

# FUNDAMENTOS DE FÍSICA III (FF3) 16387

**Agustín Sabio Vera**

a.sabio.vera@gmail.com

<https://www.ift.uam-csic.es/es/one-member/agustin>

## GRADO EN FÍSICA

Curso Académico 2023-2024 - Grupo 511

Aula: 01.11.AU.101-4

Página del curso y más información: <https://asabiovera.wixsite.com/ffii2024>

Horario: Lunes y martes: 10:30 - 11:20

Profesores en clases de problemas:

**Eduardo Velasco Aja** (Grupo 5111. AULA 01.11.AU.101-3)



eduardo.velasco@uam.es

**Rafael Carrasco Carmona** (Grupo 5112. AULA 01.11.AU.101-4)



rafael.carrasco@ift.csic.es

EO= Examen Evaluación Ordinaria:

lunes 20 de mayo (9:30-13:30, AULA 01.09.AU.206 - AULA 01.00.AU.302)

EE= Examen Evaluación Extraordinaria:

viernes 21 de junio (9:30-13:30, AULA 01.09.AU.206)

P= Nota en los problemas

T= Puntos por trabajos voluntarios (fecha límite: 15 de mayo)

(hasta 0.2 por cada trabajo presentado, con un máximo de T = 1)

A los exámenes sólo se puede llevar un bolígrafo (ni apuntes, ni libros, ni formulario, ni calculadora ...).

Calificaciones:

$$\text{Si } EO \geq 5: \min\left(0.65 EO + 0.35 P + T, 10\right)$$

$$\text{Si } EO < 5, EE \geq 5: \min\left(0.65 EE + 0.35 P + T, 10\right)$$

Para matrículas de honor consideramos  $0.65 EO + 0.35 P + T$

# 2024

	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat	Sun	
<b>Feb</b>	29	[30] ✓ 10:30	[31] ✓ 10:30	[1] ✓ 10:30	2	3	4	
	[5] ✓ 10:30	[6] ✓ 10:30	[7] prob 9:30	8	9	10	11	
	[12] ✓ 10:30	[13] ✓ 10:30	[14] talk 9:30	15	16	17	18	• Ana Cueto (UAM) - Fisica de particulas ✓
	[19] ✓ 10:30	[20] ✓ 10:30	[21] prob 9:30	22	23	24	25	
<b>Mar</b>	[26] ✓ 10:30	[27] ✓ 10:30	[28] talk 9:30	29	1	2	3	• Fernando Marchesano (CSIC) - Teoria de Cuerdas ✓
	[4] ✓ 10:30	[5] ✓ 10:30	[6] prob 9:30	7	8	9	10	
	[11] ✓ 10:30	[12] ✓ 10:30	[13] talk 9:30	14	15	16	17	• Esperanza Lopez (CSIC) - Informacion Cuantica ✓
	[18] ✓ 10:30	[19] ✓ 10:30	[20] prob 9:30	21	22	23	24	
	25	26	27	28	29	30	31	
<b>Apr</b>	1	[2] ✓ 10:30	[3] ✓ 9:30	4	5	6	7	
	[8] ✓ 10:30	[9] ✓ 10:30	[10] talk 9:30	11	12	13	14	• Angeles Diaz (UAM) - Astrofisica ✓
	[15] ✓ 10:30	[16] ✓ 10:30	[17] prob 9:30	18	19	20	21	
	[22] ✓ 10:30	[23] ✓ 10:30	[24] talk 9:30	25	26	27	28	• Francesca Marchetti (UAM) - Polarones ✓
<b>May</b>	[29] ✓ 10:30	[30] ✓ 10:30	1	2	3	4	5	
	[6] ✓ 10:30	[7] ✓ 10:30	[8] ✓ 9:30	9	10	11	12	
	[13] prob 9:30	14	15	16	[17] talk 15:00	18	19	• Una tarde de Fisica
	[20] EX 09:30	21	22	23	24	25	26	
<b>Jun</b>	27	28	29	30	31	1	2	
	3	4	5	6	7	8	9	
	10	11	12	13	14	15	16	
	17	18	19	20	[21] EX 09:30	22	23	

# Contents

<b>I Fundamentos de Física Clásica</b>	<b>5</b>
<b>1 Leyes de Newton</b>	<b>5</b>
1.1 Oscilador armónico simple unidimensional . . . . .	5
1.2 Fuerza gravitatoria . . . . .	7
<b>2 Ligaduras</b>	<b>13</b>
2.1 Principio del trabajo virtual . . . . .	14
2.2 Principio de d'Alembert . . . . .	15
2.3 Ecuaciones de Lagrange . . . . .	16
<b>3 Principio de acción estacionaria</b>	<b>21</b>
3.1 Ecuaciones de Hamilton . . . . .	22
<b>4 Límites del formalismo clásico</b>	<b>25</b>
<b>II Fundamentos de Física Cuántica</b>	<b>26</b>
<b>5 Rutherford y la estructura del átomo</b>	<b>26</b>
5.1 Teoría Cuántica Antigua . . . . .	35
<b>6 Radiación de cuerpo negro</b>	<b>38</b>
<b>7 La ecuación de Schrödinger</b>	<b>41</b>
7.1 Sonido y la ecuación de ondas . . . . .	52
7.2 Aproximación eiconal . . . . .	60
7.3 Significado físico de la función de onda . . . . .	64
7.4 Solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo . .	68
7.5 Solución a la ecuación de Schrödinger con un espectro continuo .	69
<b>8 El experimento de la doble rendija de Young</b>	<b>71</b>
8.1 El principio de acción estacionaria y la integral de camino . . .	73
<b>9 Introducción a estructura de la materia</b>	<b>78</b>
9.1 Partícula en un potencial cuadrado . . . . .	80
9.2 Barrera de potencial rectangular y el efecto túnel . . . . .	82
9.3 Emisión de electrones por un campo eléctrico y emisión fría . .	84
9.4 Teoría cuántica de los sólidos . . . . .	88
9.5 Conductividad eléctrica de los sólidos . . . . .	93
9.6 Superconductividad . . . . .	98
<b>III Fundamentos de Física Relativista</b>	<b>101</b>

<b>10 Relatividad Especial</b>	<b>101</b>
10.1 Cinemática . . . . .	101
10.1.1 Los postulados de Einstein . . . . .	105
10.1.2 Consecuencias de los postulados de Einstein . . . . .	105
10.1.3 Las transformaciones de Lorentz . . . . .	109
10.1.4 Cuadrvectores . . . . .	111
10.1.5 El efecto Doppler longitudinal . . . . .	112
10.2 Dinámica . . . . .	113
10.2.1 Colisiones y decaimientos . . . . .	114
10.2.2 Unidades en física de partículas . . . . .	117
10.2.3 Más cuadrimomentos . . . . .	117
<b>11 Relatividad General</b>	<b>119</b>
11.1 El principio de equivalencia . . . . .	119
11.2 Dilatación temporal . . . . .	121
11.3 Geodésicas . . . . .	121
11.4 Corrimiento al rojo gravitacional . . . . .	130
11.5 Ecuaciones de Einstein y la constante cosmológica . . . . .	131
11.6 Modelos cosmológicos y la teoría del Big Bang . . . . .	132
11.7 Ley de Hubble . . . . .	134

## Part I

# Fundamentos de Física Clásica

Comencemos el curso dando unas pinceladas describiendo qué entendemos por formalismo clásico para la descripción de fenómenos físicos muy conocidos.

## 1 Leyes de Newton

La mecánica clásica<sup>1</sup> describe y predice, mediante las leyes de Newton (1642-1727), el movimiento de cuerpos sujetos a diversos tipos de interacciones.

- Primera ley (Galileo 1564-1642): la velocidad de una partícula es constante si no está sometida a ninguna interacción.
- Segunda ley: la aceleración de una partícula es directamente proporcional a la fuerza total actuando sobre ella, e inversamente proporcional a su masa.
- Tercera ley: la fuerza que una partícula ejerce sobre otra es igual y opuesta a la que esta última ejerce sobre la primera.

Aunque estas leyes son sencillas permiten resolver la dinámica de sistemas complicados. Vamos a revisar algunos ejemplos muy conocidos.

### 1.1 Oscilador armónico simple unidimensional

Fijemos los extremos de un muelle, con longitud en reposo  $x_0$ , a una pared y a un objeto de masa  $m$  (Fig. 1). Por la ley de elasticidad de Hooke la fuerza que

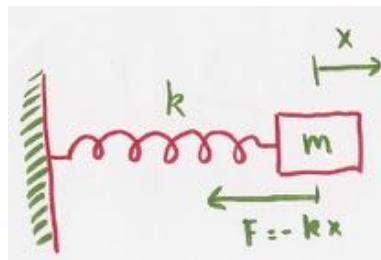


Figure 1: Oscilador armónico simple

el muelle ejerce sobre el objeto es proporcional y opuesta a su elongación:

$$F = -k(x - x_0). \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Refs. “Mecánica Clásica”, H. Goldstein. “Classical Dynamics. A contemporary approach.” José-Saletan.

$k$  es una constante positiva. Consideramos que no hay gravedad y  $F$  es la única fuerza que actúa en este sistema unidimensional. La segunda ley de Newton relaciona aceleración con posición,

$$ma = -k(x - x_0). \quad (1.2)$$

Una recurrente en este tipo de problemas es intentar encontrar una cantidad conservada en el tiempo. Para ello introducimos derivadas temporales utilizando la velocidad  $v$ , para buscar una derivada total,

$$0 = mav + k(x - x_0)v = m\left(\frac{dv}{dt}\right)v + k(x - x_0)\left(\frac{d(x - x_0)}{dt}\right), \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2\right) = \frac{dE}{dt} = 0. \quad (1.4)$$

La cantidad conservada es la energía,  $E$ , que tiene una parte cinética y otra potencial. Esta última es fundamental en física porque describe pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable, donde todas las fuerzas del sistema se anulan unas con otras. Siempre que exista un punto  $x = x_0$  donde la derivada del potencial  $\frac{dV}{dx} = 0$  será valida la aproximación en serie de Taylor de la forma  $V(x) \simeq \alpha + \beta(x - x_0)^2$  y podremos aproximar el movimiento cerca de  $x_0$  por el de un oscilador harmónico. En teoría clásica de campos estas oscilaciones pueden describir, *e.g.*, ondas de sonido, y en teoría cuántica de campos corresponden a partículas elementales.

**Ejercicio 1.1.1** Demostrar que  $x = A \sin(\omega t + \phi)$  y derivar las expresiones para  $A$ ,  $\omega$  y  $\phi$  en función de  $E$ ,  $m$  y  $k$ .



entrega el 7/2  
Fin de clase 1

**Ejercicio 1.1.2** Una partícula de masa  $m$  se mueve en una dimensión bajo un potencial  $V(x)$  con un único mínimo en  $x = 0$  y que crece para  $|x| \rightarrow \infty$ . Si la energía es constante podemos escribir su trayectoria en la forma

$$t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Para una energía finita la partícula oscila entre dos puntos  $x_{1,2}(E)$ . Escribir la expresión para el período de oscilación,  $T$ . Para un potencial genérico  $T$  depende de la energía  $T = T(E)$ . Considerar potenciales de la forma  $V(x) = kx^{2n}$ , con  $n$  entero. Demostrar que en este caso  $T(E) \simeq E^{\beta(n)}$  y encontrar  $\beta(n)$ . Discutir para qué valor de  $n$  el período de oscilación es independiente de la energía.



entrega el 7/2

**Trabajo(\*)** Prepara un resumen y una revisión crítica del artículo “Understanding the Physics of Bungee Jumping” de Heck, Uylings, Kedzierska.



Voluntario

## 1.2 Fuerza gravitatoria

Los problemas tridimensionales son bastante más complicados, estudiemos un ejemplo con algo de detalle donde aparece el concepto de potencial efectivo. El caso de fuerzas centrales,  $\vec{F} = F\hat{r}$ , con  $\vec{r} \equiv r\hat{r}$ , se puede tratar de forma general. Como antes, buscamos constantes del movimiento a través de derivadas

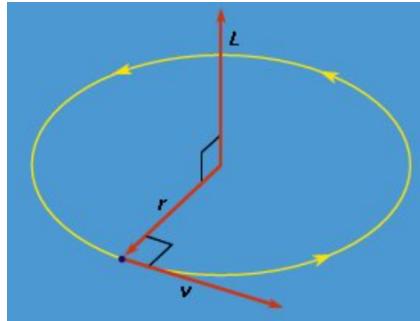


Figure 2: Momento angular

temporales. Una información útil es saber que el momento angular (Fig. 2),  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , se conserva, *i.e.*<sup>2</sup>,

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = m \frac{d}{dt} \left( \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{r} \right) = 0, \quad (1.5)$$

( $m$  se considera constante). Esto implica que el movimiento tiene lugar sobre el plano perpendicular a  $\vec{L}$ , llamado plano orbital, definido por  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$  ( $\vec{L}$  es perpendicular a  $\vec{r}$  y  $\vec{p}$ ). Es útil trabajar con coordenadas polares sobre este plano ( $\vec{L}$  es paralelo al eje  $z$ ),

$$\vec{r} = (x, y, z) = r(\cos \theta, \sin \theta, 0) = r\hat{r}. \quad (1.6)$$

Busquemos ahora una expresión para la energía.

**Ejercicio 1.1.3** Con la notación  $da/dt \equiv \dot{a}$  y  $\hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$  (Fig. 3) demostrar que  $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$  y que  $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$ .

♣ entrega el 7/2

La segunda ley de Newton indica que

$$F\hat{r} = m\ddot{\vec{r}} = m \left( (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \right). \quad (1.7)$$

---

<sup>2</sup>Frecuentemente utilizaremos *i.e.* (id est o “es decir”), *e.g.* (exempli gratia o “por ejemplo”) y *et al.* (et alii o “y otros”)

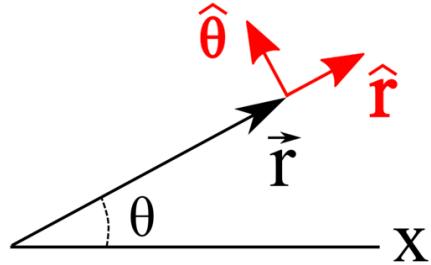


Figure 3: Coordenadas polares

**Ejercicio 1.1.4** Demostrar que el momento angular se puede escribir como  $\vec{L} = (0, 0, mr^2\dot{\theta}) \equiv L(0, 0, 1)$ . Encontrar la relación entre este resultado y la segunda ley de Kepler (1609).

♣ entrega el 7/2

Ec. (1.7) muestra que  $\dot{L} = 0$ <sup>3</sup>. Si consideramos que la fuerza es conservativa (el trabajo realizado para mover una partícula sólo depende del punto inicial y

---

<sup>3</sup>Como la fuerza sólo tiene componente radial entonces  $2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} = 0$

final, no de la trayectoria) entonces la podemos escribir como el gradiente <sup>4</sup> de

---

<sup>4</sup>En coordenadas **cartesianas** escribimos un vector  $\vec{V}$  en la forma

$$\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z.$$

donde el vector posición es

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z.$$

En este caso el operador gradiente tiene la representación

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

donde  $\vec{u}_x = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_y = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{u}_z = (0, 0, 1)$ . Si cambiamos a coordenadas **cilíndricas** usando

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, \\ y &= \rho \sin \phi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

tenemos que el elemento de volumen es  $d^3 \vec{r} = \rho d\rho d\phi dz$ . Los vectores  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$  tienen módulo 1 y cumplen

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \vec{u}_x \cos \phi + \vec{u}_y \sin \phi, \\ \vec{u}_\phi &= -\vec{u}_x \sin \phi + \vec{u}_y \cos \phi. \end{aligned}$$

El gradiente en estas coordenadas es

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\vec{u}_\phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para entender el origen de esta expresión intentamos recuperar el resultado en cartesianas,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= (\vec{u}_x \cos \phi + \vec{u}_y \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{(-\vec{u}_x \sin \phi + \vec{u}_y \cos \phi)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \vec{u}_x \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \vec{u}_y \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

y utilizamos derivadas sobre

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \tan \phi = \frac{y}{x}$$

para escribir

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad -\frac{\sin \phi}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \sin \phi &= \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad \frac{\cos \phi}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \vec{u}_y \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

que corresponde a aplicar la regla de la cadena en el cambio de coordenadas.

En coordenadas **esféricas** tenemos que

$$\vec{V} = V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta + V_\phi \vec{u}_\phi,$$

y

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

un campo escalar (potencial):  $F = -dV(r)/dr$ . De esta manera Ec. (1.7) ahora es

$$F = -\frac{d}{dr}V(r) = m\left(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\right) = m\left(\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right). \quad (1.8)$$

Podemos reescribir esta ecuación en la forma

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}V_{\text{eff}}(r) \quad (1.9)$$

con

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \quad (1.10)$$

Vemos que el problema, originalmente tridimensional, se reduce a uno unidimensional en la dirección radial caracterizado por un potencial efectivo interesante, que depende de cantidades conservadas en el tiempo.

**Ejercicio 1.1.5** Demostrar que la energía total se puede escribir en función de la variable radial.

♣ entrega el 7/2  
Fin de clase 2

Como ejemplo canónico de fuerza central estudiemos la fuerza gravitatoria que experimenta una masa  $m$  debido a la presencia de otra masa mucho más grande,  $m \ll M$ , con el potencial asociado

$$V(r) = -G_N \frac{mM}{r} \equiv -\frac{k}{r}. \quad (1.11)$$

Utilizando el resultado del Ej. (1.1.5) tenemos que

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}. \quad (1.12)$$

El elemento de volumen ahora es  $d^3\vec{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ . Los vectores unidad son

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \vec{u}_x \sin \theta \cos \phi + \vec{u}_y \sin \theta \sin \phi + \vec{u}_z \cos \theta, \\ \vec{u}_\theta &= \vec{u}_x \cos \theta \cos \phi + \vec{u}_y \cos \theta \sin \phi - \vec{u}_z \sin \theta, \\ \vec{u}_\phi &= -\vec{u}_x \sin \phi + \vec{u}_y \cos \phi, \end{aligned}$$

El gradiente es

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{u}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{u}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}.$$

El gradiente es un operador muy útil. Por ejemplo, nos ayuda a escribir la expansión en serie de Taylor de una función en tres dimensiones en la forma

$$f(\vec{r} + \vec{\epsilon}) = e^{\vec{\epsilon} \cdot \vec{\nabla}} f(\vec{r}) = \left(1 + \vec{\epsilon} \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{2!} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\nabla})^2 + \dots\right) f(\vec{r}).$$

Un ejercicio interesante sería demostrar que

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} = -\frac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}.$$

Es conveniente usar esta ecuación para describir la coordenada radial  $r$  en términos de la angular  $\theta$  utilizando el Ej. (1.1.4) ( $L = mr^2\dot{\theta}$  y que  $r = r(\theta)$ ):

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2}, \quad (1.13)$$

para obtener

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mr^4}{L^2} \left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}\right). \quad (1.14)$$

**Ejercicio 1.1.6** Integrar la expresión

$$\int_{r_0}^r \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2mk}{r}}} = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta'$$

y demostrar que la solución para la órbita es

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0)\right).$$

♣ entrega el 7/2

El resultado del Ej. (1.1.6) describe una sección cónica.  $r$  es una constante independiente del ángulo cuando

$$E = -\frac{mk^2}{2L^2} (\equiv E_0), \quad (1.15)$$

haciendo que la órbita sea un círculo (corresponde a posicionarse en el mínimo del potencial de la Ec. (1.12) cuando la velocidad radial es cero). A la cantidad  $\sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}}$  se la conoce como excentricidad,  $e$ , de la órbita. Tenemos otras tres posibilidades (Figs. 4, 5):

$$\begin{aligned} E_0 < E < 0, \quad 0 < e < 1 &\rightarrow \text{Elipse,} \\ E = 0, \quad e = 1 &\rightarrow \text{Parábola,} \\ E > 0, \quad e > 1 &\rightarrow \text{Hipérbola.} \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.1.7** Encontrar el valor de la constante  $\alpha$  en

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \alpha \hat{r}$$

tal que este vector se conserve en el tiempo. Investigar si esto sigue siendo cierto para otros potenciales diferentes a  $1/r$ . Esta cantidad se conoce como vector de Runge-Lenz (aunque ninguno de los dos lo descubrió). (Trabajo<sup>(\*)</sup> voluntario) Encontrar la interpretación física del vector

$$-\frac{\vec{A}}{m|E|}$$

y su relación con rotaciones en dimensión cuatro.

♣ entrega el 7/2

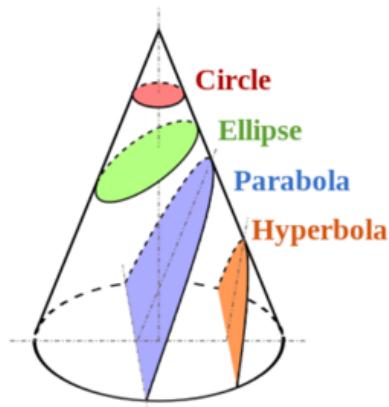


Figure 4: Secciones cónicas

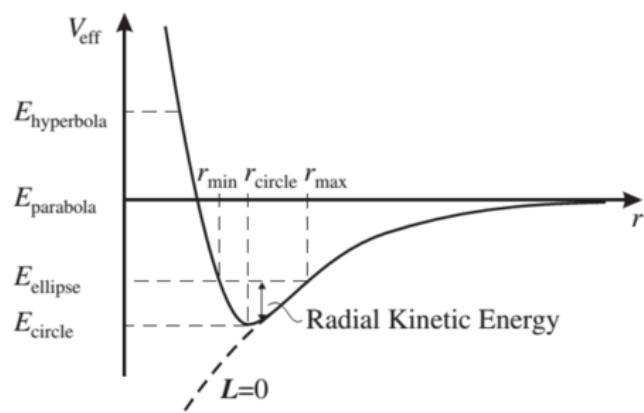


Figure 5: Potencial efectivo unidimensional y diferentes trayectorias

## 2 Ligaduras

La segunda ley de Newton aplicada a un sistema tridimensional de  $N$  partículas proporciona un sistema de  $3N$  ecuaciones acopladas para obtener  $3N$  coordenadas como función del tiempo.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

Las coordenadas pueden estar sujetas a ligaduras<sup>5</sup> como pueden ser restringir el movimiento a ciertas superficies o curvas, o que las partículas estén obligadas a mantener ciertas distancias entre ellas:  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = a_{ij}$ . Ejemplos sencillos de ligaduras son el plano inclinado y el péndulo en la Fig. 6. En general, podemos

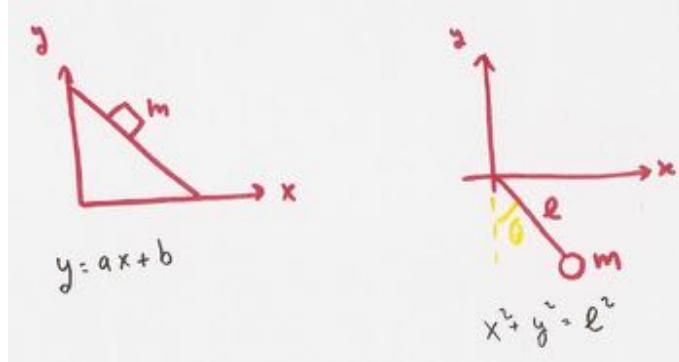


Figure 6: Movimiento sobre un plano inclinado y un péndulo como ejemplos de ligaduras.

expresar las ligaduras en la forma

$$G_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, 3N - f, \quad (2.2)$$

donde  $f$  es el número de grados de libertad en el sistema (que corresponde al número de coordenadas independientes).

Para que las ligaduras sean efectivas debe haber *fuerzas de ligadura* que obliguen a las partículas a cumplirlas. En general estas son desconocidas y se deben encontrar como parte de la solución al problema. Si al resto de fuerzas las llamamos *aplicadas* entonces la segunda ley de Newton se puede escribir como

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(\text{aplicadas})} + \vec{F}_i^{(\text{ligaduras})}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Junto con las ligaduras en Ec. (2.2) podríamos tener hasta  $6N - f$  ecuaciones para  $6N$  variables  $\vec{r}_i$  y  $\vec{F}_i^{(\text{ligaduras})}$ . Necesitamos condiciones adicionales para poder resolver el problema<sup>6</sup>.

<sup>5</sup>Ref. interesante: “On virtual displacement and virtual work in Lagrangian dynamics”, Subhankar Ray and J Shamanna 2006 Eur. J. Phys. 27 311

<sup>6</sup>Refs. “Dinámica clásica de las partículas y sistemas”, Jerry B. Marion. “Classical Dynamics. A contemporary approach”, Jorge V. José, Eugene J. Saletan.

## 2.1 Principio del trabajo virtual

Cuando la ecuación de ligaduras en Ec. (2.2) es independiente del tiempo la condición adicional necesaria es que el trabajo neto realizado por las fuerzas de ligadura tiene que ser cero<sup>7</sup>. Por ejemplo, si tenemos un bloque deslizándose

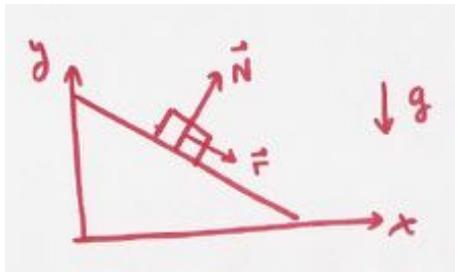


Figure 7: La fuerza normal al plano es una fuerza de ligadura.

sobre un plano inclinado que está fijo al suelo (Fig. 7). Sobre el bloque actúa la fuerza gravitatoria y la normal perpendicular al plano. Esta última es una fuerza de ligadura. Las cantidades a encontrar son entonces  $x, y, N_x, N_y$ . Como el trabajo realizado por una fuerza es  $\vec{F} \cdot \vec{r}$  siempre que la fuerza sea perpendicular al desplazamiento tenemos que el trabajo realizado es cero.

Pero en general la ecuación de ligaduras en Ec. (2.2) depende del tiempo y hay que formular la nueva condición con más cuidado. Si en el ejemplo anterior el plano inclinado se desplaza sobre el suelo horizontalmente con velocidad constante entonces el movimiento de la partícula tiene una componente horizontal  $d\vec{r}$  sobre la cual la fuerza de ligadura tiene una proyección no nula.

Para evitar esta contribución definimos  $\delta\vec{r}_i$  como un desplazamiento virtual (imaginario) infinitesimal que tiene que ser consistente con las ecuaciones de ligadura si consideramos el sistema en un tiempo fijo. Buscamos que las ligaduras no cambien sobre  $\delta\vec{r}_i$ . En el caso del plano inclinado sería la componente de  $d\vec{r}_i$  sobre el plano.

Es sobre estos desplazamientos virtuales donde definimos el principio del trabajo virtual: El trabajo total realizado por las fuerzas de ligadura sobre un desplazamiento virtual es cero, *i.e.*,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(\text{ligadura})} \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (2.4)$$

**Ejercicio 1.1.7<sup>(\*)</sup>** Demostrar que el principio del trabajo virtual nos proporciona las  $f$  condiciones extra que necesitamos para resolver nuestro problema.

♣ entrega el 7/2

<sup>7</sup>Galileo (1564-1642), Johann Bernouilli en 1717 (1667-1748)

## 2.2 Principio de d'Alembert

El principio de d'Alembert<sup>8</sup> se deriva del de trabajo virtual simplemente usando la segunda ley de Newton de Ec. (2.3) en Ec. (2.4) y escribiendo

$$\sum_{i=1}^N \left( \vec{F}_i^{(\text{aplicadas})} - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.5)$$

Indica que el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas menos el trabajo realizado por las fuerzas iniciales (que aparecen como reacción del sistema frente a las fuerzas que se ejercen sobre él) sobre desplazamientos virtuales es cero. Antes esta fórmula se utilizaba para resolver problemas estáticos con  $\ddot{\vec{r}}_i = 0$  indicando que si un sistema se encuentra en equilibrio, cualquier variación infinitesimal de las posiciones compatible con las ligaduras genera un trabajo nulo.

En la práctica es útil no restringir la forma de los grados de libertad  $f$  a ser simplemente las coordenadas  $\vec{r}_i$ . En general tomamos  $f$  *coordenadas generalizadas*  $q_i$  tales que

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_f; t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

Es esta libertad la que nos permite utilizar variables que exploten al máximo las simetrías presentes en cada sistema bajo estudio.

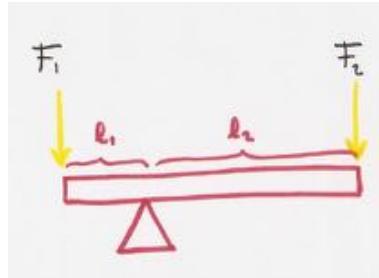


Figure 8: Barra con un punto de apoyo.

Un ejemplo sencillo de un problema con ligaduras es el de una barra en reposo (ver Fig. 8) con un punto fijo a distancia  $l_1$  de un extremo sobre el que hay una fuerza hacia abajo  $F_1$  y a distancia  $l_2$  del otro extremo sobre el que hay una fuerza hacia abajo  $F_2$  (fig. 8). Como es una situación estática el principio de d'Alembert es simplemente  $-F_1 l_1 \delta\theta + F_2 l_2 \delta\theta = 0$  donde  $\delta\theta$  es un desplazamiento angular infinitesimal.

Otro ejemplo es el desplazamiento sobre un plano inclinado un ángulo  $\alpha$  de un objeto de masa  $m$  (Fig. 7). Como coordenada generalizada podemos tomar  $s$ , el desplazamiento sobre el plano inclinado, donde también ocurre el desplazamiento virtual  $\delta s$ . Entonces tenemos que  $mg \sin(\alpha)\delta s - m\ddot{s}\delta s = 0$ .

---

<sup>8</sup>Fue abandonado recién nacido a las puertas de una iglesia contigua a Notre-Dame

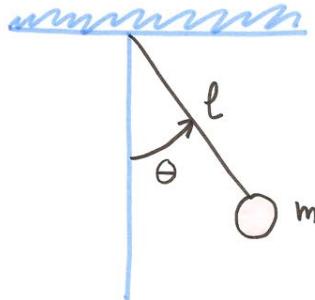


Figure 9: Péndulo plano

Veamos el caso de un péndulo plano como en la Fig. 9. Una masa  $m$  está sujeta al techo con una cuerda rígida de longitud  $l$ . El movimiento tiene un grado de libertad que podemos tomar como el ángulo  $\theta$  con respecto a la vertical. Ahora la gravedad es nuestra fuerza aplicada y tenemos que  $-(mg)(l\delta\theta \sin(\theta)) - (ml\ddot{\theta})(l\delta\theta) = 0$ , con la consecuente ecuación de movimiento  $\ddot{\theta} = -(g/l) \sin(\theta)$ .

**Ejercicio 1.1.8** Encontrar la ecuación de movimiento para el péndulo si introducimos una variación de su longitud con el tiempo  $l = l(t)$ . También en el caso de hacer un agujero en el techo, pasar la cuerda por él y tirar de la cuerda hacia arriba con una fuerza  $F$ . Como coordenadas generalizadas tomar el ángulo con la vertical  $\theta$  y la longitud del péndulo  $l$ .

♣ entrega el 7/2  
Fin de clase 3

### 2.3 Ecuaciones de Lagrange

La variación de las  $3N$  coordenadas  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_f; t)$  con respecto a las generalizadas (ver Ec. (2.6)) sobre un desplazamiento virtual se escribe sin tener en cuenta la variación temporal, que es cero sobre  $\delta\vec{r}_i$ , i.e.,

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{l=1}^f \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_l} \delta q_l, \quad (2.7)$$

donde  $f$  es el número de grados de libertad. Teniendo esto en cuenta el principio de d'Alembert ahora es

$$\sum_{l=1}^f \left( \sum_{i=1}^N \left( \underbrace{\vec{F}_i^{(\text{aplicadas})}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{m_i \ddot{\vec{r}}_i}_{\textcircled{2}} \right) \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_l} \right) \delta q_l = 0. \quad (2.8)$$

Para trabajar con el término  $\textcircled{1}$ , es útil interpretar

$$Q_l \equiv \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(\text{aplicadas})} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_l} \quad (2.9)$$

como la “proyección” de las fuerzas aplicadas sobre la dirección de las coordenadas generalizadas. Por este motivo se conoce a  $Q_l$  como *fuerza generalizada*. Pero esto es un concepto formal dado que, dependiendo de la naturaleza de las  $q_l$ ,  $Q_l$  tendrá unidades de fuerza o no.

Si estamos ante un sistema conservativo entonces tenemos que

$$\vec{F}_i^{(\text{aplicadas})} = -\vec{\nabla}_i V, \quad (2.10)$$

donde  $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; t)$  es la energía potencial total del sistema y, por tanto,

$$\begin{aligned} Q_l &= -\sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \cdot \vec{\nabla}_i V \\ &= -\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_l}, \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_l}, \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_l} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r_{ix}}, \frac{\partial}{\partial r_{iy}}, \frac{\partial}{\partial r_{iz}} \right) V = -\frac{\partial V}{\partial q_l}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Veamos ahora que la parte relacionada con  $\ddot{\vec{r}}_i$ , el término ② en Ec. (2.8), se puede expresar en términos de la energía cinética,

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2, \quad (2.12)$$

si la escribimos como función de las coordenadas generalizadas. Empezamos con la velocidad:

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{l=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Utilizando este resultado tenemos que, como en general  $\partial T / \partial v = p$ , la cantidad

$$\frac{\partial T}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}, \quad (2.14)$$

se puede considerar un momento generalizado, o “componente” del momento en la dirección de la coordenada generalizada  $q_l$ .

Como estamos buscando una expresión para la aceleración y sabemos que, en general,  $dp/dt = ma = (d/dt)(\partial T / \partial v)$ , podemos investigar la expresión generalizada:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right). \quad (2.15)$$

Ya nos aparece explícitamente el segundo término de Ec. (2.8). Sólo nos queda expresar el segundo término de Ec. (2.15) también en función de  $T$ . Empezamos

haciendo la siguiente observación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \right) &= \sum_{m=1}^f \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_m \partial q_l} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_l} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \sum_{m=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_l} \dot{\vec{r}}_i. \end{aligned} \quad (2.16)$$

De esta manera vemos que el segundo término de Ec. (2.15) es

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2 = \frac{\partial T}{\partial q_l}. \quad (2.17)$$

Con toda esta información reescribimos el principio de d'Alembert:

$$\sum_{l=1}^f \left( Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) \right) \delta q_l = 0. \quad (2.18)$$

Como las  $f$  coordenadas generalizadas son independientes cada coeficiente debe cancelarse y podemos escribir las ecuaciones de Lagrange:

$$Q_l + \frac{\partial T}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, f. \quad (2.19)$$

Si todas las fuerzas aplicadas son conservativas entonces el potencial no depende de las velocidades y definiendo el Lagrangiano

$$L = T - V, \quad (2.20)$$

y haciendo uso de Ec. (2.11) tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, f. \quad (2.21)$$

Esta forma de escribir las ecuaciones del movimiento, que permite tratar de manera general sistemas inerciales y no inerciales, sienta las bases de lo que se conoce como *mecánica analítica* o *mecánica teórica* y es extremadamente útil como veremos en los siguientes ejemplos.

Regresemos al péndulo plano de la Fig. 9. Tenemos el ángulo con la vertical  $\theta$ , longitud  $l$  y masa  $m$ . Como sabemos que el movimiento tiene lugar sobre un círculo utilizamos como coordenada generalizada para este problema unidimensional  $\theta$ . Para escribir la ecuación de Lagrange necesitamos las energías cinética y potencial. La primera es

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.22)$$

y la segunda, fijando la energía potencial a cero cuando  $\theta = 0$ , es

$$V = m g l (1 - \cos \theta). \quad (2.23)$$

El Lagrangiano correspondiente se escribe como

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta). \quad (2.24)$$

Necesitamos derivadas con respecto a  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  que son

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}. \quad (2.26)$$

Finalmente la ecuación de Lagrange es

$$-mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0. \quad (2.27)$$

La ecuación de movimiento en esta variable es la más sencilla:  $g\sin\theta + l\ddot{\theta} = 0$ . Si elegimos otra coordenada generalizada obtenemos una ecuación conteniendo la misma información pero de una manera menos transparente.

**Ejercicio 1.1.9** Encontrar las ecuaciones de Lagrange para un péndulo esférico. Si  $x = l\sin\theta\cos\phi$ ,  $y = l\sin\theta\sin\phi$ ,  $z = l\cos\theta$  es posible calcular la energía cinética usando  $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ . Como  $l$  es constante, es útil usar  $\theta, \phi$  como coordenadas generalizadas. Hay una variable que no aparece en el Lagrangiano, buscar la cantidad conservada asociada.



entrega el 7/2

Fin de clase 4

Estudiemos, dentro del formalismo Lagrangiano extendido al caso de un sistema no conservativo, la interacción de una partícula con carga  $q$  con un campo electromagnético. Vamos a investigar si el Lagrangiano

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 - q\phi(\vec{r}, t) + \vec{q}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q\phi + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde los campos eléctrico y magnético vienen dados en términos del potencial escalar  $\phi$  y del potencial vectorial  $\vec{A}$ , i.e. (con  $\partial_w = \partial/\partial w$ ),

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times (A_x, A_y, A_z) \\ &= (\partial_y A_z - \partial_z A_y, \partial_z A_x - \partial_x A_z, \partial_x A_y - \partial_y A_x), \end{aligned} \quad (2.30)$$

es consistente con las ecuaciones de movimiento del sistema.

El momento generalizado asociado a  $\vec{r}$  es

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (\partial_{\dot{x}}, \partial_{\dot{y}}, \partial_{\dot{z}})L = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}. \quad (2.31)$$

Su derivada temporal es (regla de la cadena en el último término)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{p}}{dt} &= m\ddot{\vec{r}} + q\frac{d}{dt}\vec{A}(x(t), y(t), z(t), t) \\
 &= m\ddot{\vec{r}} + q\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \\
 &= m\ddot{\vec{r}} + q\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\right)\vec{A}.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

La derivada del Lagrangiano con respecto a las componentes de  $\vec{r}$  se escribe en términos de su gradiente,

$$\vec{\nabla}L = -q\vec{\nabla}\phi + q\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}). \tag{2.33}$$

Ahora podemos escribir las ecuaciones de Lagrange usando  $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Todas las componentes juntas

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla}L - \frac{d}{dt}\vec{p} &= 0 \\
 -q\vec{\nabla}\phi + q\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) &= m\ddot{\vec{r}} + q\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\right)\vec{A}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Lo reescribimos en la forma

$$m\ddot{\vec{r}} + q\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - q\left(\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\right) = 0. \tag{2.35}$$

**Ejercicio 1.1.10** Demostrar que  $\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ .

♣ entrega el 21/2

Utilizando este ejercicio y la Ec. (2.30) las ecuaciones de Lagrange toman la forma

$$m\ddot{\vec{r}} + q\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - q\left(\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right) = 0. \tag{2.36}$$

Finalmente,

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}, \tag{2.37}$$

que corresponde a la fuerza de Lorentz que el campo electromagnético ejerce sobre la partícula con carga  $q$ .

### 3 Principio de acción estacionaria

El conjunto de  $f$  coordenadas generalizadas, con  $f$  grados de libertad, constituye el llamado *espacio de configuración*. Nuestro sistema está descrito por cómo su configuración evoluciona con el tiempo. El *espacio de configuración extendido* incluye el tiempo y tiene  $f + 1$  dimensiones.

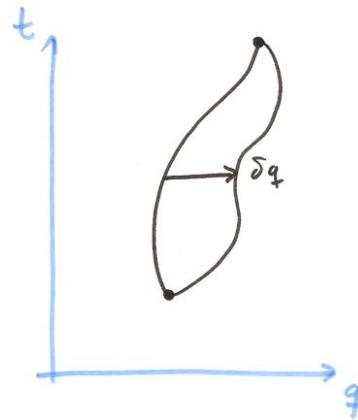


Figure 10: Variación de trayectoria

Dada una determinada evolución temporal de la configuración de nuestro sistema queremos investigar que ocurre si la “deformamos” mediante desplazamientos virtuales  $\delta q_\nu$  (ver Fig. 10). Estos los consideramos como funciones continuas en el tiempo con derivadas primeras y segundas también continuas. La idea es considerar una “foto” fija de nuestro sistema a tiempo  $t$  y perturbamnos todas las “posiciones” (generalizadas) de una manera consistente con las ligaduras. Esto lo repetimos de manera continua otros tiempos  $t'$ . Con esto queremos averiguar que tiene de especial la trayectoria descrita por el Lagrangiano.

Si nuestro sistema tiene el Lagrangiano asociado  $L = L(q_\nu, \dot{q}_\nu; t)$  entonces

$$\begin{aligned} \delta L &= L(q_\nu + \delta q_\nu, \dot{q}_\nu + \delta \dot{q}_\nu; t) - L(q_\nu, \dot{q}_\nu; t) \\ &= \sum_{\nu=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \delta \dot{q}_\nu + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t} \delta t}_{\text{desplaz. virt. } = 0} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

El último término es cero porque consideramos un desplazamiento virtual, a tiempo fijo. Ahora es útil observar que (con  $h \rightarrow 0$ )

$$\delta \dot{q}_\nu = \delta \left( \frac{q_\nu(t+h) - q_\nu(t)}{h} \right) = \frac{\delta q_\nu(t+h) - \delta q_\nu(t)}{h} = \frac{d}{dt} \delta q_\nu(t), \quad (3.2)$$

Fin de clase 5

y escribir (usando la derivada de un producto)

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{\nu=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_\nu} \delta q_\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \frac{d}{dt} \delta q_\nu \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \right) \right) \delta q_\nu + \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \delta q_\nu.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Nuestra trayectoria cumple las ecuaciones de Lagrange que indican que el primer término se cancela y podemos escribir

$$\delta S \equiv \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \sum_{\nu=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \delta q_\nu \Big|_{t_0}^{t_1} \equiv \sum_{\nu=1}^f p_\nu \delta q_\nu \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (3.4)$$

Hemos definido la *acción* para la trayectoria o camino  $q$  como el funcional (opera sobre un espacio de funciones):

$$S[q(t)] \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L(q, \dot{q}; t), \quad (3.5)$$

y el momento generalizado  $p_\nu = \partial L / \partial \dot{q}_\nu$ . La acción viene dada en unidades de [Energía] × [Tiempo].

Si el desplazamiento virtual es cero en  $t_0$  y  $t_1$  tenemos que  $\delta S = 0$ . Así podemos escribir el *principio de Hamilton o de acción estacionaria*: La trayectoria  $q(t)$  de un sistema dinámico entre los puntos  $(q_0, t_0)$  y  $(q_1, t_1)$  cumple que la acción  $S[q] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q, \dot{q}; t)$  es estacionaria cuando se la compara con las trayectorias virtuales cercanas con los mismos puntos inicial y final.

Si invertimos la lógica y consideramos el *principio de acción estacionaria* como un postulado fundamental en mecánica clásica entonces

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \right) \right) \delta q_\nu dt = 0, \quad (3.6)$$

implica las ecuaciones de Lagrange siempre que  $\delta q_\nu(t_0) = \delta q_\nu(t_1) = 0$ .

