Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Unidad VI

Solución numérica de ecuaciones diferenciales.

Sea

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v$$

Una ecuación diferencial de primer orden, donde:

g, c y m son constantes.

v es una variable dependiente.

t es una variable independiente.

Las ecuaciones diferenciales se dividen en:

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), si poseen una sola variable independiente.

Ecuaciones diferenciales parciales (EDP), si poseen dos o más variables independientes.

La ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Es una ecuación diferencial de segundo orden, c y k son constantes. A estas ecuaciones se les conoce como ecuación de segundo grado; en general a las ecuaciones de orden mayor a uno se les conoce como ecuaciones de orden superior.

Las ecuaciones de orden superior se pueden reducir a un sistema de ecuaciones de primer orden definiendo nuevas variables, si:

$$y = \frac{dx}{dt}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores se tiene que

$$m\frac{dx}{dt} + cy + kx = 0 \text{ o } \frac{dy}{dt} = \frac{cy + kx}{m}$$

La solución matemática de la EDO se puede obtener por separación de variables e integrando, con lo que se obtiene:

$$dv = g\,dt - \frac{c}{m} v\,dt \qquad\qquad v = \int \left[g - \frac{c}{m} v \right] dt$$

Linealización de EDOs.

Una EDO lineal es aquella que se ajusta a la forma general:

$$a_n(x) y^n + a_{n-1}(x) y^{n-1} + \cdots + a_1(x) y + a_0(x) = f(x)$$

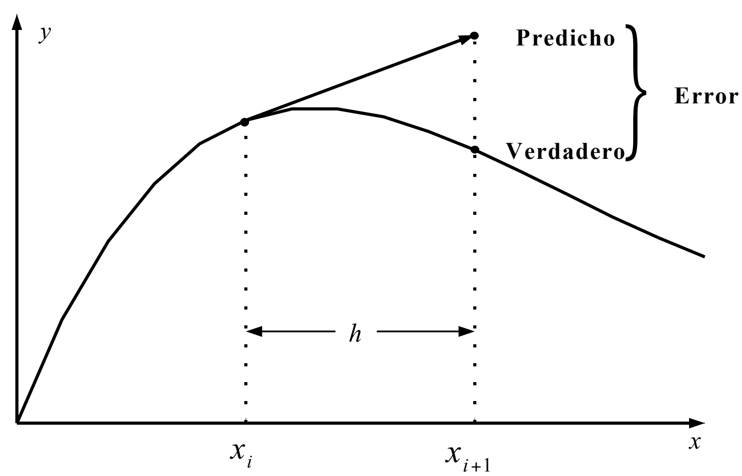
donde:

y^n = derivada n-ésima de y respecto a x

a y $f(x)$ = funciones específicas de x

Método de Euler

La primera derivada proporciona una estimación de la pendiente en x_i tal como se observa en la figura siguiente



De la figura se observa que

$$y_{i+1} = y_i + \phi\, h$$

Donde ϕ es la pendiente

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

Es decir la función evaluada en los puntos (x_i, y_i) rescribiendo la ecuación anterior se tiene que

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\, h$$

A esta ecuación se le conoce como método de Euler o punto medio de Euler Cauchy

Ejemplo.

Utilizar el método de Euler para integrar (Resolver la ecuación diferencial) numéricamente, con condiciones iniciales $x = 0$, $y = 1$, hasta $x = 4$ con paso de iteración de 0.5.:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Resolviendo la ecuación diferencial tenemos que la solución real es:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Resolviendo usando Euler

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	v_v	$\lvert E_v \rvert$
0	0	1	8.50000	1.00000	0.00
1	0.5	5.25000	1.25000	3.21875	63.11
2	1.0	5.87500	-1.50000	3.00000	95.83
3	1.5	5.12500	-1.25000	2.21875	130.99
4	2.0	4.50000	0.50000	2.00000	125.00
5	2.5	4.75000	2.25000	2.71875	74.71
6	3.0	5.87500	2.50000	4.00000	46.88
7	3.5	7.12500	-0.25000	4.71875	50.99
8	4.0	7.00000		3.00000	133.33

Calculando y_{i+1} tenemos que

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\, h$$

$$f(x_0 = 0, y_0 = 1) = -2 \times 0^3 + 12 \times 0^2 - 20 \times 0 + 8.5 = 8.5$$

$$y_1(0.5) = y_0 + f(x_0, y_0)\, h = 1 + 8.5 \times 0.5 = 5.25$$

Tememos que la aproximación es que $y_1 = 5.25$

Obteniendo el valor real

$$y(0.5) = -0.5 \times 0.5^4 + 4 \times 0.5^3 - 10 \times 0.5^2 + 8.5 \times 0.5 + 1 = 3.21875$$

