efectos de ambos osciladores. Ahora el circuito tiene dos frecuencias naturales, cuyos comportamientos se han comprobado correctamente por medio de la respuesta del circuito a ondas de entrada cuadradas. A mayores, el nuevo circuito tiene una función de amplitud que es una combinación de dos Lorentzianas, con sus respectivas frecuencias naturales. Esta curva ahora tiene dos frecuencias de resonancia, dos máximos, los cuales son distintos según si se mide en el circuito de la fuente o en el acoplado; estas frecuencias de resonancia tampoco coinciden con las frecuencias naturales del circuito.

Cuando se sustituye en el circuito RLC el condensador por un diodo (obteniendo el RL-diodo), aparecen fenómenos caóticos por la no linealidad del semiconductor. En este circuito hay una transición de comportamiento de régimen no caótico a régimen caótico por medio del doblado del periodo. Las secciones de Poincaré han plasmado esta dualidad de comportamientos. El diagrama de fases cerrado para una frecuencia baja muestra el régimen no caótico, mientras que el diagrama de fases a frecuencia más alta muestra que el circuito pasa a tener comportamiento caótico.

## Referencias

- [1] J. R. Taylor, *Classical Mechanics*, University Science Books, 2005.
- [2] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed., Pearson, 2013.
- [3] A. P. French. *Vibrations and Waves* (The M.I.T. Introductory Physics Series). W. W. Norton & Company, New York, 1971.
- [4] M. E. J. Newman, *Computational Physics*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012.

- [5] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 8th ed., McGraw-Hill, 2012.
- [6] N. J. Giordano y H. Nakanishi, *Computational Physics*, 2nd ed., Pearson Prentice Hall, 2005.
- [7] J. R. Reitz, F. J. Milford y R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4th ed., Addison-Wesley, 1993.
- [8] G. C. King, *Vibrations and Waves*, 2nd ed., Wiley, 2009.
- [9] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Pergamon Press, 1975.

## Anexo

### Ecuaciones del circuito RLC-acoplado

Esta sección detalla la teoría de cómo se llega a las ecuaciones del circuito RLC-acoplado (figura (5)). Aplicando la ley de Kirchoff para los nodos, e integrando, obtenemos que:

$$q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) = q_1(0) + q_2(0) + q_3(0) \equiv q \quad (11)$$

Esta ecuación implica la conservación de la carga total en los condensadores, y por tanto podemos eliminar la dependencia en  $q_3$ .

Aplicando las leyes de Kirchoff para las mallas junto con la última ecuación, y posteriormente dividiendo entre las inductancias, obtenemos:

$$\ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{L_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) q_1 + \frac{1}{L_1 C_3} q_2 = \frac{q}{L_1 C_3} + \frac{V_0}{L_1} e^{-i\Omega t} \quad (12)$$

$$\ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{L_2} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) q_2 + \frac{1}{L_2 C_3} q_1 = \frac{q}{L_2 C_3} \quad (13)$$

Expresado en forma matricial, queda el sistema:

$$\hat{M} \ddot{\vec{q}} + \hat{C} \dot{\vec{q}} + \hat{K} \vec{q} = \vec{\xi} + \vec{V}(t) \quad (14)$$

donde  $\hat{M} = \hat{1}$ ,  $\hat{C} = \begin{pmatrix} R_1/L_1 & 0 \\ 0 & R_2/L_2 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) & \frac{1}{L_1 C_3} \\ \frac{1}{L_2 C_3} & \frac{1}{L_2} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\xi} = q \begin{pmatrix} 1/L_1 C_3 \\ 1/L_2 C_3 \end{pmatrix}$ , y  $\vec{V}(t) = \frac{1}{L_1} \begin{pmatrix} V_0 e^{-i\Omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Imponiendo la condición  $\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2}$ , la matriz  $\hat{C}$  es proporcional a la matriz  $\hat{M}$ , y bastará diagonalizar la matriz  $\hat{K}$  para diagonalizar el sistema. Las frecuencias de los modos normales obtenidas son:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2}{2} + bc} \quad (15)$$

Los modos normales tienen forma:  $\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_1^2}{\sqrt{\omega_1^4+c^2}} & \frac{\omega_2^2}{\sqrt{\omega_2^4+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{\omega_1^4+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{\omega_2^4+c^2}} \end{pmatrix}$ . El nuevo sistema queda:

$$\ddot{\vec{Q}} + \frac{R_1}{L_1} \dot{\vec{Q}} + \hat{\omega}^2 \vec{Q} = \hat{A}^T \vec{\xi} + \hat{A}^T \vec{V}(t) \quad (16)$$