### 3.1 Ecuaciones de Hamilton

La ventaja de pasar de las ecuaciones de Lagrange a las de Hamilton es que en lugar de un sistema de ecuaciones de segundo orden tendremos uno de primer orden. Para ello consideramos las velocidades como variables independientes de las coordenadas  $v_\alpha = \dot{q}_\alpha$ . Entonces las ecuaciones de Lagrange son ( $\alpha = 1, \dots, f$ )

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q_1, \dots, q_f, v_1, \dots, v_f, t)}{\partial v_\alpha} \right) - \frac{\partial L(q_1, \dots, q_f, v_1, \dots, v_f, t)}{\partial q_\alpha} \\ = \sum_{\beta=1}^f \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_\beta \partial v_\alpha} v_\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_\beta \partial v_\alpha} \frac{dv_\beta}{dt} \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,\end{aligned}\quad (3.7)$$

y junto con las ecuaciones

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = v_\alpha, \quad (3.8)$$

forman un sistema de  $2f$  ecuaciones para  $2f$  variables  $(q_\alpha, v_\alpha)$ . Es preferible trabajar con momentos generalizados  $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$  en lugar de con las velocidades y utilizar  $(q_\alpha, p_\alpha)$  como variables. Si  $\det |\partial^2 L / \partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha| \neq 0$  entonces podemos escribir

$$\dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt} = F_\alpha(q, p, t). \quad (3.9)$$

Las ecuaciones de Lagrange ahora son de la forma

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = G_\alpha(q, p, t). \quad (3.10)$$

Lo interesante de esta representación es la simplicidad de las funciones  $F$  y  $G$  que calculamos ahora. Definamos el Hamiltoniano como

$$H(q, p, t) \equiv \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q, \dot{q}, t), \quad (3.11)$$

donde escribimos todas las velocidades generalizadas en términos de las coordenadas y momentos generalizados. Tomemos la derivada temporal <sup>9</sup> de  $H$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \dot{q}_\alpha - \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^f \left( \dot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} + \ddot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta} \right) \right) L(q, \dot{q}, t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^f \frac{dp_\alpha}{dt} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \frac{d\dot{q}_\alpha}{dt} - \sum_{\alpha=1}^f \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\alpha} + \ddot{q}_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) L - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

para escribir

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{\alpha=1}^f \left( \dot{q}_\alpha dp_\alpha + \left( p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^f \left( -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (3.13)$$

---

<sup>9</sup>Estamos aplicando la regla de la cadena a menudo. Veamos un ejemplo. Tomemos la función  $f(x(t), y(t); t) = x^2 + \cos(xy) + \sin^2(t)$  donde  $x(t) = t$  y  $y(t) = e^t$ . Calculando directamente, podemos escribir la función como  $f = t^2 + \cos(te^t) + \sin^2(t)$  y derivar:  $\dot{f} = 2t - \sin(te^t)(1+t)e^t + 2\sin(t)\cos(t)$ . Hemos usado la regla de la cadena en la forma  $\dot{f} = 2x\dot{x} - \sin(xy)(xy + xy) + 2\sin(t)\cos(t)$ , donde  $\dot{x} = 1$  y  $\dot{y} = e^t$ . Un ejemplo más complicado:  $\frac{d}{dx} \sin^m(\cos(x^n)) = [m \sin^{m-1}(\cos(x^n))] [\cos(\cos(x^n))] [-\sin(\cos(x^n))] [nx^{n-1}]$ .

donde la última línea viene de saber que  $H = H(q, p, t)$ . Comparando las dos últimas líneas tenemos que

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Finalmente podemos escribir las ecuaciones de Hamilton para las  $2f$  variables  $(q_\alpha, p_\alpha)$ :

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad (3.17)$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \quad (3.18)$$

Vemos que las funciones  $F$  y  $G$  de (3.9,3.10) tienen su origen en  $H$ . Utilizando el final de (3.13) y las ecuaciones de Hamilton vemos que <sup>10</sup>

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Esto implica que si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo entonces es una constante del movimiento. Estas ecuaciones son tan útiles que a menudo se llaman ecuaciones canónicas del movimiento y a  $(q_\alpha, p_\alpha)$  variables canónicas.

**Ejercicio 1.1.11** Escribir el Lagrangiano y Hamiltoniano del oscilador armónico simple en el caso de un muelle unidimensional. Demostrar que en ambos casos la ecuaciones de Lagrange y Hamilton generan la ley de Hooke. Escribir la expresión de la acción en función del Hamiltoniano.

♣ entrega el 21/2

**Ejercicio 1.1.12** Utilizando las ecuaciones de Hamilton, discutir el diagrama de fases de un péndulo giratorio (Fig. 11) con un extremo fijo y sometido a una velocidad angular exterior  $\omega$ . Estudiar las simetrías del problema en función del valor de  $\omega$ . (El Lagrangiano es el del problema 1.1.8 con  $\dot{\phi} = \omega$ ).

♣ entrega el 21/2  
Fin de clase 6

---

<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^f \left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{\alpha=1}^f \left( -\frac{dp_\alpha}{dt} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{dq_\alpha}{dt} \frac{dp_\alpha}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

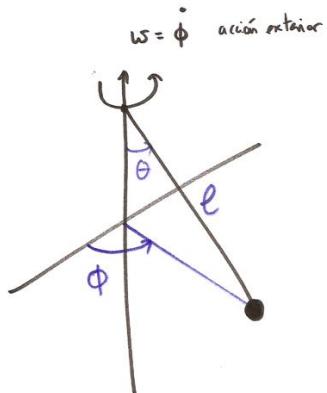


Figure 11: El péndulo giratorio

## 4 Límites del formalismo clásico

Hasta<sup>11</sup> principios del siglo XX se pensaba que el estado de todo sistema físico se puede describir con un cierto número de variables dinámicas que tienen un valor determinado en cada instante. Si conocemos los valores de estas variables en un tiempo  $t_0$  podemos saber su valor en  $t_1$  utilizando ecuaciones de evolución como las que hemos descrito en el tema anterior. Desde Newton (1643-1727) este procedimiento clásico describía todos los procesos físicos conocidos simplemente introduciendo nuevas variables y nuevas ecuaciones. A partir de 1900 la precisión experimental llega a escalas microscópicas ( $\mathcal{O}(10^{-8}\text{cm})$ ) y aparecen nuevos fenómenos muy sorprendentes que no se pueden explicar de la misma forma.

Desde una perspectiva clásica podemos describir el universo con materia (con comportamiento corpuscular y descrita por su posición y velocidad), y radiación (con comportamiento ondulatorio siguiendo las ecuaciones de Maxwell (1855) y descrita por las componentes de los campos eléctrico y magnético). Cuando el sistema bajo estudio es complicado (*e.g.* gases) se pueden utilizar técnicas de mecánica estadística. Las ondas electromagnéticas se propagan en un éter material, con propiedades a determinar. Se amplia el espectro conocido al descubrir Röntgen los rayos X (con pequeña longitud de onda) en 1895.

---

<sup>11</sup>Ref. "Quantum Mechanics", Cohen-Tannoudji, C et al. Volume I.

## Part II

# Fundamentos de Física Cuántica

## 5 Rutherford y la estructura del átomo

El electrón se descubre en 1897 (Thomson) y su interacción con las ondas electromagnéticas se estudia en detalle (Lorentz). Toma cuerpo la idea de la existencia de átomos y moléculas debido a estudios como el del movimiento Browniano (desplazamiento aleatorio de polvo en la superficie de un líquido debido a choques con las moléculas de éste cuya descripción estadística fue presentada por Einstein en su tesis doctoral, en 1905). La primera imagen del átomo la consigue Rutherford en 1911 lanzando partículas  $\alpha$  (núcleos de helio con carga positiva viajando a gran velocidad, producto de desintegración nuclear, con capacidad de penetrar el átomo) sobre distintos blancos (finas hojas de metal). Estudiando la estructura de dispersión dedujo que el átomo tiene un núcleo central de unos  $10^{-13}$  cm con electrones a su alrededor.

Casi todas las partículas  $\alpha$  salían del material desviándose a ángulos muy pequeños<sup>12</sup>. Sin embargo, algunas de ellas ‘rebotaban’ con ángulos muy grandes, a veces de 180 grados. Esto sólo se puede explicar si existe un fuerte campo eléctrico generado por una carga positiva asociada a una masa grande y concentrada en un volumen pequeño. El parámetro de impacto,  $b$ , se define como la distancia a la que pasaría la partícula  $\alpha$  del núcleo si no hubiera interacción.

**Ejercicio 1.2.1** Un meteorito se acerca a la tierra con un parámetro de impacto  $b$  y velocidad  $v$ . Demostrar que colisionarán si  $b < R\sqrt{1 + (V/v)^2}$ , donde  $R$  es el radio y  $V$  la velocidad de escape de la tierra. Utilizar la expresión de la energía en términos de un potencial efectivo y luego conservación de energía y momento angular.

♣ entrega el 21/2

Rutherford asume que la interacción entre el núcleo, que podemos considerar de masa infinita (su posición no cambia durante el proceso) y con carga  $Ze$ , y la partícula  $\alpha$ , con masa  $m_\alpha$ , carga  $2e$  (la partícula  $\alpha$  tiene dos cargas positivas), posición  $\vec{r}$  y velocidad  $\vec{v}$ , está determinada por una energía potencial de Coulomb. Tomando como origen de coordenadas la posición del núcleo (ver Fig. 12) y haciendo uso de conservación de la energía y del momento angular tenemos que<sup>13</sup>

$$E = \frac{m_\alpha}{2}v^2 + V(r) = \frac{m_\alpha}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{2Ze^2}{r} = \text{constante}, \quad (5.1)$$

$$\vec{L} = m_\alpha(\vec{r} \times \vec{v}) = m_\alpha r^2 \dot{\phi}(0, 0, 1) = \text{constante}. \quad (5.2)$$

<sup>12</sup>Ver video “3/3 Experimento de Rutherford” en <https://asabiovera.wixsite.com/ffii2023> y “In Search of Giants Part 1 - The Building Blocks of Matter” en <https://www.youtube.com/watch?v=-FWxd78sOZ8>

<sup>13</sup>Ejercicio 1.1.4.

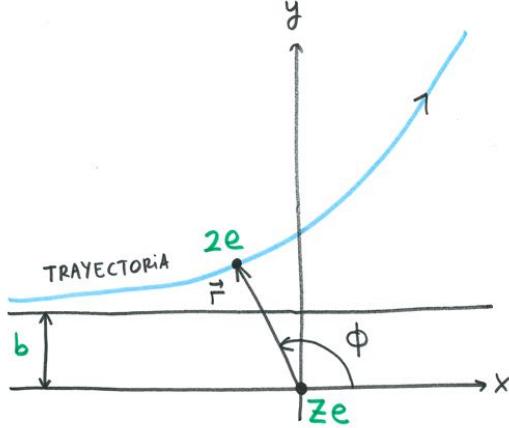


Figure 12: Dispersión elástica de partículas alfa por un núcleo.

Para escribir la energía potencial hemos utilizado unidades Gaussianas donde el término con la constante eléctrica  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  se incluye en la definición de la carga eléctrica. Así evitamos factores engorrosos en los cálculos.

Cuando la partícula está muy lejos, antes de la interacción, con velocidad  $v_0$ ,  $r \rightarrow \infty$  y  $\phi \rightarrow \pi$ , tenemos que sólo hay energía cinética:

$$E_0 = \frac{m_\alpha}{2} v_0^2 = \frac{m_\alpha}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{2Ze^2}{r}, \quad (5.3)$$

y el momento angular es<sup>14</sup>

$$m_\alpha r^2 \dot{\phi} = -m_\alpha b v_0. \quad (5.4)$$

Ahora podemos utilizar  $u = 1/r$  y  $u' \equiv du/d\phi$  para escribir ec. (5.3) como<sup>15</sup>

$$(u')^2 + u^2 + \frac{4Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} u - \frac{1}{b^2} = 0. \quad (5.5)$$

Si diferenciamos esta ecuación con respecto a  $\phi$  tenemos que

$$2u'u'' + 2uu' + \frac{4Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} u' = 0, \quad (5.6)$$

---

<sup>14</sup>Con  $r \gg b$  la condición inicial es:  $\vec{r} \rightarrow (r \cos \pi, \lim_{\phi \rightarrow \pi} r \sin \phi, 0) = (-r, b, 0)$  y  $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$ . En este caso

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \rightarrow m((-r, b, 0) \times (v_0, 0, 0)) = (0, 0, -mv_0 b).$$

<sup>15</sup>Como  $r = r(\phi)$  entonces  $u = u(\phi)$  y podemos escribir

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{1}{u^2} u' \frac{bv_0}{r^2} = u' bv_0.$$

o, de manera equivalente<sup>16</sup>,

$$u'' + u + \frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} = 0, \quad (5.7)$$

con solución general<sup>17</sup>

$$u = A \cos \phi + B \sin \phi - \frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2}.$$

Que corresponde a la suma de la solución a la ecuación homogénea

Fin de clase 7

---

<sup>16</sup>La otra posible solución con  $u' = 0$  no es física.

<sup>17</sup>Las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by \equiv \ddot{y} + a\dot{y} + by = f(x)$$

aparecen muy frecuentemente. Si  $f = 0$  se llaman homogéneas y en caso contrario, inhomogéneas. En el primer caso, al ser una ecuación lineal, si  $y_1(x)$  es solución entonces  $c_1 y_1(x)$  también lo es. Si  $y_2(x)$  es otra solución entonces la suma  $y_1 + y_2$  es solución (esto es lo que se conoce como **principio de superposición**). Si  $y_1$  y  $y_2$  son linealmente independientes, *i.e.*, si y solo si la igualdad

$$\lambda y_1(x) + \mu y_2(x) = 0$$

se cumple únicamente cuando  $\lambda = \mu = 0$ , entonces la solución general de la ecuación es  $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ . Hay dos constantes arbitrarias que deben ser fijadas con las condiciones de contorno. En general, un conjunto de funciones  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  es linealmente independiente si el determinante wronskiano

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 & \cdots & \dot{y}_n \\ \ddot{y}_1 & \ddot{y}_2 & \ddot{y}_3 & \cdots & \ddot{y}_n \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

no es cero. La ecuación homogénea se puede reducir usando la forma  $y = e^{rx}$  que tiene derivadas sencillas  $\dot{y} = ry$ ,  $\ddot{y} = r^2y$ . Así encontramos la ecuación característica  $(r^2 + ar + b)y = 0$ , con solución

$$r = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \equiv r_{1,2}.$$

Si las dos raíces son distintas entonces  $e^{r_1 x}$  y  $e^{r_2 x}$  son linealmente independientes dado que  $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = (r_1 - r_2)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$ . La solución es en este caso

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Cuando las dos raíces coinciden podemos ver sustituyendo directamente en la ecuación que  $xe^{rx}$  es solución. En este caso  $W(e^{rx}, xe^{rx}) = e^{2rx} \neq 0$  y vemos que ambas son linealmente independientes y, por tanto,

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}.$$

$$u'' + u = 0, \quad (5.8)$$

$$u = e^{r\phi}, \quad (5.9)$$

$$u' = ru, \quad (5.10)$$

$$u'' = r^2u, \quad (5.11)$$

$$r^2 + 1 = 0, \quad (5.12)$$

$$u = e^{i\phi}, \quad (5.13)$$

y la solución a la ecuación particular

$$u + \frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} = 0. \quad (5.14)$$

De la condición de contorno

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} r = \infty, \quad (5.15)$$

vemos que

$$A = -\frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} \quad (5.16)$$

y de (ver Fig. 12)

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} r \sin \phi = b, \quad (5.17)$$

obtenemos, reescribiendo nuestra solución  $u = A(1 + \cos \phi) + B \sin \phi$  como<sup>18</sup>

$$\frac{u}{B \sin \phi} = 1 + \frac{A(1 + \cos \phi)}{B \sin \phi}, \quad (5.18)$$

que  $B = 1/b$ .

Por tanto

$$u = \frac{1}{b} \sin \phi - \frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} (1 + \cos \phi). \quad (5.19)$$

o, en términos de  $r$ :

$$r = \frac{b}{\sin \phi - \frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b} (1 + \cos \phi)}. \quad (5.20)$$

Esta ecuación describe la trayectoria hiperbólica de la partícula  $\alpha$  en el campo de Coulomb generado por el núcleo y tiene un polo en  $\phi = \pi$  que corresponde a la

---

<sup>18</sup>Calculamos el límite utilizando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{1}{Br \sin \phi} = \frac{1}{Bb} = \lim_{\phi \rightarrow \pi} \left( 1 + \frac{A(1 + \cos \phi)}{B \sin \phi} \right) = \lim_{\phi \rightarrow \pi} \left( 1 - \frac{A \sin \phi}{B \cos \phi} \right) = 1.$$

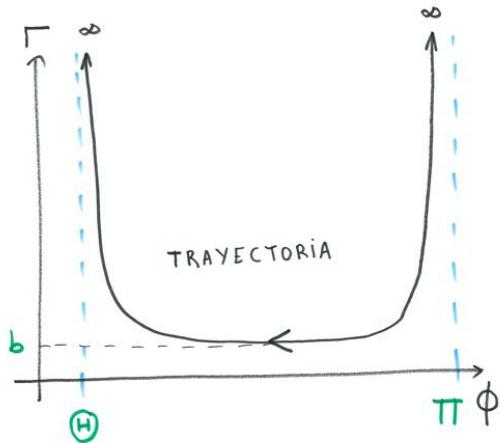


Figure 13: Trayectoria  $r = r(\phi)$  para dispersión elástica.

condición de contorno antes de la interacción. Definimos el ángulo de dispersión  $\Theta$  como el valor de  $\phi$  cuando  $r = \infty$  después de la interacción (ver Fig. 13). Con  $u = 0$  en ec. (5.19) vemos que<sup>19</sup>

$$\frac{\sin \Theta}{1 + \cos \Theta} = \frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b} = \tan \frac{\Theta}{2}. \quad (5.21)$$

$\Theta$  crece a medida que  $b$  decrece, hasta alcanzar  $\Theta = 180^\circ$  para  $b = 0$  (ver Fig. 14). Tomando fotografías de las trazas de las trayectorias de las partículas  $\alpha$  y midiendo el ángulo de dispersión máximo se puede obtener, usando ec. (5.21), el valor mínimo de  $b$ , que es del orden del radio del núcleo con dimensiones de  $10^{-13} - 10^{-12}$  cm. Esto establece el modelo planetario del átomo donde la carga positiva está concentrada en el núcleo con fuerzas de Coulomb manteniendo a los electrones orbitando alrededor.

Ejercicio 1.2.2 Comparar ec. (5.19) con el resultado de la integración en el ejercicio 1.1.6 y demostrar que

$$\tan \frac{\Theta}{2} = -\frac{1}{\tan \theta_0}, \quad (5.22)$$

$$k = -2Ze^2. \quad (5.23)$$

Esto fija la interpretación de las constantes de integración en ese ejercicio.

♣ entrega el 21/2  
Fin de clase 8

---

<sup>19</sup>

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}$$

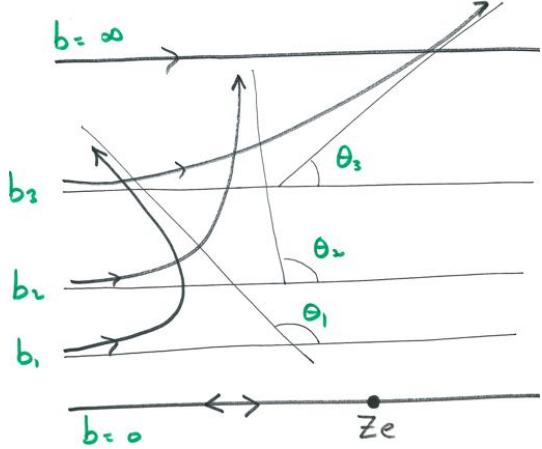


Figure 14: Trayectorias de dispersión elástica para distintos parámetros de impacto.

Para describir un átomo como un estado ligado formado por un núcleo con carga  $Ze$  y un electrón de carga  $-e$  tenemos la energía potencial (en unidades Gaussianas)  $V = -Ze^2/r$  y el Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + \frac{Ze^2}{r} \quad (5.24)$$

con ecuaciones del movimiento

$$\frac{dp_\phi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}, \quad (5.25)$$

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial L}{\partial r}. \quad (5.26)$$

Además, los momentos generalizados son

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}, \quad (5.27)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}. \quad (5.28)$$

Hay una coordenada cíclica,  $\phi$ , que no aparece en el Lagrangiano. Esto implica que su momento generalizado asociado,  $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$ , es una constante del movimiento. Si consideramos órbitas circulares podemos escribir

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr_0\dot{\phi}^2 - \frac{Ze^2}{r_0^2} = 0 \quad (5.29)$$

porque el radio es constante y  $\ddot{r} = 0$ . Por tanto

$$\dot{\phi}^2 = \frac{Ze^2}{mr_0^3}, \quad (5.30)$$

$$E = \frac{m}{2}r_0^2\dot{\phi}^2 - \frac{Ze^2}{r_0} = -\frac{Ze^2}{2r_0} \quad (5.31)$$

En movimientos periódicos es útil introducir la cantidad

$$W_\nu = \int p_\nu dq_\nu \quad (5.32)$$

que es una integración en un grado de libertad con todos los demás fijos. Sobre un ciclo corresponde al área barrida en el diagrama de fases durante un período en la proyección del sistema sobre el grado de libertad  $\nu$ :

$$\Delta W_\nu = \oint p_\nu dq_\nu \equiv 2\pi I_\nu. \quad (5.33)$$

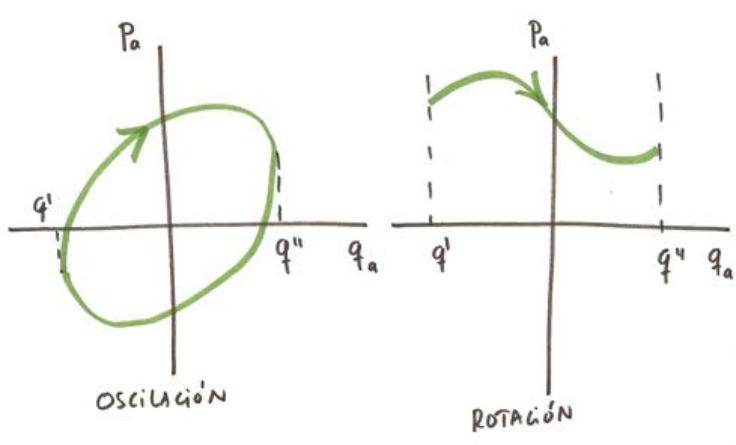


Figure 15: Trayectorias en el espacio de fases para sistemas acotados.

El Hamiltoniano se puede escribir como una función de  $I_\nu$  únicamente (se conocen como variables de acción). Podemos definir variables de ángulo  $\phi_\nu(t)$  como variables canónicamente conjugadas de  $I_\nu$ :

$$\frac{d\phi_\nu}{dt} = \frac{\partial H(I)}{\partial I_\nu} \equiv \omega_\nu(I), \quad (5.34)$$

de tal manera que  $\phi_\nu(t) = \omega_\nu(I)t + \phi_\nu(0)$ .

Es útil considerar el comportamiento de cada grado de libertad independientemente. Para la proyección de cada grado de libertad, en sistemas acotados

sólo dos tipos de trayectorias pueden ocurrir: oscilaciones y rotaciones, como en el caso del diagrama de fases del péndulo (Fig. 15). Esto significa que en cada grado de libertad el sistema es periódico, *i.e.*, regresa a su estado original cíclicamente. Pero esto no ocurre de manera sincronizada para todos los grados de libertad al mismo tiempo, y generalmente el sistema no vuelve exactamente a su estado inicial en ningún tiempo  $t$  (con dos grados de libertad tenemos la geometría de un toro de radios  $I_{1,2}$  representada en Fig. 16)<sup>20</sup>.

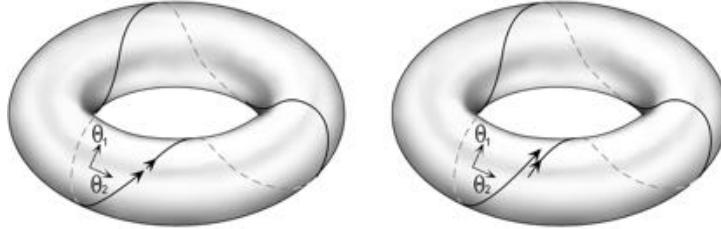


Figure 16: Proyección para dos grados de libertad de las variables de acción-ángulo. Los radios corresponden a las variables de acción.

En nuestro caso  $I_\phi$  corresponde al momento angular  $L$ :

$$\Delta W_\phi = \int_{-\pi}^{\pi} p_\phi d\phi = 2\pi I_\phi = 2\pi m r_0^2 \dot{\phi} = 2\pi L. \quad (5.35)$$

En función de la variable de acción la energía se escribe ( $r_0$  corresponde al mínimo del potencial efectivo<sup>21</sup>)

$$E = -\frac{Ze^2}{2r_0} = -\frac{mZ^2e^4}{2I_\phi^2}. \quad (5.36)$$

La variable de ángulo es  $\phi_\nu(t) = \omega_\phi t + \phi_\nu(0)$  con la frecuencia

$$\omega_\phi = \frac{\partial E}{\partial I_\phi} = \frac{mZ^2e^4}{I_\phi^3}. \quad (5.37)$$

**Ejercicio 1.2.3<sup>(\*)</sup>** Calcular la variable de acción para un oscilador armónico simple y la variable de ángulo asociada. Escribir el Hamiltoniano en función de estas variables.

♣ entrega el 6/3

<sup>20</sup>En este punto es interesante intentar entender el teorema de Kolmogórov-Arnold-Moser para la estabilidad de sistemas dinámicos

<sup>21</sup>

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r} \\ \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= 0 = -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{Ze^2}{r_0^2} \\ r_0 &= \frac{L^2}{mZe^2} = \frac{I_\phi^2}{mZe^2} \end{aligned}$$

**Trabajo(\*)** Explicar y derivar la fórmula de Larmor para la pérdida de energía de una partícula con carga  $q$  y aceleración  $a$  en forma de radiación electromagnética (en unidades del sistema internacional),

$$\frac{dU}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (5.38)$$

Voluntario

En una formulación clásica, una partícula cargada y en movimiento periódico emite radiación con una frecuencia de radiación que es un múltiplo de  $\omega_\phi$  y con la aceleración centrípeta del electrón forzándole a perder energía de forma continua hasta que cae sobre el núcleo.

Sin embargo, se puede comprobar empíricamente que existen átomos en estados estables que no radian durante un tiempo arbitrario. Además, cuando los átomos emiten radiación no lo hacen con una frecuencia proporcional a  $\omega_\phi$ . Al estudiar experimentalmente los espectros de emisión y absorción de luz

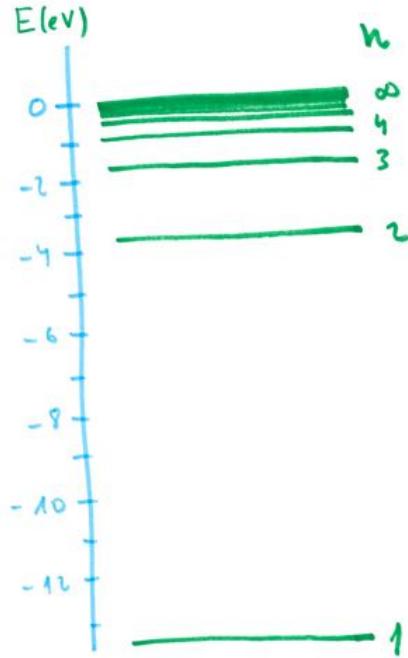


Figure 17: Espectro de radiación en el átomo de hidrógeno (Balmer)

por materia aparecen discontinuidades. El espectro de radiación absorbida y emitida por un átomo indica de manera unívoca la naturaleza de su interacción con la radiación. El ejemplo más sencillo es el del hidrógeno (un protón más

un electrón) cuyo espectro de frecuencias,  $\nu$ , absorbidas satisface la fórmula de Rydberg (ver Fig. 17):

$$\nu = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (5.39)$$

con enteros positivos  $m > n$  y  $R$  (constante de Rydberg  $R = 10967758.341 \pm 0.001 \text{ m}^{-1}$ ) siendo característica del hidrógeno. Para átomos más complejos existen fórmulas parecidas que no tienen acomodo en la teoría clásica de la radiación de Rutherford.

Fin de clase 9

## 5.1 Teoría Cuántica Antigua

En 1913 Bohr explica las líneas espectrales introduciendo la idea de cuantización de los niveles de energía atómicos: sólo existen un cierto número de estados estacionarios con energía determinada. Cuando lo radiamos el átomo puede realizar una transición a un átomo de energía superior absorbiendo un fotón con energía  $h\nu$  siguiendo la regla

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}}. \quad (5.40)$$

donde  $h = 6.626070150(69) \times 10^{-34} \text{ Js}$  se conoce como constante de Planck.

En el proceso inverso el átomo emite un fotón con frecuencia  $\nu$ . La estabilidad atómica se obtiene cuando alcanza su estado energético más bajo (estado fundamental). De esta manera se explican las líneas espectrales. Para el hidrógeno los niveles de energía que reproducen la fórmula de Balmer son

$$E_n = -R \frac{h}{n^2}. \quad (5.41)$$

Frank y Hertz (1914) colisionaron electrones y átomos estudiando la diferencia en energía cinética de los electrones tras la colisión. Corroboraron la existencia de niveles cuantizados de energía en el átomo, que también tiene lugar a nivel molecular.

La aparición de cuantizaciones en diversas cantidades físicas impide la descripción de su evolución temporal en términos de una teoría clásica. La escuela de Bohr (junto con Kramers y Sommerfeld) introdujo la llamada Teoría Antigua de los Cuantos, que es un precursor de la moderna Mecánica Cuántica, para intentar describir el fenómeno de las transiciones cuánticas. Se basaban en el *Principio de Correspondencia* (1923) donde debe existir una analogía formal entre la teoría clásica y la teoría cuántica dado que la primera es macroscópicamente correcta, *i.e.* en el límite de grandes números cuánticos la segunda debe tender a la primera. De todas las soluciones de las ecuaciones del movimiento clásicas sólo son físicas aquellas que satisfacen unas reglas de cuantización introducidas para describir los resultados experimentales. Cada una de estas soluciones tiene una energía asociada que se manifiesta en determinados valores discretos. Lo mismo ocurre para las demás constantes del movimiento.

La *regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld* consiste en requerir que el área acotada por una trayectoria en el espacio de fases sólo pueda tomar valores discretos, *i.e.*,

$$\oint p_i dq_i = n_i h, \quad n_i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.42)$$

Para el oscilador armónico tenemos que

$$\oint dq p = 2\pi \frac{E}{\omega}, \quad (5.43)$$

con la frecuencia siendo

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (5.44)$$

De esta manera

$$E_n = nh\nu, \quad (5.45)$$

*i.e.*, tenemos una discretización de la energía. Esto implica que sólo ciertas trayectorias están permitidas en el espacio de fases: aquellas elipses de energía  $E_n$  cuyas áreas difieren en una cantidad  $h$  (ver Fig. 18). La energía emitida o absorbida al pasar de una trayectoria a otra es

$$E_n - E_m = (n - m)h\nu. \quad (5.46)$$

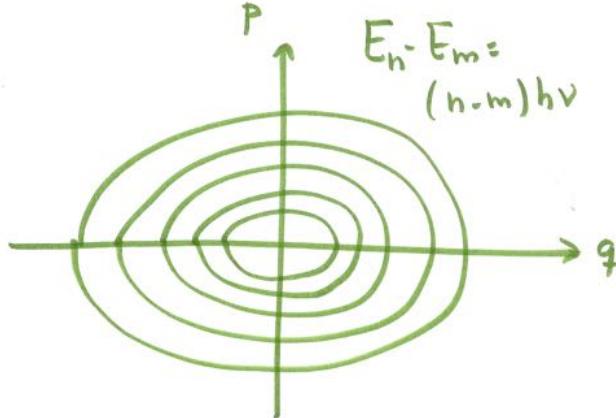


Figure 18: Discretización del espacio de fases.

Como  $h$  es tan minúscula la estructura discreta del espacio de fases es relevante sólo en procesos atómicos, mientras que en procesos macroscópicos las trayectorias son muy densas y se pueden tomar como continuas.

**Ejercicio 1.2.4** Escribir el Lagrangiano, Hamiltoniano, ecuaciones de Hamilton y constantes del movimiento para una partícula en el potencial  $V(r) = -e^2/r$ . Utilizando la condición de cuantización de la integral de fase encontrar las energías de los estados ligados del átomo de hidrógeno.

♣ entrega el 6/3

Uno de los éxitos del Principio de Correspondencia es que permite calcular la constante de Rydberg con mucha precisión. Como hemos visto, la interacción entre el electrón y el protón se describe con un potencial de Coulomb ( $-e^2/r$ ).

**Ejercicio 1.2.5** Demostrar que la frecuencia del movimiento del electrón con masa  $m$  y carga  $e$  con una órbita de energía  $E < 0$  se puede escribir como

$$\nu = \frac{1}{\pi e^2} \sqrt{\frac{2|E|^3}{m}}. \quad (5.47)$$

♣ entrega el 6/3

En la formulación clásica este electrón emite radiación de forma continua haciendo decrecer la energía  $E$ . Para niveles de excitación altos ( $n$  grande) la transición en energías entre distintos niveles es casi continua y debería coincidir con la fórmula clásica si seguimos el principio de correspondencia. Podemos usar la fórmula experimental de Balmer donde vemos que la distancia en energía desde el nivel con  $E_n$  a un nivel muy cercano  $E_{n+\Delta n}$  cumpliendo que  $n \gg \Delta n \geq 1$  es

$$\Delta E = Rh \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n + \Delta n)^2} \right) \simeq h \frac{2R}{n^3} \Delta n. \quad (5.48)$$

La frecuencia asociada al fotón emitido es un múltiplo de  $\nu = 2R/n^3$  que podemos reescribir, usando Ec. (5.41)<sup>22</sup>, como

$$\nu = 2 \sqrt{\frac{|E_n|^3}{h^3 R}}. \quad (5.49)$$

Cuando  $n$  es muy grande la degradación en energía tiene lugar a través de una sucesión de muchos saltos cuánticos muy pequeños correspondientes a la emisión de fotones de energía muy baja. El principio de correspondencia implica (Ejercicio 1.2.5.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{\frac{|E_n|^3}{h^3 R}} = \frac{1}{\pi e^2} \sqrt{\frac{2|E|^3}{m}}, \quad (5.50)$$

y nos lleva a la predicción:

$$R = \frac{2m\pi^2 e^4}{h^3} \quad (5.51)$$

---

<sup>22</sup>

$$n = \sqrt{\frac{Rh}{|E_n|}}$$

que coincide con el resultado experimental con gran precisión.

Siguiendo razonamientos parecidos se puede describir correctamente la estructura espectral de muchos sistemas atómicos y moleculares con pequeñas modificaciones. Sin embargo, aquellos sistemas que no manifiestan periodicidad, como las trayectorias de electrones en choques inelásticos con átomos, no se pueden describir dentro de este esquema de cuantización.

Fin de clase 10

## 6 Radiación de cuerpo negro

Serias dudas sobre el formalismo clásico aparecen al estudiar la interacción entre materia y radiación en detalle. El primer ejemplo aparece al investigar el espectro de radiación cuando ésta se encuentra en equilibrio termodinámico con la materia, este es el caso de un cuerpo negro (término propuesto por Kirchhoff en 1862). Como sabemos, si sobre una superficie incide energía radiante parte se refleja y parte se transmite (es absorbida por los átomos de la superficie). Un cuerpo negro absorbe toda la radiación que recibe pero a su vez tiene un espectro de emisión bien definido asociado a su temperatura. Aunque no existe el cuerpo negro perfecto lo más parecido sería una cavidad a temperatura constante con un agujero que permite entrar luz en su interior y donde casi toda la energía se absorbe y muy poca sale de nuevo por el agujero (Fig. 19). Si fijamos

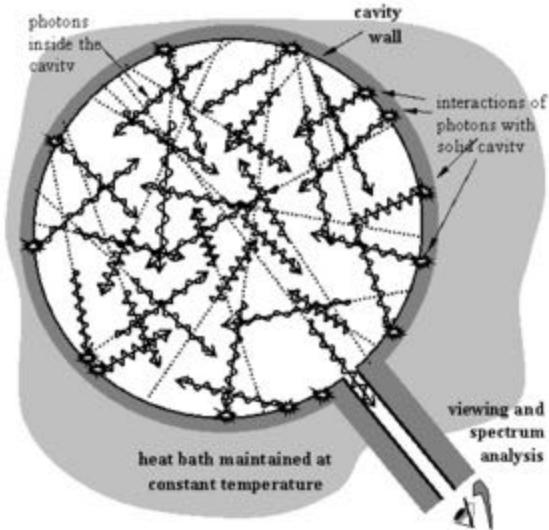


Figure 19: Representación de un cuerpo negro.

la temperatura de las paredes,  $T$ , los átomos de la cavidad emiten radiación

electromagnética y absorben la emitida por otras paredes. Pasado un tiempo este sistema se equilibra y la densidad de energía del campo electromagnético es constante en la cavidad. Debido a este equilibrio termodinámico la única variable relevante debe ser la temperatura. A cada frecuencia de radiación corresponde una densidad de energía que depende de  $T$ , independientemente del material que forme las paredes. La radiación que sale por el agujero de esta cavidad es más intensa si  $T$  es alta y más débil si  $T$  es baja.

Los argumentos clásicos basados en termodinámica estadística donde la radiación en la cavidad está en equilibrio con los átomos de las paredes, considerados como osciladores armónicos de frecuencia  $\nu$ , dan resultados erróneos al intentar explicar la distribución de frecuencias emitidas por el cuerpo negro. Planck, en 1900, propone una solución radical: el mecanismo de absorción y emisión de energía entre materia y radiación no ocurre de manera continua. Existe un cuantos de energía,  $E_\nu = h\nu$ , proporcional a la frecuencia de la radiación. Cada oscilador en la pared absorbe o emite en cuantos de  $E = h\nu$ . El espectro de radiación del cuerpo negro:

$$\frac{dE}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} [Jm^{-3}s] \quad (6.1)$$

se puede describir usando esta hipótesis cuántica simplemente ajustando el valor de la constante de Planck:  $\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  ( $k = 1.3805 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  es la constante de Boltzmann).

Analicemos esto con un poco de detalle. La densidad de energía electromagnética dentro de una cavidad a temperatura  $T$  se puede escribir como

$$u_{\text{rad}} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega, \quad (6.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del espectro de radiación y  $\omega$  la frecuencia de la radiación.  $\rho$  es independiente del material de la cavidad y sólo depende de su temperatura. Para Planck la energía de los objetos microscópicos sólo puede tener valores discretos. Asumiendo que la energía de un oscilador es

$$E_n = n\hbar\omega = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

obtuvo la siguiente densidad espectral

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)}, \quad (6.4)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y está representada en Fig. (20). Así obtenemos la ley de Stefan-Boltzmann para la radiación de un cuerpo negro, que ya se conocía (se utilizó para obtener una primera estimación de la temperatura del sol en su superficie):

$$u_{\text{rad}} = \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} T^4 = \frac{4\sigma}{c} T^4. \quad (6.5)$$

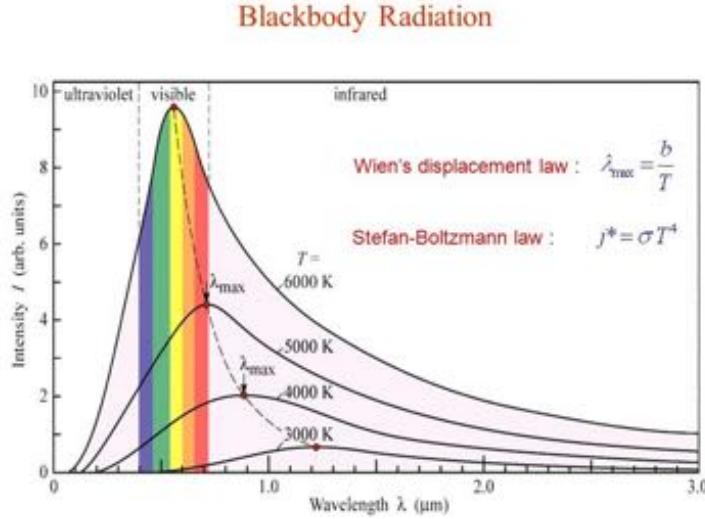


Figure 20: Densidad de energía electromagnética emitida por un cuerpo negro a distintas temperaturas como función de la longitud de la onda emitida. Se incluye el espectro visible.

La constante de Stefan-Boltzmann es  $\sigma = 5.67 \times 10^{-5} \cdot \text{sec}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$ . También era muy conocida la ley del desplazamiento de Wien para el máximo de la distribución:

$$\lambda_{\max}T = \frac{2\pi c\hbar}{4.965k} = b, \quad (6.6)$$

donde la constante de Wien es  $b = 0.29 \text{ cm} \cdot \text{K}$ . Esta ley la cumple, por ejemplo, una barra de hierro cuando la calentamos ya que puede pasar del rojo al azul al incrementar  $T$ . En astronomía podemos medir el máximo de la distribución de la luz procedente de una estrella en función de su longitud de onda y así deducir su temperatura<sup>23</sup>.

De esta manera Planck dedujo que  $h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s}$ . En lugar de derivar el resultado clásico directamente podemos simplemente tomar el límite  $h \rightarrow 0$  en el resultado de Planck y obtener la misma fórmula para la densidad espectral:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT, \quad (6.7)$$

que es la fórmula de Rayleigh-Jeans y es una buena aproximación para longitudes de onda grandes pero no en la zona ultravioleta. De ella podemos ver el

---

<sup>23</sup>Alfa Centauri tiene un pico en 300 nm y nos llega su luz con intensidad  $0.01 \text{ W m}^{-2}$

problema de la formulación clásica:

$$u_{\text{rad}} = \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega = \infty, \quad (6.8)$$

la densidad de energía electromagnética es infinita y no se sabe como describir un equilibrio termodinámico entre materia y radiación con el formalismo clásico. Este resultado se conoce como *catástrofe ultravioleta*.

Fin de clase 11

## 7 La ecuación de Schrödinger

Como sabemos, la trayectoria que sigue un sistema en el espacio de configuración  $(q(t), t)$  es la de acción

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^t dt' L(q, \dot{q}, t') \quad (7.1)$$

estacionaria. Consideremos esta acción como una función de  $q$  y  $t$  y el ejemplo sencillo de una partícula libre en una dimensión que evoluciona de  $(q_0, t_0)$  a  $(q, t)$  con velocidad constante  $(q - q_0)/(t - t_0)$ . El Lagrangiano es constante ya que sólo depende de la velocidad y escribimos

$$S(q, t) = \frac{m}{2} \left( \frac{q - q_0}{t - t_0} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' = \frac{m}{2} \frac{(q - q_0)^2}{t - t_0}. \quad (7.2)$$

Sus derivadas son interesantes:

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial q} = m \left( \frac{q - q_0}{t - t_0} \right) = p, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = -\frac{m}{2} \left( \frac{q - q_0}{t - t_0} \right)^2. \quad (7.4)$$

El Hamiltoniano es

$$H(q, p; t) = p \dot{q} - L = p \left( \frac{q - q_0}{t - t_0} \right) - \frac{m}{2} \left( \frac{q - q_0}{t - t_0} \right)^2 \quad (7.5)$$

$$= \frac{p^2}{2m} = \frac{m}{2} \left( \frac{q - q_0}{t - t_0} \right)^2, \quad (7.6)$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = -H(q, p; t). \quad (7.7)$$

Esta ecuación es genérica y en el caso de un Hamiltoniano independiente del tiempo podemos escribirla en la forma

$$H \left( q, \frac{\partial S}{\partial q} \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (7.8)$$

En general es posible utilizar separación de variables:

$$S(q, t) = W(q) + T(t) \quad (7.9)$$

y tenemos que

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = -\frac{\partial T(t)}{\partial t} = E. \quad (7.10)$$

A la ecuación  $H = E$  se la llama ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo. Ahora podemos escribir

$$S(q, t) = W(q) - E t. \quad (7.11)$$

y

$$p = \frac{\partial W(q)}{\partial q}. \quad (7.12)$$

Si analizamos el caso de una partícula en una dimensión y en un potencial  $V(x)$  tenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo:

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{1}{2m} \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 + V(x) = E. \quad (7.13)$$

En el caso tridimensional escribimos

$$\frac{1}{2m} \sum_{\eta=x,y,z} \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + V(\vec{r}) = \frac{1}{2m} |\vec{\nabla}W|^2 + V(\vec{r}) = E, \quad (7.14)$$

y

$$\vec{p}(\vec{r}) = \vec{\nabla}W(\vec{r}), \quad (7.15)$$

$$p(\vec{r}) = |\vec{p}(\vec{r})| = \sqrt{2m(E - V(\vec{r}))}, \quad (7.16)$$

Podemos establecer una conexión interesante con mecánica de ondas si interpretamos las superficies con  $W$  constante como superficies de fase constante en óptica, ambas atravesadas por líneas perpendiculares correspondiendo a trayectorias de partículas o rayos respectivamente (Fig. 21).