El error Verdadero relativo porcentual es:

$$|E_v| = \left| \frac{v_v - v_a}{v_v} \right| = \left| \frac{3.21875 - 5.25}{3.21875} \right| = 63.11\%$$

Calculando y_2 tenemos que

$$f(x_1 = 0.5, y_1 = 5.25) = -2 \times 0.5^3 + 12 \times 0.5^2 - 20 \times 0.5 + 8.5 = 1.25$$

$y_2(1) = y_1 + f(x_1, y_1)\, h = 5.25 + 1.25 \times 0.5 = 5.875$

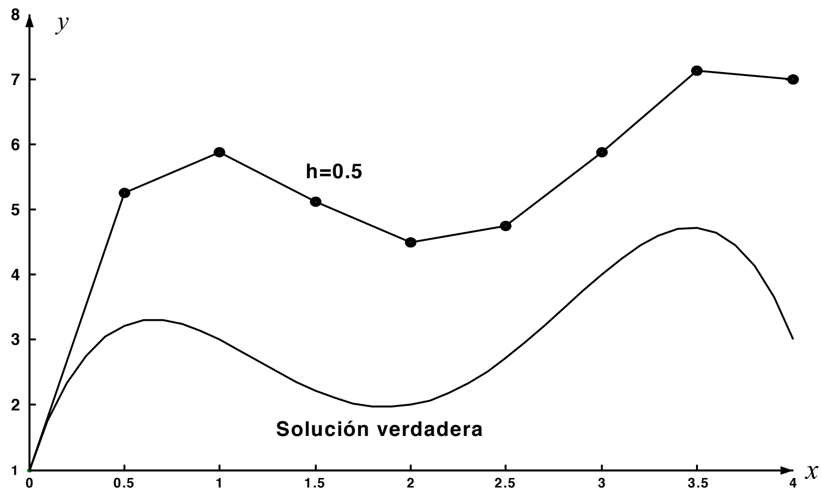
$y(1) = -0.5 \times 1^4 + 4 \times 1^3 - 10 \times 1^2 + 8.5 \times 1 + 1 = 3$

El error verdadero es

$$\left| \frac{v_v - v_a}{v_v} \right| = \left| \frac{3 - 5.875}{3} \right| = 95.83\%$$

Se continúa sucesivamente $x = \{1.5, 2, 2.5, 3, 3.5\ y\ 4\}$ de acuerdo al paso utilizado. Los valores obtenidos son valores de la curva que resulta de la ecuación.

Graficando la solución aproximada y la verdadera se tiene:



Análisis de error para el método de Euler

$$\textit{Tipos de errores en las EDOS} \begin{cases} \textit{Truncamiento} \begin{cases} \textit{Local} \\ \textit{Propagado} \end{cases} \\ \textit{redondeo} \end{cases}$$

Los tipos de errores en las ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser de truncamiento y de redondeo, los primeros son causados por las técnicas empleadas para aproximar, estas pueden ser de dos tipos

Error de truncamiento: Es causado por las técnicas empleadas para aproximar.

Error de redondeo: Es el resultado del número finito de cifras significativas que puede manejar un procesador.

Error local: Es el resultado de aplicar el método en cuestión a un solo paso.

Error propagado: Resulta de las aproximaciones producidas en los pasos previos.

Se puede obtener información sobre la magnitud y propiedades del error de truncamiento al derivar el método de Euler directamente de las series de Taylor:

$$y' = f(x, y) \quad \text{donde: } y' = \frac{dy}{dx}$$

Si la solución tiene derivadas continuas, entonces se puede representar mediante una expansión en series de Taylor respecto a (x_i, y_i) de la forma:

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + R_n$$

Donde $h = x_i + 1$ y R_n es un término remanente definido por:

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Donde ξ es cualquier punto entre el intervalo definido entre x_i y x_{i+1}.

Una forma alternativa se obtiene al sustituir las ecuaciones anteriores para obtener

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f(x_i, y_i)^{(n-1)}}{n!} h^n + Oh^{n+1}$$

Donde Oh^{n+1} especifica el error de truncamiento local, el cual es proporcional al tamaño del paso elevado a la $(n+1)$ -ésima potencia.