En esta práctica se estudia el caso simétrico, que cumple:  $L_1 = L_2 = L$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$ :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{LC} + \frac{1}{LC_3} \mp \frac{1}{LC_3} \quad (17)$$

con modos normales  $\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Las ecuaciones para los modos son:

$$\ddot{Q}_\alpha + \frac{R}{L} \dot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = \frac{V_0}{L\sqrt{2}} e^{-i\Omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{q}{LC_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

que son ecuaciones de oscilador armónico amortiguado y forzado con  $\omega_{n,1,2}^2 = 1/LC + 1/LC_3 \pm 1/LC_3$ ,  $\beta_{1,2} = R/2L$ . Por tanto las soluciones a esta ecuación serán similares al caso de acople inductivo: ondas de misma frecuencia que la señal de entrada pero con ciertas amplitudes y desfases.

Las amplitudes y los desfases de las funciones de la carga en los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  son:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{V_0}{2L} \sqrt{|G_1(\Omega)|^2 + |G_2(\Omega)|^2 + 2|G_1(\Omega)||G_2(\Omega)| \cos(\Phi_1(\Omega) - \Phi_2(\Omega))} \quad (19)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{V_0}{2L} \sqrt{|G_1(\Omega)|^2 + |G_2(\Omega)|^2 - 2|G_1(\Omega)||G_2(\Omega)| \cos(\Phi_1(\Omega) - \Phi_2(\Omega))} \quad (20)$$

$$\tan(\Theta_1(\Omega)) = \frac{|G_1(\Omega)| \sin(\Phi_1(\Omega)) + |G_2(\Omega)| \sin(\Phi_2(\Omega))}{|G_1(\Omega)| \cos(\Phi_1(\Omega)) + |G_2(\Omega)| \cos(\Phi_2(\Omega))} \quad (21)$$

$$\tan(\Theta_2(\Omega)) = \frac{-|G_1(\Omega)| \sin(\Phi_1(\Omega)) + |G_2(\Omega)| \sin(\Phi_2(\Omega))}{-|G_1(\Omega)| \cos(\Phi_1(\Omega)) + |G_2(\Omega)| \cos(\Phi_2(\Omega))} \quad (22)$$

Adicionalmente, aparecen términos de corriente continua correspondientes a la solución inhólogénea del otro término, pero se desprecian:

$$\mathcal{V}_1 = -q \frac{C}{(C_3 + 2C)} \quad (23)$$

$$\mathcal{V}_2 = q \frac{C}{(C_3 + 2C)} \quad (24)$$

### Respuesta del circuito RLC a una onda cuadrada

Ahora estudiamos qué sucede al introducir como onda impulsora una onda cuadrada en el circuito RLC:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{V_0}{L}S(t, \Omega) \quad (25)$$

donde  $S(t, \Omega)$  es la función escalón:  $S(t, \Omega) = \begin{cases} 1, & t \bmod \frac{2\pi}{\Omega} < \frac{\pi}{\Omega} \\ -1, & t \bmod \frac{2\pi}{\Omega} > \frac{\pi}{\Omega} \end{cases}$

Se puede descomponer esta onda en una serie de Fourier de manera que:<sup>5</sup>

$$H(t, \Omega) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\Omega t)}{2n+1} \quad (26)$$

La respuesta del sistema será la suma ponderada de las respuestas a cada onda:

$$q(\Omega, t) = \frac{4V_0}{\pi L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|G((2n+1)\Omega)|}{2n+1} \sin((2n+1)\Omega t - \Phi((2n+1)\Omega)) \quad (27)$$

Se observa que los coeficientes de amplitud del seno son proporcionales a una lorentziana. Para una frecuencia impulsora  $\Omega$  suficientemente baja, se cubrirá un rango de frecuencias adecuado  $(2n+1)\Omega$ , de manera que alguna será próxima a la frecuencia de resonancia. Si esto sucede para un valor de  $n$  todavía bajo, esta frecuencia será la que domine la onda resultante, y por tanto, al medirla, se hallará la frecuencia de resonancia.