En general, una onda con frecuencia angular  $\omega$  propagándose en un medio con un índice de refracción

$$n(\vec{r}) = \frac{c}{v(\vec{r})} \quad (7.17)$$

tiene el número de onda

$$k(\vec{r}) = \frac{\omega}{v(\vec{r})} = \frac{n(\vec{r})\omega}{c}. \quad (7.18)$$

La correspondiente parte espacial de la función de onda (veremos esto en detalle más adelante) satisface

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0. \quad (7.19)$$

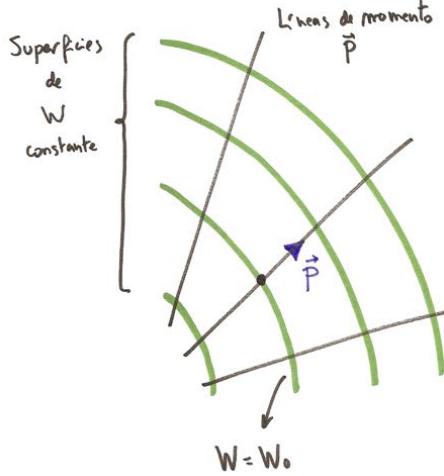


Figure 21: Superficies de  $W$  constante y líneas de momento  $\vec{p}$ .

**Ejercicio 1.2.6** Demostrar que la solución de la forma

$$\psi(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{i\phi(\vec{r})} \quad (7.20)$$

implica que

$$|\vec{\nabla}\phi|^2 = k^2 + \frac{1}{A}\vec{\nabla}^2 A, \quad (7.21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (A^2 \vec{\nabla}\phi) = 0. \quad (7.22)$$

♣ 24 entrega el 6/3

Fin de clase 12

En este punto parece necesario derivar la ecuación de ondas. Consideremos el caso de la cuerda discreta que fue estudiado por Newton (1687) y por los Bernoulli (1753). Consideremos una cuerda de tensión  $\tau$  constante con  $n$  masas puntuales  $m$  separadas entre sí por una distancia  $d$ . Los dos extremos de la cuerda están fijos a dos paredes. Estudiemos oscilaciones transversales pequeñas (las longitudinales se pueden ignorar en el análisis más simple, ver Fig. 22).

24

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}^2 + k^2)\psi(\vec{r}) &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) Ae^{i\phi} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial A}{\partial x} + iA \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) e^{i\phi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\partial A}{\partial y} + iA \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) e^{i\phi} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \frac{\partial A}{\partial z} + iA \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) e^{i\phi} \right) + k^2 Ae^{i\phi} &= 0. \end{aligned}$$

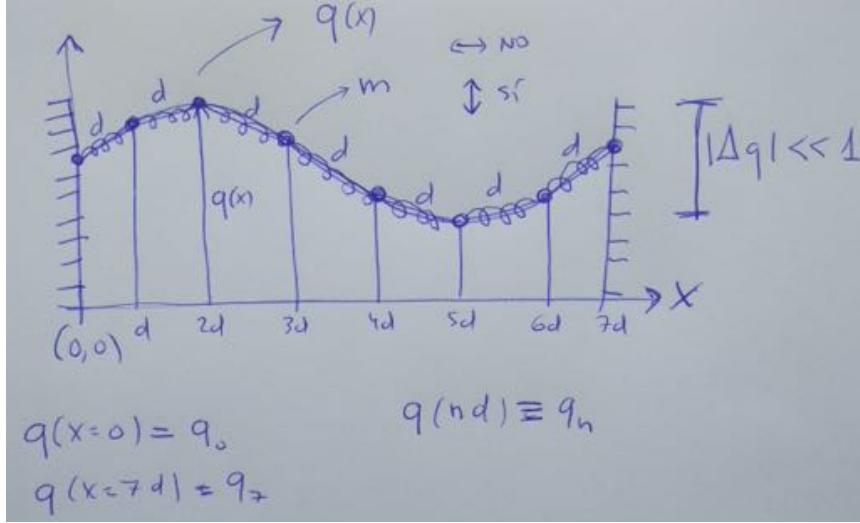


Figure 22: Discretización de la cuerda para estudiar sus modos transversales

Una derivada más:

$$\left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + iA \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - A \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + i2 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + iA \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - A \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + i2 \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + iA \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - A \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + k^2 A \right) e^{i\phi} = 0$$

Reescribimos como parte real e imaginaria:

$$\left( \vec{\nabla}^2 A - A |\vec{\nabla} \phi|^2 + k^2 A \right) + i \left( A \vec{\nabla}^2 \phi + 2 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} \phi \right) = 0.$$

Esta relación se cumple si la parte real y la imaginaria son cero simultáneamente:

$$\vec{\nabla}^2 A - A |\vec{\nabla} \phi|^2 + k^2 A = 0, \\ A \vec{\nabla}^2 \phi + 2 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} \phi = 0.$$

La primera ecuación se puede escribir en la forma

$$|\vec{\nabla} \phi|^2 = \frac{\vec{\nabla}^2 A}{A} + k^2.$$

Usando  $\partial_x(A^2 \partial_x \phi) = A(2(\partial_x A)(\partial_x \phi) + A \partial_x^2 \phi)$  la segunda ecuación se escribe como

$$\vec{\nabla} \cdot (A^2 \vec{\nabla} \phi) = 0.$$

Si la posición transversal de la masa  $i$  es  $q_i$  tenemos que la energía potencial asociada a la cuerda es ( $q_0 = q_{n+1} = 0$ )

$$V = \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} \sum_{j=1}^{n+1} (q_{j-1} - q_j)^2 \quad (7.23)$$

y la cinética

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^n \dot{q}_j^2. \quad (7.24)$$

El Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left( m \dot{q}_j^2 - \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - q_j)^2 \right), \quad (7.25)$$

con ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (7.26)$$

implicando

$$m \ddot{q}_j = \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}). \quad (7.27)$$

Podríamos resolver este sistema de ecuaciones acopladas pero nuestro interés está en estudiar el límite con un número infinito de masas separadas por una distancia cero. Para ello tenemos que escribir diferencias de posiciones de tal manera que obtengamos derivadas (ver Fig. 23). Escribimos

$$\frac{m}{d} \ddot{q}_j = \frac{\tau}{d} \left( \frac{q_{j-1} - q_j}{d} \right) - \frac{\tau}{d} \left( \frac{q_j - q_{j+1}}{d} \right), \quad (7.28)$$

y vemos que (estas formulas son equivalentes a las de la figura anterior, el límite al continuo es el mismo)

$$\frac{q_j - q_{j+1}}{d} \rightarrow \frac{q(x) - q(x+d)}{d} \rightarrow - \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x+\frac{d}{2}}, \quad (7.29)$$

$$\frac{q_{j-1} - q_j}{d} \rightarrow \frac{q(x-d) - q(x)}{d} \rightarrow \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x-\frac{d}{2}}. \quad (7.30)$$

Por tanto

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\tau}{d} \left( \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x+\frac{d}{2}} - \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{x-\frac{d}{2}} \right) = \tau \left. \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right|_x = \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \quad (7.31)$$

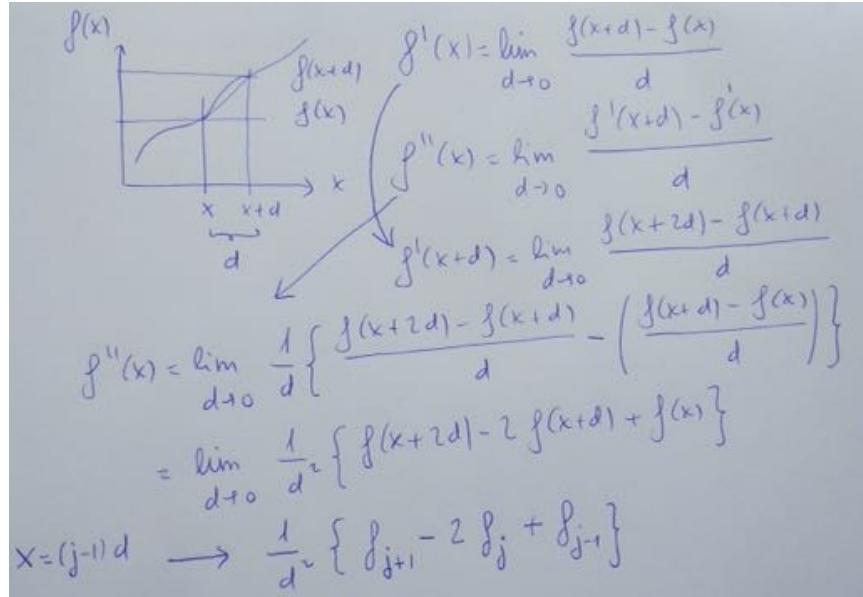


Figure 23: Versión discreta de la segunda derivada

Como  $m/d = \rho$ , la densidad de la cuerda, tenemos que la ecuación del movimiento es

$$\rho \ddot{q} = \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}. \quad (7.32)$$

De otra manera

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \quad (7.33)$$

Dimensionalmente tenemos  $[\rho] = M/L$ ,  $[\tau] = ML/T^2$ , y  $[\rho/\tau] = T^2/L^2$  tiene unidades de velocidad $^{-2}$  y podemos escribir (cambiando de nombre a las posiciones transversales)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (7.34)$$

Fijar la cuerda en el extremo con  $x = 0$  es equivalente a decir que el desplazamiento de la cuerda en el punto  $x = 0$  es cero. La solución más general (ver Fig. 24) para la ecuación de la vibración de una cuerda se construye con

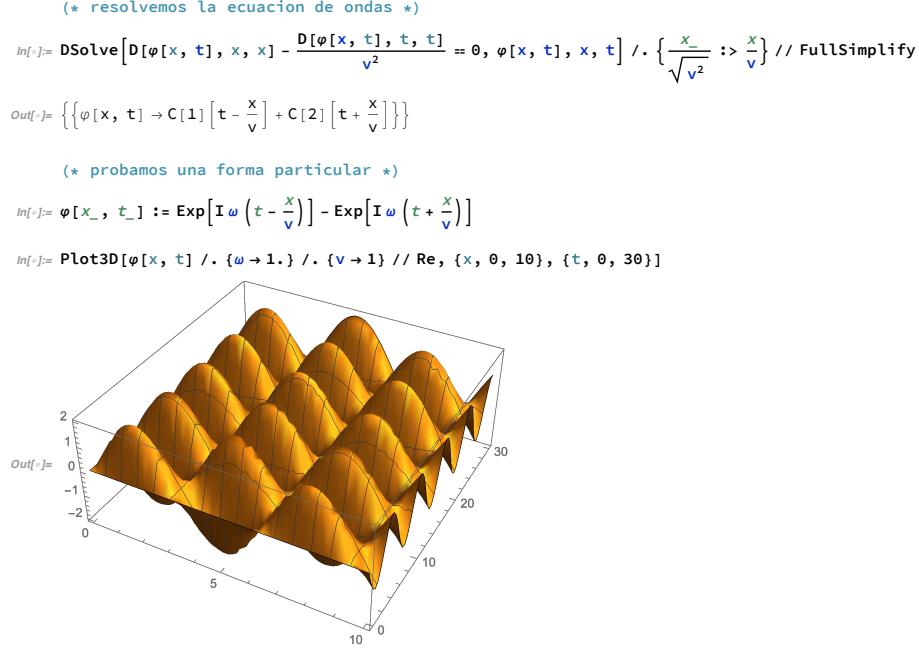


Figure 24: Solución para la ecuación de ondas

una onda viajando hacia  $x > 0$  y otra hacia  $x < 0$ <sup>25</sup>:

$$\Psi(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt). \quad (7.35)$$

Para cumplir la condición en  $x = 0$ :

$$\Psi(0, t) = F(-vt) + G(vt) = 0 \quad (7.36)$$

que se debe cumplir para todo  $t$  implicando que  $-F(-z) = G(z)$ . Por tanto,

$$\Psi(x, t) = F(x - vt) - F(-x - vt). \quad (7.37)$$

<sup>25</sup>Vemos que es solución de la ecuación si usamos la regla de la cadena en la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= F'(x - vt) \times \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} + G'(x + vt) \times \frac{\partial(x + vt)}{\partial x} \\
 &= F'(x - vt) \times 1 + G'(x + vt) \times 1 \\
 \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= F'(x - vt) \times \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} + G'(x + vt) \times \frac{\partial(x + vt)}{\partial t} \\
 &= F'(x - vt) \times (-v) + G'(x + vt) \times v
 \end{aligned}$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= F''(x - vt) + G''(x + vt) \\
 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= F''(x - vt) \times (-v)^2 + G''(x + vt) \times v^2
 \end{aligned}$$

Esto implica que cuando la onda alcanza el extremo fijo de la cuerda simplemente se reflejará cambiando de signo (ver el ejemplo de la Fig. 25).

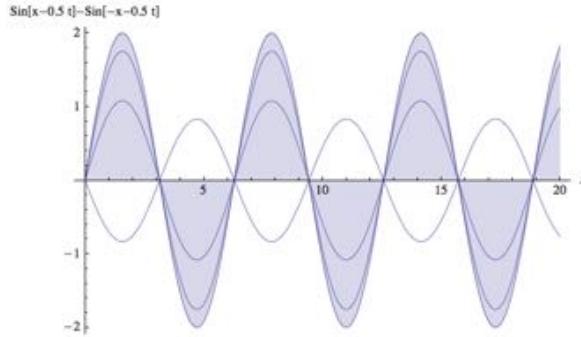


Figure 25: Reflexión de onda en el punto  $x = 0$ .

Una manera útil de escribir la solución de la ecuación de ondas es

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{i\omega t}, \quad (7.38)$$

donde

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \psi(x) = 0 \quad (7.39)$$

se llama la ecuación de ondas unidimensional independiente del tiempo (ondas estacionarias), propuesta por Helmholtz para ondas sonoras en 1859.  $k = \omega/v$  es la constante de propagación o número de onda (número de longitudes de onda por unidad de longitud), con dimensiones  $[k] = 1/L$  (esto lo vemos en la última ecuación igualando unidades:  $L^{-2} = [k]^2 \rightarrow [k] = L^{-1}$ ). La longitud de onda es  $\lambda = 2\pi v/\omega$  (con unidades  $[\lambda] = 1/[k] = L$ ) y, por tanto,  $k = 2\pi/\lambda$ . Para encontrar la onda estacionaria introducimos  $\psi(x) = e^{rx}$  y obtenemos <sup>26</sup>:

$$r^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \longrightarrow r = \pm i \frac{\omega}{v}. \quad (7.40)$$

---

<sup>26</sup>Un número complejo (el nombre se debe a Gauss (1831)) se compone de un par ordenado de números reales  $z = x + iy$  donde  $i = \sqrt{-1}$ . Su módulo es  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Su parte real es  $\Re(z) = x$  y su parte imaginaria es  $\Im(z) = y$ . Su complejo conjugado es  $z^* = x - iy$  (Fig. 26). Propiedades útiles son  $zz^* = |z|^2$ ,  $z+z^* = 2\Re(z) = 2x$  y  $z-z^* = 2i\Im(z) = 2iy$ . Tienen una representación geométrica llamada diagrama de Argand donde  $|z| = r$ ,  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Las expansiones de Taylor para la función exponencial, el seno y el coseno, nos permiten escribir

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos(z) + i \sin(z). \end{aligned}$$

La solución general es, por tanto,

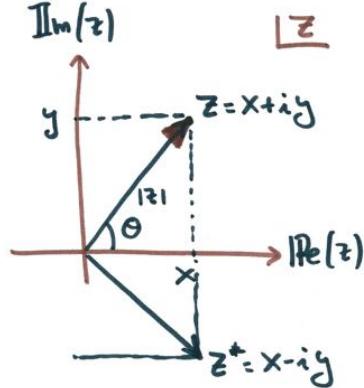


Figure 26: Componentes en el plano complejo del número  $z = x + iy$ .

$$\Psi(x, t) = e^{\pm i \frac{\omega}{v} x + i \omega t} = e^{i(\omega t \pm k x)}. \quad (7.41)$$

Esta representación corresponde a  $F(x - vt) = e^{i\omega(t-x/v)}$  y  $F(-x - vt) = e^{i\omega(t+x/v)}$ . Si insistimos en que la cuerda no se mueva en  $x = 0$  entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= F(x - vt) - F(-x - vt) = e^{i\omega t} (e^{-i\frac{\omega x}{v}} - e^{i\frac{\omega x}{v}}) \\ &= -2ie^{i\omega t} \sin\left(\frac{\omega x}{v}\right). \end{aligned} \quad (7.42)$$

La frecuencia es la misma para cualquier  $x$  y en los puntos donde  $\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) = 0$  la cuerda se mantiene fija, no se mueve. Estos puntos se llaman nodos de vibración y están en  $x = n\frac{\pi v}{\omega}$  con  $n$  entero.

Esto define los distintos modos de vibración de la cuerda. Este tipo de nodos, para el caso del sonido con la misma onda reflejada, se manifiestan de una manera muy interesante en <https://www.youtube.com/watch?v=669AcEBpdsY>. Los nodos se encuentran en las zonas donde las gotas permanecen estables. La distancia entre ellos se mide en unidades de  $\pi/k$  dado que  $x = n\pi v/\omega = n\pi/k$  y  $k^{-1}$  tiene unidades de longitud.

Es posible introducir una ligadura más y fijar la cuerda también en  $x = L$ . Intuitivamente vemos que el movimiento de la cuerda debe ser una superposición del movimiento reflejado en cada uno de los extremos. Esto es particularmente interesante si la perturbación inicial tiene forma sinusoidal periódica  $\sin(kx)$  tal

---

Por tanto, tenemos que  $e^{-iz} = \frac{1}{\cos(z) + i \sin(z)} = \frac{\cos(z) - i \sin(z)}{(\cos(z) + i \sin(z))(\cos(z) - i \sin(z))} = \frac{\cos(z) - i \sin(z)}{(\cos(z))^2 - (i \sin(z))^2} = \cos(z) - i \sin(z)$ , y podemos deducir las fórmulas de Euler:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Fin de clase 13

que se ajusta perfectamente a las ligaduras de la cuerda  $\sin(0) = \sin(kL) = 0$ : continuará teniendo la misma forma y oscilará constituyendo lo que se conoce como una onda armónica. Necesitaremos que  $\frac{\omega L}{v} = kL = n\pi$ , con  $n$  entero. El espectro discreto de frecuencias asociadas, características del sistema vibrante, es

$$\omega = kv = n\pi \frac{v}{L} \equiv \omega_n. \quad (7.43)$$

Las longitudes de ondas correspondientes son

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n}. \quad (7.44)$$

De esta manera la cuerda puede tener movimiento sinusoidal pero sólo a ciertas frecuencias que dependen de las condiciones de contorno. Hay muchas frecuencias posibles y cada una corresponde a un modo de vibración distinto. Para el primer modo de vibración  $n = 1$ ,  $\lambda_1 = 2L$  y  $\omega_1 = \pi \frac{v}{L}$ . Para el segundo  $n = 2$ ,  $\lambda_2 = L$  y  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Para el tercero  $n = 3$ ,  $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$  y  $\omega_3 = 3\omega_1$ .

Estudiemos la gráfica con los primeros modos de vibración de la cuerda con extremos fijos. Como ejemplo utilizamos la función  $\cos\left(\frac{\pi n(tv-x)}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi n(tv+x)}{L}\right)$ . Mostramos las gráficas para cada modo en Fig. 27. En los distintos nodos de vibración es donde se colocan las partículas que levitan en  
<https://www.youtube.com/watch?v=669AcEBpdsY>  
[https://www.youtube.com/watch?v=SdX01XRhb\\_4](https://www.youtube.com/watch?v=SdX01XRhb_4).

Los modos de vibración forman una base completa para describir las oscilaciones de la cuerda. Cualquier movimiento de la cuerda se puede analizar asumiendo que está compuesto por la suma de todos los diferentes modos de vibración, cada uno con su propia amplitud y fase. Un ejemplo lo mostramos en Fig. 28. Esto es lo que se conoce como descomposición en oscilaciones armónicas. De esta manera se pueden construir paquetes de ondas:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(\omega t - kx)} dk \quad (7.45)$$

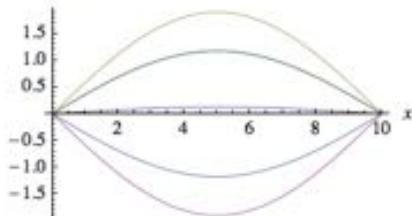
donde a cada onda le asignamos un peso  $A(k)$ <sup>27</sup>.

---

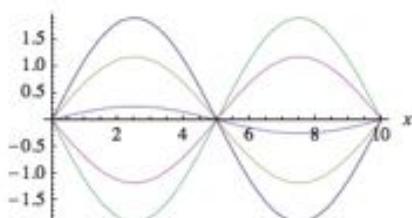
<sup>27</sup>Esta es la representación más general de la solución de la ecuación de ondas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} &= - \int_{-\infty}^{\infty} A(k) k^2 e^{i(\omega t - kx)} dk \\ \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} &= - \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \omega^2 e^{i(\omega t - kx)} dk \\ \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \left( \frac{\omega^2}{v^2} - k^2 \right) e^{i(\omega t - kx)} dk &= 0 \rightarrow k = \frac{\omega}{v} \end{aligned}$$

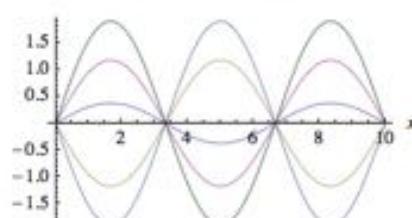
$$\cos\left[\frac{n\pi(tv-x)}{L}\right] - \cos\left[\frac{n\pi(tv+x)}{L}\right] \text{ para } n=1, L=10, v=4, t=.5, .5, 10, 20, 30, 40, 50$$



$$\cos\left[\frac{n\pi(tv-x)}{L}\right] - \cos\left[\frac{n\pi(tv+x)}{L}\right] \text{ para } n=2, L=10, v=4, t=.5, .5, 10, 20, 30, 40, 50$$



$$\cos\left[\frac{n\pi(tv-x)}{L}\right] - \cos\left[\frac{n\pi(tv+x)}{L}\right] \text{ para } n=3, L=10, v=4, t=.5, .5, 10, 20, 30, 40, 50$$



$$\cos\left[\frac{n\pi(tv-x)}{L}\right] - \cos\left[\frac{n\pi(tv+x)}{L}\right] \text{ para } n=4, L=10, v=4, t=.5, .5, 10, 20, 30, 40, 50$$

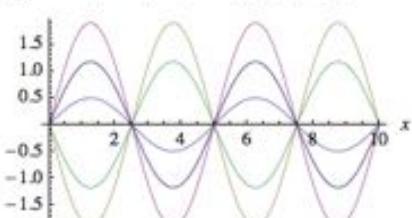


Figure 27: Modos de vibración para una onda estacionaria

$$\varphi[x,t,10,4,1] + .3 \varphi[x,t,10,4,2] + .8 \varphi[x,t,10,4,3]$$

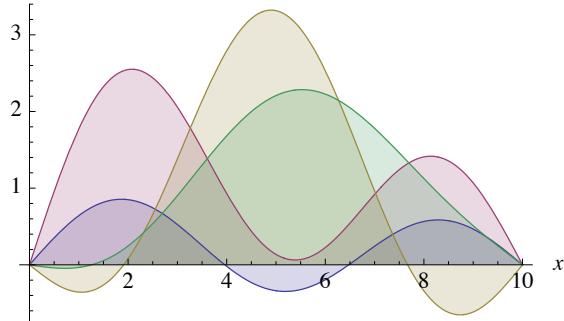


Figure 28: Combinación de tres ondas del tipo  $\cos\left(\frac{\pi n(tv-x)}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi n(tv+x)}{L}\right)$  con distinta amplitud en cada una de ellas.

Todo este análisis se puede extender a dimensión arbitraria. Un ejemplo bidimensional lo encontramos en <https://www.youtube.com/watch?v=1RFysSAxWxI>, donde la sal acumulada en zonas sin movimiento, es un ejemplo de las posiciones de los distintos nodos de vibración. A medida que aumentamos la frecuencia, aumenta el número de nodos (líneas nodales en el caso de dos dimensiones). Como ilustración los tres primeros modos de vibración de la onda  $\cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$  se muestran en Figs. 29, 30 y 31.

Fin de clase 14

## 7.1 Sonido y la ecuación de ondas

El fenómeno de ondas es universal y se manifiesta en muchos contextos diferentes. Nos centraremos ahora en el estudio del sonido, que se propaga en un medio material a través de ondas. A diferencia del oscilador armónico las oscilaciones de onda se propagan en el espacio y no solo alrededor de un punto determinado (el punto de equilibrio del muelle, con elongación cero). Se generan fenómenos de interferencia constructiva y destructiva no solo en el espacio sino también en el tiempo. Otros tipos de ondas se producen en líquidos como el agua. También tenemos ondas elásticas en sólidos (como el ejemplo del puente oscilante en [https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa\\_\\_XWZ8](https://www.youtube.com/watch?v=eAXVa__XWZ8)) que pueden ocurrir en la misma dirección de la propagación de la onda (longitudinales) o perpendicularmente (ambas tienen lugar en un terremoto, por ejemplo).

Una onda que se propaga hacia la derecha (en dirección creciente en una variable  $x$ ) se describe en general con una función que cumple

$$f(x - vt) = f(x + \Delta x - v(t + \Delta t)), \quad (7.46)$$

y, por tanto,

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i\omega(t - \frac{x}{v})} dk$$

Esta sección no es parte del curso

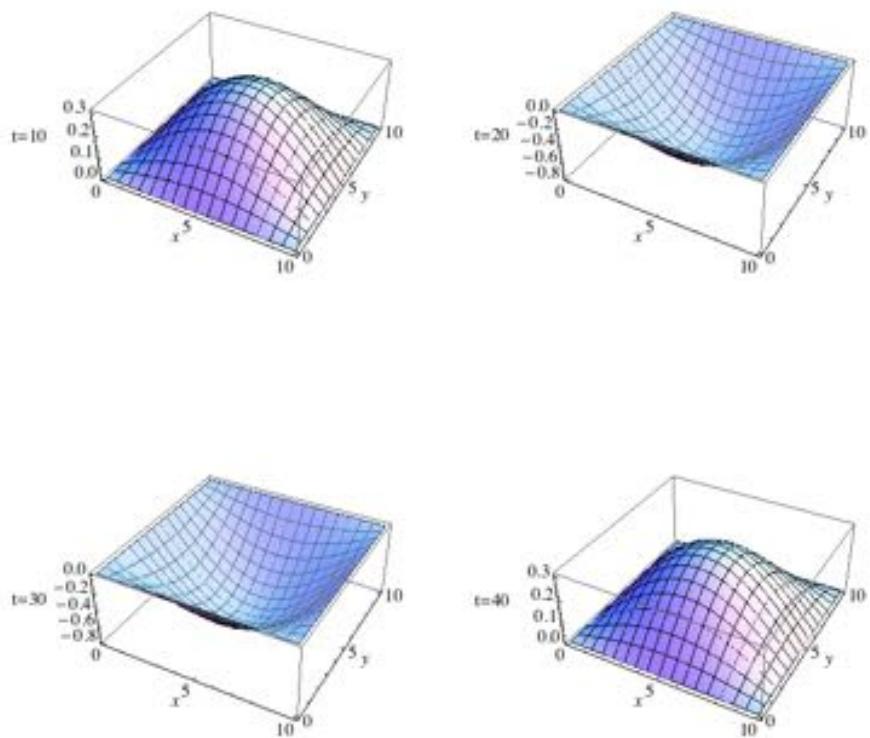


Figure 29: Primer modo de vibración (con  $n = 1$ ) para una onda estacionaria en tres dimensiones

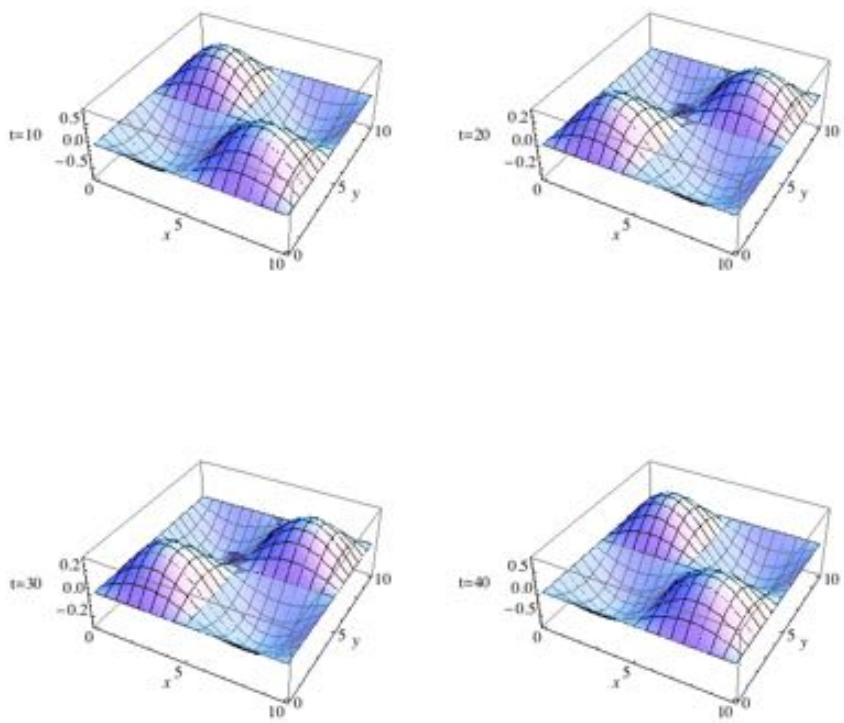


Figure 30: Segundo modo de vibración (con  $n = 2$ ) para una onda estacionaria en tres dimensiones

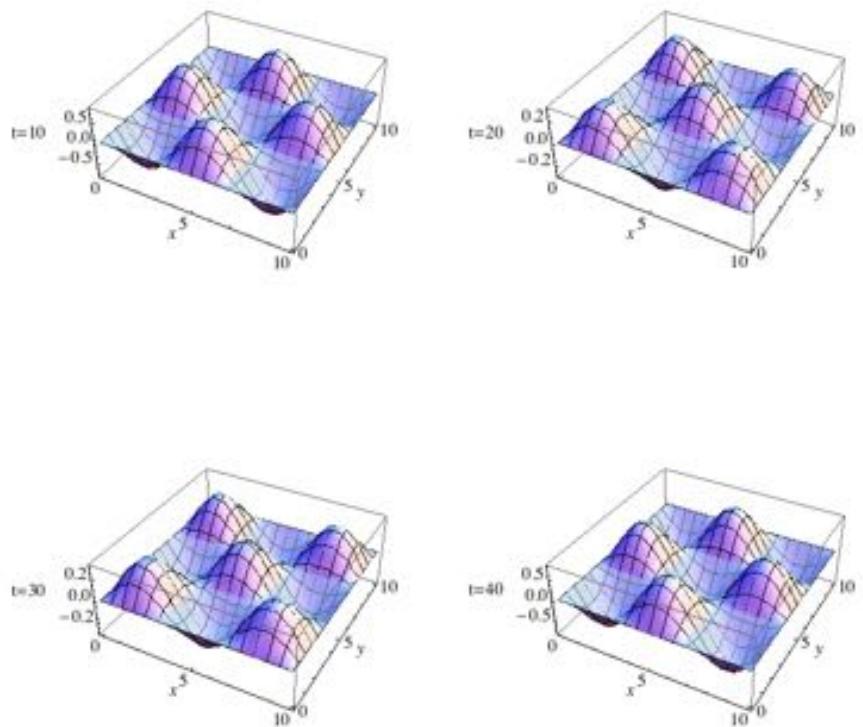
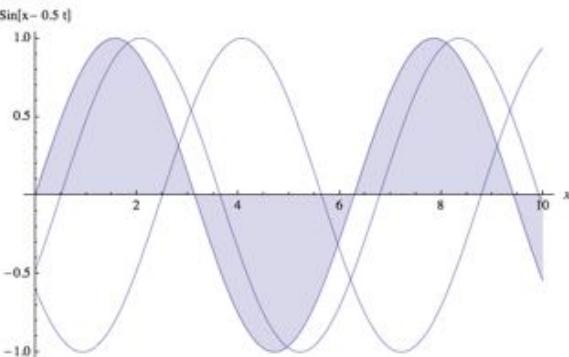


Figure 31: Tercer modo de vibración (con  $n = 3$ ) para una onda estacionaria en tres dimensiones

es decir, su función se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda. La ecuación



$x = v\Delta t$ . Si con  $f(x, t) =$  posición indica

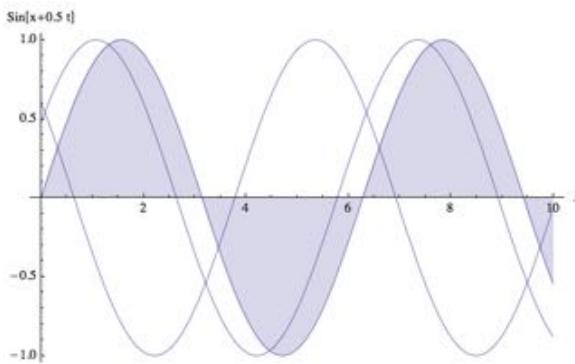


Figure 32: Ondas con velocidad  $v$  con movimiento hacia la derecha e izquierda

que si hay varias ondas en el espacio al mismo tiempo la suma de ellas es también una onda.

En el sonido ondas con frecuencias distintas viajan a la misma velocidad. Para entender como se propaga el sonido en un medio podemos determinar la presión del aire si sabemos el movimiento de la fuente de sonido y el tiempo que tarda en llegar a nuestra posición y haciendo uso de las leyes de Newton. Para simplificar nos ocupamos de propagación en una dimensión. Si nos situamos muy lejos de la fuente de sonido veremos que el frente de onda es muy similar a ondas planas. Esto simplifica nuestra descripción de la onda ya que el desplazamiento de la onda  $\chi$  solo depende de  $x$  y  $t$  y no de otras coordenadas  $y$  o  $z$ . Tenemos que encontrar la ecuación que rige  $\chi(x, t)$  (ver Fig. 33).

Esencialmente lo que ocurre es que si un objeto se mueve en un punto del medio en cuestión (aire, para concretar en un primer análisis) se genera una distorsión que se propaga a través de él. Es razonable pensar que lo que tiene lugar es un cambio en la presión de aire, sobre todo si el movimiento inicial es muy rápido (para que a las moléculas de aire no les de tiempo a redistribuirse y compensar el cambio de presión localmente). Es este cambio de presión lo que se propaga en forma de onda. Nos basamos en tres conceptos: el aire se

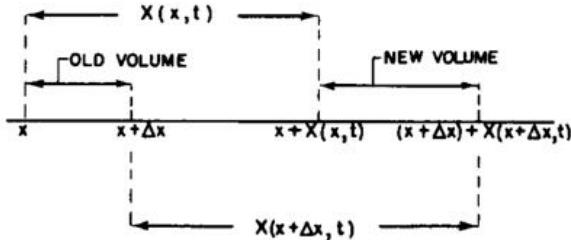


Figure 33: Un volumen de aire cambia de tamaño al recibir una perturbación dependiendo de sus propiedades internas.

mueve y cambia de densidad, este cambio corresponde a un cambio de presión y diferencias de presión generan más movimiento de aire.

Sabemos que en general la presión es una función de la densidad,  $P = f(\rho)$ . Antes de que llegue la onda de sonido, en el punto  $x$  tenemos una densidad  $\rho_0$  y una presión de aire  $P_0 = f(\rho_0)$ . Los cambios de presión en el sonido son muy pequeños comparados con la presión de equilibrio media de 1 atmósfera. Nuestra unidad de presión es el bar =  $10^5 \text{ N/m}^2$  (1 atm = 1.01325 bar = 101325 Pa). Para medir la intensidad del sonido usamos la escala de decibelios donde el nivel de presión acústica  $I$  para la presión  $P$  es

$$I = 20 \log_{10} \left( \frac{P}{2 \times 10^{-10} \text{ bar}} \right) \quad (7.47)$$

y se mide en decibelios. 140 db (0.0002 atmósferas) ya son dolorosos para el oído (ver la tabla en Fig. 34).

Como los cambios de la presión y densidad de equilibrio al llegar la perturbación al punto  $x$

$$P = P_0 + \Delta P, \quad \rho = \rho_0 + \Delta \rho, \quad (7.48)$$

son muy pequeños ( $\Delta P \ll P_0$ ,  $\Delta \rho \ll \rho_0$ ) escribimos

$$P_0 + \Delta P = f(\rho_0 + \Delta \rho) = f(\rho_0) + \Delta \rho f'(\rho_0) + \dots \equiv f(\rho_0) + \kappa \Delta \rho. \quad (7.49)$$

Por tanto,  $\Delta P = \kappa \Delta \rho$ .

Consideramos (Fig. 33) una porción de aire en  $x$  que, debido a la onda de sonido, se desplaza hasta  $x + \chi(x, t)$ . Otra porción de aire que estaba en  $x + \Delta x$  se ve desplazada a  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ . La cantidad de aire por unidad de área (ya que pensamos en ondas planas) dentro de la distancia  $\Delta x$  es  $\rho_0 \Delta x$  si el aire tiene una densidad de equilibrio (sin sonido)  $\rho_0$ . Este aire es desplazado por el sonido hasta una zona delimitada por  $x + \chi(x, t)$  y  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ . La cantidad de materia dentro es la misma antes y después de aparecer la onda de

200 dB	Bomba atómica similar a Hiroshima y Nagasaki
180 dB	Explosión del Volcán Krakatoa (a 180 km de distancia). Cohete en despegue
142.2 dB	Récord Guinness de ruido en un estadio <sup>2</sup>
140 dB	Umbral del dolor. Coche de Fórmula 1
130 dB	Avión en despegue
120 dB	Motor de avión en marcha. Pirotecnia.
110 dB	Concierto. Acto cívico
100 dB	Perforadora eléctrica
90 dB	Tráfico
80 dB	Tren
70 dB	Aspiradora
50/60 dB	Aglomeración de gente / Lavaplatos
40 dB	Conversación
20 dB	Biblioteca
10 dB	Respiración tranquila
0 dB	Umbral de audición

Figure 34: Niveles de intensidad del sonido

sonido. Si la densidad después de este proceso es  $\rho$ , tenemos que la conservación de cantidad de materia se expresa como

$$\begin{aligned}\rho_0\Delta x &= \rho(x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)) \\ &= \rho\left(\Delta x + \chi(x, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, t) - \chi(x, t)\right) \\ &= (\rho_0 + \Delta\rho)\left(\Delta x + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, t)\right) \\ &= (\rho_0 + \Delta\rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, t)\right)\Delta x.\end{aligned}\quad (7.50)$$

Y, por tanto,

$$\rho_0 = (\rho_0 + \Delta\rho)\left(1 + \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, t)\right) \rightarrow \Delta\rho = -(\rho_0 + \Delta\rho) \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, t). \quad (7.51)$$

Como  $\Delta\rho \ll \rho_0$  podemos tomar la aproximación

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, t). \quad (7.52)$$

Vemos que la densidad se reduce a medida que la variación espacial es mayor.

La aceleración del elemento de aire de longitud  $\Delta x$  y masa  $\rho_0\Delta x$  es  $\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$  al actuar la onda de sonido. Sobre él ha actuado una fuerza  $\rho_0\Delta x \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$ . Como  $P$  representa la presión por unidad de área (recordar que tenemos un frente de onda), podemos escribir

$$P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = -\Delta x \frac{\partial P}{\partial x} = -\Delta x \frac{\partial \Delta P}{\partial x} = \rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}, \quad (7.53)$$

donde hemos usado  $P = P_0 + \Delta P$  donde  $P_0$  es constante, no depende de  $x$ . Ahora, haciendo uso de las ecs. (7.49) y (7.52) podemos escribir

$$-\frac{\partial \Delta P}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \rightarrow -\kappa \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \rightarrow \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (7.54)$$

Si cambiamos notación usando  $c_s^2 = \kappa$  escribimos la ecuación de onda para la propagación del sonido en materia:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (7.55)$$

Para ver que esta ecuación realmente describe ondas de sonido propagándose en materia vamos a comprobar si un pulso de sonido siguiendo esta ecuación viajaría con velocidad constante. Para ello debemos demostrar que  $\chi(x, t) = f(x \pm vt)$  es una solución de la ecuación de ondas. Tenemos que

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x \pm vt), \quad (7.56)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x \pm vt) \quad (7.57)$$

y, por tanto, se cumple la ecuación si  $v = c_s$ . Hemos descubierto que el sonido se propaga en el medio con velocidad  $c_s$  y que ésta cumple (usando la ec. (7.49))

$$c_s = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}}, \quad (7.58)$$

i.e., vemos que la velocidad de la onda es una propiedad del medio que depende de cómo varía su densidad al aplicarle una presión exterior.

Nuestra ecuación respeta el principio de superposición ya que para dos soluciones  $\chi_1$  y  $\chi_2$  la función

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t) \quad (7.59)$$

cumple la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2}, \quad (7.60)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2}, \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (7.62)$$

La velocidad del sonido en el aire es mucho menor que la de propagación de la luz (cuando vemos un rayo la luz que genera nos llega prácticamente en tiempo cero mientras que el sonido del trueno llega con retraso, indicando la distancia a la que se encuentra la tormenta). En condiciones de temperatura y presión normales la velocidad de la luz es de  $3 \times 10^9$  m/s mientras que la del sonido es de unos 340 m/s (más de mil kilómetros por hora). El sonido se propaga más rápidamente en sólidos y líquidos que en gases. En dióxido de carbono su velocidad (en m/s) es 258, en hidrógeno 1269, en alcohol 1213, en agua 1435, en aluminio 5104, en cristal 5500 y en diamante 14000 (en este material es necesario ejercer una presión enorme para modificar su densidad, en los gases es al contrario ( $v^{-2} = |\kappa|^{-1} = |d\rho/dP|$ )).