Al comparar la ecuaciones se observa que el método de Euler corresponde a la serie de Taylor e incluyendo el término $f(x_i, y_i)h$. De la comparación se observa que ocurre un error de truncamiento debido a que se aproxima la solución verdadera mediante un número finito de términos de la serie de Taylor.

$$E_v = \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2 + \cdots + Oh^{n+1}$$

A lo cual se obtiene el error de truncamiento local verdadero. Si h es lo suficientemente pequeña, los errores en la ecuación anterior disminuyen al elevar el orden de h y el resultado se presenta como:

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 \text{ o } E_a = Oh^2$$

donde E_a es el error de truncamiento local aproximado.

Ejemplo.

Use la ecuación $E_v = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + Oh^{n+1}$ para estimar el error del paso inicial del ejemplo anterior. Utilícela también para determinar el error debido a cada uno de los términos de orden superior de la serie de Taylor.

Del ejemplo anterior tenemos que

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Con condiciones iniciales $x = 0$, $y = 1$, hasta $x = 4$ con paso de iteración de 0.5. para este ejemplo obtendríamos un E_v de

$$E_v = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{3!}h^3 + \frac{f'''(x_i, y_i)}{4!}h^4$$

Donde derivando $f(x, y)$ se tiene

$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$

$f'(x, y) = -6x^2 + 24x - 20$

$f''(x, y) = -12x + 24$

$f'''(x, y) = -12$

Tomado el punto inicial $x = 0$, se tiene el error para la primera derivada

$$\frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 = \frac{-6x^2 + 24x - 20}{2}0.5^2 = \frac{-6\times(0)^2 + 24\times(0) - 20}{2}0.5^2 = -2.5$$

Para la segunda derivada se tiene

$$\frac{f''(x_i, y_i)}{3!}h^3 = \frac{-12x + 24}{6}0.5^3 = \frac{-12\times(0) + 24}{6}0.5^3 = 0.5$$

Para la tercera derivada se tiene

$$\frac{f'''(x_i, y_i)}{4!}h^4 = \frac{-12}{24}0.5^4 = \frac{-12}{24}0.5^4 = -0.03125$$

El error verdadero se obtiene sumando los errores para cada término

$$E_v = -2.5 + 0.5 - 0.03125 = -2.03125$$

Recordando que se sabe el valor verdadero es 3.21875 y que la estimación obtenida con el método de Euler es 5.25,

$$Valor\ verdadero = estimación\ de\ aproximación + error$$

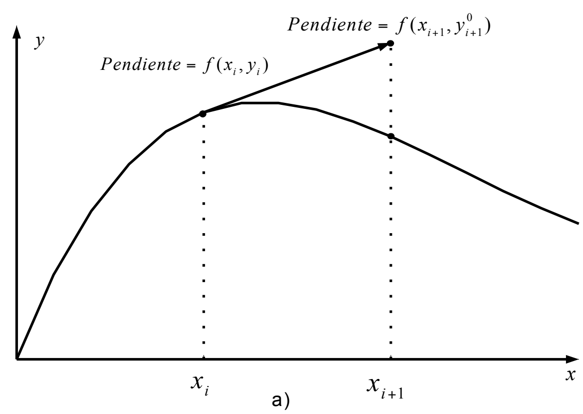
$$Valor\ verdadero = 5.25 - 2.03125 = 3.21875$$

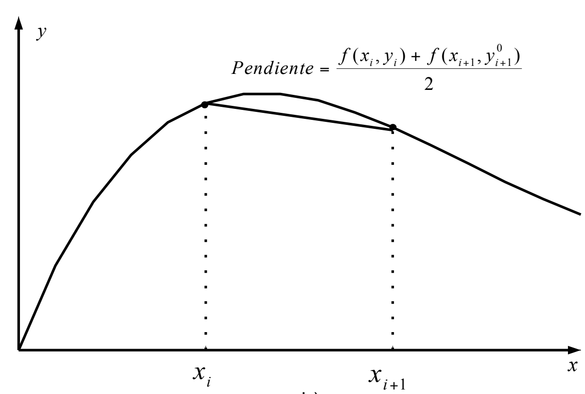
Mejoras al método de Euler

Una fuente fundamental de error en el método de Euler es que la derivada al principio del intervalo se supone que se aplica a través del intervalo entero. Existen dos modificaciones simples para ayudar a evitar este inconveniente. Las modificaciones en realidad pertenecen a una clase mayor de métodos de solución llamados métodos de Runge-Kutta. Sin embargo ya que tiene una interpretación grafica sencilla, se presenta antes de la derivación formal de los métodos de Runge-Kutta. Para corregir estas deficiencias se plantean primero el método de Heun y posteriormente los métodos de Runge-Kutta.