### Respuesta del circuito RLC acoplado a una onda cuadrada

Ahora estudiaremos la transformada de Fourier de la señal en los condensadores del circuito acoplado cuando la entrada es una onda cuadrada. Usando la descomposición en serie de Fourier (ecuación (26)), se usan las respuestas a cada frecuencia sinusoidal calculadas anteriormente, de manera que la carga es:

$$q_j(\Omega, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_j(\Omega_n)}{2n+1} \sin(\Omega_n t - \Theta_j(\Omega_n)) \quad (28)$$

donde  $\Omega_n = (2n+1)\Omega$ . Realizando la transformada de Fourier, como los términos de amplitud y desfase son funciones de la frecuencia y no del tiempo:

$$\tilde{q}_j(\omega) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_j(\Omega_n)}{2n+1} \frac{e^{i\Theta_j(\Omega_n)}\delta(\omega - \Omega_n) - e^{-i\Theta_j(\Omega_n)}\delta(\omega + \Omega_n)}{2i} \quad (29)$$

donde  $\delta(x)$  representa la delta de Dirac. Se obtiene esta distribución de frecuencias ya que se considera que la entrada está compuesta de ondas seno puras, totalmente definidas en frecuencia.

En cambio, si consideramos que existe una incertidumbre  $\sigma$ , podemos reemplazar las deltas de Dirac por distribuciones gaussianas:

$$\delta(\omega - \Omega_n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\omega - \Omega_n)^2}{2\sigma^2}} \quad (30)$$

llegando a una transformada de Fourier finita, con picos en cada múltiplo impar de la frecuencia de entrada. Si se escoge  $\Omega$  suficientemente baja, se pueden estudiar las frecuencias de resonancia con alta precisión.

Observando solamente las frecuencias positivas, el módulo de la transformada en los valores máximos (tomando  $\omega = \Omega_n$ ) es:

$$|\tilde{q}_j(\Omega_n)| = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}\sigma} \frac{A_j(\Omega_n)}{2n+1} \quad (31)$$

y dado que no se conoce la incertidumbre  $\sigma$  con la que el generador emite las frecuencias, es un parámetro a ajustar. Esta expresión para los máximos permite acotar la transformada por una envolvente con esta expresión:

$$|\tilde{q}_j(\omega)| = C \frac{A_j(\omega)}{2n+1} \quad (32)$$

donde  $C = \sqrt{2}/\pi^{3/2}\sigma$ . Si se toma escala logarítmica, la constante se convierte en aditiva.

## Circuito RL diodo

Ahora tomaremos un circuito en serie compuesto por un generador alterno, una resistencia, un condensador y un diodo. Este último conduce la corriente sólo en una dirección, por lo que el circuito está descrito por una ecuación diferencial distinta en cada dirección. Combinando ambas usando la función de Heaviside:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V_0}{L}e^{-i\Omega t}H(V_0e^{-i\Omega t}) \quad (33)$$

donde  $H(x) = 1$  si  $x > 0$  y  $H(x) = 0$  si  $x < 0$ . Esta función es altamente no lineal, lo que introduce el caos al sistema.

Estudiaremos este fenómeno mediante el espacio de fases. Graficando las medidas de carga frente a corriente en la resistencia, se obtiene un diagrama de fases que puede tener formas complejas. Sin embargo, si se estudian solo los puntos que estén en fase con la fuente, es decir, se grafican los puntos cada periodo de la fuente, se obtiene lo que se conoce como un diagrama de Poincaré.

Si este diagrama muestra solamente un punto, el comportamiento es ordenado y la respuesta está en fase con la fuente. Sin embargo, al aumentar la frecuencia impulsora, se observa que el número de puntos en el diagrama se duplica sucesivamente, sugiriendo comportamientos más complejos. Este fenómeno se conoce como doblado del periodo y sucede más frecuentemente a medida que se aumenta  $\Omega$ .

Sin embargo, existe un patrón en este fenómeno: los intervalos entre los que se duplica el periodo tienen una longitud predecible, y cuya relación con el intervalo anterior está dada por un valor conocido como el parámetro de Feigenbaum:<sup>6</sup>

$$\delta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Omega_n - \Omega_{n-1}}{\Omega_{n+1} - \Omega_n} \quad (34)$$

donde  $\Omega_n$  es el valor para el que sucede la transición a un diagrama de Poincaré con  $2^n$  puntos. Eventualmente, el comportamiento del doblado del periodo se vuelve complejo con un diagrama de Poincaré compuesto por muchos puntos, que forman un patrón común a todas las condiciones iniciales conocido como atractor.