Fin de parte  
no evaluable

## 7.2 Aproximación eiconal

La ecuación de ondas se puede simplificar si consideramos que las propiedades del medio en el que se propaga afectan muy poco a la onda  $\Psi(x, t) = A(x)e^{i\phi(x,t)}$  que lo atraviesa. Si la distancia  $l$  sobre la cual  $A$  cambia de manera significativa es mucho más grande que la longitud de onda (ver Fig. 35) entonces<sup>28</sup>

$$\frac{\nabla^2 A}{A} \simeq \frac{1}{l^2} \ll \frac{1}{\lambda^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}, \quad (7.66)$$

<sup>28</sup>La condición de atenuación débil de la onda por parte del medio se puede escribir como que variaciones grandes de la amplitud

$$|A(x)| \gg |A(x+l)| \gg |A(x+2l)| \quad (7.63)$$

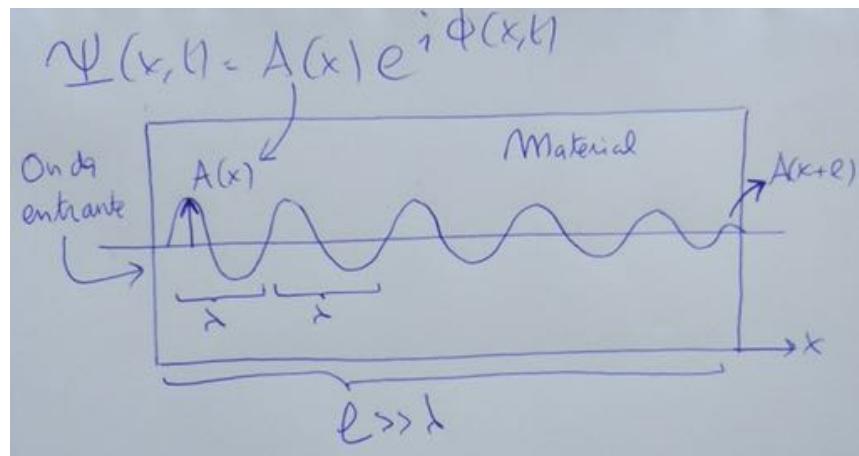


Figure 35: Onda atravesando un material con atenuación pequeña.

y podemos considerar la ecuación eikonal de óptica geométrica:

$$|\vec{\nabla}\phi|^2 \simeq k^2. \quad (7.67)$$

Como vemos tiene la misma estructura que la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo

$$\left| \vec{\nabla}W(\vec{r}) \right|^2 = 2m(E - V(\vec{r})). \quad (7.68)$$

solo ocurren cuando se atraviesan grandes distancias en el material,  $l \gg \lambda$ . La segunda derivada es

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{d^2}(A(x+2d) - 2A(x+d) + A(x)) \quad (7.64)$$

que en el límite eiconal anterior se puede aproximar por la expresión para la variación de la amplitud sobre distancias grandes como

$$\frac{d^2A}{dx^2} \simeq \frac{A(x)}{l^2} \quad (7.65)$$

Para poder hacer una correspondencia completa debemos pasar de la fase sin dimensiones  $\phi$  a  $W$ <sup>29</sup>, con unidades de acción, por ello:

$$\phi(\vec{r}) \leftrightarrow \frac{W(\vec{r})}{\hbar}, \quad (7.69)$$

$$k(\vec{r}) \leftrightarrow \frac{p(\vec{r})}{\hbar} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\vec{r}))}. \quad (7.70)$$

Siguiendo el razonamiento de De Broglie y Schrödinger se puede pensar que quizás la mecánica clásica es de alguna manera el límite de óptica geométrica de una teoría de ondas más fundamental cuya ecuación de ondas independiente del tiempo tiene como límite eikonal a la ecuación de Hamilton-Jacobi, *i.e.*,

$$\left( \vec{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\vec{r})) \right) \Psi(\vec{r}) = 0. \quad (7.71)$$

Esta es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en mecánica cuántica.  
<sup>30</sup>

Para esta ecuación de segundo orden de tipo Sturm-Liouville (ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden de la forma  $-(d/dx)(p(x)(dy/dx)) + q(x)y = \lambda w(x)y$ ) buscamos una solución continua, de derivada continua, univaluada y finita en todo  $\vec{r}$ . Cuando  $V > E$  en  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$  entonces  $\Psi \rightarrow 0$  también en el infinito y el espectro de energías es discreto con  $E_n$  posibles energías asociadas (autovalores) a las soluciones  $\Psi_n$  (autofunciones), caracterizadas por

---

<sup>29</sup>Las unidades son

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] &= [\phi] L^{-1} \\ [k] &= L^{-1} \\ \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] &= E^2 T^2 L^{-2} \\ [mE] &= ME = (ET^2 L^{-2})E = E^2 T^2 L^{-2} \end{aligned}$$

<sup>30</sup>La forma más sencilla de pensar sobre esta ecuación es

$$\begin{aligned} H &= E \\ \frac{1}{2}mv^2 + V &= E \\ -\frac{p^2}{2m} + E - V &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se promueve el momento a un operador

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla}$$

que tiene las dimensiones correctas ( $ETL^{-1} = (ML^2T^{-2})TL^{-1} = MLT^{-1}$ ) y todo el lado izquierdo de la ecuación es ahora un operador

$$\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + E - V$$

números cuánticos  $n$  (see Fig. 36). Podemos escribir

$$(H - E_n)\Psi_n = 0. \quad (7.72)$$

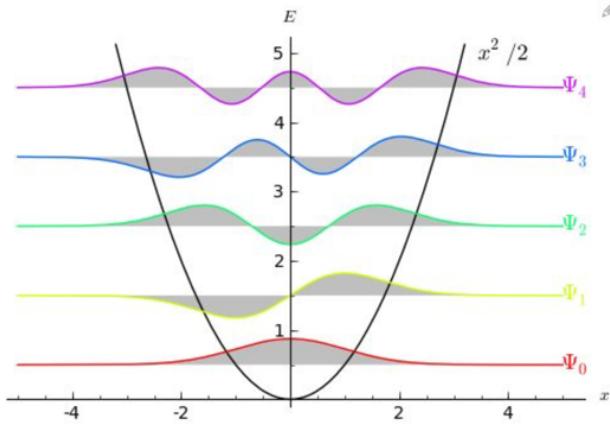


Figure 36: Varios niveles energéticos asociados a un potencial.

Analicemos ahora como introducir la dependencia temporal en esta ecuación. En general la ecuación de Schrödinger de un sistema cuántico se escribe en función del Hamiltoniano:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi. \quad (7.73)$$

La evolución temporal de la función de onda de materia es

$$\Psi = \psi e^{-iEt/\hbar} \quad (7.74)$$

donde  $\psi$  no depende del tiempo. Al introducir esta forma funcional en ec. (7.73) obtenemos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en ec. (7.72).  $\Psi$  se conoce como la función de onda del estado estacionario de energía  $E$ .

**Ejercicio 1.2.7** Demostrar que la ecuación de Schrödinger

$$\left( \vec{\nabla}^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V(\vec{r}) \right) \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (7.75)$$

reproduce la ecuación de Hamilton-Jacobi en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  considerando

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t)}. \quad (7.76)$$

entrega el 20/3

Para que  $\Psi(\vec{r}, t)$  defina el estado dinámico de un sistema cuántico en  $\vec{r}$  y  $t$  su ecuación de onda debe ser lineal, homogénea y diferencial de primer orden con

respecto al tiempo. Ec. (7.73) cumple estas propiedades. En el caso libre, es importante darse cuenta de que Ec. (7.73) se puede entender como la cuantización de la ecuación clásica  $E = |\vec{p}|^2/(2m)$  si promovemos la energía y el momento a operadores en la forma

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \\ \vec{p} &\rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Por ejemplo, para escribir la ecuación de Schrödinger de una partícula cargada en un campo electromagnético escribimos la energía como

$$E = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + e\phi(\vec{r}, t) \quad (7.78)$$

y aplicamos la transformación a operadores en Ec. (7.77), *i.e.*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left\{ \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi \right\} \Psi(\vec{r}, t). \quad (7.79)$$

**Ejercicio 1.2.8** La función de onda de una partícula libre se puede escribir utilizando la siguiente superposición de ondas planas:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int F(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)} d\vec{p} \quad (7.80)$$

con  $E = |\vec{p}|^2/(2m)$ . Tomando derivadas parciales demostrar que esta representación es equivalente a la ecuación de Schrödinger de una partícula libre

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}, t). \quad (7.81)$$

♣ entrega el 20/3

### 7.3 Significado físico de la función de onda

En un campo vectorial  $\mathbf{V}$  (donde asignamos a cada punto del espacio un vector) colocamos una superficie  $S$ . Dividimos  $S$  en elementos diferenciales de superficie  $dS_i$  con sus correspondientes vectores unidad  $\vec{u}_i$  perpendiculares a ellos tales que siempre apuntan hacia afuera en una superficie cerrada (Fig. 37). En cada elemento de superficie tenemos un vector  $\vec{V}_i$  del campo vectorial  $\mathbf{V}$  que forma un ángulo  $\theta_i$  con  $\vec{u}_i$ . La definición de flujo  $\Phi$  del campo vectorial  $\mathbf{V}$  a través de la superficie  $S$  es

$$\Phi \equiv \sum_i (\vec{V}_i \cdot \vec{u}_i) dS_i \quad (7.82)$$

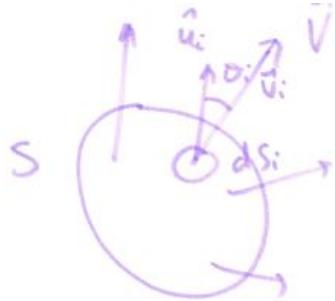


Figure 37: Flujo de un campo vectorial sobre una superficie.

que en el caso continuo se transforma en

$$\Phi = \int_S dS V \cos \theta = \int_S dS \vec{V} \cdot \vec{u}_N, \quad (7.83)$$

donde la integral de superficie abarca todo  $S$ . Cuando un flujo es positivo se llama saliente, y si es negativo, entrante. Cuando la superficie es cerrada escribimos

$$\Phi = \oint_S dS V \cos \theta = \oint_S dS \vec{V} \cdot \vec{u}_N. \quad (7.84)$$

El nombre de flujo proviene del estudio de dinámica de fluidos. Supongamos que tenemos un conjunto de partículas moviéndose con velocidad  $\vec{v}$  hacia una superficie  $dS$  cuyo vector normal es  $\vec{u}_N$  (formando un ángulo  $\theta$  con  $\vec{v}$ ) (Fig. 38). En

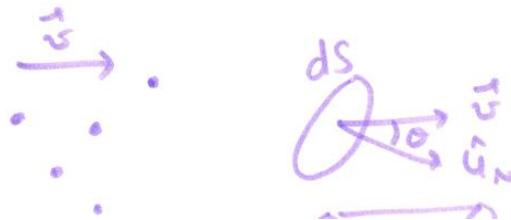


Figure 38: Flujo de partículas sobre una superficie.

un tiempo  $t$  cruzarán la superficie aquellas partículas contenidas en un volumen  $vtdS \cos \theta$ . Si  $\rho$  es el número de partículas en cada unidad de volumen tenemos que a través de  $dS$  por unidad de tiempo pasarán  $\rho v dS \cos \theta = \rho \vec{v} \cdot \vec{u}_N dS$  partículas. Integrando sobre toda la superficie  $S$  encontramos que el flujo total de partículas es

$$\Phi = \int_S dS \rho \vec{v} \cdot \vec{u}_N. \quad (7.85)$$

En el caso de partículas con carga  $q$ , la carga total que pasa a través de  $dS$  por unidad de tiempo es

$$q \rho \vec{v} \cdot \vec{u}_N dS \equiv \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (7.86)$$

donde  $\vec{j} = \rho q \vec{v}$  es la densidad de corriente. La corriente eléctrica que cruza la superficie cerrada  $S$  es

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ_{\text{interior}}}{dt} = -q \int_V dV \frac{d\rho}{dt} \quad (7.87)$$

y debe ser igual a la variación con el tiempo de la carga dentro del volumen correspondiente. Utilizando el teorema de divergencia de Gauss, esto lo podemos escribir como

$$q\rho \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = q\rho \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -q \int_V dV \frac{d\rho}{dt} \quad (7.88)$$

En forma diferencial,

$$q\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + q \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (7.89)$$

Al ser  $q\rho$  la densidad de carga<sup>31</sup> y  $\vec{j}$  la densidad de corriente del sistema, podemos escribir la ecuación de continuidad (ecuación de conservación de la carga, *i.e.* existe un flujo de corriente si la cantidad de carga varía con el tiempo)<sup>32</sup> en la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial(q\rho)}{\partial t} = 0 \quad (7.95)$$

---

<sup>31</sup>La densidad de carga por unidad de volumen se define como

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (7.90)$$

mientras que una densidad de carga por unidad de superficie es

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (7.91)$$

En materiales sólidos comunes consideramos que una densidad de carga  $\rho$  es muy grande cuando la variación en la densidad local de electrones es de una parte en  $10^9$ .

<sup>32</sup>La divergencia de un vector es el límite de su integral de superficie por unidad de volumen a medida que el volumen encerrado por la superficie tiende a cero:

$$\text{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \oint_S \vec{F} \cdot \vec{u}_N dS. \quad (7.92)$$

En cartesianas toma una forma sencilla:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (7.93)$$

Si  $\vec{v}$  es la velocidad de un fluido y  $\rho$  su densidad entonces  $\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{u}_N dS$  corresponde a la cantidad neta de fluido que sale por unidad de tiempo del volumen encerrado por  $S$ .

El teorema de la divergencia nos dice que la integral de la divergencia de un vector sobre un volumen  $V$  es igual a la integral de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie que limita  $V$ :

$$\int_V \text{div} \vec{F} d^3 r = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{u}_N d^2 r. \quad (7.94)$$

e intentemos encontrar su equivalente cuántico.

Multiplicamos por la izquierda<sup>33</sup> la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \Psi \quad (7.96)$$

por  $\Psi^*$  (complejo conjugado de  $\Psi$ ) y su compleja conjugada

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \Psi^* \quad (7.97)$$

por  $\Psi$ , las restamos y obtenemos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Psi^*) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \Psi^* \vec{\nabla}^2 \Psi - \Psi \vec{\nabla}^2 \Psi^* \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \Psi^* \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi - \text{c.c.} \right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \text{c.c.} \right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \text{c.c.} \right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \text{c.c.} \right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \Psi^* \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi \right) - \text{c.c.} \right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \left( \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right) \\ &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2, \end{aligned} \quad (7.98)$$

que, como veremos, corresponde a una ecuación para la conservación de la probabilidad.

Ejercicio 1.2.9 Demostrar que

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^* \right) = \Psi^* \vec{\nabla}^2 \Psi - \Psi \vec{\nabla}^2 \Psi^*. \quad (7.99)$$

♣ entrega el 20/3

---

<sup>33</sup>Tenemos operadores, no es lo mismo multiplicar por la derecha que por la izquierda

Si integramos sobre todo el espacio contenido en un volumen  $V$ , rodeado por una superficie  $S$ , volvemos al punto de partida,

$$\oint_V d^3\vec{r} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial(q\rho)}{\partial t} \right) = 0 \quad (7.100)$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V q\rho d^3\vec{r} = - \oint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3\vec{r} = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (7.101)$$

donde hemos aplicado el teorema de Gauss. Llevando la superficie al infinito, donde asumimos que no existen corrientes ni flujos salientes o entrantes, encontramos que

$$\int_{V \rightarrow \infty} q\rho d^3\vec{r} = q \quad (7.102)$$

es constante y finita para una distribución con carga total  $q$ .

Comparando (7.95) con (7.98) y considerando la función de onda para un electrón con carga  $e$  podemos escribir

$$q\rho = e\Psi^*\Psi = e|\Psi|^2, \quad (7.103)$$

$$\vec{j} = \frac{i\hbar e}{2m} (\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi), \quad (7.104)$$

e interpretar  $\rho$  como una densidad de probabilidad y  $\vec{j}$  como una corriente de probabilidad. Vemos que (7.102) determina la normalización de la función de onda. Así  $\Psi$  está fijada salvo una fase:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha}\Psi, \quad (7.105)$$

$$\Psi^* \rightarrow \Psi^{*\prime} = e^{-i\alpha}\Psi^*. \quad (7.106)$$

La interpretación dada por Born para la función de onda es que el producto  $\Psi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2$  es la densidad de probabilidad de que una partícula se encuentre en el punto  $\vec{r}$ .  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  es la densidad de probabilidad de que una partícula se encuentre en el punto  $\vec{r}$  en el tiempo  $t$ .

Fin de clase 15

## 7.4 Solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

La solución general con dependencia temporal y teniendo en cuenta la linealidad de la ecuación es una combinación lineal de soluciones (suma de soluciones es también solución de una ecuación de ondas):

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n C_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \psi_n(\vec{r}), \quad (7.107)$$

$$\Psi^*(\vec{r}, t) = \sum_n C_n^* e^{\frac{i}{\hbar}E_n t} \psi_n^*(\vec{r}). \quad (7.108)$$

La condición de normalización (7.102) es

$$\int \Psi^* \Psi d^3\vec{r} = \sum_{m,n} C_m^* C_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} \int \psi_m^* \psi_n d^3\vec{r} = 1. \quad (7.109)$$

En el caso no degenerado (cuando a cada autovalor  $E_l$  le corresponde una única autofunción  $\psi_l$ ) se cumple

$$\int \psi_m^* \psi_n d^3\vec{r} = \delta_{m,n}. \quad (7.110)$$

Ahora podemos escribir

$$\sum_m C_m^* C_m = \sum_m |C_m|^2 = 1, \quad (7.111)$$

donde  $|C_m|^2$  representa la probabilidad de que la partícula se encuentre en el estado  $m$ .

**Ejercicio 1.2.10** Estudiar el caso degenerado donde las autofunciones  $\phi_n$  y  $\varphi_n$  corresponden al mismo autovalor  $E_n$  y no son ortogonales, i.e.

$$\int \phi_n^* \varphi_n d^3\vec{r} = \alpha \neq 0. \quad (7.112)$$

con  $\alpha$  real. Encontrar dos combinaciones lineales de las autofunciones que sean ortonormales.

♣ entrega el 20/3

## 7.5 Solución a la ecuación de Schrödinger con un espectro continuo

Consideremos el movimiento libre de una partícula en una dimensión que corresponde a tener un potencial cero en todo el espacio. Tenemos en mente la relación  $p^2/2m = E$  e introducimos las transformaciones a operadores de la forma  $p \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ ,  $E \rightarrow i\hbar\partial/\partial t$  para escribir

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = E\Psi(x, t). \quad (7.113)$$

Intentamos resolver esta ecuación usando separación de variables en la forma  $\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)$ , que implica

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \psi''(x)\phi(t) = i\hbar\psi(x)\dot{\phi}(t) = E\psi(x)\phi(t) \quad (7.114)$$

Esta relación se puede escribir en la forma

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = i\hbar \frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)} = E \quad (7.115)$$

que, como se cumple para todo  $x$  y  $t$ , implica que tiene que ser igual a una constante, justificando la última igualdad con la energía,  $E$ <sup>34</sup>. La parte temporal se resuelve fácilmente,

$$\dot{\phi}(t) = -i\frac{E}{\hbar}\phi(t) \rightarrow \phi(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \quad (7.116)$$

Nos centramos ahora en la parte estacionaria, dependiente únicamente de la posición,

$$\psi(x) = e^{rx}, \quad (7.117)$$

$$\psi'(x) = re^{rx}, \quad (7.118)$$

$$\psi''(x) = r^2e^{rx}, \quad (7.119)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \frac{-\hbar^2}{2m}r^2 = E, \quad (7.120)$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{2mE}{-\hbar^2}} = \mp i \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \equiv \mp ik. \quad (7.121)$$

Sabemos que la solución

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (7.122)$$

corresponde al desplazamiento de dos ondas en direcciones contrarias. Consideremos una de ellas. El procedimiento habitual para normalizar la función de onda no funciona porque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^*e^{-ikx}Ae^{ikx}dx \rightarrow |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \rightarrow \infty \quad (7.123)$$

Born propuso regularizar esta expresión imaginando que la partícula se encuentra dentro de una caja de tamaño  $L$  cuya pared puede atravesar y con función de onda periódica introduciendo la condición

$$\psi(x) = \psi(x+L) \longrightarrow Ae^{ikx} = Ae^{ik(x+L)} = Ae^{ikx}e^{ikL}, \quad (7.124)$$

que implica

$$e^{ikL} = \cos(kL) + i \sin(kL) = 1 \longrightarrow k = \frac{2\pi n}{L} = \frac{p}{\hbar}. \quad (7.125)$$

Como

$$\frac{p^2}{2m} = E, \quad p = \sqrt{2mE}, \quad k = \frac{p}{\hbar} \quad (7.126)$$

---

<sup>34</sup>Se puede entender por análisis dimensional:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} \right] &= E^2 T^2 M^{-1} L^{-2} = (E^2 T^2)(E^{-1} T^{-2} L^2) L^{-2} = E \\ \left[ i\hbar \frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)} \right] &= E T T^{-1} = E \end{aligned}$$

el espectro de energías se puede escribir en la forma

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{2\pi^2 \hbar^2 n^2}{mL^2}. \quad (7.127)$$

Ahora podemos normalizar en cada intervalo

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \psi^*(x)\psi(x)dx = |A|^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx = 1, \quad (7.128)$$

implicando que  $A = 1/\sqrt{L}$  y, por tanto,

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i \frac{2\pi n}{L} x}. \quad (7.129)$$

Ejercicio 1.2.11 Demostrar que

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i \frac{2\pi n}{L} x}. \quad (7.130)$$

forman un sistema ortonormal.

♣ entrega el 20/3

Recuperamos el espectro continuo (la diferencia entre dos niveles de energía tiende a cero) tomando el límite  $L \rightarrow \infty$ ,

$$E_n - E_m = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\pi^2 \hbar^2 (n^2 - m^2)}{mL^2} = 0. \quad (7.131)$$

Ejercicio 1.2.12 Regularizar la función de onda para un electrón libre utilizando el método de Born en el caso de tres dimensiones. Utilizar el método de separación de variables para resolver la ecuación de Schrödinger. Calcular la densidad de carga y la densidad de corriente.

♣ entrega el 17/4

## 8 El experimento de la doble rendija de Young

En este experimento de 1801 se utiliza el esquema de la Fig. 39 donde luz monocromática emitida desde una fuente ilumina una pared opaca que tiene dos rendijas  $O_1$  y  $O_2$  que permiten pasar la luz que queda registrada en una pantalla. Si cubrimos una de las rendijas,  $O_2$ , entonces registramos una intensidad de luz en la pantalla de la forma  $I_1(x)$ , que vemos en la Fig. 39 y es el patrón difractivo de  $O_1$  (las rendijas se comportan como emisores secundarios, se puede pensar en un comportamiento similar al de olas en agua<sup>35</sup>). Lo mismo ocurre si tapamos  $O_1$  y dejamos pasar luz sólo por  $O_2$ . Si en lugar de luz tuviéramos bolas de

---

<sup>35</sup>Link: Fenómeno de interferencia con ondas en el agua

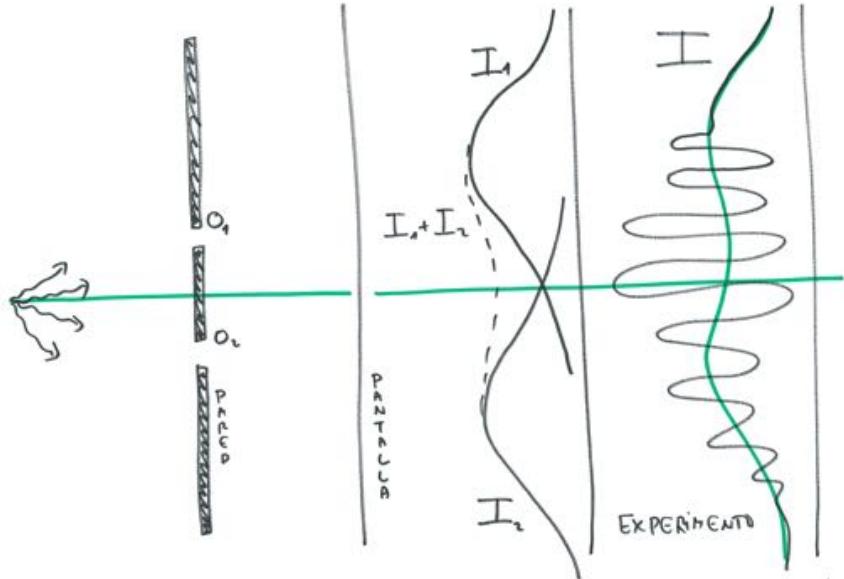


Figure 39: Experimento de la doble rendija de Young

billar veríamos que al abrir las dos rendijas a la vez la intensidad en la pantalla sería  $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$ <sup>36</sup>. Sin embargo, con luz no observamos esto sino una estructura con máximos y mínimos que refleja un fenómeno de interferencia constructiva y destructiva. Esto se explica debido a la naturaleza de onda de la luz. El campo eléctrico que llega de las rendijas es  $E(x) = E_1(x) + E_2(x)$ , es un número complejo y la intensidad se calcula como

$$I(x) \sim |E(x)|^2 = |E_1(x) + E_2(x)|^2 \neq |E_1(x)|^2 + |E_2(x)|^2. \quad (8.1)$$

Pero la luz también tiene naturaleza corpuscular que se manifiesta si disminuimos tanto la intensidad de la fuente que los fotones se emiten uno a uno<sup>37</sup> (esto no se pudo realizar hasta principios del siglo XX con métodos experimentales más sofisticados). Si dejamos que pase un tiempo breve entonces sólo unos pocos fotones llegan a la pantalla y cada uno de ellos genera un pequeño impacto aleatorio sobre ella pero no una estructura de máximos y mínimos. Realmente se comportan como bolas de billar. Pero si exponemos la pantalla a estos fotones durante suficiente tiempo vemos que la estructura de interferencia vuelve a aparecer. Si bloqueamos una de las rendijas observamos un figura de difracción pero no de interferencia.

La misma situación ocurre si usamos una fuente de electrones (1961)<sup>38</sup>. La estructura de interferencia implica que no es cierto que cada electrón emitido

---

<sup>36</sup>Link: Fenómeno de interferencia con luz

<sup>37</sup>Link: Fenómeno de interferencia con un único fotón

<sup>38</sup>Link: Fenómeno de interferencia con una fuente de electrones

por la fuente pasa por un agujero o por el otro. Sin embargo, siempre que queramos medir, ver, por donde pasan los electrones (con un detector más o menos sofisticado), observaremos que o pasa por un agujero o por el otro, nunca por los dos a la vez, y la curva para la intensidad corresponde a la  $I_1 + I_2$ , el fenómeno de interferencia desaparece y volvemos al comportamiento corpuscular. Nuestro detector elimina el efecto de interferencia, la idea fundamental es que necesitamos una escala de resolución mínima que nos permita “detectar” y que es la justa para truncar la interferencia.<sup>39</sup> Heisenberg<sup>40</sup> propuso que hay nuevas leyes en la naturaleza que limitan nuestra capacidad de resolución experimental. Esto es el principio de incertidumbre: no hay manera de saber por cuál rendija pasó el electrón sin destruir el fenómeno de interferencia. En el caso de objetos macroscópicos el fenómeno de interferencia también tiene lugar pero con unas oscilaciones con un periodo tan corto (hay un número tremendo de picos y valles en la Fig. 39 de tal manera que ningún detector los puede resolver y sólo medimos su valor medio, que es el valor clásico. Heisenberg indicó que la incertidumbre en la medida del momento  $\Delta p$  y la posición  $\Delta x$  de cualquier objeto deben cumplir que  $\Delta p \Delta x \geq h$ , donde  $h$  es la constante de Planck. De manera similar la precisión en la medida de la energía y del tiempo cumplen  $\Delta E \Delta t \geq h$ .

Nos damos cuenta de que en el mundo cuántico no podemos ser deterministas: dadas unas condiciones iniciales no podemos predecir exactamente el estado final, sólo la probabilidad de llegar a uno en particular. Esta probabilidad  $P$  se construye como el cuadrado de una amplitud de probabilidad  $P = |\phi|^2$ . Si un suceso puede ocurrir de varias maneras la amplitud de probabilidad es la suma de las amplitudes de probabilidad de cada una de ellas (principio de superposición):  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  y la probabilidad, de nuevo, es  $P = |\phi|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2$ . Si podemos determinar que “ruta” ha elegido nuestro experimento entonces perdemos el fenómeno de interferencia y tenemos que  $P = P_1 + P_2$ .

Fin de clase 16

## 8.1 El principio de acción estacionaria y la integral de camino

Una de las aplicaciones más interesantes del principio de acción estacionaria tiene lugar en mecánica cuántica. Tomemos una partícula no relativista moviéndose en una dimensión. Sabemos que la amplitud de probabilidad para un desplazamiento del punto  $q_i$  al punto  $q_j$  en un tiempo  $t$  cumple el principio de superposición. Esto implica que cuando un proceso puede ocurrir de varias maneras su amplitud total es la suma coherente de las amplitudes para cada una de ellas.

El ejemplo canónico es el experimento de la doble rendija con una fuente de electrones. Para una posición dada del detector cada electrón tiene dos posibles caminos con amplitud de probabilidad  $\phi_1 = \sqrt{P_1} e^{i\varphi_1}$  ( $\phi_2 = \sqrt{P_2} e^{i\varphi_2}$ ) si cruza la rendija 1 (2). Cuando las dos rendijas están abiertas la distribución

---

<sup>39</sup>Link: The double slit experiment

<sup>40</sup>The Feynmann Lectures on Physics, Volume I.

de probabilidad es

$$\begin{aligned} P_{12} &= |\phi_1 + \phi_2|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + 2\operatorname{Re}(\phi_1^*\phi_2), \\ &\equiv P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Fue de Broglie el que en 1923 propuso que las partículas materiales, al igual que los fotones, tienen propiedades de ondas. De esta manera asociamos a una partícula con energía  $E$  y momento  $\vec{p}$  una onda con frecuencia angular  $\omega = 2\pi\nu$  y un vector de onda tales que

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad (8.3)$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (8.4)$$

donde la constante de Planck es  $h \simeq 6.62 \times 10^{-34}$  J s. La longitud de onda correspondiente es

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{h}{|\vec{p}|}. \quad (8.5)$$

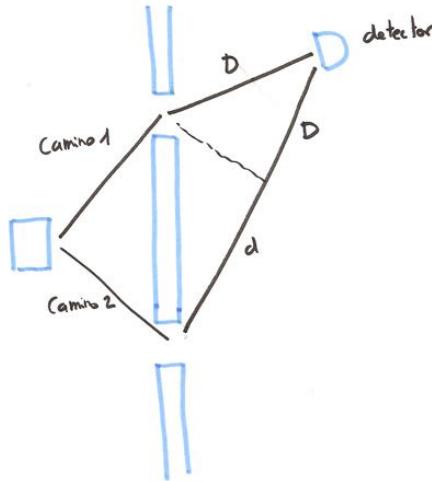


Figure 40: El experimento de la doble rendija

Supongamos que la distancia desde la rendija 1 al detector es  $D$ , como mostramos en la Fig. 40, y desde la rendija 2  $D + d$  con  $d \ll D$ . Esto introduce un desfase entre las dos ondas de la forma  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi d/\lambda$ . Interferencia constructiva ocurre cuando  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 \rightarrow d = n\lambda$  y destructiva cuando  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1 \rightarrow d = (n + 1/2)\lambda$  con  $n = 0, 1, \dots$

Esta sección no es parte del curso

En un sistema más general podemos escribir la amplitud del punto  $q_i$  al punto  $q_j$  en un tiempo  $t$  de la forma

$$U(q_i, q_j; t) = \sum_{\text{cualquier camino}} e^{i \cdot (\text{fase})} = \int \mathcal{D}[q(t)] e^{i \cdot (\text{fase})}. \quad (8.6)$$

Hagamos un inciso en este punto para discutir el llamado método de fase estacionaria que nos permite evaluar integrales del tipo

$$I(k) = \int_a^b f(t) e^{ik\phi(t)} dt \quad (8.7)$$

cuando  $k \rightarrow \infty$ , con  $f$  y  $\phi$  siendo funciones reales continuas.  $I(k)$  tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$  porque la exponencial genera oscilaciones muy rápidas que se cancelan entre ellas. Supongamos que  $\phi'$  se anula en  $[a, b]$  sólo en el punto  $t = c$  y que  $\phi''(c) \neq 0$ . En este caso las oscilaciones no son tan rápidas en una región cercana a  $c$  donde  $k\phi(c)$  no cambia tan deprisa. Estas regiones se llaman de fase estacionaria.

El comportamiento a gran  $k$  será:

$$I(k) = \int_{c-R}^{c+R} f(c) e^{ik(\phi(c) + \frac{(t-c)^2}{2}\phi''(c))} dt \quad (8.8)$$

donde  $R$  es finito. Con el cambio de variables

$$\tau = (t - c) \sqrt{\frac{|\phi''(c)|k}{2}}, \quad (8.9)$$

podemos escribir

$$I(k) = f(c) e^{ik\phi(c)} \sqrt{\frac{2}{|\phi''(c)|k}} \int_{-R\sqrt{|\phi''(c)|k/2}}^{R\sqrt{|\phi''(c)|k/2}} e^{i\nu\tau^2} d\tau, \quad (8.10)$$

donde  $\nu = \text{signo}(\phi''(c))$ . Para  $k \rightarrow \infty$  la integral es entre  $-\infty$  y  $\infty$  y la podemos evaluar:

$$I(k) \simeq f(c) e^{ik\phi(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(c)|k}} e^{i\frac{\pi}{4}\nu}. \quad (8.11)$$

Si además tenemos que  $f$  va a cero de manera suave en  $t = a, b$  y que cerca de  $c$ :  $\phi(t) \simeq \phi(c) + \alpha(t - c)^2$ ,  $f(t) \simeq \beta(t - c)^\gamma$  con  $\gamma > -1$  entonces

$$I(k) \simeq e^{ik\phi(c)} \beta \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) e^{i\pi\frac{(\gamma+1)}{4}\nu} \left(\frac{1}{k|\alpha|}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (8.12)$$

donde  $\nu = \text{signo } \alpha$ .

Para elegir la fase sabemos que en el límite clásico un sólo camino  $q_{cl}$  contribuye a la amplitud total. En este límite esperamos calcular la integral por el método de fase estacionaria:

$$\frac{\delta}{\delta q(t)} \text{fase}[q(t)] \Big|_{q_{cl}} = 0. \quad (8.13)$$

Pero como hemos visto la trayectoria clásica satisface el principio de acción estacionaria:

$$\frac{\delta}{\delta q(t)} S[q(t)] \Big|_{q_{cl}} = 0. \quad (8.14)$$

De esta manera identificamos la fase de cada trayectoria con la acción clásica  $S = \int L dt$  salvo una constante. Como el límite clásico ocurre cuando  $S \gg \hbar$  utilizamos  $S/\hbar$  como fase. Finalmente tenemos:

$$U(q_i, q_j; t) = \int \mathcal{D}[q(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]}. \quad (8.15)$$

Volviendo a la doble rendija, el camino 1 tiene como acción  $\frac{m}{2} v^2 t$  y su fase es  $\frac{m}{2\hbar} \frac{D^2}{t}$ . Para el camino 2 tenemos la fase  $\frac{m}{2\hbar} \frac{(D+d)^2}{t} \simeq \frac{m}{2\hbar} \frac{(D^2+2dD)}{t}$ . La diferencia entre ellas es  $\frac{m}{\hbar} \frac{dD}{t} \simeq \frac{pd}{\hbar} = \frac{2\pi d}{\lambda}$ , que coincide con el desfase calculado anteriormente.

Para definir la integral de camino de manera más rigurosa dividimos el intervalo  $(0, T)$  en intervalos discretos de duración  $\epsilon$ , como vemos en la Fig. 41, *i.e.*,

$$S = \int_0^T dt' \left( \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \rightarrow \sum_k \epsilon \left( \frac{m}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right)^2 - V \left( \frac{q_{k+1} + q_k}{2} \right) \right) \quad (8.16)$$

La integral de camino se define como

$$\int \mathcal{D}[q(t)] \equiv \frac{1}{A(\epsilon)} \prod_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_k}{A(\epsilon)}, \quad (8.17)$$

donde la constante  $A(\epsilon)$  la fijaremos al final al tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Ahora buscamos la evolución temporal para la amplitud de probabilidad que hemos definido en ec. (8.15). Si  $|U(q; T)|^2 dq$  es la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo  $(q, q + dq)$  entonces debe cumplir la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

Siguiendo el principio de superposición tenemos que

$$U(q_i, q_j; T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{A(\epsilon)} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(q_j - q')^2}{2\epsilon} - \epsilon V \left( \frac{q_j + q'}{2} \right) \right)} U(q_i, q'; T - \epsilon). \quad (8.18)$$

En esta integral sólo la región  $q_j - q' \sim \sqrt{\epsilon}$  sobrevive dado que las demás están suprimidas por tener oscilaciones muy rápidas. Expandimos el resto del

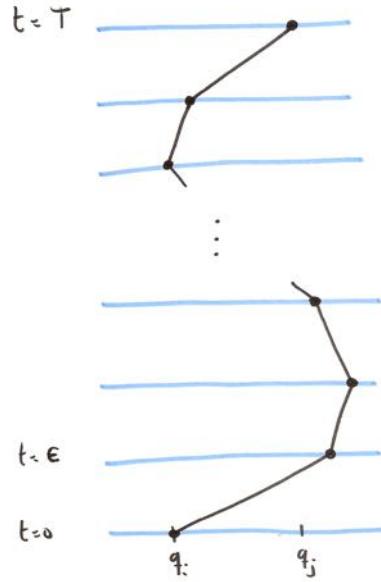


Figure 41: Discretización de la variable temporal en la integral de camino

integrando:

$$U(q_i, q_j; T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{A(\epsilon)} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{m(q_j - q')^2}{2\epsilon} \right)} \left( 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(q_j) \right) \left( 1 + (q' - q_j) \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{1}{2} (q' - q_j)^2 \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + \dots \right) U(q_i, q_j; T - \epsilon). \quad (8.19)$$

Ahora, utilizando las siguientes integrales de Fresnel;

$$\int dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (8.20)$$

$$\int dx x e^{-ax^2} = 0, \quad (8.21)$$

$$\int dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (8.22)$$

obtenemos

$$U(q_i, q_j; T) = \left( \frac{1}{A(\epsilon)} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon}{-im}} \right) \left( 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(q_j) + \frac{i\epsilon\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) U(q_i, q_j; T - \epsilon). \quad (8.23)$$

Para que esta expresión tenga sentido en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  definimos

$$A(\epsilon) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\epsilon}{-i m}}. \quad (8.24)$$

Finalmente:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(q_i, q_j; t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} + V(q_j) \right) U(q_i, q_j; t), \quad (8.25)$$

que corresponde a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

Fin de parte no evaluable

Fin de clase 17

## 9 Introducción a estructura de la materia

Hagamos un pequeño repaso de lo que hemos aprendido hasta ahora (introduciendo algún concepto nuevo). Einstein nos enseñó que la energía de un fotón es de la forma  $E = h\nu = \hbar\omega$  y su momento  $|\vec{p}| = E/c = h\nu/c = h/\lambda = \hbar|\vec{k}|$ . De Broglie propuso que cada partícula material se comporta como una onda caracterizada por el vector  $(\vec{k}, \omega)$  donde  $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$  y  $\omega = E/\hbar$ . Schrödinger pensó que dado que  $\vec{p} = h\vec{k}$  y  $E = h\nu$  entonces la función de onda asociada a una partícula libre podría ser de la forma  $\Psi \sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$  con momento  $\vec{p}$  y energía  $E$  y satisfacer las ecuaciones

$$-i\hbar \vec{\nabla} \Psi(\vec{x}, t) = \vec{p} \Psi(\vec{x}, t), \quad (9.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = E \Psi(\vec{x}, t). \quad (9.2)$$

Si esto es así entonces a un estado de energía  $E$  le asociamos la función de onda  $\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ . Para una partícula libre, con  $E = \vec{p}^2/(2m)$  tenemos que

$$E\psi(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}). \quad (9.3)$$

En presencia de un potencial,  $E = \vec{p}^2/(2m) + V(\vec{x})$ , la ecuación de Schrödinger para una partícula con energía  $E$  es

$$E\psi(\vec{x}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}). \quad (9.4)$$

La clave para la cuantización de la energía está en exigir que la función de onda sea finita y univaluada.

Para sistemas con muchas partículas y Hamiltoniano  $H(\vec{x}_1, \dots; \vec{p}_1, \dots)$  la ecuación de Schrödinger es

$$H(\vec{x}_1, \dots; -i\hbar \vec{\nabla}_1, \dots) \Psi_n(\vec{x}_1, \dots) = E_n \Psi_n(\vec{x}_1, \dots). \quad (9.5)$$

Por ejemplo, para  $N$  partículas con masa  $m_r$  en el potencial  $V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$  tenemos el Hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad (9.6)$$

que tiene como energías permitidas las que corresponden a una solución univaluada y que tiende a zero cuando  $|\vec{x}_r| \rightarrow \infty$  (si  $V > E$  en el infinito) de la ecuación

$$E\Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{-\hbar^2}{2m_i} \vec{\nabla}_i^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \right) \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad (9.7)$$

que describe correctamente, *e.g.*, el espectro del átomo de hidrógeno y otros tipos de átomos. En un principio se pensó que la función de onda describía cómo la partícula se distribuía en el espacio. La interpretación correcta la proporcionó Max Born que propuso que cualquier sistema descrito por el hamiltoniano  $H$  tiene una dependencia temporal en su función de onda de la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi. \quad (9.8)$$

La probabilidad de que una partícula esté en un elemento de volumen  $d^3\vec{x}$  centrado en el punto  $\vec{x}$  en el instante  $t$  es

$$dP = |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3\vec{x}. \quad (9.9)$$

Como hay un 100% de probabilidad de que la partícula esté en algún sitio tenemos que

$$\int |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3\vec{x} = 1. \quad (9.10)$$

Esta condición también nos exige finitud en la función de onda. Si derivamos esta ecuación con respecto al tiempo y multiplicamos por  $i\hbar$  vemos que

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \int |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3\vec{x} &= 0 \\ &= i\hbar \int \Psi^*(\vec{x}, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \right) d^3\vec{x} + i\hbar \int \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(\vec{x}, t) \right) \Psi(\vec{x}, t) d^3\vec{x} \\ &= \int \Psi^*(\vec{x}, t) (H\Psi(\vec{x}, t)) d^3\vec{x} - \int (H\Psi(\vec{x}, t))^* \Psi(\vec{x}, t) d^3\vec{x}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

El que esta última expresión sea cero indica que  $H$  es un operador hermítico, una propiedad directamente ligada a la conservación de la densidad de probabilidad.

No siempre la función de onda de un sistema es función propia (o auto-función) del Hamiltoniano. Pero siempre se puede escribir expandida en una base de autofunciones en la forma

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n, \quad (9.12)$$

donde  $H\Psi_n = E_n\Psi_n$ . Como  $1 = \int |\Psi_n|^2 = \sum_n |C_n|^2$  tenemos que  $|C_n|^2$  corresponde a la probabilidad de que nuestra partícula o sistema se encuentre en el estado  $\Psi_n$ .

### 9.1 Partícula en un potencial cuadrado

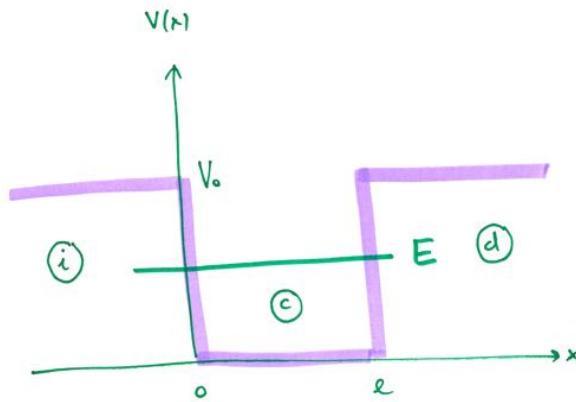


Figure 42: Movimiento de una partícula en un pozo de potencial cuadrado

Consideremos un potencial  $V(x)$  que es  $V_0$  en las regiones  $-\infty < x < 0$  (izquierda) y  $l < x < \infty$  (derecha), y cero en  $0 < x < l$  (central) como el de la Fig. 42. La función de onda en cada región la llamaremos  $\Psi_i$ ,  $\Psi_d$  y  $\Psi_c$ , respectivamente. Con  $E > 0$  en la región central tenemos que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para la función de onda de una partícula sometida a este potencial es

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) \Psi_c = 0, \quad (9.13)$$

$$k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{\hbar^2} > 0, \quad (9.14)$$

y, por tanto,

$$\Psi_c = A_c \sin \left( \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x \right) + B_c \cos \left( \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x \right). \quad (9.15)$$

En otras regiones tenemos

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \right) \Psi_{i,d} = 0. \quad (9.16)$$

Si  $E > V_0$  entonces

$$\Psi_{i,d} = A_{i,d} \sin \left( \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} x \right) + B_{i,d} \cos \left( \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} x \right). \quad (9.17)$$

En este caso no tenemos restricciones en la función de onda en el infinito ni cuantización de la energía. Correspondría a la propagación de una partícula pasando por una zona local con un potencial que afectaría a su velocidad.

Si  $E < V_0$  entonces

$$\Psi_{i,d} = A_{i,d} e^{\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}x} + B_{i,d} e^{-\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}x}. \quad (9.18)$$

Como no podemos tener una función de onda creciendo exponencialmente en las zonas con barrera de potencial imponemos que  $B_i = A_d = 0$  (recordar que  $x < 0$  en la zona izquierda), *i.e.*

$$\Psi_i = A_i e^{\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}x} \equiv \alpha e^{-\kappa|x|}, \quad (9.19)$$

$$\Psi_d = B_d e^{-\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}x} \equiv \beta e^{-\kappa(x-l)} \quad (9.20)$$

La función de onda y su derivada deben ser continuas en todo  $x$ . Aplicando esta condición en  $x = 0, l$  obtenemos la cuantización del espectro de energías.

Simplifiquemos el problema considerando  $V_0, \kappa \rightarrow \infty$ . En este caso  $\Psi_i = \Psi_d = 0$ , implicando que  $\Psi_c(x = 0, l) = 0$ . Así tenemos que  $B_c = 0$  y

$$\sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}l\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.21)$$

El espectro de energías es

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ml^2}, \quad (9.22)$$

con las correspondientes funciones de onda:

$$\Psi_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (9.23)$$

donde  $A_0 = 0$ . Imponiendo la normalización para  $n > 0$  (la partícula está en algún punto entre 0 y  $l$ )

$$\int_0^l \Psi_n^2 dx = A_n^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = A_n^2 \frac{l}{2} = 1, \quad (9.24)$$

finalmente, obtenemos

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (9.25)$$

que cumplen la propiedad de ortogonalidad  $\int_0^l \Psi_m^* \Psi_n dx = \delta_m^n$  asociada a las autofunciones de la ecuación de Schrödinger. Estas soluciones son muy parecidas a las ondas estacionarias asociadas a una cuerda vibrando con los extremos fijos. Esto se ilustra en la Fig. 43.