Método de Heun

Un método para mejorar la aproximación a la pendiente implica el cálculo de dos derivadas del intervalo, en un punto inicial y otra en un punto final. En seguida se promedian las derivadas y se obtiene una aproximación mejorada de la pendiente en el intervalo completo. Este esquema, llamado método de Heun, que se muestra en la siguiente figura.





Esquema Grafico del método de Heun. a) Predictor y b) Corrector.

El método de Euler, la pendiente al principio de un intervalo es

$$y_i' = f(x_i y_i)$$

Se usa para extrapolar linealmente a y_{i+1}:

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

En el método estándar de Euler se pararía en este punto. Sin embargo en el método de Heun, la y_{i+1}^{0} no es la respuesta final si no una predicción intermedia. Esto se debe a que se ha distinguido a esta con el superíndice 0. La ecuación de y_{i+1}^{0} se llama ecuación predoctora. Proporciona una aproximación de y_{i+1} que permite el cálculo de una pendiente aproximada al final del intervalo:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})$$

Por lo tanto, se pueden combinar las dos pendientes y obtener una pendiente promedio sobre el intervalo:

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2}$$

Esta pendiente promedio se usa para extrapolar linealmente de y_i a y_{i+1} usando el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2} h$$

Que se llama una ecuación correctora.

El método de Heun es un esquema predictor-corrector. Se puede expresar concisamente como:

$$\textit{Predictor} \qquad y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$\textit{Corrector} \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2} h$$

Nótese que debido a que la ecuación del corrector tiene y_{i+1} en ambos lados del signo igual, esta puede aplicarse para "corregir" en un esquema iterativo. Esto es, se puede usar una aproximación anterior varias veces para proporcionar una aproximación mejorada de y_{i+1}. Se debe entender que este proceso no necesariamente converge a la respuesta correcta sino converger a una aproximación con un error de truncamiento finito.

El error aproximado esta dado por

$$|E_a| = \left| \frac{\textit{Aproximación actual} - \textit{Aproximación anterior}}{\textit{Aproximación actual}} \right| \times 100\%$$

Ejemplo

Utilizar el método de Heun para resolver (Integrar) numéricamente la ecuación diferencial $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$ desde $x = 0$ a $x = 4$ con tamaño de paso 1. La condición inicial en $(x, y) = (0,2)$.

Donde la solución verdadera es:

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8x} - e^{-0.5x}\right) + 2e^{-0.5x}$$

Resolviendo usando Heun

i	x_i	y_v	y_i	$f(x_i, y_i)$	y_{i+1}^0	$f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$	y_{i+1}	$\lvert E_v \rvert$
0	0	2.00000	2.00000	3.00000	5.00000	6.40216	6.70108	0.00
1	1.0	6.19463	6.70108	5.55162	12.25270	13.68578	16.31978	8.18
2	2.0	14.84392	16.31978	11.65224	27.97202	30.10670	37.19925	9.94
3	3.0	33.67717	37.19925	25.49308	62.69233	66.78396	83.33777	10.46
4	4.0	75.33896	83.33777					10.62

La pendiente $f(x_i, y_i)$

$$f(0,2) = y' = 4e^{0.8x} - 0.5y = 4e^{0.8\times 0} - 0.5\times 2 = 3$$

Estimando el predictor y_{i+1}^0 $\qquad y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h = 2 + 3\times 1 = 5$

Estimando la pendiente $f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$

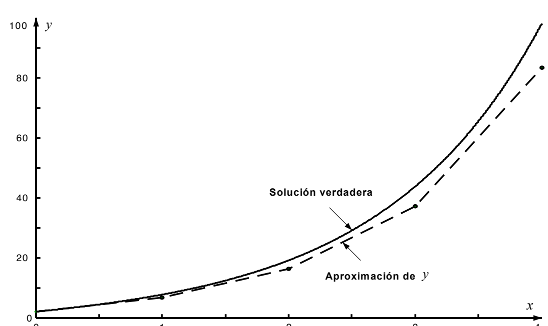
$$f(1,5) = 4e^{0.8x} - 0.5y = 4e^{0.8\times 1} - 0.5\times 5 = 6.40216$$

Obteniendo al corrector

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h = 2 + \frac{3 + 6.40216}{2}\times 1 = 6.70108$$

Obteniendo le error verdadero $\qquad \lvert E_v \rvert = \left| \frac{6.19463 - 6.70108}{6.19463} \right| \times 100 = 8.18\%$

Este resultado proporciona un error relativo porcentual de 8.18%, el cual comparado con el método de Euler, es más pequeño aun cuando solo se uso un corrector.