Fin de clase 18

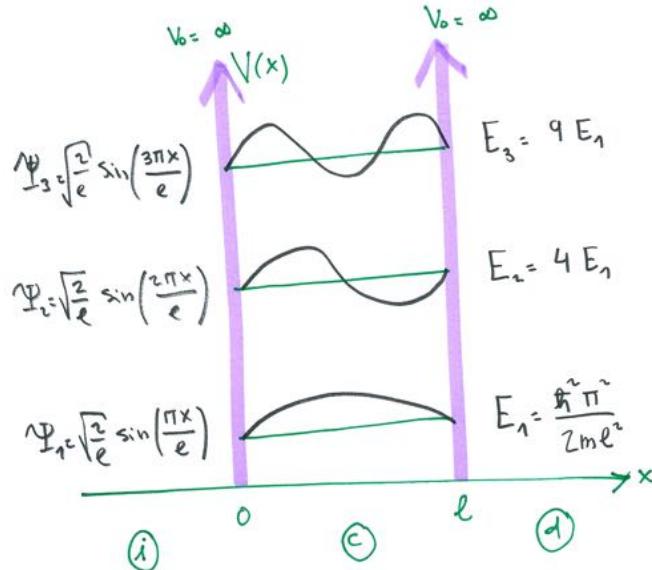


Figure 43: Función de onda para una partícula en un pozo de potencial de paredes infinitas

La densidad de probabilidad (7.103) es

$$\rho = \frac{2e}{l} \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (9.26)$$

y la densidad de corriente (7.104) es cero. Esto se debe a que las funciones de onda en este caso corresponden a soluciones localizadas en el espacio y no pueden formar un flujo de partículas.

## 9.2 Barrera de potencial rectangular y el efecto túnel

En mecánica clásica una partícula sólo puede moverse en regiones donde su energía cinética es positiva. Cuando el potencial es mayor que la energía  $V > E$  tenemos una barrera de potencial que una partícula no puede atravesar. En mecánica cuántica esto si ocurre y se conoce como efecto túnel.

Consideremos una barrera de potencial con  $V = V_0$  en la región  $x \in (0, a)$  y cero en el resto, como la de la Fig. 44. Supongamos que una partícula se mueve con una energía menor que  $V_0$  desde  $x \rightarrow -\infty$  a  $x \rightarrow \infty$ . Dividimos la función de onda en tres regiones como en el caso del pozo de potencial:

$$\Psi_i = e^{ikx} + R e^{-ikx}, \text{ en } x < 0, \quad (9.27)$$

$$\Psi_c = \beta e^{-\kappa x} + \delta e^{\kappa x}, \text{ en } 0 < x < a, \quad (9.28)$$

$$\Psi_d = T e^{ik(x-a)}, \text{ en } x > a, \quad (9.29)$$

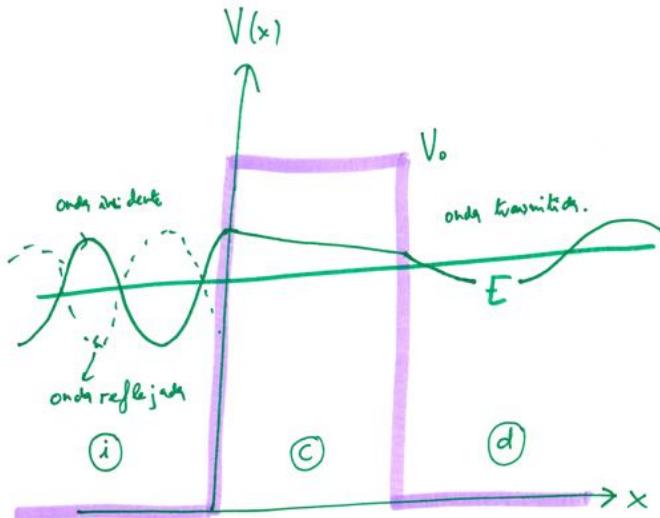


Figure 44: Movimiento de una partícula en una barrera de potencial rectangular

con

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (9.30)$$

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E). \quad (9.31)$$

La onda incidente la elegimos con un coeficiente uno, la reflejada tiene coeficiente  $\mathcal{R}$  y la transmitida  $\mathcal{T}$ .

**Ejercicio 1.2.13** Utilizando la condición de continuidad de la función de onda y de su derivada demostrar que

$$\beta = \frac{\mathcal{T}}{2} e^{\kappa a} \left( 1 - i \frac{k}{\kappa} \right), \quad (9.32)$$

$$\delta = \frac{\mathcal{T}}{2} e^{-\kappa a} \left( 1 + i \frac{k}{\kappa} \right), \quad (9.33)$$

$$\mathcal{T} = \frac{2}{2 \cosh(\kappa a) + i \left( \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa} \right) \sinh(\kappa a)}. \quad (9.34)$$

♣ entrega el 17/4

Una cantidad interesante es el coeficiente de transmisión

$$\mathcal{D} = \frac{|j_{\text{transmitida}}|}{|j_{\text{incidente}}|} = \frac{2|k||\mathcal{T}|^2}{2|k|} \quad (9.35)$$

que relaciona la densidad de flujo de partículas entrante y el saliente.

**Ejercicio 1.2.14** Demostrar que en el límite  $\kappa a \gg 1$ :

$$\mathcal{D} = |\mathcal{T}|^2 = \frac{4k^2\kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2} \simeq \frac{16\kappa^2 k^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} e^{-2\kappa a}. \quad (9.36)$$



entrega el 17/4

Vemos que a mayor  $V_0$ , o barrera de potencial, y mayor distancia  $a$  tenemos una menor transmisión de la función de probabilidad. Este análisis es genérico para potenciales  $V(x)$  con un máximo muy marcado. En general tenemos que para  $\kappa a \gg 1$

$$\mathcal{D} \simeq e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x)-E)} dx}, \quad (9.37)$$

donde  $V(x_1) = V(x_2) = E$  definen la frontera de la barrera de potencial. Es importante ver que en el límite clásico, con  $\hbar \rightarrow 0$ , el coeficiente de transmisión es cero.

Fin de clase 19

### 9.3 Emisión de electrones por un campo eléctrico y emisión fría

Estudiemos el fenómeno de emisión fría donde podemos extraer electrones de un metal aplicando un campo eléctrico. La teoría de la estructura electrónica en metales se basa en el modelo del gas de electrones. Los electrones se mueven libremente dentro del metal debido a su alta conductividad eléctrica. Para escapar del metal se necesita darles una cierta cantidad de energía. Podemos usar un modelo con un potencial cero ( $V = 0$ ) dentro del metal y una barrera de potencial ( $V = V_0 > 0$ ) fuera, en el vacío. Tenemos  $N$  electrones (cuya interacción mutua es muy pequeña y no consideramos) que no están sujetos a un potencial externo y confinados en una caja de longitud  $L$  y volumen  $L^3$ .

En este pozo de potencial, que es la versión tridimensional de Eq. (9.25), los estados estacionarios de cada partícula se describen con las funciones de onda en  $0 < x, y, z < L$

$$\Psi_{n_x, n_y, n_z}(\vec{r}) = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \sin\left(n_x \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n_y \frac{\pi y}{L}\right) \sin\left(n_z \frac{\pi z}{L}\right) \quad (9.38)$$

con  $n_i$  enteros positivos y con la energía asociada a cada estado siendo:

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \vec{k}_{n_x, n_y, n_z}^2, \quad (9.39)$$

donde  $\vec{k}_{n_x, n_y, n_z} = \pi(n_x, n_y, n_z)/L$ . Además hay una parte en la función de onda que describe el spin de la partícula que puede tener dos orientaciones. Según el principio de exclusión de Pauli cada nivel de energía cuántico sólo puede estar ocupado como mucho por dos electrones (en dos estados cuánticos de diferente orientación del espín) (ver Fig. 45). Este conjunto de estados discretos constituye una base suficiente para describir el estado de cualquier electrón en el metal.

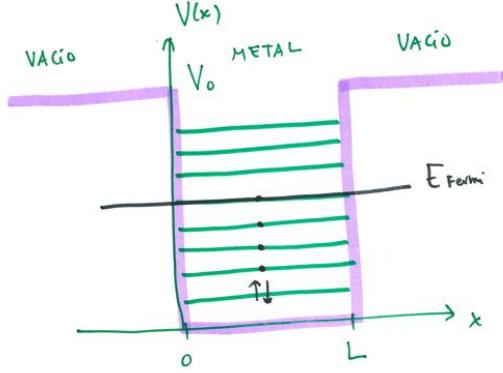


Figure 45: Pozo de potencial para un metal.

Calculemos el número  $n(E)$  de estados estacionarios individuales cuyas energías son menores que una dada  $E$ . Hay una correspondencia uno-a-uno entre los vectores  $\vec{k}_{n_x, n_y, n_z}$  y las funciones de onda  $\Psi_{n_x, n_y, n_z}$ . Así, el número de estados  $n(E)$  se puede obtener calculando el número de vectores con módulo menor que  $\sqrt{2mE/\hbar^2}$ , es decir dentro de la esfera de ese radio, y multiplicando el resultado por 2. Cada valor del vector  $\vec{k}_{n_x, n_y, n_z}$  tiene asociado un volumen  $(\pi/L)^3$ . Como los  $n_i > 0$  sólo necesitamos un octavo del volumen de la esfera y tenemos que

$$n(E) = 2 \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \left( \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \right)^3 \left( \frac{\pi}{L} \right)^{-3} = \frac{L^3}{3\pi^2} \left( \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \right)^3. \quad (9.40)$$

Si tenemos  $N$  electrones en el metal la máxima energía individual de uno de ellos (si el sistema completo está en el estado de mínima energía) es lo que se llama energía de Fermi  $E_F$ , que cumple

$$n(E_F) = N. \quad (9.41)$$

y, por tanto,

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{L^3} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (9.42)$$

A temperatura cero todos los niveles por debajo de  $E_F$  están ocupados y todos por encima, vacíos (ver Fig. 45). Para extraer un electrón del metal le debemos transmitir una energía mayor que

$$W = V_0 - E_F. \quad (9.43)$$

Una manera de transmitir energía a los electrones del metal es calentándolo. En este caso algunos electrones comienzan a ocupar niveles energéticos más altos

que el nivel de Fermi e incluso por encima de la barrera de potencial y generar una corriente eléctrica. Podemos tener corriente eléctrica a temperatura cero si aplicamos un campo eléctrico de intensidad  $I$  sobre la superficie del metal (por ejemplo en la dirección  $x$ ) proporcionando al electrón la energía potencial ( $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dx}$ )

$$V(x) = V_0 - eIx. \quad (9.44)$$

Como podemos ver en la Fig. 46 el campo eléctrico genera una barrera de

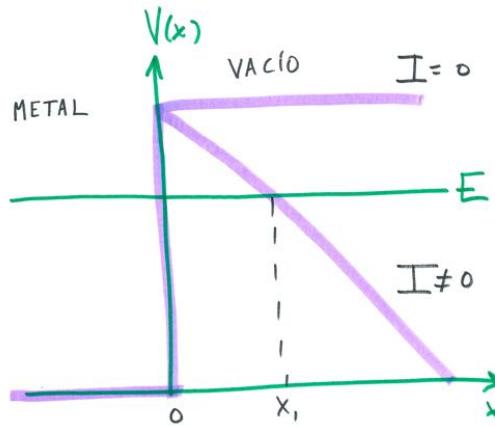


Figure 46: Energía potencial de un electrón en presencia de un campo eléctrico.

potencial de anchura finita que podemos calcular usando

$$V(x_1) = V_0 - eIx_1 = E, \quad (9.45)$$

$$x_1 = \frac{V_0 - E}{eI}. \quad (9.46)$$

Se genera una corriente en la superficie del metal debido al efecto túnel con un coeficiente de transmisión

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\simeq e^{-\frac{2}{\hbar} \int_0^{x_1} \sqrt{2m(V(x)-E)} dx} \\ &= e^{-\frac{4}{3} \sqrt{2m} \frac{\sqrt{(V_0-E)^3}}{e\hbar I}}. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Esta fórmula proporciona una buena descripción del campo eléctrico mínimo necesario para producir emisión fría (donde  $V_0 - E = W$ , característica de cada metal).

La corriente generada por efecto túnel permite obtener imágenes con mucha precisión de distintos materiales. Sin entrar en muchos detalles, la idea es situar un brazo móvil a una distancia muy pequeña de la superficie del material y crear una diferencia de potencial entre ellos. Se genera una corriente muy pequeña

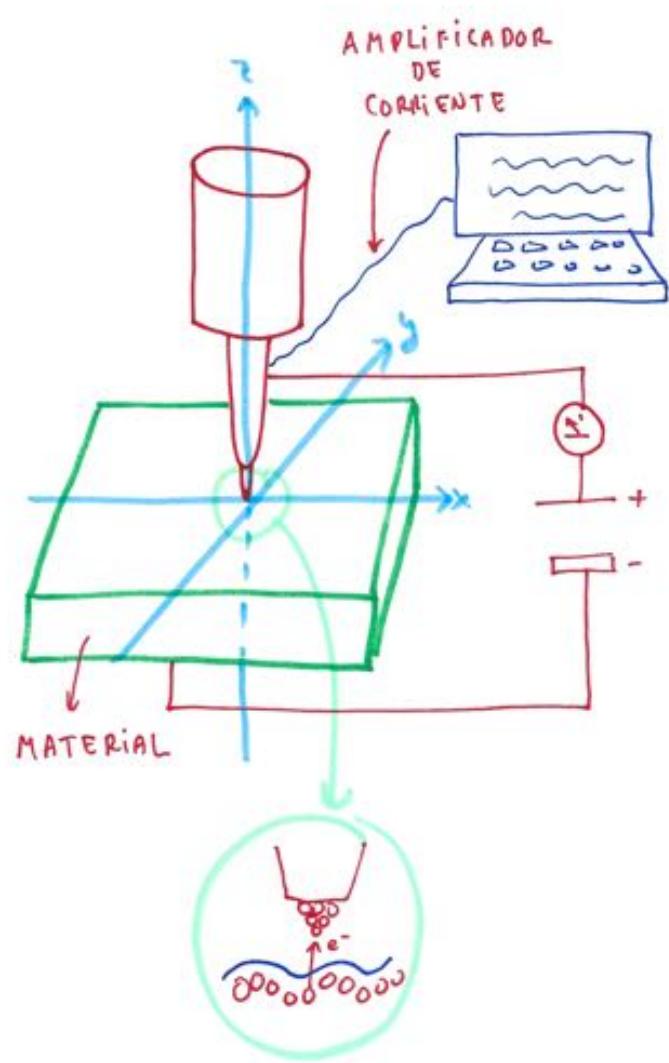


Figure 47: Microscopio de efecto túnel

con los electrones que pasan del material al brazo por efecto túnel que se amplifica y registra en un ordenador. Si se mueve el brazo (piezoelectrónico y aislado de vibraciones externas) sobre la superficie con la condición de que esa corriente se mantenga constante, entonces el brazo sube y baja siguiendo las irregularidades a distancias atómicas presentes en el material, quedando éstas registradas y permitiendo generar imágenes de gran precisión (ver Fig. 47). Este método (scanning tunneling microscope, STM) fue inventado en 1981 por Binnig y Rohrer (IBM, Zurich)<sup>41</sup><sup>42</sup> f

Fin de clase 20

#### 9.4 Teoría cuántica de los sólidos

La propiedad más importante de los sólidos es que tienen una estructura periódica en forma de red cristalina. En otras palabras, los núcleos atómicos están distribuidos repitiendo una unidad elemental, tienen lo que se llama invariancia bajo traslaciones (ver Fig. 48). Los electrones en el sólido se mueven en el campo eléctrico creado por los núcleos atómicos y también interactúan entre ellos. Para resolver un sistema tan complejo podemos utilizar la aproximación donde consideramos el movimiento de un sólo electrón en el campo de un potencial efectivo que tiene en cuenta todos los núcleos y la interacción con los demás electrones.

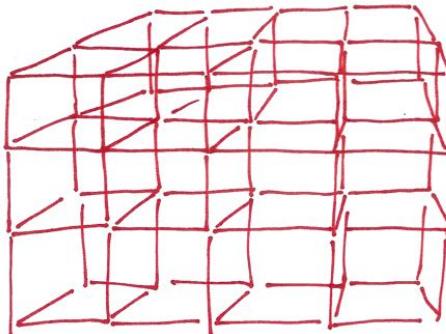


Figure 48: Estructura cristalina en un sólido

En este caso la función de onda del electrón cumple

$$H\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (9.48)$$

con

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \quad (9.49)$$

---

<sup>41</sup>Link: Surface studies with a scanning tunnelling microscope.

<sup>42</sup>Link: Have you ever seen an atom?

donde  $V(\vec{r})$  es la energía potencial efectiva que debe tener invariancia bajo traslaciones:

$$V(\vec{r} + \vec{n}) = V(\vec{r}) \quad (9.50)$$

donde  $\vec{n} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$ , con  $n_i$  enteros y  $\vec{a}_i$  formando una base que permite acceder cualquier punto de la red periódica.

Para estudiar las propiedades genéricas de las autofunciones en este sistema introducimos el operador de traslación en la dirección  $\vec{n}$ :

$$\hat{T}_{\vec{n}}\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \vec{n}) \quad (9.51)$$

que tiene autovalores  $t_n$ ,

$$(\hat{T}_{\vec{n}} - t_n)\Psi = 0. \quad (9.52)$$

Por tanto,

$$\hat{T}_{\vec{n}}\Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r} + \vec{n}) = t_n\Psi(\vec{r}). \quad (9.53)$$

Como la normalización de la función de onda no depende de donde pongamos el origen de coordenadas entonces  $|\Psi(\vec{r} + \vec{n})| = |\Psi(\vec{r})|$  (esto define una simetría discreta del sistema) y los autovalores de  $\hat{T}_{\vec{n}}$  tienen que tener módulo uno, *i.e.*

$$|\Psi(\vec{r} + \vec{n})| = |t_n||\Psi(\vec{r})| \rightarrow |t_n| = 1 \rightarrow t_n = e^{i\vec{k}\cdot\vec{n}}. \quad (9.54)$$

$\vec{k}$  es el vector de onda de la red cristalina y  $\hbar\vec{k}$  se conoce como quasimomento que corresponde al momento habitual del electrón cuando el potencial periódico es cero  $V = 0$  y es una constante del movimiento.

Si otros números cuánticos los denotamos con  $\lambda$  tenemos que

$$\hat{T}_{\vec{n}}\Psi_{k,\lambda}(\vec{r}) = \Psi_{k,\lambda}(\vec{r} + \vec{n}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{n}}\Psi_{k,\lambda}(\vec{r}). \quad (9.55)$$

Las funciones de Bloch,  $U_{k,\lambda}$ , se definen como

$$\Psi_{k,\lambda}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}U_{k,\lambda}(\vec{r}) \quad (9.56)$$

que indican que la función de onda es el producto de una onda plana modulada por una función de Bloch.

**Ejercicio 1.2.15** Demostrar que las funciones de Bloch son periódicas cumpliendo

$$U_{k,\lambda}(\vec{r} + \vec{n}) = U_{k,\lambda}(\vec{r}). \quad (9.57)$$

Fin de clase 21

Finalmente la ecuación de Schrödinger que describe el comportamiento en una celda es <sup>43</sup>

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla} + i\vec{k})^2 + E_{\lambda}(k) - V(\vec{r}) \right) U_{k,\lambda}(\vec{r}) = 0. \quad (9.58)$$

---

<sup>43</sup>  $\vec{\nabla}^2\Psi_{k,\lambda}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}(\vec{\nabla} + i\vec{k})^2U_{k,\lambda}(\vec{r})$

entrega el 17/4

Esta solución se puede continuar al resto de celdas por periodicidad.

Una de las propiedades más importantes del movimiento de un electrón en un campo periódico es la estructura de bandas de su espectro de energías. La ecuación de Schrödinger

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) - E_\lambda(\vec{k}) \right) \Psi_{k,\lambda}(\vec{r}) = 0 \quad (9.59)$$

en el caso de un potencial constante tiene como solución

$$\Psi_{k,\lambda}(\vec{r}) = C e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (9.60)$$

que implica que  $U_{k,\lambda}(\vec{r})$  es constante y la energía del electrón cumple la relación habitual

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (9.61)$$

En general, cuando una partícula se mueve en un campo periódico su energía  $E(k)$  no es una función continua del momento. Tiene discontinuidades en ciertos valores de  $\vec{k}$ . El espectro de energías se divide en bandas con determinados valores permitidos para esta cantidad que están separadas por saltos en zonas prohibidas.

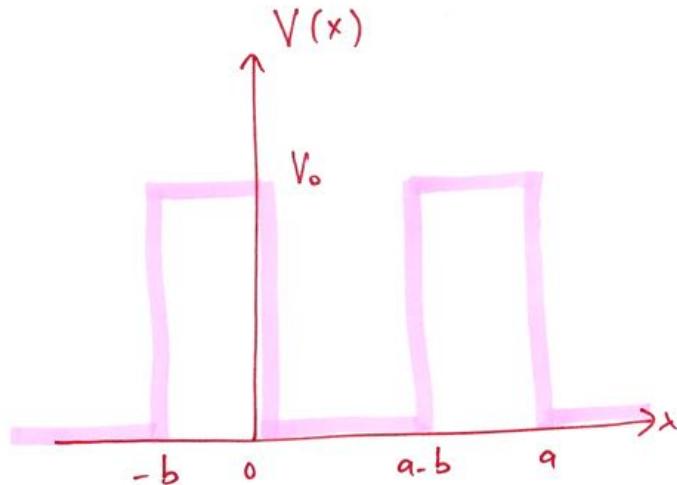


Figure 49: Modelo sencillo de estructura cristalina en un sólido

Para estudiar estas bandas en más detalle consideremos el caso del movimiento unidimensional de un electrón en un potencial considerado por Kronig-Penney en 1931 que tiene dos barreras de potencial como en la Fig. 49 . Como sabemos

la función de onda es de la forma

$$\Psi_1(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (9.62)$$

en las regiones con energía potencial cero y

$$\Psi_2(x) = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}, \quad (9.63)$$

en las zonas interiores de la barrera.

**Ejercicio 1.2.16** Demostrar que las condiciones de continuidad de la función de onda y de su derivada implican, junto con la condición de periodicidad,

$$\Psi(x+a) = e^{ika}\Psi(x), \quad (9.64)$$

que

$$\cos(\lambda a) = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{2\alpha\beta} \sinh(\beta b) \sin(\alpha(a-b)) + \cosh(\beta b) \cos(\alpha(a-b)), \quad (9.65)$$

donde  $\lambda$  es un número real que interviene en las condiciones

$$\Psi_2(-b) = e^{-i\lambda a}\Psi_1(a-b), \quad (9.66)$$

$$\Psi'_2(-b) = e^{-i\lambda a}\Psi'_1(a-b). \quad (9.67)$$

♣ entrega el 17/4

Podemos encontrar la estructura de bandas de energía permitidas para el electrón fácilmente si consideramos el límite con  $b \rightarrow 0, V_0 \rightarrow \infty$ , en el que las barreras son muy altas y muy estrechas pero manteniendo el área dentro de ellas constante, *i.e.*

$$\frac{mV_0}{\hbar^2}ab = \gamma. \quad (9.68)$$

En este caso tenemos que  $\sinh(\beta b) \simeq \beta b$  y  $\cosh(\beta b) \simeq 1$  y, por tanto,

$$\cos(\lambda a) = \gamma \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} + \cos(\alpha a), \quad (9.69)$$

al ser  $\lambda$  real esta ecuación se cumple cuando el lado de la derecha está entre -1 y 1. Como podemos ver en la Fig. 50 esto hace que sólo ciertas bandas de energía estén permitidas. Se alternan zonas de energías permitidas para el electrón con zonas a las que no puede acceder. Esta estructura en bandas es genérica aunque normalmente más compleja y difícil de calcular que el ejemplo aquí estudiado.

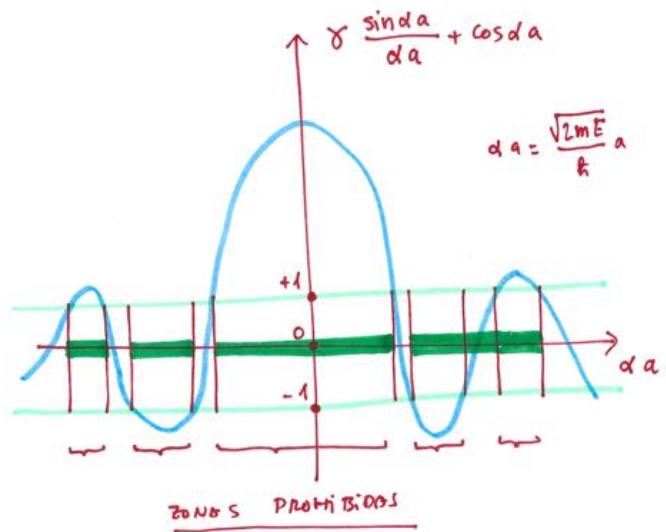


Figure 50: Estructura de bandas permitidas y prohibidas en un sólido con potencial periódico

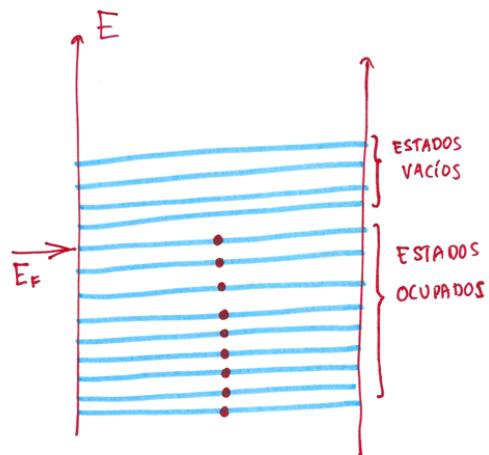


Figure 51: Estructura de bandas en un conductor

## 9.5 Conductividad eléctrica de los sólidos

En un sólido, como en un átomo individual, los electrones tienden a ocupar primero los estados cuánticos con menor energía. Cuando estamos a temperatura cero los electrones ocupan todos los niveles de energía posibles hasta alcanzar el nivel de Fermi ( $E_F$ ). Todos los vectores de onda están ocupados dentro de la llamada superficie de Fermi, con energía  $E_F$ . Con esta estructura en mente podemos clasificar los sólidos en conductores y aislantes.

Los conductores (por ejemplo los metales) se caracterizan por tener una configuración de mínima energía con bandas parcialmente ocupadas (ver Fig. 51). Esto permite que al aplicar campos muy débiles aparezcan corrientes ya que los electrones pueden saltar a niveles superiores, cercanos en energía, fácilmente.

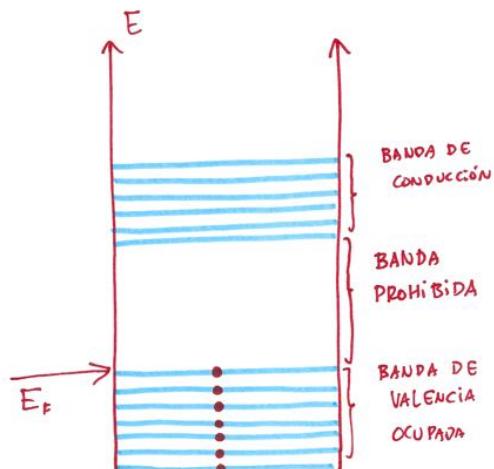


Figure 52: Estructura de bandas en un aislante

En los aislantes hay una banda por debajo del nivel de Fermi que está completamente ocupada y se llama banda principal o de valencia. Está separada de la siguiente banda por un salto energético grande por medio de una banda prohibida. Para poder generar una corriente se necesita proporcionar al sólido una energía muy grande mediante un campo eléctrico muy fuerte. Esta situación es también típica de los semiconductores (Fig. 53) que sólo se diferencian de los anteriores en que la banda prohibida no es demasiado grande.

La banda prohibida es diferente en diferentes materiales y la conductividad depende de la temperatura. Por ejemplo, el diamante tiene un salto energético grande, de 6 a 7 eV y por tanto es un aislante no sólo a  $T = 0$  sino también a temperatura ambiente. En el germanio la banda prohibida es de 0.72 eV y a temperatura ambiente es un conductor, debido a las fluctuaciones térmicas en la

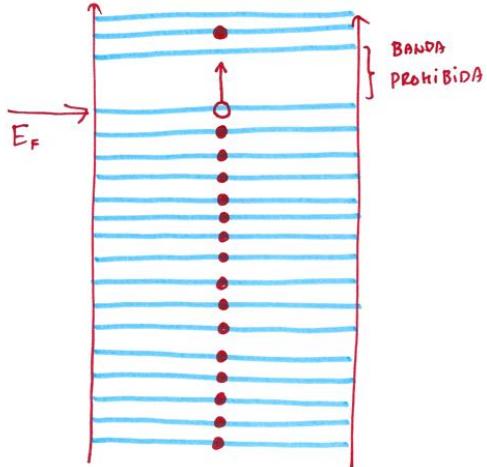


Figure 53: Estructura de bandas en un semiconductor

energía de los electrones, por tanto es un semiconductor ya que su conductividad pasa de cero a  $T = 0$  a incrementarse mucho a temperatura ambiente.

Cuando un electrón pasa a la banda de conducción se genera un vacío o hueco en la banda de valencia. Heisenberg (1931) interpretó el movimiento de un hueco como el movimiento de una partícula con carga positiva. Por tanto la conductividad de un semiconductor puro (conductividad intrínseca) se puede entender como el movimiento de electrones en la banda más alta (conductividad electrónica) y como el movimiento de huecos en una banda más baja casi llena (conductividad de huecos).

Cuando introducimos impurezas (inclusión de átomos de otro material) en un semiconductor su conductividad cambia de manera significativa (ver Fig. 54). Por ejemplo, si dopamos un material con un átomo por cada  $10^5$  del sólido podemos elevar la conductividad 1000 veces. Si las impurezas aportan electrones a la banda de conducción libre, se llaman donantes, y participan en la conductividad. El semiconductor que recibe esta impureza es de tipo  $N$ . Si los átomos de la impureza capturan electrones de las bandas inferiores se llama aceptor, genera huecos en la banda con una corriente asociada de carga positiva y define un semiconductor de tipo  $P$ .

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento de un electrón en un campo periódico considerando que los átomos que forman el sólido son estacionarios. Sin embargo es importante tener en cuenta las vibraciones de estos átomos porque son muy importantes. Sin ofrecer una derivación completa veamos cuáles son las ideas fundamentales para entender el movimiento de una red y como afecta a la función de onda de los electrones.

Asumimos que los átomos tienen vibraciones armónicas sobre una posición

Fin de clase 22  
Lo siguiente  
desde aquí no  
es parte del  
curso

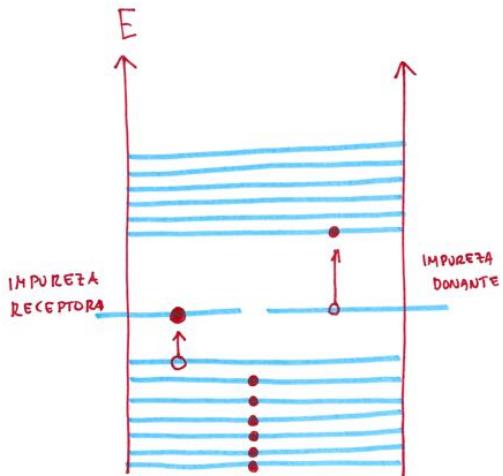


Figure 54: Distintos tipos de impurezas que afectan a la conductividad

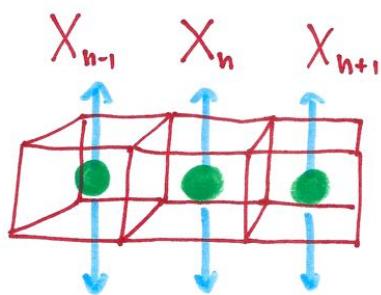


Figure 55: Modos vibracionales de una red cristalina

de equilibrio y consideramos que son de baja frecuencia y, por tanto, de larga longitud de onda, *i.e.* estudiamos el movimiento colectivo de los átomos en el sólido (ver Fig. 55). Esto corresponde a vibraciones acústicas muy parecidas a las que estudiamos en el problema de la cuerda discreta.

De momento consideramos que hay un átomo por celda en la red y vibraciones en una única dirección parametrizadas por el desplazamiento sobre la posición de equilibrio  $X_n$  (ver Fig. 55). Como antes, la posición de las celdas viene dada por el vector

$$\vec{n} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3. \quad (9.70)$$

El Hamiltoniano asociado a estas vibraciones es

$$H = \frac{M}{2} \sum_n \dot{X}_n^2 + \frac{1}{2} \sum_m \sum_n C_m X_n X_{n+m} \quad (9.71)$$

donde  $M$  es la masa del átomo y  $C_m = C_{-m}$  representa la energía potencial de interacción entre átomos, que depende de la distancia entre ellos. La ecuación del movimiento clásica es

$$M \ddot{X}_n = -\frac{1}{2} \sum_m C_m (X_{n+m} + X_{n-m}), \quad (9.72)$$

con solución

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q (X_q e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} + X_q^* e^{-i\vec{q} \cdot \vec{n}}), \\ X_q &= X_q(t) = X_q^0 e^{-i\omega_q t}, \\ M\omega_q^2 &= \sum_m C_m e^{i\vec{q} \cdot \vec{m}}, \end{aligned} \quad (9.73)$$

donde  $N$  es el número de celdas y la suma es sobre los valores del vector de onda  $\vec{q}$  que cumplen  $-\pi \leq \vec{q} \cdot \vec{a}_i \leq \pi$  (esto se debe a la periodicidad de la red). Finalmente, es posible escribir la energía vibracional en la forma

$$H = \sum_q (X_q X_q^* + X_q^* X_q) M\omega_q^2. \quad (9.74)$$

Cuando cuantizamos este Hamiltoniano obtenemos el siguiente espectro de energías

$$E = \sum_q \left( n_q + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_q. \quad (9.75)$$

Podemos entender  $n_q$  como el número de excitaciones elementales en el sólido (quasipartículas) con energía  $\hbar\omega_q$  y quasimomento  $\hbar\vec{q}$ . Se conocen como fonones (Igor Tamm 1932) y están asociados a las vibraciones acústicas del cristal.

El movimiento de conducción de los electrones es muy sensible a perturbaciones de la periodicidad de la red. La interacción de los electrones con los átomos vibrando se puede estudiar en una teoría cuántica como su interacción con los fonones. Los electrones sufren transiciones cuánticas absorbiendo y emitiendo fonones, de la misma manera como lo harían con fotones. Esta interacción es una contribución importante de la resistencia eléctrica.

No vamos a derivar el potencial describiendo la interacción electrón-fonón pero si podemos ver algunos puntos importantes. Podemos pensar en un cristal con iones positivos y negativos que oscilan con una frecuencia  $\omega$  y una amplitud  $\vec{Q}$ . El movimiento de estas cargas genera un potencial electrostático que interactúa con la carga del electrón. En general tenemos potenciales de deformación de la forma

$$V(\vec{r}) = \sum_q D \frac{i\vec{q} \cdot \vec{Q}}{\sqrt{N}} e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.76)$$

donde  $D$  depende de la carga iónica  $Ze^2$  y el volumen de la celda.  $N$  es el número de iones en el cristal y  $\vec{q}$  el vector de onda.

Debemos cuantizar este potencial y resolver la ecuación de Schrödinger. Ayuda el buscar una solución que sea una perturbación de las funciones de Bloch, dado que la energía de un fonón es mucho más pequeña que la del electrón. Cuando se absorbe un fonón la energía y el momento se conservan:  $\epsilon(\vec{k}') = \epsilon(\vec{k}) + \hbar\omega_q, \vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$  (y expresiones equivalentes cuando se emite). El número medio de fonones depende de la temperatura de la red y sigue la distribución de Bose-Einstein:

$$\langle n_q \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{k_B T}} - 1}, \quad (9.77)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann. Para entender la resistencia eléctrica es útil trabajar con el tiempo de relajación  $\tau$  en el momento medio (típico) de un electrón cuando interactúa con los fonones del material:

$$\langle \vec{k}(t) \rangle = \vec{k}(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.78)$$

con la conductividad siendo

$$\sigma = \frac{N_e e^2 \tau}{m} \quad (9.79)$$

donde  $N_e$  es el número de electrones libres por unidad de volumen. No hacemos el cálculo pero podemos indicar que para altas temperaturas,  $kT \gg \hbar\omega_q$ , tenemos que

$$\frac{1}{\tau} \simeq T, \quad (9.80)$$

$$\sigma \simeq \frac{1}{T}, \quad (9.81)$$

con resistividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \simeq T. \quad (9.82)$$

A bajas temperaturas,  $kT \ll \hbar\omega_q$ :

$$\frac{1}{\tau} \simeq T^5, \quad (9.83)$$

$$\sigma \simeq \frac{1}{T^5}, \quad (9.84)$$

con resistividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \simeq \rho_0 + CT^5, \quad (9.85)$$

donde  $\rho_0 \neq 0$  en el caso de sólidos con impurezas. Otro efecto importante para la resistividad es la interacción del electrón con otros electrones. A baja temperaturas se comporta como  $\rho \simeq T^2$ .

## 9.6 Superconductividad

Resulta que a temperaturas muy bajas el modelo donde despreciamos la interacción entre electrones falla dramáticamente. Este es el caso de superconductividad donde el material no tiene resistencia al paso de la electricidad por debajo de una **temperatura crítica**  $T_c$ , normalmente cercana al cero absoluto, característica de cada material. En la actualidad se generan campos magnéticos constantes utilizando superconductores a baja temperatura. Es un fenómeno descubierto por Kamerlingh en 1911 que había conseguido helio líquido por debajo de 4.2 K y estudió la resistividad del mercurio congelado que va a cero a esa temperatura. Obtuvo el premio Nobel por este descubrimiento en 1913. De los 92 elementos en la tabla periódica, 26 son superconductores. Otros se vuelven superconductores si son sometidos a suficiente **presión**.  $T_c > 30$  K la alcanzaron Bednorz y Müller (IBM, Zurich) con cerámicas y obtuvieron el premio nobel en 1987. La temperatura crítica más alta es de 165 K para un compuesto basado en mercurio. Jupiter atrae al hidrógeno con tanta fuerza que lo lleva a densidades metálicas y se vuelve superductor con  $T_c$  de varios miles de K.

Un **superconductor**<sup>44</sup> es un material diamagnético perfecto: si le aplicamos un campo magnético exterior pequeño y reducimos la temperatura hasta llegar a una crítica  $T_c$  entonces el flujo de campo magnético desaparece totalmente en el interior del superconductor debido a las supercorrientes eléctricas que aparecen en la superficie y que generan un campo magnético que cancela exactamente el anterior. Una gráfica de su resistividad típica en función de la temperatura se muestra en la Fig. 56.

---

<sup>44</sup>Un libro interesante (de 2004) sobre este tema es "Superconductivity, Superfluids and Condensates" de James F. Annett, en Oxford Mater Series in Condensed Matter Physics.

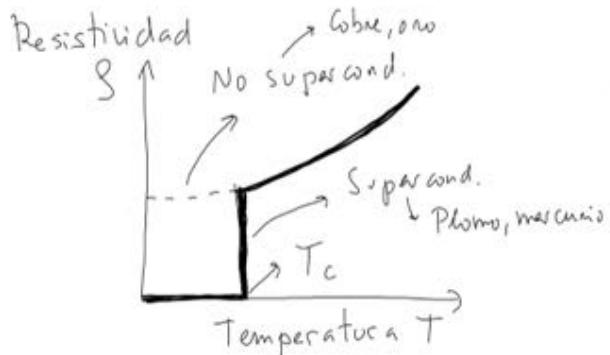


Figure 56: Dependencia con la temperatura de un material no superconductor y otro superconductor.

El fenómeno de expulsión del flujo magnético se conoce como efecto Meissner-Ochsenfeld (1933). Un superconductor es repelido por ambos polos de un imán y podemos utilizar esta propiedad para construir trenes que leviten y viajen sin fricción.

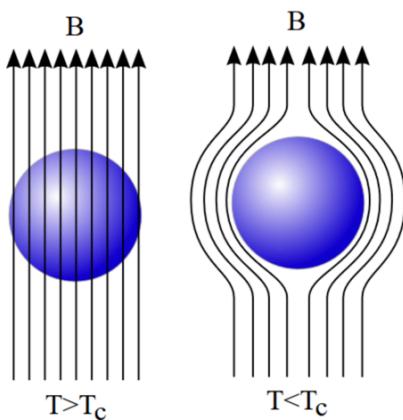


Figure 57: Efecto Meissner

El **efecto Meissner** permite atrapar flujo magnético si utilizamos un cilindro hueco como superconductor. A  $T > T_c$  encendemos el campo magnético, a medida que bajamos a  $T < T_c$  el campo magnético desaparece del interior superconductor del cilindro pero conservando las líneas de flujo en el interior hueco (Fig. 57). Seguimos teniendo supercorrientes en la superficie del cilindro. Si ahora quitamos el campo exterior con  $T < T_c$  el flujo interior no puede escapar y quedan atrapadas por las supercorrientes que mantenemos mientras la temperatura sea baja.

Existen dos tipos de superconductores. Para el Tipo I existe una única transición de estado que corresponde a la situación ya descrita. En supercon-

ductores de Tipo II encontramos dos transiciones a diferentes valores del campo magnético crítico donde existe un estado intermedio que atrapa una fracción de las líneas de campo antes de expulsarlas al exterior completamente (ver Fig. 58). El flujo atrapado, en forma de vórtices solo en el caso de superconductores de

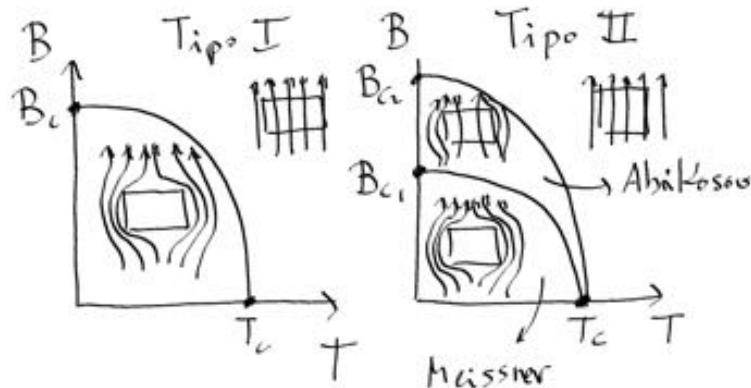


Figure 58: Transiciones críticas a fases superconductoras en materiales de Tipo I y II.

tipo II como es mostrado en la Fig. 59, es un múltiplo entero de un cuarto de

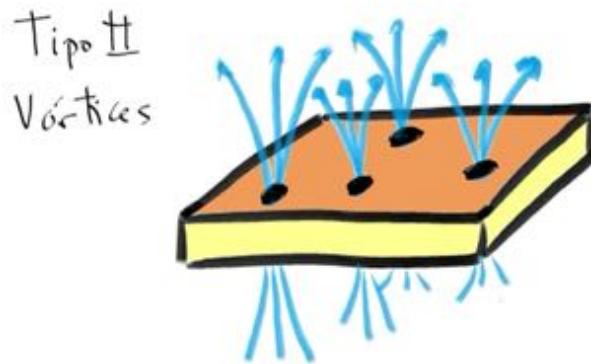


Figure 59: Campo magnético atrapado en diferentes vórtices en un superconductor de tipo II.

flujo  $\phi_0 = hc/2e$ . Este fenómeno permite el diseño de transporte en forma de “levitación” sin fricción<sup>45</sup>.

Fin de parte no evaluable.  
Fin de clase 23

---

<sup>45</sup>Ver la presentación en Enlace: The levitating superconductor.

## Part III

# Fundamentos de Física Relativista

## 10 Relatividad Especial

La física Newtoniana se debe entender como un cierto límite de una teoría relativista más completa que es válido para velocidades mucho más pequeñas que la de la luz ( $\sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ). De todos los postulados en los que se sustenta, el más impactante es que la velocidad de la luz es la misma para cualquier sistema de referencia inercial (no acelerado). Tenemos dos temas principales en relatividad: la relatividad especial (que no trata con gravedad) y la relatividad general (que se encarga de estudiar la gravedad). La relatividad especial se puede dividir en **cinemática**, que se encarga de estudiar las coordenadas espacio-temporales, y en **dinámica**, que estudia masas, fuerzas, energía, momento, etc. Empecemos con la primera.

### 10.1 Cinemática

El caldo de cultivo para las ideas de Einstein se generó en el siglo diecinueve. El primer problema importante es que las **ecuaciones de Maxwell** estaban en conflicto con las llamadas **transformaciones Galileanas**. Un sistema de referencia inercial se mueve a velocidad constante y en él se cumple la primera ley de Newton (un cuerpo en reposo o en movimiento uniforme permanece en ese estado a menos que actúe una fuerza sobre él). Cualquier otro sistema que se mueva con velocidad constante con respecto al inercial, es inercial.

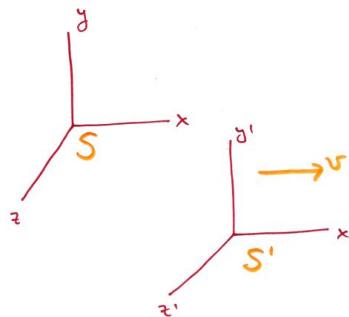


Figure 60: Sistema de referencia inercial

Si el sistema  $S'$  se mueve en la dirección  $x$  con velocidad constante  $v$  con respecto al sistema  $S$  (ver Fig. 60) entonces las coordenadas espacio-temporales

de ambos sistemas cumplen

$$t = t', \quad (10.1)$$

$$x = x' + vt, \quad (10.2)$$

$$y = y', \quad (10.3)$$

$$z = z'. \quad (10.4)$$

Esto es una transformación Galileana. El **principio de invariancia Galileana** dice que las leyes físicas son invariantes bajo estas transformaciones.

En 1864 **Maxwell** escribió un conjunto de ecuaciones que describían todo lo que se conocía sobre el **electromagnetismo** hasta la fecha. Pero resulta que no son invariantes bajo transformaciones Galileanas. En un sistema inercial las ecuaciones son sencillas e indican que la velocidad de la luz es  $c$ , pero en otro distinto las ecuaciones son bastante más complicadas y la velocidad de la luz es distinta. Al primer sistema de referencia se lo conoce como el sistema de referencia del **éter**, pero, ¿qué tiene de especial? Como todas las ondas conocidas se propagaban sobre un medio material se pensaba que las ondas electromagnéticas se propagaban en este éter.

**Trabajo** Demostrar que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo transformaciones Galileanas.



Tenemos dos opciones: o las ecuaciones de Maxwell son incorrectas o el principio de invariancia bajo transformaciones Galileanas falla. El primero en pensar en la segunda posibilidad fue **Einstein** y en 1905 demostró que son sólo un límite de baja velocidad de las transformaciones de Lorentz (se sabía que las ecuaciones de Maxwell eran invariantes bajo transformaciones de Lorentz).

Si una onda se propaga con respecto a un medio en un sistema inercial con una determinada velocidad, medimos otra distinta en otro sistema inercial. Esto ocurre para ondas de sonidos, por ejemplo, que necesitan de un medio para propagarse. Si las ondas electromagnéticas se propagan en el éter entonces deberíamos ser capaces de medir la velocidad de la tierra en su movimiento a través de él. Este era el objetivo del experimento de **Michelson-Morley** en 1887<sup>46</sup><sup>47</sup>.

Pensemos en términos de ondas de sonido propagándose en aire con velocidad  $v_s$  e intentemos medir nuestra velocidad  $v_p$  con respecto al éter que para nosotros es la de una plataforma de longitud  $L$  sobre la que nos situamos. En el sistema de referencia con el aire en reposo imaginemos dos personas en los extremos de la plataforma que se mueve con esa velocidad  $v_p$  con respecto al aire. Si la persona en la parte trasera de la plataforma hace un ruido, éste tardará un tiempo  $L/(v_s - v_p)$  en llegar a la otra (el sonido recorre una distancia  $v_s t$  que tiene que ser  $L + v_p t$ , que es donde está el otro observador, ver Fig. 61). Si en ese momento la segunda persona manda una señal al primero esta tarda

<sup>46</sup>Esto lo estudiaremos más adelante pero id viendo esta película: Einstein and Eddington.

<sup>47</sup>Referencias a varios libros: Einstein, Eddington and the 1919 eclipse

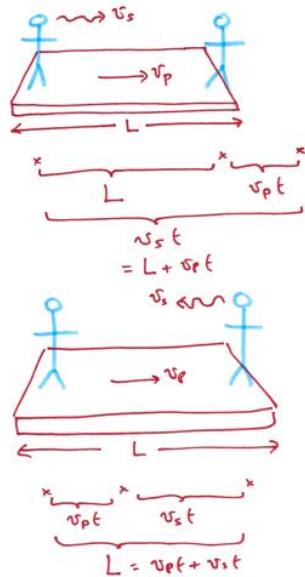


Figure 61: Emisión de sonido en dirección de la plataforma

$t = L/(v_s + v_p)$  segundos en llegarle ( $L - v_p t = v_s t$ ). El tiempo total para este proceso es

$$t_1 = \frac{L}{v_s - v_p} + \frac{L}{v_s + v_p} = \frac{2Lv_s}{v_s^2 - v_p^2}. \quad (10.5)$$

Cuando  $v_p = 0$  entonces  $t_1 = 2L/v_s$  y cuando  $v_p \rightarrow v_s$  entonces  $t_1 \rightarrow \infty$ .

Si la plataforma se mueve perpendicular a su longitud entonces el tiempo recorrido para el proceso anterior es distinto (ver Fig. 62), *i.e.*

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{v_s^2 - v_p^2}}, \quad (10.6)$$

que tiene los mismos límites que en la configuración previa. De todas las posibles orientaciones para emitir el sonido con respecto a la plataforma resulta que  $t_1$  proporciona el mayor tiempo posible y  $t_2$  el menor. Esto es genérico y tenemos que si  $v_p \ll v_s$

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{v_s} \left( \frac{1}{1 - \frac{v_p^2}{v_s^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{v_s^2}}} \right) \simeq \frac{Lv_p^2}{v_s^3}. \quad (10.7)$$

Para medir la velocidad de la tierra en el éter Michelson y Morley utilizaron luz y no sonido. En este caso  $\Delta t$  es demasiado pequeño para ser medido. Esta

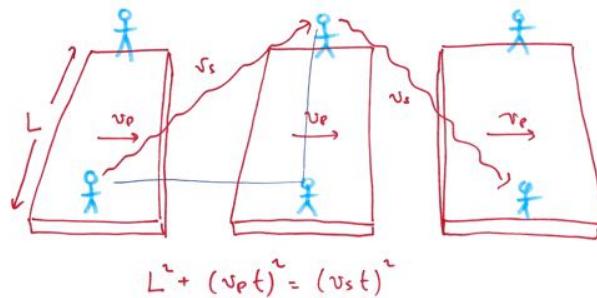


Figure 62: Emisión de sonido en dirección perpendicular a la plataforma

dificultad se evita si aprovechamos el fenómeno de interferencia de ondas de luz que viajen distancias distintas. Situamos dos plataformas perpendiculares

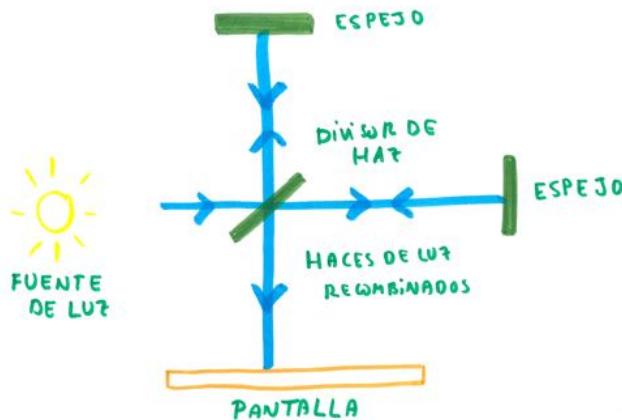


Figure 63: Experimento de Michelson-Morley

como en Fig. 63 con espejos y una fuente de luz monocromática que envía fotones hacia un divisor de haces. Estos haces de luz son reflejados por los espejos, vuelven a pasar por el divisor de haces y se recombinan parcialmente hasta ser registrados en una pantalla produciendo una figura de interferencia que cambiará drásticamente dependiendo de si uno de los haces ha recorrido una distancia mayor. Al modificar el ángulo al que se realiza el experimento y medir la posición de máxima interferencia nos daría la velocidad de la tierra en el éter ( $v_p$  en el ejemplo del sonido). Para sorpresa de Michelson y Morley no encontraron ningún cambio en la figura de interferencia al variar el ángulo del experimento. Si hubiera éter esto implica que la velocidad de la tierra con respecto a él sería cero. Puede ser que coincidiera que midieron en un momento en que la velocidad relativa era efectivamente esa, pero al repetir el experimento

meses más tarde obtuvieron el mismo resultado.

La explicación a este resultado la propuso Einstein en 1905 al indicar que el éter no existe. La luz no necesita de un medio para propagarse y no se mueve con respecto a un sistema de referencia especial.

Fin de clase 24

#### 10.1.1 Los postulados de Einstein

- La velocidad de la luz es la misma para cualquier sistema de referencia inercial. Es un principio basado en datos experimentales y sin contraejemplo hasta la fecha.
- El principio de la relatividad: Todos los sistemas iniciales son equivalentes. Un objeto se mueve siempre con respecto a otro, nunca en términos absolutos. Las leyes físicas que son correctas en un sistema inercial también son ciertas en todos los demás. El espacio es homogéneo (todos los puntos son equivalentes como origen de sistema de referencia) e isotrópico (todas las direcciones son equivalentes y cualquiera de ellas puede ser uno de los ejes de coordenadas). Este postulado es válido para espacio vacío, si hay una masa entonces la distancia de un punto con respecto a ella es importante y no todos los puntos son iguales, en este caso debemos recurrir a la teoría de la relatividad general.

#### 10.1.2 Consecuencias de los postulados de Einstein

- Pérdida de simultaneidad.

No tiene sentido decir que un suceso tiene lugar al mismo tiempo que otro en términos absolutos, se necesita indicar en qué sistema de referencia esto ocurre.

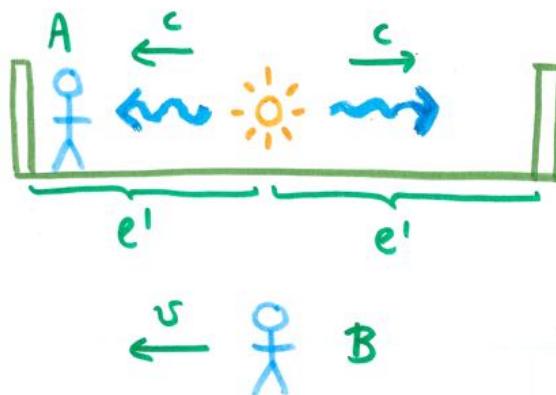


Figure 64: Sistema de referencia A

Por ejemplo, consideremos el sistema de referencia del observador *A* en el que una fuente de luz se coloca a la misma distancia  $l'$  de dos receptores (ver Fig. 64). Desde el punto de vista de *A* la luz se recibe en los dos receptores a la

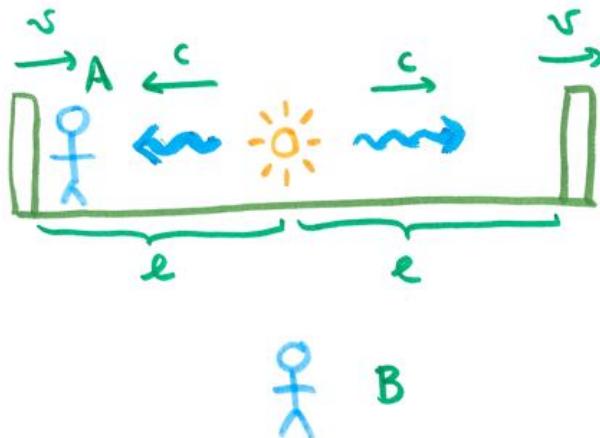


Figure 65: Sistema de referencia B

vez, en un tiempo  $l'/c$ . Un observador  $B$  que se mueva con velocidad  $v$  relativa a  $A$  no estaría de acuerdo (ver Fig. 65). Mediría un tiempo

$$t_I = \frac{l}{c+v} \quad (10.8)$$

para que la luz llegue al receptor de la izquierda y un tiempo

$$t_D = \frac{l}{c-v} \quad (10.9)$$

para que llegue al de la derecha.

**Ejercicio 3.1.1** Describir los tiempos que medirían los observadores  $A$  y  $B$  si en lugar de emitir luz se lanzaran pelotas de baloncesto.

♣ entrega el 13/5

**Ejercicio 3.1.2** Coloquemos dos relojes en la parte de atrás y delantera de un tren de longitud  $L$ , medida en el sistema de referencia del tren (ver Fig. 66), donde los sincronizamos. Para un observador exterior el tren viaja a una velocidad  $v$ . Demostrar que si este observador pudiera leer el tiempo en los relojes a la vez en su sistema de referencia notaría que el reloj en la parte trasera del tren marca un tiempo mayor que el de la delantera.

♣ entrega el 13/5

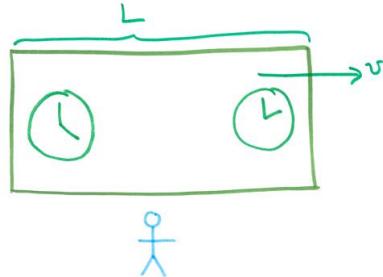


Figure 66: Relojes sincronizados en el sistema de referencia del tren

- Dilatación temporal.

Consideremos el ejemplo de una fuente que emite luz viajando en dirección vertical dentro de un tren hacia un espejo en el techo a una altura  $h$ . El observador  $A$  viaja en el tren a velocidad  $v$  con respecto al observador  $B$  que está parado fuera.

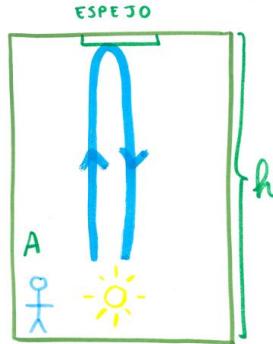


Figure 67: Trayectoria del haz de luz para el sistema de referencia del tren

Para el sistema de referencia  $A$  el camino recorrido por la luz se ve en Fig. 67 que se realiza en un tiempo

$$t_A = \frac{2h}{c}. \quad (10.10)$$

En el sistema de referencia del observador  $B$  el tren se mueve a velocidad  $v$  y el camino recorrido por la luz se ve como en la Fig. 68.  $t_B = t_{\text{subida}} + t_{\text{bajada}}$  con  $c^2 t_{\text{subida}}^2 = v^2 t_{\text{subida}}^2 + h^2$  y  $t_{\text{subida}} = t_{\text{bajada}}$ . Por tanto la componente vertical de la velocidad de la luz es  $\sqrt{c^2 - v^2}$  y el tiempo que tarda en llegar al suelo después de reflejarse en el espejo es

$$t_B = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (10.11)$$

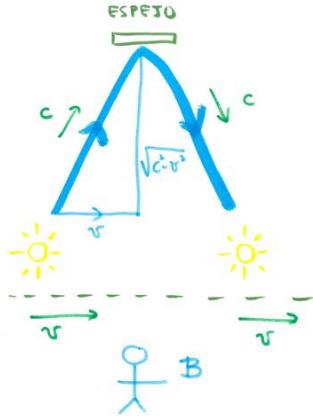


Figure 68: Trayectoria del haz de luz para el sistema de referencia del observador exterior

El cociente entre estos tiempos es

$$\gamma = \frac{t_B}{t_A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.12)$$

Como  $\gamma > 1$  entonces el tiempo medido por  $B$  es siempre mayor que para  $A$ . Para velocidades pequeñas,  $v \ll c$ ,  $\gamma \rightarrow 1$  y para velocidades muy grandes, o relativistas con  $v \rightarrow c$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 3.1.3** La paradoja de los gemelos. Tenemos dos gemelos,  $A$  y  $B$ .  $A$  se queda en la tierra y  $B$  viaja rápidamente a una estrella lejana y vuelve.

Demostrar que  $B$  es más joven que  $A$  cuando se reencuentran en la tierra.

♣ entrega el 13/5

**Ejercicio 3.1.4** Decaimiento del muón. Partículas elementales llamadas muones, que son como electrones pero 200 veces más masivos, se crean en las partes más altas de la atmósfera cuando rayos cósmicos colisionan con moléculas de aire. Tienen una vida media de  $2 \cdot 10^{-6}$  sg para luego decaer en electrones y neutrinos, y se mueven a una velocidad cercana a la de la luz. Supongamos que un muón se crea a una altura de 50 km y se mueve en vertical hacia la tierra con una velocidad  $v = 0.99998c$  y decae en  $T = 2 \cdot 10^{-6}$  sg sin colisionar con ninguna partícula en su aproximación al suelo. Investigar si este muón llegará al suelo antes de decaer.

♣ entrega el 13/5

- Contracción de longitudes.

Consideremos una persona  $A$  en un tren que para ella mide una longitud  $l_A$  y una persona  $B$  que está en el suelo, en reposo. El tren se mueve a velocidad  $v$  con respecto al suelo. Colocamos una fuente de luz que emite fotones hacia un espejo que se encuentra en la parte delantera del tren. Estos se reflejan y vuelven a la fuente de luz en un tiempo, para  $A$ :

$$t_A = 2 \frac{l_A}{c}. \quad (10.13)$$

Para  $B$  las cosas son más complicadas. Sea  $l_B$  la longitud del tren medida por  $B$ . La velocidad relativa entre la luz y el espejo durante la primera mitad del recorrido del haz de luz es  $c - v$  y durante la segunda  $c + v$ . Entonces el tiempo medido por  $B$  para recorrer ambos recorridos es

$$t_B = \frac{l_B}{c - v} + \frac{l_B}{c + v} = \frac{2l_B c}{c^2 - v^2} = \frac{2l_B}{c} \gamma^2. \quad (10.14)$$

Como sabemos que  $t_B = \gamma t_A$  entonces tenemos que

$$\frac{2l_B}{c} \gamma^2 = \gamma 2 \frac{l_A}{c}, \quad (10.15)$$

o

$$l_B = \frac{l_A}{\gamma}. \quad (10.16)$$

Como  $\gamma > 1$  entonces la longitud medida por  $B$  es siempre menor que la medida por  $A$  (que al estar en reposo con respecto al objeto se llama “longitud propia”).

### 10.1.3 Las transformaciones de Lorentz

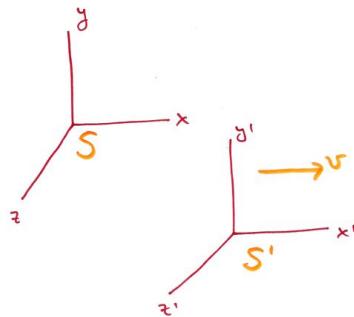


Figure 69: Sistema de referencia inercial

Consideremos las diferencias de coordenadas entre dos sucesos que tienen lugar en los sistemas de referencia  $S$  y  $S'$  de la Fig. 69, es decir,  $\Delta x, \Delta t$  y

$\Delta x'$ ,  $\Delta t'$ , respectivamente. En general escribimos (nada muy interesante pasa en  $y, z$ )

$$\Delta x = A\Delta x' + B\Delta t', \quad (10.17)$$

$$\Delta t = C\Delta t' + D\Delta x'. \quad (10.18)$$

Las constantes  $A, B, C, D$  las podemos fijar sabiendo que la dilatación temporal implica que si  $\Delta x' = 0$  entonces  $\Delta t = \gamma\Delta t'$ , y, por tanto, como  $\Delta t = C\Delta t'$  entonces  $C = \gamma$  (hemos usado Eq. (10.12)). También sabemos que la contracción de longitudes nos dice que si  $\Delta t' = 0$  entonces  $\Delta x' = \Delta x/\gamma$  (Eq. (10.16)), así, como  $\Delta x = A\Delta x'$ , entonces  $A = \gamma$ . De la velocidad relativa entre sistemas de coordenadas cuando  $\Delta x = 0$  entonces  $\Delta x' = -v\Delta t'$ . Por tanto,  $0 = A\Delta x' + B\Delta t'$ , y concluimos que  $B = \gamma v$ . Finalmente de la no sincronización de los relojes (Ejercicio 3.1.2.) sabemos que cuando  $\Delta t = 0$  entonces  $\Delta t' = -v\Delta x'/c^2$ , y, como  $0 = C\Delta t' + D\Delta x'$ , deducimos que  $D = \gamma v/c^2$ .

Esto nos permite escribir las transformaciones de Lorentz en la forma

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t'), \quad (10.19)$$

$$\Delta y = \Delta y', \quad (10.20)$$

$$\Delta z = \Delta z', \quad (10.21)$$

$$\Delta t = \gamma \left( \Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right), \quad (10.22)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.23)$$

Las transformaciones inversas son

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad (10.24)$$

$$\Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right). \quad (10.25)$$

Las transformaciones Galileanas se recuperan cuando  $v\Delta x'/c^2 \ll \Delta t'$ . Con  $\beta = v/c$  podemos escribir las transformaciones de Lorentz en términos de una matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ c\Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x' \\ c\Delta t' \end{pmatrix} \quad (10.26)$$

Esta transformación se parece mucho a una rotación en un plano:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{pmatrix} \quad (10.27)$$

y en realidad se parece mucho más si introducimos la variable llamada rapidez:

$$\tanh \phi \equiv \beta = \frac{v}{c} = \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{e^\phi + e^{-\phi}}. \quad (10.28)$$

En función de esta variable tenemos que

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \phi}} = \cosh \phi, \quad (10.29)$$

$$\gamma \beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tanh \phi}{\sqrt{1-\tanh^2 \phi}} = \sinh \phi. \quad (10.30)$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ c\Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x' \\ c\Delta t' \end{pmatrix}. \quad (10.31)$$

**Ejercicio 3.1.5** Demostrar que el intervalo  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$  no depende del sistema de referencia en que se mida. Comparar este resultado con la invariancia de  $r^2 = x^2 + y^2$  para las rotaciones en un plano. Utilizar las relaciones  $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$  y  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

♣ entrega el 13/5

**Ejercicio 3.1.6** Demostrar que si llevas a cabo una transformación de Lorentz con  $v_1 = \tanh \phi_1$  y luego otra con  $v_2 = \tanh \phi_2$  el resultado es una transformación de Lorentz con  $v = \tanh \phi_1 + \phi_2$ .

♣ entrega el 13/5  
Fin de clase 25

#### 10.1.4 Cuadrivectores

Un cuadrivector tiene la forma  $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$  donde las componentes transforman bajo las transformaciones de Lorentz de la misma manera que  $(cdt, dx, dy, dz)$ . Es decir

$$A_0 = \gamma \left( A'_0 + \frac{v}{c} A'_1 \right), \quad (10.32)$$

$$A_1 = \gamma \left( A'_1 + \frac{v}{c} A'_0 \right), \quad (10.33)$$

$$A_2 = A'_2, \quad (10.34)$$

$$A_3 = A'_3. \quad (10.35)$$

Si  $A$  y  $B$  son cuadrivectores entonces  $C = aA + bB$  también es un cuadrivector.

**Ejercicio 3.1.7** Demostrar que el producto escalar definido como  $A \cdot B \equiv A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \equiv A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$  es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

♣ entrega el 13/5

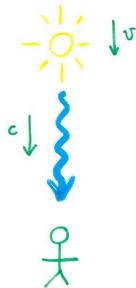


Figure 70: Efecto Doppler

#### 10.1.5 El efecto Doppler longitudinal

Imaginemos una fuente de luz emitiendo destellos con una frecuencia  $f'$  en su propio sistema de referencia mientras se mueve en dirección nuestra con velocidad  $v$ . Calculemos con qué frecuencia llegan los destellos de luz a nuestros ojos.

En nuestro sistema de referencia los destellos de luz ocurren a intervalos más largos y por tanto ocurren con menor frecuencia. Además los destellos sucesivos cada vez tienen que recorrer una distancia menor para alcanzarnos y esto incrementa la frecuencia a la que los recibimos, esto es el efecto Doppler al que estamos acostumbrados con el sonido.

En el sistema de referencia de la fuente el tiempo entre dos emisiones sucesivas es  $\Delta t' = 1/f'$  mientras que en el nuestro es  $\Delta t = \gamma\Delta t'$  debido a la dilatación temporal. El haz de luz ha viajado la distancia  $c\Delta t = c\gamma\Delta t'$  en nuestro sistema cuando el siguiente haz tiene lugar. Durante ese tiempo la fuente se ha movido una distancia en nuestro sistema  $c\Delta t - v\Delta t = (c-v)\gamma\Delta t'$  por detrás de los fotones del haz anterior. El tiempo de llegada entre haces a nuestros ojos es

$$\Delta T = \frac{1}{c}(c-v)\gamma\Delta t' = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\frac{1}{f'}, \quad (10.36)$$

donde  $\beta = v/c$ . Por tanto, la frecuencia que medimos es

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}f'. \quad (10.37)$$

Si la fuente se mueve hacia nosotros entonces  $\beta > 0$  y  $f > f'$ . El efecto Doppler habitual es más relevante que el efecto de dilatación temporal, la luz se mueve hacia el espectro azul, a más alta frecuencia en el visible. Si la fuente se aleja de nosotros entonces  $\beta < 0$  y  $f < f'$  y ambos efectos se suman para llevar la luz hacia la zona del rojo, de baja frecuencia, en el espectro visible.

## 10.2 Dinámica

Los dos resultados fundamentales para la dinámica de una partícula relativista son

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad (10.38)$$

$$E = \gamma mc^2 \quad (10.39)$$

donde  $m$  es lo que se llama masa en reposo,  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Cuando  $v \ll c$  entonces  $\vec{p} = m\vec{v}$  y cuando la partícula está en reposo,  $v = 0$ , entonces  $E = mc^2$ . Las cantidades  $\gamma m \vec{v}$  y  $\gamma mc^2$  se conservan en la interacción entre diferentes partículas, para cualquier valor de  $v$ .

Cuando  $v \ll c$  podemos expandir:

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (10.40)$$

En una colisión elástica Newtoniana  $m$  tiene un valor fijo (masa en reposo, que es independiente del sistema de referencia) y conservación de  $E$  implica simplemente conservación de la energía cinética. Esto es un ejemplo del principio de correspondencia donde todas las fórmulas relativistas se reducen a las no relativistas en el límite Newtoniano. Llamaremos energía cinética a la diferencia  $\gamma mc^2 - mc^2$  que en general no se conserva en una colisión dado que la masa no siempre es constante (la masa de una partícula en movimiento es  $\gamma m$  y depende del sistema de referencia donde la medimos).

Una relación importante es

$$\begin{aligned} E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 |\vec{v}|^2 c^2 \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^4. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Para fotones, que no tienen masa, tenemos que  $E = pc$  (cualquier partícula sin masa viaja a la velocidad de la luz y  $\gamma = \infty$ ). Es útil pensar que  $\vec{v} = \vec{c}$  y dividir las expresiones para energía y momento para eliminar la masa. La energía entonces corresponde a  $h\nu$ . Otras notaciones son  $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} \equiv m_{\text{relativista}} \vec{v}$  y  $E = \gamma m_0 c^2 \equiv m_{\text{relativista}} c^2$ .

Veamos ahora como escribir un Lagrangiano relativista. La clave es darse cuenta de que la acción debe ser estacionaria en todos los sistemas de referencia y lo más sencillo es buscar que la acción sea directamente independiente del sistema de referencia. Hemos visto que el intervalo  $c d\tau \equiv \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2}$  es invariante. Para una partícula libre una cantidad con unidades de acción es

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc \int \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = -mc \int \sqrt{c^2 - \dot{x}^2} dt \quad (10.42)$$

Como  $S = \int L dt$ , el Lagrangiano asociado es

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}, \quad (10.43)$$

y las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad (10.44)$$

que es equivalente a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mc\dot{x}}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} \right) = 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} (\gamma mv) = \frac{d}{dt} p. \quad (10.45)$$

El momento, como sabemos, se conserva. Para obtener la energía usamos la fórmula para el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} E &= \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \\ &= \dot{x} \left( \frac{mc\dot{x}}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} \right) - \left( -mc\sqrt{c^2 - \dot{x}^2} \right) \\ &= \frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma mc^2. \end{aligned} \quad (10.46)$$

Introducir potenciales es más complicado si queremos obtener las ecuaciones del movimiento correctas para todos los sistemas de referencia.

Fin de clase 26

A partir de ahora trabajaremos con  $c = 1$ . Se pueden reconstruir las potencias de  $c$  haciendo análisis dimensional. Por tanto, tendremos que

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, \quad (10.47)$$

$$E = \gamma m, \quad (10.48)$$

$$E^2 = p^2 + m^2, \quad (10.49)$$

$$\frac{\vec{p}}{E} = \vec{v}. \quad (10.50)$$

**Ejercicio 3.1.8** Demostrar que la transformación de la energía y el momento a otro sistema de referencia inercial que se mueve a velocidad relativa  $v$  en la dirección  $x$  es

$$E' = \gamma(E + vp'), \quad (10.51)$$

$$p' = \gamma(p' + vE'). \quad (10.52)$$

entrega el 13/5

### 10.2.1 Colisiones y decaimientos

Estudiemos ahora colisiones de partículas relativistas. Usamos el cuadrimomento

$$P \equiv (E, \vec{p}) \equiv (E, p_x, p_y, p_z) = (P_0, P_1, P_2, P_3). \quad (10.53)$$

Para una partícula tenemos

$$P = \gamma m(1, v_x, v_y, v_z). \quad (10.54)$$

Escribimos la conservación de energía y momento en una colisión en la forma

$$P_{\text{antes}} = P_{\text{después}}. \quad (10.55)$$

El producto escalar de  $P$  con  $P$  es

$$P \cdot P = P^2 = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 = E^2 - p^2 = m^2. \quad (10.56)$$

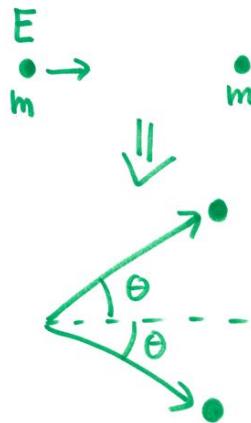


Figure 71: Colisión relativista

Consideremos el ejemplo de un billar relativista donde una partícula de masa  $m$  y energía  $E$  se acerca a una partícula idéntica que está en reposo. Colisionan de manera elástica (ninguna de las masas cambia y ninguna partícula se rompe) de tal manera que forman un ángulo  $\theta$  con respecto a la línea de incidencia (Fig. 71). Vamos a encontrar el valor de  $\theta$  en función de  $E$  y  $m$ . Antes de la colisión tenemos

$$P_1 = (E, p, 0, 0), \quad (10.57)$$

$$P_2 = (m, 0, 0, 0), \quad (10.58)$$

donde  $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ . Después de la colisión tenemos

$$P'_1 = (E', p' \cos \theta, p' \sin \theta, 0), \quad (10.59)$$

$$P'_2 = (E', p' \cos \theta, -p' \sin \theta, 0), \quad (10.60)$$

donde  $p' = \sqrt{E'^2 - m^2}$  ( $P_{1,2}^2 = (E')^2 - (p')^2 = m^2$ ). Por conservación de energía:  $2E' = E + m$ . Por conservación de la componente  $x$  del momento

tenemos  $p = 2p' \cos \theta$ . Por tanto podemos escribir<sup>48</sup>

$$P'_{1,2} = \left( \frac{E+m}{2}, \frac{p}{2}, \pm \frac{p}{2} \tan \theta, 0 \right). \quad (10.61)$$

Para una partícula de masa  $m$  sabemos que  $P^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ , resultado que podemos utilizar en la forma

$$m^2 = \left( \frac{E+m}{2} \right)^2 - \left( \frac{p}{2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta) \quad (10.62)$$

de donde obtenemos<sup>49</sup>

$$\cos^2 \theta = \frac{E+m}{E+3m}, \quad (10.63)$$

que en el límite relativista, con  $E \gg m$ , nos da  $\cos \theta \simeq 1$  y ambas partículas salen con un ángulo muy pequeño. En el caso no relativista, con  $E \simeq m$  tenemos que  $\cos \theta \simeq 1/\sqrt{2}$  y  $\theta = 45$  grados, con las partículas formando un ángulo de  $90^\circ$  entre ellas. Este límite corresponde a nuestra intuición cuando, por ejemplo, jugamos al billar.

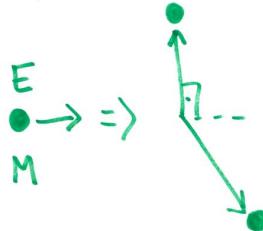


Figure 72: Decaimiento relativista

Otro ejemplo interesante es el de una partícula con masa  $M$  y energía  $E$  que decae en dos partículas idénticas (Fig.72). En el sistema de referencia del laboratorio una de estas es emitida a 90 grados. Si queremos encontrar la energía de las partículas en el estado final podemos utilizar el momento antes de decaer:

$$P = (E, p, 0, 0), \quad (10.64)$$

con  $p = \sqrt{E^2 - M^2}$ . Si la masa de las partículas creadas es  $m$  y la segunda viaja con un ángulo  $\theta$  con respecto al eje  $x$  podemos escribir:

$$P_1 = (E_1, 0, p_1, 0), \quad (10.65)$$

$$P_2 = (E_2, p_2 \cos \theta, -p_2 \sin \theta, 0). \quad (10.66)$$

<sup>48</sup> $p = 2p' \cos \theta \rightarrow p/\cos \theta = 2p' \rightarrow p \tan \theta = 2p' \sin \theta$ .

<sup>49</sup>Basta con usar  $p^2 = E^2 - m^2$  y que  $E^2 + 2mE - 3m^2 = (E-m)(E+3m)$

Conservación de energía y momento implican

$$P - P_1 = P_2, \quad (10.67)$$

$$(P - P_1) \cdot (P - P_1) = P_2 \cdot P_2, \quad (10.68)$$

$$P^2 - 2P \cdot P_1 + P_1^2 = P_2^2, \quad (10.69)$$

$$M^2 - 2EE_1 + m^2 = m^2, \quad (10.70)$$

$$E_1 = \frac{M^2}{2E}, \quad (10.71)$$

$$E_2 = E - E_1 = \frac{2E^2 - M^2}{2E}. \quad (10.72)$$

### 10.2.2 Unidades en física de partículas

Para hacernos una idea de las escalas que se dan en el zoo de partículas elementales podemos calcular la energía en reposo de un protón

$$E_p = m_p c^2 = (1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}) \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{Julios.} \quad (10.73)$$

Es mejor trabajar con electron-voltios (eV) que corresponden al cambio en energía producido en un electrón cuando pasa a través de una diferencia de potencial de un Voltio. La conversión de eV a Julios es

$$1 \text{eV} = (1.602 \cdot 10^{-19} \text{C}) \left(1 \frac{\text{J}}{\text{C}}\right) = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{J.} \quad (10.74)$$

Por tanto  $E_p = 938 \cdot 10^6 \text{eV} = 938 \text{MeV}$  (mega-electron-voltios). Para un electrón (e) tenemos que  $E_e = 0.511 \text{MeV}$ , un muón ( $\mu$ ) 105.7, un tau ( $\tau$ ) 1784, neutrón (n) 939.6, lambda ( $\Lambda$ ) 1115.6, sigma ( $\Sigma$ ) 1193, delta ( $\Delta$ ) 1232, pión ( $\pi$ ) 137, kaón (K) 496. Para energías más altas usamos G para giga ( $10^9$ ) y T para tera ( $10^{12}$ ). Al decir que una masa es de  $x$  MeV queremos decir que es  $x \text{MeV}/c^2$ , en kilogramos tenemos que

$$1 \text{MeV}/c^2 = 1.783 \cdot 10^{-30} \text{kg.} \quad (10.75)$$

### 10.2.3 Más cuadrimomentos

Estudiemos el concepto de fuerza en una dimensión. Podemos seguir usando la fórmula

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad (10.76)$$

donde  $p = \gamma mv$ . Es importante darse cuenta de que  $\gamma$  puede depender del tiempo:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \right) = \frac{v\dot{v}}{(1 - v^2)^{3/2}} = \gamma^3 va. \quad (10.77)$$

Si asumimos que la masa es constante, tenemos que

$$F = \frac{d(\gamma mv)}{dt} = m(\dot{\gamma}v + \gamma\dot{v}) = m\gamma(\gamma^2 v^2 + 1) = \gamma^3 ma, \quad (10.78)$$

que tiene como límite Newtoniano el correcto. Obtenemos el mismo resultado usando

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d(\gamma m)}{dx} = m \frac{d(1/\sqrt{1-v^2})}{dx} = \gamma^3 mv \frac{dv}{dx}, \quad (10.79)$$

pero como

$$v \frac{dv}{dx} = \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right) = \frac{dv}{dt} = a \quad (10.80)$$

obtenemos que  $dE/dx = \gamma^3 ma$  y, por tanto,

$$F = \frac{dE}{dx}. \quad (10.81)$$

Ahora es bastante útil volver a utilizar cuadrvectores. Usamos el hecho de que el tiempo propio  $d\tau = \sqrt{dt^2 - d\vec{r}^2}$  es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Utilizando que  $d\tau = dt/\gamma$  obtenemos que la velocidad es

$$V \equiv \frac{1}{d\tau}(dt, dx, dy, dz) = \gamma \left( 1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (\gamma, \gamma \vec{v}). \quad (10.82)$$

En el sistema de reposo del objeto, donde  $\vec{v} = 0$ , tenemos que  $V = (1, 0, 0, 0)$  (con  $c$ :  $V = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ ). Con esto construimos el cuadrimomento de energía momento:

$$P = mV = (\gamma m, \gamma m \vec{v}) = (E, \vec{p}). \quad (10.83)$$

El cuadrimomento de fuerza es

$$F = \frac{dP}{d\tau} = \gamma \left( \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \left( \frac{dE}{dt}, \vec{f} \right), \quad (10.84)$$

donde  $\vec{f}$  es la fuerza habitual en tres dimensiones.

Bajo transformaciones de Lorentz en la dirección  $x$  el 4-vector  $(E, p_x, p_y, p_z)$  cumple

$$E = \gamma(E' + vp'_x), \quad (10.85)$$

$$p_x = \gamma(p'_x + vE'), \quad (10.86)$$

$$p_y = p'_y, \quad (10.87)$$

$$p_z = p'_z. \quad (10.88)$$

**Ejercicio 3.1.9** Un fotón con energía  $E$  colisiona con una masa estacionaria  $m$  y se combinan para formar una partícula. Encontrar la masa y la velocidad de esta partícula.

♣ entrega el 13/5

**Ejercicio 3.1.10** Una masa estacionaria  $M$  decae en una partícula y un fotón. Si la velocidad de la partícula es  $v$ , encontrar su masa y la energía del fotón.

♣ entrega el 13/5

**Ejercicio 3.1.11** Un pión y un muón viajan con una energía cada uno de 10 GeV. Calcular la distancia que recorre el pión cuando el muón ha viajado 100 metros.

♣ entrega el 13/5

**Ejercicio 3.1.12** En un decaimiento beta, un neutrón decae produciendo un protón, un electrón y un neutrino. Las energías en reposo son  $E_n = 939.6$  MeV,  $E_p = 938.3$  MeV,  $E_e = 0.5$  MeV y  $E_\nu \simeq 0$ . Calcular la energía máxima que pueden tener el electrón y el neutrino, dando una interpretación de los resultados obtenidos.

♣ entrega el 13/5  
Fin de clase 27

## 11 Relatividad General

Una idea fundamental en relatividad general (GR) es el principio de equivalencia que dice que gravedad es equivalente a aceleración. Otra idea importante es que las leyes físicas no pueden depender de qué sistema de coordenadas elegimos para describirlas.

### 11.1 El principio de equivalencia

Propuesto por Einstein, indica que es imposible distinguir localmente entre gravedad y aceleración. Supongamos que hay una persona dentro de una caja pequeña, lejos de objetos con mucha masa, y que sufre una aceleración,  $g$  (Fig. 73). Tengamos otra persona fuera de la caja en reposo con respecto a la tierra. No es posible para ninguno de estos dos observadores llevar a cabo ningún experimento local para saber si son uno u otro. Lo mismo ocurre si la caja se encuentra en caída libre sobre la tierra con aceleración  $g$  con un observador dentro y otro fuera, flotando libremente en el espacio lejos de cualquier objeto masivo (Fig. 74). Las leyes físicas son las mismas para ambos.

Esto indica que la masa gravitacional (que aparece en la fórmula  $F = GMm_g/r^2 = m_g g$ ) es equivalente a la masa inercial (que aparece en  $F = m_i a$ ). Cuando un objeto cae sobre la tierra tiene una aceleración  $a = (m_g/m_i)g$  que siempre medimos que es  $g$  para distintos tipos de materiales. Si  $m_g \neq m_i$  entonces podríamos distinguir los dos observadores anteriores porque dos masas distintas permanecerían en reposo si el observador está quieto en el espacio, mientras que se separarían, al tener distintas aceleraciones, si el observador está cayendo sobre la tierra.

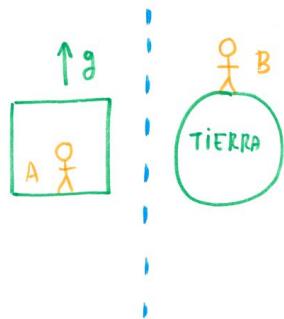


Figure 73: Caja con aceleración y observador en la tierra

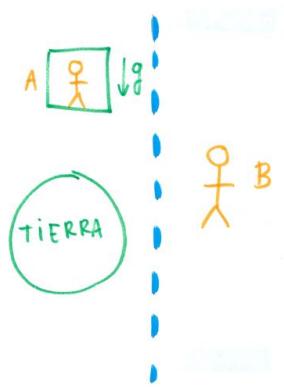


Figure 74: Caja con aceleración en la tierra y observador exterior

## 11.2 Dilatación temporal

El principio de equivalencia implica que un reloj situado en una torre muy alta marca un tiempo más rápido que un reloj sobre la superficie. Este efecto de dilatación temporal debido a la gravitación fue medido por Pound-Rebka en 1960 cuando mandaron rayos gamma hacia arriba y abajo en una torre de 22 metros de altura. Fueron capaces de medir un corrimiento al rojo (disminución de la frecuencia) en lo alto de la torre. El reloj en lo alto de la torre va más rápido que el de abajo siguiendo la fórmula<sup>50</sup>

$$\Delta t_h = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \Delta t_0. \quad (11.1)$$

## 11.3 Geodésicas

El término **cálculo de variaciones** fue introducido por Leonhard Euler en 1756 pero el primero en usarlo fue Johann Bernoulli en 1696 al presentar el problema de la braquistócrona (el más breve - tiempo): encontrar la curva que describe la trayectoria más rápida entre un punto y otro a menor altura. A pesar de conocer la solución lanzó un reto público para encontrarla. En particular, el reto iba dirigido a su hermano Jakob con el que mantenía una relación pésima. Jakob encontró la solución, llamada cicloide, pero no la presentó a su hermano hasta que Leibniz le convenció.

El problema fundamental en el cálculo de variaciones es determinar una función  $u(x)$  tal que la integral

$$F[u] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u, u_x, \dots) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u_{(k)}) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.2)$$

está en un extremo.  $f$  se conoce como la densidad del funcional  $F$ . Consideremos que estamos en una dimensión. Introducimos la función prueba  $\omega$  como una deformación de  $u$ :

$$u(x; \epsilon) = u(x; 0) + \epsilon \omega(x), \quad (11.3)$$

que es continua, tiene derivadas continuas y se anula en  $x_{1,2}$ . El funcional ahora depende de  $\epsilon$ , i.e.,

$$F[u; \epsilon] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, u(x, \epsilon), u_x(x, \epsilon), \dots) dx. \quad (11.4)$$

Una condición necesaria para tener un valor estacionario es

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0, \quad (11.5)$$

---

<sup>50</sup>Más reciente es el experimento de Hafele-Keating

para cualquier  $\omega(x)$ . Esta condición la podemos desarrollar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int_{x_1}^{x_2} f(x, u, u_x, \dots) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{\partial u_x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} \frac{\partial u_{xx}}{\partial \epsilon} + \dots \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \omega + \frac{\partial f}{\partial u_x} \omega_x + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} \omega_{xx} + \dots \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \omega(x) \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial u_x} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} \right) + \dots \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \omega(x) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial f}{\partial u_{(n)}} \right) \right] dx = 0,
\end{aligned} \tag{11.6}$$

donde  $u_{(n)} = \partial^n u / \partial x^n$  y hemos integrado por partes. Como esto se cumple para cualquier función  $\omega$  entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial f}{\partial u_{(n)}} \right) = 0. \tag{11.7}$$

Esta se conoce como la **ecuación de Euler**. La reducción a  $n < 2$  es la **ecuación de Euler-Lagrange**.

Apliquemos esta fórmula a la resolución del problema de la braquistócrona. Definimos la dirección  $x$  paralela a la gravedad. Aplicamos

$$\frac{m}{2} v^2 = mgx \rightarrow v = \sqrt{2gx} \tag{11.8}$$

El elemento diferencial de medida es  $ds = \sqrt{du^2 + dx^2} = \sqrt{1 + (\frac{du}{dx})^2} dx$ , con  $u$  la dirección horizontal. Utilizando

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow dt = \frac{ds}{v}, \tag{11.9}$$

tenemos que

$$t = \int \sqrt{\frac{1+u_x^2}{2gx}} dx. \tag{11.10}$$

En este caso la ecuación de Euler es simplemente

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial u_x} \right) = 0. \tag{11.11}$$

Nos indica que la derivada de la densidad funcional  $f = \sqrt{\frac{1+u_x^2}{2gx}}$  con respecto a  $u_x$  es una constante independiente de  $x$ , lo podemos escribir como

$$\frac{\partial f}{\partial u_x} \equiv \frac{1}{\sqrt{4ag}}, \tag{11.12}$$

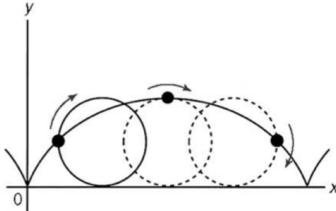


Figure 75: Cicloide

y explícitamente:

$$\frac{u_x^2}{1+u_x^2} = \frac{x}{2a}. \quad (11.13)$$

Finalmente

$$u = \int_0^x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx. \quad (11.14)$$

Con el cambio  $x = a(1 - \cos \theta)$  tenemos

$$u = a \int d\theta (1 - \cos \theta) = a(\theta - \sin \theta). \quad (11.15)$$

Sorprendentemente la curva  $(a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$  corresponde a una cicloide (Fig. 75), que fue descubierta en la misma época (Galileo 1599) y hoy se utiliza en ciertos tipos de engranajes y toboganes de salida de aviones<sup>51</sup>.

Estudiemos ahora otro ejemplo de minimización, en este caso el de distancias en espacios no Euclídeos. Las líneas más cortas en este caso se llaman **geodésicas**. En un espacio Euclídeo la distancia entre los puntos  $\vec{x}$  y  $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{dx}$  es

$$(ds)^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (11.16)$$

En términos matriciales tenemos una métrica, *i.e.*,

$$(ds)^2 = (dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (11.17)$$

En otras coordenadas  $x^\alpha = x^\alpha(x, y, z)$  tenemos que (utilizando la llamada notación de Einstein sobre índices repetidos)

$$(ds)^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (11.18)$$

---

<sup>51</sup>Lectura recomendada: “The Catenary Revisited: From Newtonian Strings to Superstrings”, Klerk - Murugan - Uzan, <http://arxiv.org/pdf/1103.0788v1.pdf>.

Fin de clase 28

$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$  se conoce como el **tensor métrico**. Una línea se parametriza como  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$  y el diferencial de distancia entre dos puntos como

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda. \quad (11.19)$$

Integrando, la distancia sobre la línea entre dos puntos  $x^\alpha(\lambda_0)$  y  $x^\alpha(\lambda_1)$  es

$$s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda. \quad (11.20)$$

Entendiendo esta expresión como un funcional de la forma en Eq. (11.4). Definimos la geodésica como la línea que hace la distancia estacionaria. Aplicando Euler-Lagrange <sup>52</sup>:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}}} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{g_{\mu\rho}}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}}} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \right) = 0. \quad (11.21)$$

Si elegimos que el parámetro  $\lambda$  sea la longitud de arco sobre la línea,  $s$ , entonces la ec. (11.19) indica que

$$1 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}, \quad (11.22)$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} - \frac{d}{ds} \left( g_{\mu\rho} \frac{dx^\rho}{ds} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} \right) \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} - g_{\mu\rho} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} = 0. \end{aligned} \quad (11.23)$$

**Ejercicio 3.1.12** Demostrar que esta última igualdad se puede escribir como:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} \right) \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} - g_{\mu\rho} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} = 0.$$

♦ Voluntario

Finalmente esta ecuación se escribe en términos del **símbolo de Christoffel**

$$\Gamma_{\mu,\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} \right), \quad (11.24)$$

<sup>52</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} = 0$$

con  $u \rightarrow x^\mu$  y  $x \rightarrow \lambda$ .

y tenemos que

$$\Gamma_{\mu,\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} + g_{\mu\rho} \frac{d^2x^\rho}{ds^2} = 0 \quad (11.25)$$

son las ecuaciones de las geodésicas para un espacio con una métrica dada.

En el espacio tridimensional Euclídeo con coordenadas cartesianas el símbolo de Christoffel es cero porque la métrica asociada tiene como elementos de matriz constantes (Eq. (11.17)) y las coordenadas de las geodésicas cumplen

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} = 0. \quad (11.26)$$

Esto corresponde a una línea recta  $x^\rho = a^\rho s + b^\rho$  parametrizada por  $s$ .

Como último ejemplo calculemos las geodésicas sobre una esfera de radio  $r = R$ . Si tomamos coordenadas esféricas polares  $(r, \theta, \phi)$  el elemento de medida es

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \\ &= (dr, d\theta, d\phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11.27)$$

y por tanto  $g_{rr} = 1, g_{\theta\theta} = r^2, g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$  y el resto de componentes de la métrica son cero. Las únicas componentes que no se anulan en el símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\mu,\rho\sigma} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} \right), \quad (11.28)$$

sobre la esfera de radio  $r = R$  son

$$\Gamma_{\phi,\theta\phi} = \Gamma_{\phi,\phi\theta} = -\Gamma_{\theta,\phi\phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} = R^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (11.29)$$

De esta forma las ecuaciones de las geodésicas

$$\Gamma_{\mu,\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} + g_{\mu\rho} \frac{d^2x^\rho}{ds^2} = 0 \quad (11.30)$$

son

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2, \quad (11.31)$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{d\phi}{ds}, \quad (11.32)$$

que además deben cumplir <sup>53</sup>

$$R^2 \left\{ \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 \right\} = 1. \quad (11.33)$$

<sup>53</sup>Tenemos que  $r = R$  constante y, por tanto,  $dr = 0$ , entonces

$$(ds)^2 = R^2(d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$$

Una posible solución son las líneas con  $\phi = \phi_0$  constante. En este caso

$$\frac{d\phi}{ds} = 0, \quad (11.34)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{1}{R}, \quad (11.35)$$

con solución  $(\phi, \theta) = (\phi_0, \theta_0 \pm s/R)$ , que son líneas uniendo los dos polos.

En los demás casos buscamos  $\theta = \theta(\phi)$ :

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d\phi}{ds}, \quad (11.36)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^2\theta}{d\phi^2} \left( \frac{d\phi}{ds} \right)^2 + \frac{d\theta}{d\phi} \frac{d^2\phi}{ds^2} \quad (11.37)$$

y obtenemos

$$\frac{d^2\theta}{d\phi^2} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \left( \frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 = \sin \theta \cos \theta. \quad (11.38)$$

Lo podemos reescribir en términos de una ecuación para un oscilador armónico simple:

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (11.39)$$

con solución

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} \cos(\phi - \phi_0). \quad (11.40)$$

Esto es equivalente a  $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$  con

$$\vec{n} \equiv (\sin \theta_0 \cos \phi_0, \sin \theta_0 \sin \phi_0, \cos \theta_0), \quad (11.41)$$

$$\vec{r} \equiv r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (11.42)$$

Esta es la ecuación de un plano que pasa por el centro de la esfera, con coordenadas cartesianas  $\vec{r}$  y con vector normal  $\vec{n}$ . Las geodésicas corresponden a las intersecciones de esta familia de planos con la superficie  $r = R$  de la esfera.

**Ejercicio 3.1.13** Encontrar las ecuaciones de las geodésicas sobre un cilindro de radio R.



Voluntario

En la teoría especial de la relatividad tratamos de la misma manera al tiempo y al espacio. Hablamos de que existe una variedad de cuatro dimensiones con coordenadas de la forma

$$x^\mu = (ct, \vec{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (11.43)$$

La longitud de un vector, como hemos visto, es de la forma

$$x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - \vec{x}^2 \quad (11.44)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica del llamado espacio de Minkowski:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.45)$$

Es simétrica y diagonal con componentes

$$\eta_{\mu\nu} = 0, \text{ si } \mu \neq \nu, \quad (11.46)$$

$$\eta_{00} = -\eta_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11.47)$$

Fin de clase 29

En general para una variedad curvada con una métrica la distancia entre dos puntos se escribe de la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (11.48)$$

En mecánica clásica podemos escribir un Lagrangiano general como

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x_i), \quad (11.49)$$

donde hemos fijado la masa de la partícula a uno. En este caso las ecuaciones del movimiento se pueden simplificar de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad (11.50)$$

$$\frac{d}{dt} (g_{ij} \dot{x}^j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k + \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0, \quad (11.51)$$

$$g_{ij} \ddot{x}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^j \dot{x}^k = -\frac{\partial V}{\partial x^i} = F_i, \quad (11.52)$$

$$g_{ij} \ddot{x}^j + \left( \partial_k g_{ji} - \frac{1}{2} \partial_i g_{jk} \right) \dot{x}^j \dot{x}^k = F_i, \quad (11.53)$$

$$g_{ij} \ddot{x}^j + \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}) \dot{x}^j \dot{x}^k = F_i, \quad (11.54)$$

$$\ddot{x}^i + \frac{1}{2} g^{il} (\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}) \dot{x}^j \dot{x}^k = F^i, \quad (11.55)$$

$$\ddot{x}^i - \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = F^i, \quad (11.56)$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = F^i. \quad (11.57)$$

Hemos utilizado los elementos de la matriz inversa definida como  $g^{\mu\nu} g_{\nu\gamma} = \delta_\gamma^\mu$  que sirven para subir y bajar índices:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x}), \quad (11.58)$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = (ct, \vec{x}). \quad (11.59)$$

La generalización de las ecuaciones de movimiento para una partícula libre ( $F_i = 0$ ) no relativista en la ec. (11.57) a una variedad curvada en presencia de gravedad es

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (11.60)$$

(donde  $d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\vec{x}^2$  es el tiempo propio). Para demostrar que esta ecuación incorpora los efectos de la fuerza gravitacional sobre la partícula hay que trabajar un poco. Clásicamente el potencial gravitacional en un punto  $\vec{x}$  con una masa  $M$  en el origen es

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{G_N M}{|\vec{x}|}, \quad (11.61)$$

donde  $G_N$  es la constante de Newton. La ecuación del movimiento correspondiente es

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}), \quad (11.62)$$

que se puede deducir de un principio de acción estacionaria

$$\delta S = \delta \int L dt = \delta \int (T - V) dt = \delta \int \left( \frac{1}{2} (\dot{\vec{x}})^2 - \phi(\vec{x}) \right) dt = 0. \quad (11.63)$$

Como hemos visto, en relatividad especial podemos utilizar como acción  $S = -\int dt$  donde

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (11.64)$$

$$\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}. \quad (11.65)$$

Si el campo gravitatorio no es muy intenso deformará la métrica de Minkowski sólo un poco y podemos escribir

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad (11.66)$$

donde las componentes de  $h_{\mu\nu}(x)$  son pequeñas. Como el campo gravitacional es estacionario la métrica debe ser independiente del tiempo:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = \partial_0 h_{\mu\nu} = 0. \quad (11.67)$$

Si el campo gravitatorio es débil y la partícula tiene una velocidad baja ( $|\vec{v}| \ll c$ ) entonces los términos  $dx^i/d\tau$  se pueden despreciar con respecto a  $dt/d\tau$  y la ec. (11.60) se puede simplificar a

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} - \Gamma_{00}^\mu \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0. \quad (11.68)$$

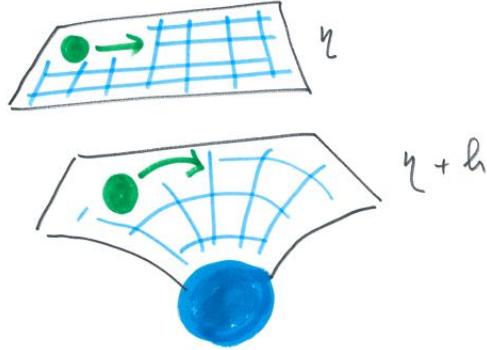


Figure 76: Deformación de la métrica de Minkowski debido a la presencia de una masa.

Ahora tenemos que

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}) = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\rho g_{00} \quad (11.69)$$

$$\simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\partial_\rho h_{00} + \mathcal{O}(h^2), \quad (11.70)$$

y, por tanto,

$$\Gamma_{00}^0 = 0, \quad (11.71)$$

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}\partial^i h_{00}. \quad (11.72)$$

Con esta información vemos que las ecuaciones para las geodésicas son

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0, \quad (11.73)$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00}(\vec{x})\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (11.74)$$

Como la primera indica que  $dt/d\tau$  es una constante podemos dividir la segunda por ella al cuadrado y escribir

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00}(\vec{x}). \quad (11.75)$$

Para que coincida con la ec. (11.62) en el límite Newtoniano es necesario que

$$h_{00}(\vec{x}) = 2\phi(\vec{x}) + \text{constante}. \quad (11.76)$$

La constante es cero si imponemos que  $h$  vaya a cero en el infinito. Así tenemos

que

$$\begin{aligned} g_{00}(\vec{x}) &= 1 - \frac{2G_NM}{|\vec{x}|}, \\ g_{ij}(\vec{x}) &= \eta_{ij}, \\ g_{0i}(\vec{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (11.77)$$

Y estamos en condiciones de calcular nuestra acción usando que

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 &= g_{00} + \eta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \\ &= g_{00} - (\dot{\vec{x}})^2 = \left( 1 - \frac{2G_NM}{|\vec{x}|} \right) - (\dot{\vec{x}})^2. \end{aligned} \quad (11.78)$$

Expandiendo para distancias grandes y velocidades pequeñas:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \left( 1 - \frac{2G_NM}{|\vec{x}|} - (\dot{\vec{x}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq 1 - \left( \frac{1}{2}(\dot{\vec{x}})^2 - \phi(\vec{x}) \right) = 1 - (T - V). \end{aligned} \quad (11.79)$$

Por tanto encontramos que

$$\begin{aligned} \tau &= \int d\tau = \int dt \frac{d\tau}{dt} \\ &= \int (1 - (T - V)) dt = \text{constante} - \int L dt. \end{aligned} \quad (11.80)$$

Cuya variación nos proporciona las ecuaciones del movimiento correctas (ver ec. (11.63)).

Fin de clase 30

## 11.4 Corrimiento al rojo gravitacional

Consideremos el campo gravitacional producido por una estrella de masa  $M$ . La métrica que genera sabemos que viene dada por ec. (11.77). Supongamos que un fotón es emitido por la estrella y se escapa del campo gravitatorio. En el punto más cercano a la estrella,  $A$ , tiene una frecuencia  $\nu_A$  y energía  $E_A = h\nu_A$ , mientras que en un punto más alejado,  $B$  a una distancia  $r$ , será  $\nu_B$ . Por estar en presencia de un campo gravitacional y tener una masa  $m = h\nu$  el fotón varía su energía potencial. Por conservación de la energía total tenemos que (tendríamos que integrar el gradiente del potencial sobre el camino recorrido por el fotón pero para  $\Delta r$  pequeño la siguiente aproximación es suficiente)

$$h\nu_A = h\nu_B + m |\Delta\phi| \simeq h\nu_B + h\nu_B |\Delta\phi|, \quad (11.81)$$

y, por tanto,

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} \simeq \frac{1}{1 + |\Delta\phi|} = \frac{1}{1 + \frac{G_NM}{r^2} \Delta r} \simeq 1 - \frac{G_NM}{r^2} \Delta r. \quad (11.82)$$

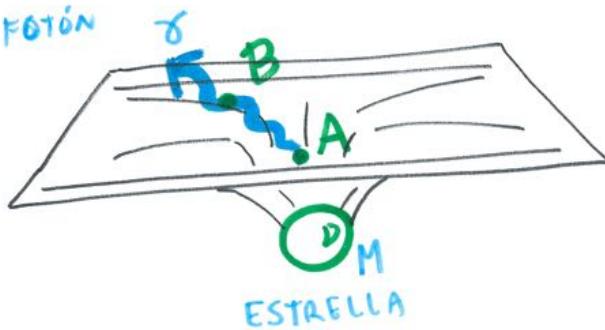


Figure 77: Cambio en la frecuencia asociada a un fotón al moverse en un campo gravitatorio

Donde  $\Delta r$  es la separación radial entre  $A$  y  $B$ . La diferencia en longitudes de onda es

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{\nu_A}{\nu_B} \simeq 1 + \frac{G_N M}{r^2} \Delta r. \quad (11.83)$$

Así, la longitud de onda del fotón en  $B$  es mayor que en  $A$ . Esto representa un corrimiento al rojo en frecuencia y longitud de onda.

## 11.5 Ecuaciones de Einstein y la constante cosmológica

Para una variedad podemos definir el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (11.84)$$

que depende sólo de derivadas de la métrica con respecto a las coordenadas, tiene rango cuatro y  $4^4 = 256$  componentes. Como sabemos, una partícula libre sigue una trayectoria geodésica. Cuando existe un campo gravitatorio un grupo de geodésicas no permanece paralelo, como en un espacio plano. La desviación del caso plano se puede describir en función del tensor de curvatura del espacio.

Clásicamente sabemos que el potencial gravitatorio satisface la ecuación de Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 4\pi G_N \rho(\vec{x}) \quad (11.85)$$

donde  $\rho(\vec{x})$  describe la densidad de materia.

**Ejercicio 3.1.14** Demostrar que la expresión

$$\phi(\vec{x}) = -G_N \int d^3 \vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (11.86)$$

es solución de la ecuación

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}) = 4\pi G_N \rho(\vec{x}). \quad (11.87)$$



En términos de componentes de la métrica y en el límite de campo débil ec. (11.85) se puede escribir como

$$\vec{\nabla}^2 g_{00} = 8\pi G_N T_{00} \quad (11.88)$$

donde  $T_{\mu\nu}$  es un objeto llamado tensor de energía-momento que describe la distribución de densidad de materia de nuestro sistema de partículas (en ausencia de fuentes gravitacionales  $T^{\mu\nu} = 0$ ) y actúa como la fuente del campo gravitacional.

Las ecuaciones de Einstein que relacionan la distribución de materia y energía con la curvatura de la variedad del espacio-tiempo son

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} R_{\alpha\beta\lambda}^\beta - \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{\mu\nu} \quad (11.89)$$

donde  $\Lambda$  se conoce como la constante cosmológica que se puede interpretar como una fuerza gravitacional constante que actúa sobre todas las partículas. Einstein introdujo este término para obtener soluciones estáticas para la evolución del universo. Cuando Hubble demostró que el universo está en expansión Einstein describió la constante cosmológica como el mayor error en su carrera científica. Sin embargo, recientemente parece que podemos tener un universo dinámico con una constante cosmológica muy pequeña que tendría la interpretación de la energía del vacío del universo.

## 11.6 Modelos cosmológicos y la teoría del Big Bang

Al construir un modelo de nuestro universo nos basamos en la evidencia experimental que tenemos como por ejemplo homogeneidad e isotropía en escalas de  $10^7$  parsecs (1 parsec es 3.2 años luz). Una métrica que cumple con estas propiedades es la llamada de Friedmann-Robertson-Walker que nos genera, en coordenadas esféricas, el siguiente elemento de línea (es decir, métrica)

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (11.90)$$

donde  $R(t)$  es un factor de escala. Un espacio homogéneo e isotrópico tiene curvatura constante y  $k = 1, -1, 0$  corresponden a un espacio con curvatura positiva, negativa y cero, respectivamente.

El caso  $k = 1$  corresponde a un universo cerrado, esférico y con volumen finito. Para demostrarlo realizamos el cambio de coordenadas

$$r = \sin \chi, \quad dr = \cos \chi d\chi \quad (11.91)$$

y escribimos

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 - R^2(t) \left( \frac{\cos^2 \chi d\chi^2}{1 - \sin^2 \chi} + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \\ &= dt^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \end{aligned} \quad (11.92)$$

Esto describe la superficie tridimensional de una esfera de radio  $R(t)$  en cuatro dimensiones (sin contar el tiempo) como podemos ver si ahora introducimos las coordenadas

$$x_1 = R \cos \chi, \quad (11.93)$$

$$x_2 = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (11.94)$$

$$x_3 = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad (11.95)$$

$$x_4 = R \sin \chi \cos \theta, \quad (11.96)$$

que cumplen  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$  vemos que

$$d\tau^2 = dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2. \quad (11.97)$$

Cuando la curvatura es  $k = 0$  tenemos un universo plano como podemos demostrar introduciendo las coordenadas

$$x_1 = Rr \sin \theta \cos \phi, \quad (11.98)$$

$$x_2 = Rr \sin \theta \sin \phi, \quad (11.99)$$

$$x_3 = Rr \cos \theta. \quad (11.100)$$

En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 - R^2(t) (dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \\ &= dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \end{aligned} \quad (11.101)$$

que corresponde a un espacio tridimensional (sin contar el tiempo) plano, que tiene un volumen infinito y genera un universo abierto.

Para  $k = -1$  también tenemos un universo abierto pero con una estructura más interesante. Con las coordenadas

$$r = \sinh \chi, \quad dr = \cosh \chi d\chi, \quad (11.102)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 - R^2(t) \left( \frac{\cosh^2 \chi d\chi^2}{\cosh^2 \chi} + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \\ &= dt^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \end{aligned} \quad (11.103)$$

Ahora, usando

$$x_1 = R \cosh \chi, \quad (11.104)$$

$$x_2 = R \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (11.105)$$

$$x_3 = R \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \quad (11.106)$$

$$x_4 = R \sinh \chi \cos \theta, \quad (11.107)$$

que cumplen  $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = R^2$  vemos que

$$d\tau^2 = dt^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2. \quad (11.108)$$

Esto es la superficie tridimensional de una pseudoesfera con volumen infinito (la parte espacial). Tenemos un universo abierto con curvatura no trivial.

## 11.7 Ley de Hubble

Como la métrica cambia con el tiempo la distancia entre galaxias también cambia con el tiempo. Las galaxias se alejan unas de otras con velocidad de recesión  $v(t)$  que es proporcional a su distancia  $l(t)$ , *i.e.*

$$v(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}l(t) = H l(t) \quad (11.109)$$

donde  $H$  es la constante de Hubble (aunque depende del tiempo) y  $R$  es el factor de escala de la métrica.  $H$  se puede determinar midiendo el corrimiento al rojo de las galaxias (como se mide con el WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)<sup>54</sup>) y tiene un valor de

$$H \simeq 7 \text{cm/sec/parsec}. \quad (11.110)$$

Una vez que tenemos la métrica de Friedmann-Robertson-Walker podemos calcular las componentes del tensor de curvatura y escribir las ecuaciones de Einstein de manera relativamente sencilla. En particular, la componente 00 de las ecuaciones de Einstein es

$$\frac{1}{R^2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} T_{00} \quad (11.111)$$

y determina la evolución del factor de escala  $R$  en función de  $k$  y de la distribución de materia en el universo, codificada en  $T^{\mu\nu}$ . Si asumimos que el universo consiste de un gas de partículas (galaxias) y a grandes escalas su velocidad es la de expansión del universo entonces  $T_{00} = T^{00} = \rho$ , donde  $\rho = M/(2\pi^2 R^3)$  es la densidad de materia en el universo, con masa total  $M$  (despreciamos la constante cosmológica por simplicidad).

Esto se conoce como un modelo de Friedmann y cumple que para  $k = 1$  nos genera un universo que se expande y luego contrae a un punto, repitiendo el proceso constantemente (en función del parámetro  $R_* = 2G_N M/(3\pi)$ ) la evolución de  $R$  con  $t$  la vemos en Fig. 78). Para  $k = 0$  tenemos un universo siempre plano que se expande constantemente (Fig. 79). Con  $k = -1$  generamos un universo abierto, sólo plano para tiempos pequeños, y teniendo una estructura más compleja para tiempos más grandes (Fig. 80).

De estas soluciones vemos que el universo empezó en un instante de tiempo dado en una región muy pequeña y se ha expandido desde entonces. La teoría del Big Bang de Gamow propone que el universo comenzó como una región muy densa y caliente que se ha expandido desde entonces adiabáticamente.

Fin de clase 31

---

<sup>54</sup><http://map.gsfc.nasa.gov>

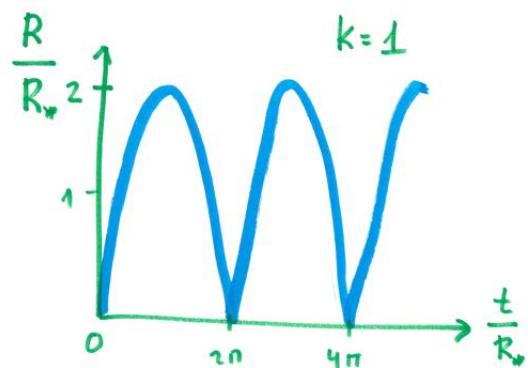


Figure 78: Para  $k = 1$  el universo es cerrado y con evolución periódica.

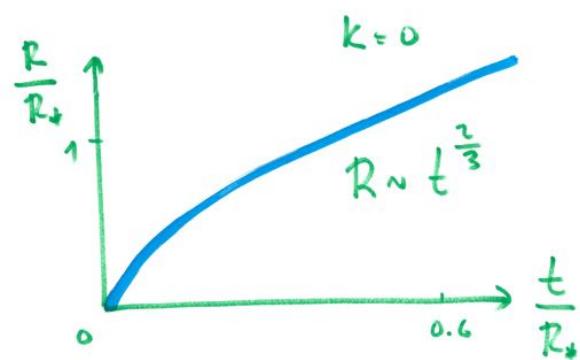


Figure 79: Para  $k = 0$  el universo es abierto y plano.

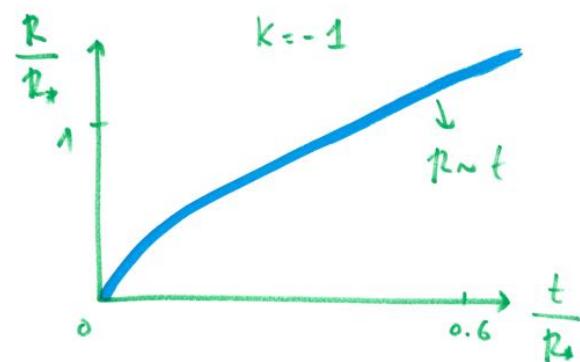


Figure 80: Para  $k = -1$  el universo es abierto.

Para terminar, en estas últimas páginas se incluyen varios archivos preparados en el IFT UAM/CSIC con problemas abiertos en física teórica.

# What are we made of?

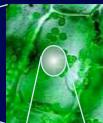
The world of elementary particles



$10^5 \text{ m} = 100 \text{ Km}$   
Satellite image of the Madrid area, centered on the El Pardo forest



1m  
A holm oak tree in the El Pardo forest



$10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$   
Plant cell



$10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$   
Carbon atom



$10^{-15} \text{ m}$   
Internal structure of the proton

## Are atoms fundamental particles?

In 1911 Rutherford showed that atoms were composed of a tiny nucleus, with positive electric charge and carrying most of the atom mass, and a cloud of electrons (with negative electric charge) orbiting around it. A few years later, atomic nuclei were discovered to be made up of protons (Rutherford, 1918) and neutrons (Chadwick, 1932).

As of today, electrons are considered to be fundamental particles. However, protons and neutrons do have internal structure, as they are in fact made out of three quarks. Quarks making up protons and neutrons are of two kinds: the up quark "u" with electric charge +2/3 and the down quark "d", with charge -1/3. A proton is composed of two "u" quarks and one "d" quark, and so has charge +1, whereas a neutron is composed of two "d" quarks and one "u" quark, so it has charge 0.

With just three particles: electrons, "u" quarks and "d" quarks one can build all atoms in the universe.  
But Nature is offering much more than that...

For each electron, proton or neutron there exist 10 000 000 000 neutrinos. These neutrinos are very light particles (at least, one million times lighter than electrons). They carry neither electric nor "color" charge, and they only feel weak interactions and gravity, so they are extremely difficult to detect. Neutrinos can travel through enormous amounts of matter with no interaction, and in fact millions of millions of neutrinos are crossing your body at this very instant. The matter content of the universe, the fermions, thus correspond to the electron, the neutrino, the "u" quark and the "d" quark, which form the so-called first family of particles. However, Nature seems to have three copies of such particle family. Particles in the second and third family have the same interactions and charges (electric charge, color and weak interactions) as those in the first, but the former are much heavier.

FERMIONS: Building blocks of the Universe		
Leptons spin = 1/2		
Name	Mass (GeV)	Electric charge
$\nu_e$ neutrino	<10 <sup>-9</sup>	0
e electron	0.0005	-1
$\nu_\mu$ neutrino	<10 <sup>-9</sup>	0
$\mu$ muon	0.1	-1
$\nu_\tau$ neutrino	<10 <sup>-9</sup>	0
$\tau$ tau	1.8	-1

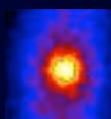
  

Quarks spin = 1/2		
Name	Approx. Mass (GeV)	Electric charge
u up	0.002	2/3
d down	0.005	-1/3
c charm	1.3	2/3
s strange	0.1	-1/3
t top	173	2/3
b bottom	4.2	-1/3

## What is Antimatter?

For every particle kind there exist a corresponding antiparticle. They have the same mass as the corresponding particle, but all their charges are opposite (electric charge, "color", ...).

When a particle and antiparticle meet, they annihilate each other releasing large amounts of energy, often in the form of photons (light).



## Bosons: The glue of the Universe

Electromagnetic and Weak spin = 1		
Name	Mass (GeV)	Electric charge
$\gamma$ photon	0	0
$W^-$	80.39	-1
$W^+$	80.39	+1
W bosons		
$Z^0$	91.188	0
Z boson		

Strong (color) spin = 1		
Name	Mass (GeV)	Electric charge
g gluon	0	0

## What is the strongest force?

The most intense of all forces is the strong interaction, which is able to keep protons confined in the nucleus despite their electromagnetic repulsion. However, this is a very short range force and essentially vanished at distances larger than the atomic nucleus.

The electromagnetic force is the second most intense interaction, and is responsible of keeping electrons orbiting around atomic nuclei. It explains the chemical bonds of atoms to form molecules, cells, and living beings. It is a long range force, but, since matter is made up of equal amounts of electrons and protons, it is neutral and the electromagnetic force is usually not manifested at large distances.

At very large distances, the dominant interaction is gravity. This way, although the gravitational interaction is the less intense force at the level of elementary particles, it dominates at human scales, describes planetary motion and the orbiting of stars in galaxies, and ultimately controls the expansion of the universe and its final fate.

## The origin of mass: the Higgs boson

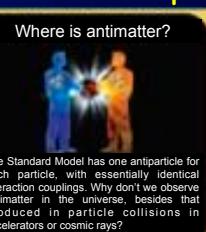
To explain the masses of elementary particles, it is necessary to introduce a new particle: the Higgs boson. The Higgs boson is the particle associated with the Higgs field which uniformly permeates all of space and time. The Higgs can interact with the other particles, and this interaction increases the internal energy of the particle, which manifests as the appearance of a mass for the particle. The stronger the interaction of the particle with the Higgs, the larger the mass it acquires.

The Higgs particle was discovered almost 50 years after its theoretical prediction in 1964. Experiments at the Large Hadron Collider LHC at CERN in Geneva confirmed the existence of the Higgs boson on July 4th 2012. This discovery allowed François Englert and Peter Higgs to receive the Nobel Prize in Physics 2013 for the discovery of the theoretical mechanism responsible for the origin of masses of elementary particles.

## Open puzzles



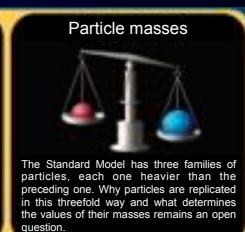
Gravity  
The Standard Model is a quantum theory which explains the strong, weak and electromagnetic interactions. However, we are still lacking a quantum formulation of gravitational interactions.



Where is antimatter?  
The Standard Model has one antiparticle for each particle, with essentially identical interaction couplings. Why don't we observe antimatter in the universe, besides that produced in particle collisions in accelerators or cosmic rays?



Dark matter  
Most of the matter in galaxies is dark matter, an invisible component which does not emit or interact with light. What is dark matter made of? Is it a new kind of particles interacting only very weakly with ordinary matter? What are its main properties?



Particle masses  
The Standard Model has three families of particles, each one heavier than the preceding one. Why are they replicated in this seesaw-like way and what determines the values of their masses remains an open question?

# QCD: The color of the force

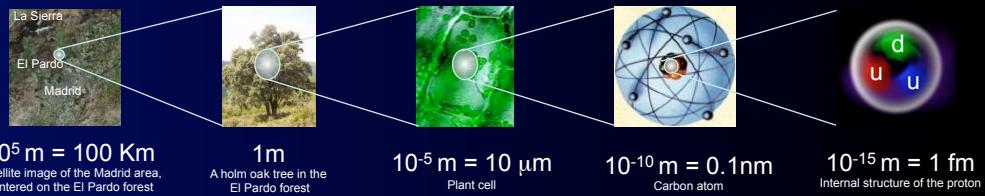
## Inside protons and neutrons

### What are we made of?

Everything around us is made up of atoms, which are composed of nuclei (made up of protons and neutrons), around which electrons orbit in a cloud.

Protons and neutrons are themselves made up of smaller particles, quarks. Quarks and electrons are examples of elementary particles, which are not composed of further smaller particles (as far as we have been able to probe experimentally).

There are 6 kinds of quarks (called u, d, c, s, t, b), but quarks u and d are sufficient to form protons (as a uud triad) and neutrons (udd).



## Quantum Chromodynamics (QCD): the color force

### What holds quarks together?

Quarks are held together by the strong interaction. The charge associated to this interaction is a new quantum number called "color", and which takes three possible values: "red", "green" and "blue". Needless to say, they have nothing to do with the actual colors perceived in our daily life.

The mediators of the color force are 8 interaction particles, the gluons, which have zero mass and spin 1, just like the photons. However, gluons carry color charge themselves, and are confined by the strong interaction itself, restricting its range to approximately 10<sup>-15</sup> m, the size of a proton.



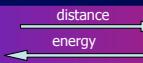
### The mystery of mass

Essentially almost all the mass of atoms is due to the mass of their nuclei, and the latter comes from that of its constituent protons and neutrons. However, the u and d quark masses are so small that they are responsible for about 1% of the mass of a proton or a neutron.

The extra mass is due to the energy of the color force fields present inside protons and neutrons, which keep quarks and gluons confined.

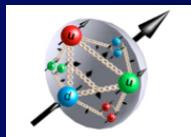
## Anti-screening: The self-interaction of gluons implies that color charge, and thus the intensity of strong interactions, increases with the distance

### Asymptotic freedom



### Confinement

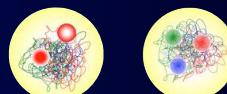
At short distances, or high energies, color interactions are very feeble and quarks behave essentially as free particles. This is in fact how they are observed experimentally in deep inelastic scattering experiments, which allows to establish the existence of quarks as physical particles.



At long distances, or low energies, strong interactions are so intense that colored particles cannot be isolated. The only states which can exist in isolated form are color-less composites. These are called hadrons and fall in two classes:

- **baryons**, made up of three quarks with different color charges (e.g. protons and neutrons).
- **mesons**, combinations of one quark and one antiquark, with opposite color charges (e.g. pions).

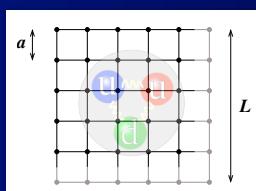
Baryons and mesons are color-less, but they are full of color due to the intense gluon exchanges in their interior.



## Non-perturbative methods: The properties of QCD at low energies cannot be described as a sum over Feynman diagrams.

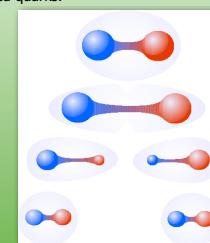
## Quantum Gauge Field Theory in the Lattice

The color interactions among quarks and gluons can be simulated numerically by using models in which space-time is discretized in a lattice. The calculations involved are computationally so heavy that they require the use of supercomputers and long CPU run times, but they allow for precise first principles computations of masses and properties of hadrons.



### The QCD string

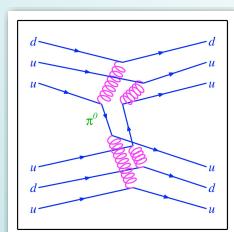
If you try to separate the quark and antiquark inside a meson, there appears a color flux tube stretching between them, like a elastic rope of enormous tension. When the separation distance reaches a critical value, the stored energy is enough to nucleate a new quark and antiquark which snaps the string, and which combine with the original particles to produce two new mesons, preventing the detection of isolated quarks.



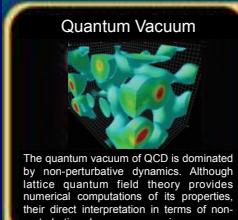
### The Yukawa model

Color interactions among quarks produce a residual interaction among protons and neutrons (similar to how electromagnetic interactions within atoms produce residual Van der Waals forces among molecules).

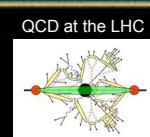
This residual interaction can be described as the exchange of pions, as described in the Yukawa model of nuclear interactions.



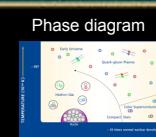
## Open puzzles



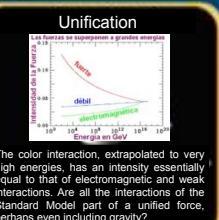
**Quantum Vacuum**  
The quantum vacuum of QCD is dominated by non-perturbative dynamics. Although lattice quantum field theory provides numerical computations of its properties, their direct interpretation in terms of non-perturbative phenomena remains open.



**QCD at the LHC**  
The LHC is a hadron collider, so any collision involves QCD processes at very high energies. Their study reveals new hidden symmetries of the strong interactions in this regime, like integrability or conformal symmetry.



**Phase diagram**  
Quark and gluon states can organize in different physical phases, depending on their energy and temperature (e.g. nuclear matter, plasma, neutron stars...). The QCD phase diagram can reveal the existence of new states of matter.



Campus internacional  
**excellencia**  
UAM  
CSIC  
EXCELENCIA  
SEVERO  
OCHEA

# The Higgs boson

## The origin of mass

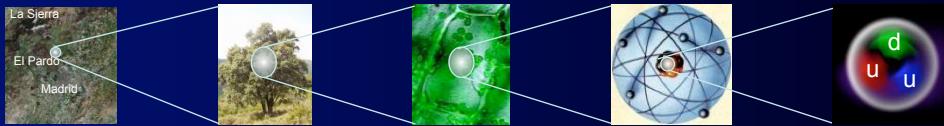
### The Standard Model of Elementary Particles

#### What are we made of?

Everything around us is made up of **elementary particles**, for instance the **quarks** within **protons** and **neutrons** in atomic nuclei, and the **leptons**, like the **electrons** which orbit around nuclei. Together they form the atoms which are constituents of matter. Quarks and leptons are elementary particles: they are not composed of smaller constituents (as far as we have been able to probe experimentally).

#### What holds particles together?

Elementary particles are subject to forces associated to **four fundamental interactions**: **electromagnetism**, the **weak interaction**, the **strong force**, and **gravity**. Each one of these interactions is associated with one or several force particles, the **gauge bosons**: the **photon**, the **Z y W bosons**, the **gluons**, and the (still hypothetical) **graviton**.



$10^5 \text{ m} = 100 \text{ Km}$

Satellite image of the Madrid area, centered on the El Pardo forest

1m

A holm oak tree in the El Pardo forest

$10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$

Plant cell

$10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$

Carbon atom

$10^{-15} \text{ m}$

Internal structure of the proton

### The mystery of mass

In our daily life we define mass as the quantity of matter in a body. Essentially all the mass of atoms making up matter is due to the mass of their nuclei. And the mass of atomic nuclei is essentially due to that of the protons and neutrons it is made of.

However, the mass of a proton or a neutron is much larger than the sum of the masses inside it (their mass is so small that it only explains 1% of the total mass). 99% of the mass of protons and neutrons is due to the kinetic energy and color field energy of quarks inside them. The mass thus corresponds to an internal energy of constituents inside protons or neutrons.

On the other hand, this kind of internal energy cannot explain the mass of elementary particles (like quarks themselves, or leptons or the Z and W bosons), since they are not made out of smaller particles.

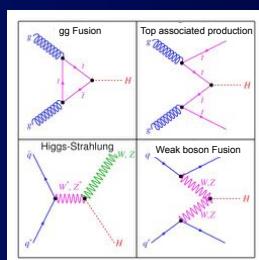
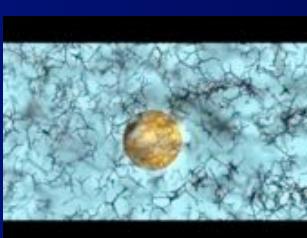
#### What is the origin of the mass of elementary particles?

### The vacuum and the Higgs field

The existence of mass for elementary particles is explained by the **Higgs field**. A field is a magnitude defined at any point in space and any instant in time, for instance the electric field or the gravitational field. The Higgs field is similar, with the difference that **it has a non-zero value in the vacuum**, **which is constant throughout space and time**, but does not introduce a preferred direction (it is a scalar field). The Higgs field is part of the **vacuum** of the universe.

The different particles have different interaction strength with the Higgs field. When a particle sits or moves in the vacuum, it is actually interacting with the Higgs field, and this interaction contributes to its energy, even when it is at rest. According to Einstein's equation  $E=mc^2$ , this energy corresponds to a rest mass for the particle.

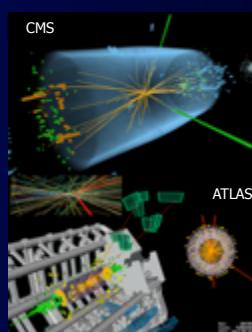
A possible analogy is to imagine the Higgs field as a fluid, and the mass for a particle as its resistance or inertia to move due its interaction with the fluid. The analogy is a useful picture for certain properties, but it is not accurate since the Higgs field is relativistically invariant, and in contrast with the fluids in our daily life, it does not decelerate or change the state of motion of particles, nor it defines a preferred absolute rest frame.



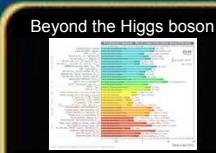
### The Higgs boson

The existence of the Higgs field implies a prediction. If we concentrate enough energy in a small enough region, it should be possible to create excitations of the Higgs field. The quantum of the Higgs field is a very special particle, known as the **Higgs boson**. Its properties are determined very precisely in the model. It is a spin 0 particle, and its interaction with any other particle is proportional to the other particle's mass. The Higgs boson interacts with the Higgs field itself, and thus acquires its own mass.

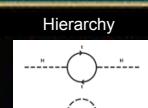
The Higgs particle was discovered in 2012, 48 years after its theoretical prediction in 1964. Experiments at the **Large Hadron Collider LHC**, in the accelerator complex at CERN in Geneva, confirmed the existence of the Higgs boson in July 4th 2012. This discovery allowed François Englert and Peter Higgs to receive the Nobel Prize in Physics 2013 for the discovery of the theoretical mechanism responsible for the origin of masses of elementary particles.



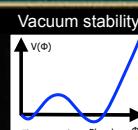
### Open puzzles



The properties of the Higgs boson measured at the LHC agree with the simplest version of the Brout-Englert-Higgs mechanism. There are active searches for hints or direct detection of possible new particles at the accessible energy scale.



The Higgs boson mass is many orders of magnitude smaller than other scales in Nature, like the Planck scale (which controls gravitational interactions). What is the mechanism underlying this enormous difference?



The Higgs boson mass measured at the LHC is such that when corrected for the contribution of the vacuum energy (like a overheated liquid), there could exist nucleation of bubbles of a new vacuum with Higgs field values close to the Planck scale.



The Brout-Englert-Higgs mechanism explains the existence of masses for elementary particles, but it does not explain the specific values of these masses. The origin of these numerical values remains a mystery...

# Neutrinos and their flavor

## The most elusive and mysterious particles

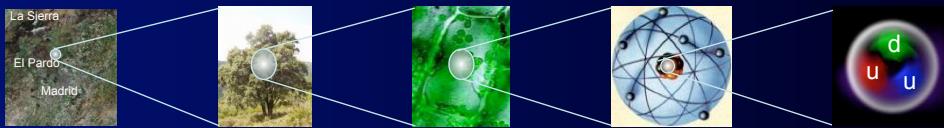
### The Standard Model of Particle Physics

#### What are we made of?

Everything around us is made up of **elementary particles**, for instance the **quarks** within **protons** and **neutrons** in atomic nuclei, and the **leptons**, like the **electrons** which orbit around nuclei. Together they form the atoms which are constituents of matter. Leptons also include another kind of particle: **neutrinos**. There are **3 families** of quarks and leptons, with identical properties, except for their masses.

#### What holds particles together?

Elementary particles are subject to forces associated to **four fundamental interactions**: **electromagnetism**, the **strong force**, the weak interaction, and **gravity**. Each one of these interactions is associated with one or several force particles, the **gauge bosons**: the **photon**, the **Z** **Y** **W** bosons, the **gluons** and the (still hypothetical) **graviton**.



$10^5 \text{ m} = 100 \text{ Km}$   
Satellite image of the Madrid area, centered on the El Pardo forest

1m  
A holm oak tree in the El Pardo forest

$10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$   
Plant cell

#### FERMIONS: Building blocks of the Universe

Leptons		spin = 1/2	Quarks		spin = 1/2
Name	Mass (GeV)	Electric charge	Name	Approx. Mass (GeV)	Electric charge
$\nu_e$ lightest neutrino*	<10 <sup>-9</sup>	0	$u$ up	0.002	2/3
$e$ electron	0.0005	-1	$d$ down	0.005	-1/3
$\nu_\mu$ middle neutrino*	<10 <sup>-9</sup>	0	$c$ charm	1.3	2/3
$\mu$ muon	0.1	-1	$s$ strange	0.1	-1/3
$\nu_\tau$ heaviest neutrino*	<10 <sup>-9</sup>	0	$t$ top	173	2/3
$\tau$ tau	1.8	-1	$b$ bottom	4.2	-1/3

#### Bosons: The glue of the Universe

Unified Electroweak spin = 1		
Name	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge
$\gamma$ photon	0	0
$W^-$	80.39	-1
$W^+$	80.39	+1
W bosons		
$Z^0$	91.188	0
Z boson		

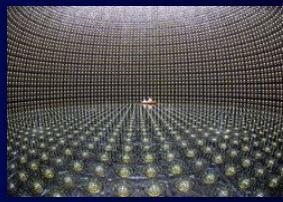
Strong (color) spin = 1		
Name	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge
g gluon	0	0

Neutrinos are elementary particles with neither electric charge nor color, they only feel the weak interaction. Their mass is extremely small, millions of times smaller than that of electrons.

Neutrinos are very abundant particles in the universe. For each electron, proton or neutron, there are 10 000 000 000 neutrinos. **Neutrinos have very feeble interaction with any form of matter**, which makes them extremely difficult to detect. Neutrinos can travel huge amounts of matter without interacting, your body is at this very instant being crossed by millions of millions of neutrinos.

Nevertheless, it is possible to detect neutrinos by using underground experiments, like **SuperKamiokande** in Japan, an enormous tank filled with 50.000 tons or very pure water, covered with 11.000 Cherenkov radiation detectors, and located some 1000 meters underground.

These experiments allow to study neutrino properties, specially **neutrino oscillations and their relation with neutrino masses**.

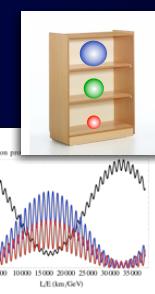


Neutrinos come in 3 varieties or "flavors", depending on their interaction with electrons, muons or tau leptons. These flavors can mix at the quantum level, leading to the phenomena of **neutrino oscillations**.

Matter particles (quarks and leptons) are classified in 3 families, with identical properties except for their mass. **There are 3 kinds or "flavors" of neutrinos**, known as **electronic**, **muonic** and **tautonic**, depending on the kind of charged lepton (electron, muon or tau) to which they connect via the weak interaction.

These 3 flavors mix among themselves in the propagation of neutrinos. In Quantum Mechanics, physical neutrinos are described as waves formed by the interference of waves associated to the 3 basic flavours. **Neutrino oscillation (in flavor)** corresponds to the changing of the interference pattern during neutrino flight. Hence, a neutrino born as electronic at the core of the Sun may be detected as a muon neutrino upon arrival to Earth (see "the solar neutrino problem").

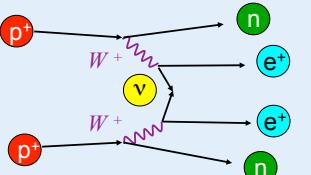
The oscillations among the 3 neutrino flavors has been studied in diverse experiments, with different parameters for the distance between the neutrino source and the detector, and the nature of neutrino source. There are **solar neutrinos** (from the Sun), **atmospheric neutrinos** (from cosmic ray collisions in upper layers of the atmosphere) and **reactor neutrinos** (from nuclear plants or particle accelerators).



#### ¿Neutrino=Antineutrino?

Each particle has its antiparticle, with equal mass but opposite charges. Neutrinos have neither electric charge nor color, hence **neutrinos could be their own antiparticles** (in jargon, they could correspond to Majorana spinors rather than Dirac spinors).

This may be established experimentally by the detection of "**neutrinoless double beta decay**", a process possible only if neutrinos are of Majorana type. There are several ongoing experiments attempting the detection of this process, including those in the Underground Laboratory in Canfranc (Huesca, Spain).



### Open puzzles

**Mass scale**

Neutrino oscillation data are sensitive to the mass differences and mixings among the 3 neutrino species. Thus, we still have very scarce information about the absolute value of their mass scale.

**Cosmic background**

Similar to the Cosmic Microwave Background, the universe is filled with a cosmic background of neutrinos (still not detected), which would originate at the time of neutrino decoupling, some 2 seconds after the Big Bang.

**Leptogenesis**

The matter-antimatter asymmetry in the universe could be explained if neutrinos are their own antiparticles: in the early universe, an excess for leptons would eventually turn into an excess of baryons over antibaryons.

**More neutrinos?**

Neutrino masses are exceedingly small, but non-zero. To complete the Standard Model to include them, and to explain their tiny mass, the so-called see-saw mechanism proposes still unobserved new kinds of neutrinos with enormous masses.

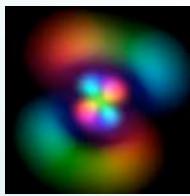
# Quantum Matter

The new states of matter

## Quantum Physics

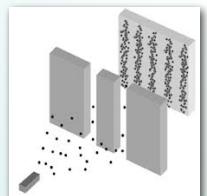
### The quantum atom

The dynamics of subatomic particles is ruled by Quantum Mechanics. One fundamental quantum law is the superposition principle, which allows a quantum system to simultaneously exist in (a superposition of) several states. For instance, electrons in an atom do not describe orbits with well-defined positions and velocities; actually, each electron is in a quantum superposition of all the different positions. These orbitals are quantum superpositions in which the position and the momentum are not well-defined (but other quantities, like their energy and angular momentum, are), and are properly described in terms of wavefunctions.



### The double slit experiment

The superposition principle is manifest in the phenomenon of interference. If you imagine shooting quantum particles to a double slit, the impact probability on a screen behind shown an interference pattern, with regions of high and low impact probability. This phenomenon works like the diffraction of light, but for the wavefunctions of particles (and underlies wave-particle duality). The interference implies that each particle crosses the two slits simultaneously; in other words, it is in a superposition of the states of having crossed each of the two slits in their way to the screen.



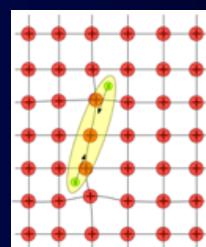
## Emergence of collective phenomena and quasiparticles

Quantum Mechanics also has surprising implications when applied to many-body systems, as in the field of Condensed Matter Physics (which studies the properties of materials from the dynamics of their constituent particles). Oftentimes, there is **emergence of collective phenomena** involving **entanglement** or correlation of many particles, and which modify the macroscopic properties of the material.

An analogy of collective phenomena and emergent properties is a chess game: the very simple rules to move each piece can correlate to form strategies of enormous complexity and beauty, with their own set of properties.

An example of collective behavior is **superconductivity**, in the BCS model. When certain materials are cooled below a critical temperature, their electrons can feel an attractive force due to a collective motion of the underlying lattice, which allows pairs of electrons to bind into a so-called Cooper pair. Cooper pairs subsequently experience Bose-Einstein condensation, so all pairs in the material move coherently and can transport electrical current without dissipation or resistance.

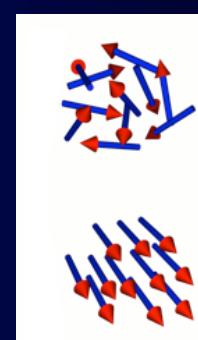
The effective excitation in a system with collective behavior are known as **quasi-particles**. In an ordinary metal, the quasi-particles are electrons of the same electric charge and spin as free electrons, but with a different mass due to interactions. On the other hand, in a two-dimensional electron gas subject to a strong magnetic field, the quasi-particles are collective excitation with fractional electric charge (quantum Hall effect).



## Symmetry breaking vs. topological order

Many properties of materials and their phase transitions can be understood in terms of spontaneous symmetry breaking. For instance, a permanent magnet is characterized by the fact that the magnetic moment of its constituent particles is not distributed randomly (thus in a rotationally invariant way, from the macroscopic viewpoint), but rather they align in a specific direction (thus breaking rotational symmetry). Also, the superconducting phase in the BSC model is characterized by the fact that the Cooper pair condensate breaks spontaneously the symmetry associated to the electromagnetic interaction (and gives the photon an effective mass, in an analogue of the Higgs mechanism in Particle Physics).

However, there exist materials with phases which cannot be characterized in this fashion, and require the introduction of a new concept: topological order. This characterizes new states of matter (*quantum matter*) not according to symmetries broken by condensates, but in terms of topological invariants of the quantum state of the constituent particles. The notion of "topological invariant" means that the corresponding property does not change when the system is perturbed (for instance, by the thermal fluctuations due to the finite temperature).

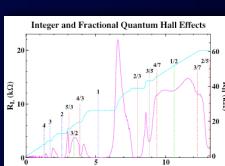


## Quantum matter

The theoretical formulation and experimental study of systems with topological order is a most active field of research. Some of these systems are related to quantum versions of the Hall effect. This occurs when a magnetic fields, applied on a 2-dimensional material carrying an electric current, induces a second electric current in a transverse direction.

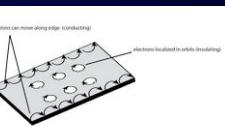
-In the integer quantum Hall effect, the conductivity in the transverse direction is quantized and can take values only in integer multiples of a basic unit (or quantum). It arises at low temperatures and sufficiently high magnetic fields. It is interpreted in terms of quasi-particles formed by bound states of electrons and magnetic field flux quanta.

-In the fractional quantum Hall effect, the conductivity is quantized in fractions of the earlier quantum. It is interpreted in terms of a new kind of quasi-particles, the **anyons**, which have the property of behaving neither like bosons nor fermions, something possible only in two (or lower) dimensions.



Other interesting systems with topological order are topological insulators. These materials are isolators in their bulk, but conductors on their surface, due to the presence of localized quasi-particles which can carry electric current. The existence of these "edge states" is associated to certain topological invariants.

Topological insulators include diverse material of timely interest, like graphene.



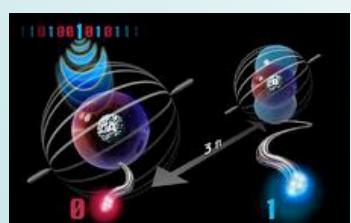
### Entanglement and qubits

The property of quantum entanglement refers to systems with several particles which are in a quantum superposition which cannot be decomposed into a product of states for the individual particles.

In entangled states, the set of particles is in a combination of the possible states for the system. This observation has triggered the birth of the very active field of Quantum Computing. It puts forward the use of quantum devices to carry out computations. Its advantage, as compared with traditional computers, is that, thanks to the quantum superposition of states, it can carry out many different computations simultaneously. The basic unit of quantum information is called a qubit, and corresponds to a quantum object in superpositions of two states (0 and 1).

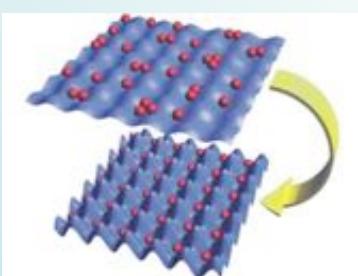
There are quantum algorithms which allow to solve certain problems at a speed substantially higher than classical algorithms. For instance, the decomposition of a number into prime factors (a problem of enormous relevance in the field of cryptography and digital security).

Another examples is the quantum state formed by the superposition of prime numbers, which would allow to test the Riemann hypothesis beyond any classical algorithm.



### Quantum simulators

Using crossed lasers and their interference pattern, it is possible to device and realize *optical lattices* in which sets of individual atoms can be trapped. The parameters of the system, like the lattice geometry and spacing, and the potential barriers between neighboring nodes, are adjustable. This technique allows to device quantum systems simulating materials with novel properties, and to study their phase transitions as parameters are tuned (quantum phase transitions at zero temperature).



## Open puzzles

### Topological Quantum Computation



The construction of qubits in systems with topological order would allow storage and use of quantum information in a robust way under perturbations spoiling the quantum coherence, improving over other realizations of qubits.

### Non-abelian anyons



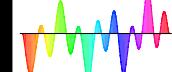
There are theoretical formulations of non-abelian anyons, for which the operations of pairwise exchange of particles are non-commuting, but obey braiding. The experimental search of materials with such quasi-particles is a promising enterprise.

### High-Tc superconductors



The materials known as cuprates present a n intricate phase diagram, with superconductor phases, along with antiferromagnet and strange metal phases, whose quasi-particles present unusual behaviors. The characterization of these systems remains an open problem.

### The Riemann hypothesis



There are reasons to expect that zeroes of Riemann's zeta function are the spectrum of a quantum Hamiltonian. This would provide a physical proof of Riemann's hypothesis, which has deep implications in branches of Mathematics, like Number Theory and Quantum Chaos.

# Black Holes and Holography

Towards a theory of Quantum Gravity

## The gravitational force is described by General Relativity

From Newton...

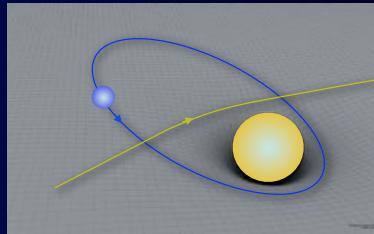
In Newton's theory of gravity, the gravitational force is transmitted instantaneously, as an action at a distance. Hence, it is not compatible with Special Relativity, in which no signal can propagate at a speed faster than light.

... to Einstein

In his General Theory of Relativity, Einstein realized that a gravitational field should be described as a deformation of space-time. This deformation curves the trajectories of objects, leading to the fall of objects on Earth, to the laws of planetary motion, and the dynamics of stars and galaxies in the universe.



In the universe, black holes are born in the collapse of very massive stars. There are also supermassive black holes, with millions of solar masses, in the center of galaxies, for example in the Milky Way.



## Classical Black Holes

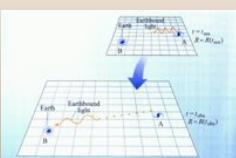
A black hole is a body so massive that not even light can escape from its gravitational pull. The surface on which the escape velocity is that of light is called the **horizon**. Any signal emitted inside the horizon is unable to escape outside; instead, its trajectory is doomed to a deadly encounter with a singularity, a region formally of infinite curvature.

The Schwarzschild solution of General Relativity describes the space-time geometry of a black hole of mass  $M$  and with horizon radius

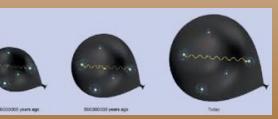
$$\text{Schwarzschild radius } r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

## Cosmology

In General Relativity, space-time is dynamical. This allows to describe the **expansion of the universe** from the Big Bang, as the expansion of empty space among galaxies, such that the farther two galaxies are from each other, the faster their separation speed.



This effect is similar to the separation of dots painted on the surface of an inflating balloon. The bigger the separation, the faster their separation speed.



## Quantum Gravity

### Planck scale

Singularities are regions classically of infinitely small size, so their physics requires an still unknown quantum formulation of General Relativity.

The energy at which the quantum features of gravity become manifest is the **Planck scale**. It is the energy of a particle whose Compton wavelength equals its Schwarzschild radius.

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

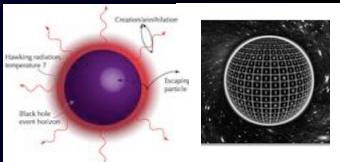
## Quantum Black Holes

At the quantum level, black holes emit the so called **Hawking radiation**. Its origin is the quantum appearance of virtual particle-antiparticle pairs near the horizon, when one particle falls inside the horizon while the other escapes to infinity.

Hawking radiation has a black body spectrum with a **temperature** inversely proportional to the black hole mass. It also has a (Bekenstein-Hawking) **entropy** proportional to the area of the horizon. These properties form the basis of **black hole thermodynamics**. The statistical interpretation of entropy suggests the existence of a huge number of quantum microscopic states for each classical black hole solution.

The dependence of entropy with the area of the horizon, rather than the enclosed volume, motivates the formulation of the **holographic principle**, which proposes that the information about the quantum states of a gravitational system in a region can be encoded in the surface bounding such region.

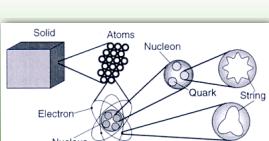
Hawking radiation leads to the complete evaporation of the black hole. The **black hole information problem** is to decode how Hawking radiation carries the information of the objects that originally formed the black hole; in particular, of their quantum entanglement, which must be preserved for consistency with the laws of Quantum Mechanics.



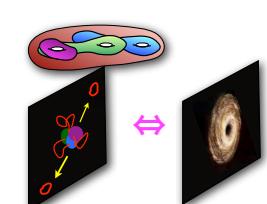
## Gravity and black holes in string theory

String theory proposes that elementary particles are not point-like, but rather, extended objects, strings in different vibration modes. The theory includes gravitational interactions, since the lightest vibration mode of a closed string is a graviton, the quantum of the gravitational field.

Although it has not been confirmed experimentally, string theory is very interesting, in that it provides a quantum theory which includes General Relativity, as well as other interactions.



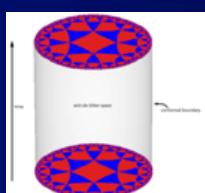
String theories contain certain extended objects, **D-branes**, which can wrap in the extra dimensions to produce very massive objects in four-dimensional space-time. When interactions are intense, these objects turn into classical black holes. When the interactions are feeble, they are described by a sector of open strings with endpoints fixed on the D-branes. The quantum states of these open strings correspond to the quantum microstates of the black holes and allow for an **statistical interpretation of the Bekenstein-Hawking entropy**. Hawking radiation corresponds to the emission of closed strings in interaction processes of open strings.



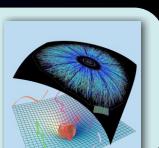
## AdS/CFT and holography

The two-fold description of D-branes in terms of open strings and of gravitational fields allows for a quantitative realization of the **holographic principle**. Concretely, it implies the **AdS/CFT or gauge-gravity duality**, a holographic relation between gravity in a 5-dimensional space of anti de Sitter (AdS) kind and a conformal field theory (CFT) on its 4-dimensional boundary.

On top of its conceptual importance, the AdS/CFT duality has led to diverse relevant **applications**:



**Quark-gluon plasma**  
The gauge theory at a finite temperature  $T$  turns into an interacting plasma at strong coupling. Its gravitational dual describes a black hole in AdS at temperature  $T$ . AdS/CFT allows using black hole physics to model the properties of the quark-gluon plasma produced in heavy ion collisions at the experiments RHIC, and ALICE (at the LHC).



## Holographic superconductors

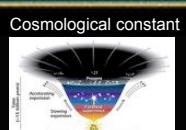
A recent development is the construction of gravitational models (charged black holes in AdS spaces) holographically dual to superconducting materials and other exotic systems in condensed matter.



## Open puzzles



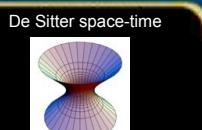
The classical Big Bang corresponds to a singularity in which the distance of any two points in space tends to zero. The mechanisms to eliminate or describe this kind of cosmological singularity remain an open subject under intense research.



The dark energy of the universe could correspond to a cosmological constant. However, the underlying explanation for the overwhelming cancellations of quantum corrections required to explain its tiny value remains a mystery.



The existing descriptions for black holes at the quantum level do not yet provide a quantitative answer to the question of what happens really to an observer falling inside their horizon.



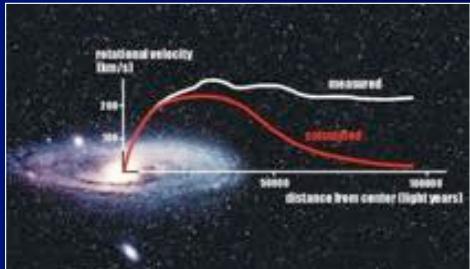
Despite its large symmetry, there is still not a quantitative formulation of the holographic principle for space-times of the de Sitter kind (which a universe in exponentially accelerated expansion).

# Dark Matter

## The missing mass in the universe

Matter represents around 30% of the energy density in the universe. Out of this, most of the matter (around 85%) is dark, as it neither emits nor absorbs light, and its nature remain unknown

### Evidence and Motivation

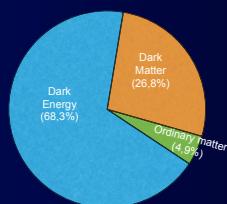


#### Gravitational lensing

**General Relativity** explains that trajectories of light bend in gravitational fields. Hence, if there is a very massive object between a distant light source and us, the observed image is distorted into arcs around the mass distribution. This allows to measure the amount of intermediate mass, which often is larger than that measured by other methods. An example is the **Bullet Cluster** (left image), where the mass measured from gravitational lensing (false blue) is larger than that measured using X-ray emission (false red). This is consistent with two colliding clusters of galaxies, in which ordinary matter (red) smashes and emits X-rays upon heating, while dark matter halos (blue) are non-interacting and pass through each other.

#### Dark matter in our galaxy?

The dynamics of spiral galaxies like the Milky Way can be studied using Newton's law, which provides the **rotation curves** (figure above). The theoretical prediction for such curves is that linear speeds should decrease beyond a value associated to the size of the visible disk of stars in the galaxy. The observational data however show that rotation curves stay approximately constant to very large distances. This suggests the existence of a distribution of extra gravitating matter which had not been accounted for. Such studies suggest that visible galaxies are immersed in **Dark Matter halos**, carrying far more matter than meets the eye.



### Looking for Dark Matter particles...

#### Indirect Detection



Particles of dark matter in the universe may **decay**, or collide and **annihilate**, into Standard Model particles. The later can reach Earth and be detected. Indirect detection experiments try to observe such particles, specially **photons**, **neutrinos** or **antimatter**, which would provide information about the nature of dark matter. Some of the indirect detection experiments are IceCube, Antares, and Fermi-LAT and the forthcoming CTA, in which the IFT participates.

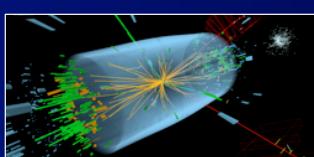
#### Direct Detection

We are continuously receiving a flux of particles from the universe, part of which may correspond to dark matter particles. Direct detection experiments try to observe the **recoil of nuclei in the detector** caused by **elastic collisions** of dark matter particles from the universe. To suppress the background of collisions from **cosmic rays**, they are filtered out by locating these experiments deep underground. They are moreover surrounded by several layers of material specifically designed to absorb most such background particles.

The Cryogenic Dark Matter Search (CDMS) experiment, in which the IFT participates, uses Germanium crystals at cryogenic temperatures to search for dark matter.

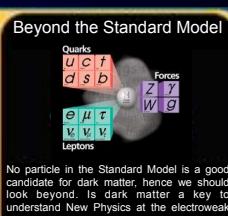
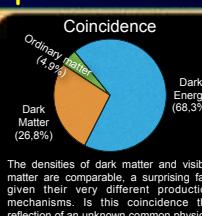
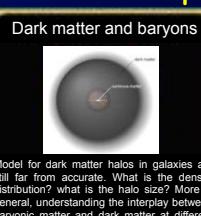
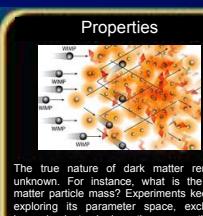


#### Colliders



The search for dark matter particles at particle colliders is a difficult one, since they carry no electric charge and leave no track in detectors. Nevertheless, there are efficient techniques to identify candidate events by searching for **missing energy**, for instance in production together with a jet, or in production as endpoint of cascades of decays of heavier particles, as in many supersymmetric models.

#### Open puzzles



# Dark Energy

The accelerated expansion of the universe

## The Cosmological Standard Model: the history of the universe

Where do the stars, galaxies and all objects in the universe come from?

The universe is in a state of **expansion** from a configuration of extremely high temperature and density, called the **Big Bang**, some 13.700 million years ago. In the first instants, the universe was dominated by a plasma of elementary particles in continuous interaction.

Within minutes, the rapid expansion cooled the plasma enough to start forming the lightest stable nuclei (**primordial nucleosynthesis**), mainly hydrogen and helium.

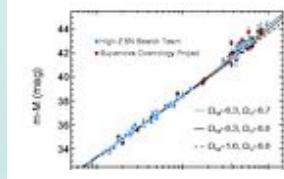
When it was about 380.000 years old, electrons and nuclei combined to form neutral atoms. The universe became transparent to photons, which broke free and formed a radiation filling the universe ever since and can be observed today: the **Cosmic Microwave Background (CMB)**.

From the minuscule inhomogeneities present in the primordial plasma, matter started to cluster around denser regions due to the gravitational attraction, eventually leading to **large scale structure formation**. After the first stars were born, the inhomogeneities grew and started to form galaxies and subsequently galaxy clusters and superclusters, leading to the universe as we know it today.



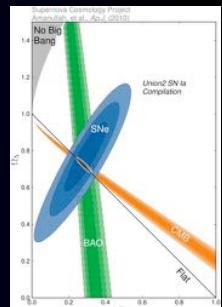
Dark Energy is a component of the energy density of the universe, of unknown nature, and which sources an accelerated expansion of the universe.

Supernovae and the expansion rate of the universe



The expansion rate of the universe can be determined by studying the ratio between the speed of separation of galaxies with respect to Earth and their distance (**Hubble's law**). The speed of separation of galaxies with respect to Earth can be measured by the redshift of their atomic spectra, and their distance can be obtained from the apparent magnitude of "standard candles", like type Ia supernovae (white dwarves exploding due to the implosion of accreting material from a companion star in a binary system).

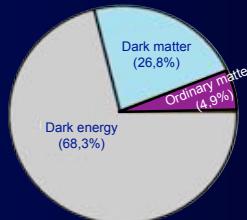
These data provide the expansion rate of the universe throughout its history, and show that, after an epoch of decelerated expansion, we are now in a phase of **accelerated expansion**. This discovery in 1998 shook the scientific community and was recognized with the Nobel Prize in Physics 2011.



Dark Energy corresponds to approximately 70% of the energy density of the universe

The energy density budget of the universe, determined and confirmed via several different methods, corresponds to:

- **4,9% of ordinary matter, aka baryonic matter** (stars, dust, gas clouds, ...),
- **26,8% of dark matter** (fluid of massive particles not emitting light),
- **68,3% of dark energy**, which dominates the expansion of the universe at present.



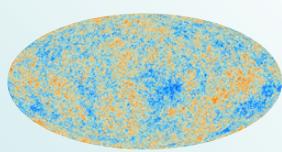
The surprising large fraction of dark energy in the universe has been confirmed independently by data from the **magnitudes of Type Ia supernovae**, the analysis of the **inhomogeneities of the Cosmic Microwave Background**, and the study of **baryon acoustic oscillations (BAO)**.

The different observational techniques of the dark energy abundance lead to results in remarkable agreement.

## The Cosmic Microwave Background

The **Cosmic Microwave Background (CMB)** is a background of electromagnetic radiation filling the universe. It has a black body spectrum with a very homogeneous temperature of about 2,7K, with tiny inhomogeneities of 1 part in 100.000. The CMB is a relic of the decoupling of photons due to the formation of atoms when the universe was some 380 years old, and is an unquestionable confirmation of the Big Bang theory.

The analysis of its inhomogeneities, discovered by the COBE satellite and measured with exquisite precision by the WMAP and Planck satellites, provides very precise information about the early universe, its energy content, and its evolution and expansion rate ever since.



## Exploring the properties of Dark Energy



One of the main objectives of research in Cosmology is to clarify the nature of dark energy and to determine its properties, for instance its equation of state.

Many new observational data are expected to come from different ground-based experiments such as DES (*Dark Energy Survey*), PAU (*Physics of the Accelerating Universe*), or DESI (*Dark Energy Spectroscopic Instrument*), which extend the range of observed objects and improve the precision of earlier measurements, for instance on supernovas and baryon acoustic oscillations (BAOs).



## Baryon Acoustic Oscillations

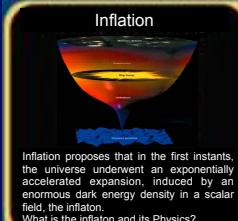
**Baryon Acoustic Oscillations (BAOs)** are patterns or correlations in the distribution of visible matter (baryons) in the universe, associated to oscillations in the primordial particle plasma, which "froze" at the decoupling of photons.

The characteristic size of the BAOs allows to define an "standard ruler" for the measurement of distances in the universe, improving the precise measurement of the expansion rate along its history.



The observation of BAOs is carried out with **galaxy distribution surveys**, for example the SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), 2dFGRS (*2dF Galaxy Redshift Survey*), and BOSS (*Baryon Oscillation Spectroscopic Survey*), among others.

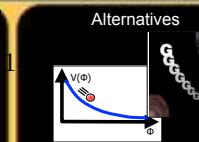
## Open puzzles



Inflation proposes that in the first instants, the universe underwent an exponentially accelerated expansion, induced by an enormous dark energy density in a scalar field, the inflaton. What is the inflaton and its Physics?



If the dark energy is the cosmological constant proposed by Einstein, its value is many orders of magnitude lower than other scales in Nature. What is the mechanism responsible for this enormous difference?



There exist many proposals about the nature of dark energy: potential of additional scalar fields (quintessence), modified gravity at large scales, ... What is the true nature of dark energy?



The fate of the universe depends on whether the dark energy density decreases, increases or stays constant. This would produce either a *Big Crunch*, a *Big Rip*, or a *Big Freeze*, respectively.



# Beyond the Standard Model

## The High Energy Frontier

### The Standard Model of Elementary Particles

#### What are we made of?

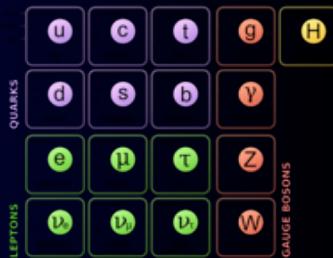
Everything around us is made up of **elementary particles**, for instance the **quarks** within protons and neutrons in atomic nuclei, and the **leptons**, like the **electrons** which orbit around nuclei. Together they form the atoms which are constituents of matter. There are **3 families** of quarks and leptons, with identical properties, except for their enormously different masses.

#### What holds particles together?

Elementary particles are subject to forces associated to **four fundamental interactions**: electromagnetism, the **strong force**, the weak interaction, and **gravity**. Each one of these interactions is associated with one or several force particles, the **gauge bosons**: the **photon**, the **Z y W bosons**, the **gluons** and the (still hypothetical) **graviton**.

#### The Higgs boson

The mass of elementary particles arises from their interaction with the **Higgs field**, which permeates all of space and time, and whose interactions with particles contributes to their internal energy, i.e. their mass. The fluctuations of the Higgs field itself correspond to a new kind of particle, the **Higgs boson**, discovered in 2012 in the Large Hadron Collider LHC at CERN in Geneva.



$10^5 \text{ m} = 100 \text{ Km}$   
Satellite image of the Madrid area, centered on the El Pardo forest



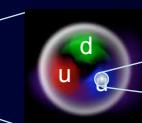
1m  
A holm oak tree in the El Pardo forest



$10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$   
Plant cell



$10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$   
Carbon atom



$10^{-15} \text{ m}$   
Internal structure of the proton



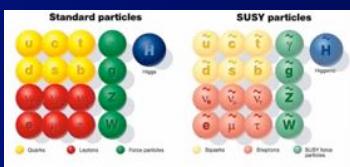
... And beyond?

### Intense activity in theory...

#### Supersymmetry (SUSY)

**Supersymmetry** proposes that **for each particle of the Standard Model there exists a partner particle** with the same charges, but different spin and much larger mass. These masses would be within the energy reach of the LHC, which could potentially discover supersymmetric particles (**squarks, sleptons, gluinos, photino, Wino, Zino and Higgsinos**)

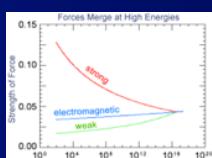
Supersymmetry would partially solve the **hierarchy problem** (see "Open puzzles" below). Also, the lightest supersymmetric particle could explain the dark matter of the universe. Finally, supersymmetry is intimately related to gravity (in theories of **supergravity**) and arises naturally in string theory.



#### Grand Unification Theories (GUTs)

The strengths of electromagnetic, weak and strong interactions become essentially equal when they are extrapolated to very high energies. **Grand Unification Theories (GUTs)** propose that the different interactions we observe are different manifestations of a unique force, out of which they arise via spontaneous symmetry breaking (similar to the Higgs field mechanism).

The unification of interaction strengths is more precise in the context of supersymmetry, motivating **SUSY-GUT** models. (SUSY) GUTs predict **proton decay** mediated by very massive interaction bosons. Although the expected proton lifetime is exceedingly long, there are experiments actively looking for events signalling the instability of the proton.



#### Composite models

In analogy with protons and neutrons being composite particles made up of other more fundamental ones (quarks), **composite models** suggest that particles considered to be elementary (quarks, leptons, the Higgs boson,...) could well be composites of other smaller particles. These more elementary particles would be confined by a new set of interactions, much more intense than any other known force.

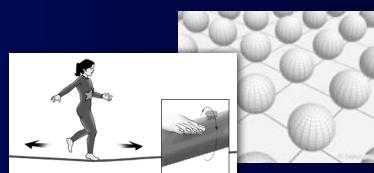
A composite Higgs boson would provide a solution to the hierarchy problem in a way alternative to supersymmetry. Composite models predict that composite particles should be accompanied by a spectrum of massive resonances, which could be discovered at the LHC.



#### Extra Dimensions

In certain models (like in string theory), besides the 3 spatial dimensions of our daily experience, there exist **additional dimensions** playing a role in Particle Physics. The extra dimensions would be curled up with a very small size, and would only be accessible at very high energies (namely, with experiments of very high spatial resolution).

In certain models, the extra dimensions could be discovered at the LHC, by the detection of massive resonances of known particles, or processes with "missing energy", in which particles escaping into the extra dimensions are responsible for the non-detection of part of the collision energy.



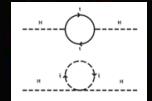
#### Open puzzles

##### 3 families and their masses



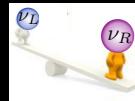
Matter particles (quarks and leptons) come in families with most properties identical (same charges under interactions), but with very different masses. What is the origin of families and the explanation of their mass values?

##### Hierarchy



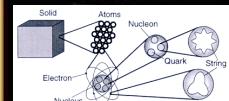
The Higgs boson mass is many orders of magnitude smaller than other scales in Nature, like the Planck scale (which controls gravitational interactions). What is the mechanism underlying this enormous difference?

##### Neutrinos



Neutrino masses are exceedingly small, but non-zero. To complete the Standard Model to its theoretical requirements, tiny mass - the so-called **see-saw** mechanism proposes still unobserved new kinds of neutrinos with enormous masses.

##### Gravity and strings

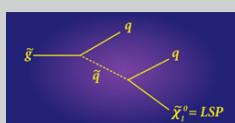


The Standard Model does not include gravity, which we are not able to describe within its framework. General relativity theory provides the description and suggests the possible unification at extremely high energies, of all known interactions. La teoría de cuerdas proporciona esta descripción, y sugiere la posible unificación, a altísimas energías, de todas las

#### Dark matter particles

The presence of a **dark matter** density in the universe could be explained in terms of a fluid of some still unknown particle. These particles should be stable, uncharged, and with very feeble interactions with ordinary matter.

Many models of Physics beyond the Standard Model include candidate particles for dark matter, some of which could be discovered at the LHC. A prototypical example is the neutralino, the **lightest supersymmetric particle** or LSP, in many supersymmetric models.



# Unification of particles and forces

## String Theory and Particle Physics

### The Standard Model of Elementary Particles

#### What are we made of?

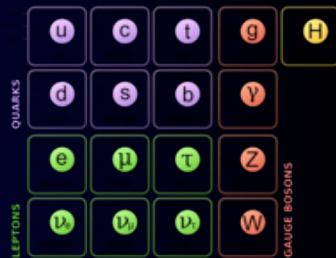
Everything around us is made up of **elementary particles**, for instance the **quarks** within protons and neutrons in atomic nuclei, and the **leptons**, like the **electrons** which orbit around nuclei. Together they form the atoms which are constituents of matter.

#### What holds particles together?

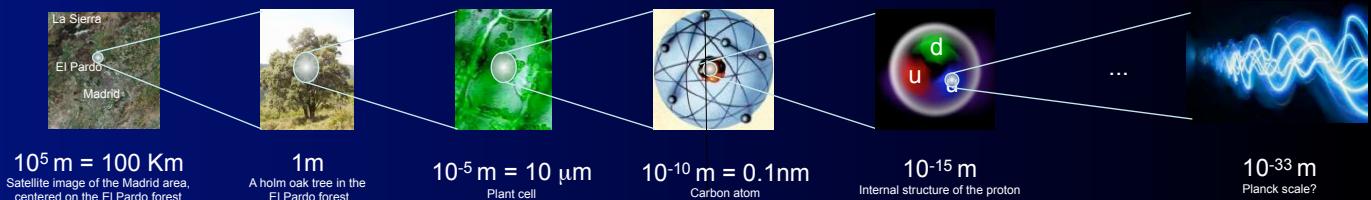
Elementary particles are subject to forces associated to **four fundamental interactions**: electromagnetism, the **strong force**, the weak interaction, and **gravity**. Each one of these interactions is associated with one or several force particles, the **gauge bosons**: the **photon**, the **Z** and **W** bosons, the **gluons** and the (still hypothetical) **graviton**.

#### The Higgs boson

The mass of elementary particles arises from their interaction with the **Higgs field**, which permeates all of space and time, and whose interactions with particles contributes to their internal energy, i.e. their mass. The fluctuations of the Higgs field itself correspond to a new kind of particle, the **Higgs boson**, discovered in 2012 in the Large Hadron Collider LHC at CERN in Geneva.



### From particles to strings



In string theory, elementary particles are not point-like objects, but rather extended objects, tiny vibrating strings.

#### Unification of particles and forces

In string theory, the different kinds of particles we see (quarks, leptons, interaction particles and the Higgs boson) would correspond to different vibration modes of a unique kind of underlying string, like the different notes in a violin string. It thus implies a unification of matter particles and interaction particles.

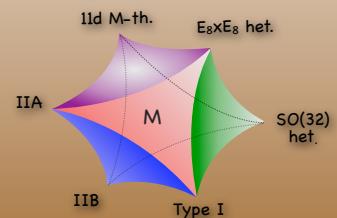


### Five theories and a Mystery

There exist in principle five mathematically consistent string theories. They are known as type IIA and IIB, type I, SO(32) heterotic and E8 x E8 heterotic.

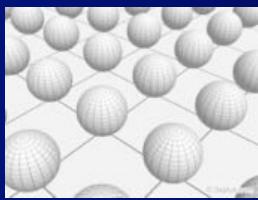
They are all formulated in 10 dimensions and with a high degree of supersymmetry.

However, the behavior of these theories at strong coupling reveals they are actually different manifestation of a unique underlying theory, which also encompasses the so-called **M-theory**, which lives in 11 dimensions and whose formulation remains mysterious.

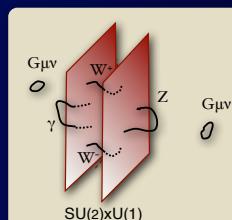


### Extra dimensions, compactification...

### ... and D-branes



To produce theories with four dimensions (three spatial, plus time), six of the ten dimensions of string theory must be "curled up", compactified, defining a space of very small size. Although they are not directly observable, the extra dimensions are enormously important, since their geometry and properties determine the resulting content of particles and forces in four dimensions.

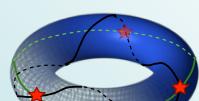


In string theory, the graviton arises as the lightest vibration mode of the closed string. In many models, matter and interaction particles and the Higgs boson can arise from vibration modes of open strings.

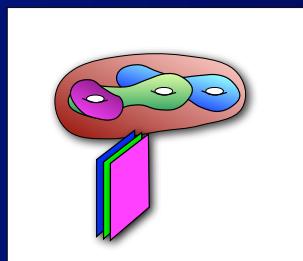
Open strings have the property that their endpoints are fixed on D-branes, certain subspaces of 10-dimensional space-time. The geometry of D-branes in the extra dimensions determined the content of particles and forces in the model.

### The origin of the 3 families

In models of intersecting D-branes, the replication of matter particles is due to the fact that the D-brane stacks can intersect at several points in the extra dimensions.

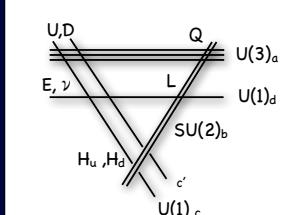


### Intersecting D-branes

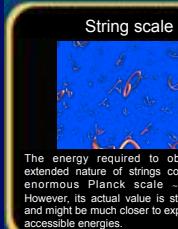


In the simplest particle physics string models, the Standard Model particles arise as open string with their endpoints on stacks of D-branes wrapped in the extra dimensions in different ways.

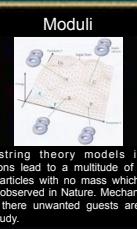
Gauge bosons are open strings among overlapping D-branes, whereas quarks, leptons and the Higgs boson arise from open strings located at the intersections of D-brane stacks.



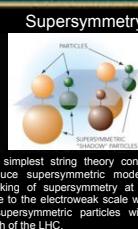
### Open puzzles



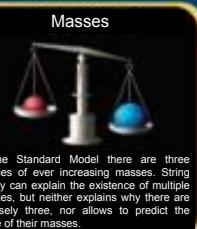
The energy required to observe the extended nature of strings could be the enormous **Planck scale**  $\sim 10^{19}$  GeV. However, its actual value is still unknown and might be much closer to experimentally accessible energies.



Many string theory models in four dimensions lead to a multitude of moduli, scalar particles with no mass which are in fact not observed in Nature. Mechanisms to remove these unwanted guests are under active study.



The simplest string theory construction produce supersymmetric models. The breaking of supersymmetry at a scale close to the electroweak scale would lead to supersymmetric particles within the reach of the LHC.



In the Standard Model there are three families of ever increasing masses. String theory can explain the existence of multiple families, but neither explains why there are precisely three, nor allows to predict the value of their masses.



**EXCELENCIA**  
SEVIRO  
OCHOA