Gráfica de comparación del valor verdadero con respecto a la aproximación

Métodos de Runge-Kutta.

Los métodos de Runge-Kutta logran la exactitud del procedimiento de las series de Taylor sin requerir el uso de derivadas superiores. Existen diversas variantes, pero todas tienen la siguiente forma:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

Donde $\phi(x_i, y_i, h)$ es conocida como la función incremento, la cual puede interpretarse como una pendiente representativa en un intervalo. Esta función se escribe de forma general como:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

Donde las a son constantes y las k son:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

Obsérvese que las k son las relaciones de recurrencia; esto indica que k_1 aparece en la ecuación para k_2, y k_2 aparece en la ecuación para k_3, etc.

Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

La versión de segundo orden para $y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$ es:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h$$

Donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Los valores para a_1, a_2, p_1 y q_{11} son evaluados al igualar el termino de segundo orden de $y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h$ con la expansión de la serie de Taylor. Para desarrollar esto se obtienen tres ecuaciones con cuatro constantes desconocidas. Dichas ecuaciones son:

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

Debido a que se tienen cuatro incógnitas y tres ecuaciones, se propone el valor de una de estas incógnitas para determinar las demás. Por ejemplo, si se propone un valor para a_2, se obtiene:

$$a_1 = 1 - a_2 \text{ y } p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

Debido a que se puede elegir un número infinito de valores para a_2, existen también un número infinito de métodos o ecuaciones de Runge-Kutta de 2do. Orden. Las variantes más comunes son: Método de Heun de un solo corrector, Método del Punto Medio y Método de Ralston, los cuales se describen a continuación.

Método de Heun de un solo corrector $a_2 = \frac{1}{2}$

Si se supone que $a_2 = \frac{1}{2}$, entonces $a_1 = \frac{1}{2}$ y $p_1 = q_{11} = 1$. Estos parámetros sustituidos en $y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$ da

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \right) h$$

Donde

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$

Obsérvese que k_1 es la pendiente al inicio del intervalo y k_2 es la del final.

Método de punto medio $a_2 = 1$

Si se supone que $a_2 = 1$, entonces $a_1 = 0$ y $p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$. Estos parámetros sustituidos en $y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$ da:

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

Donde

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_1 h)$

Método de Ralston $a_2 = \frac{2}{3}$

Ralston y Rabinowitz determinaron que al seleccionar $a_2 = \frac{2}{3}$ se obtiene un límite mínimo sobre el error de truncamiento para los algoritmos de Runge-Kutta de segundo orden. Para esta versión, $a_1 = \frac{1}{3}$ y $p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$ lo cual da:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2 \right) h$$

Donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{3}{4}h, y_i + \tfrac{3}{4}k_1 h)$$

Métodos de Runge-Kutta de tercer orden.

Se puede llevar una derivación análoga a la del método de segundo orden, para $n = 3$. El resultado de esta derivación es de seis ecuaciones con ocho incógnitas para determinar los parámetros restantes. Una versión común que resulta es

$$y_{i+1} = y_i + \left[\tfrac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3 \right)\right] h$$

Donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden.

Los Métodos de Runge-Kutta más populares son los de cuarto orden. Como sucede con los métodos de segundo orden. Existe un número infinito de versiones. Se presentan las dos versiones mas comunes de este método la primera versión se basa en la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ y comúnmente es llamada método clásico de Runge-Kutta como se describe continuación.

$$y_{i+1} = y_i + \left[\tfrac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \right)\right] h$$

Donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2} h, y_i + \tfrac{1}{2} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2} h, y_i + \tfrac{1}{2} k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

La segunda se basa en la regla de Simpson $\frac{3}{8}$ y se escribe así

$$y_{i+1} = y_i + \left[\tfrac{1}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4 \right)\right] h$$

Donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{3} h, y_i + \tfrac{1}{3} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{3} h, y_i + \tfrac{1}{3} k_1 h + \tfrac{1}{3} k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_1 h - k_2 h)$$

Método de Runge-Kutta de orden superior.

Donde se requiera mayor exactitud, se recomienda el método de Runge-Kutta de quinto orden, Butcher

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\tfrac{1}{90}\left(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right)\right]$$

Donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{4}h, y_i + \tfrac{1}{4}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{4}h, y_i + \tfrac{1}{8}hk_1 + \tfrac{1}{8}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i - \tfrac{1}{2}hk_2 + hk_3)$$

$$k_5 = f(x_i + \tfrac{3}{4}h, y_i + \tfrac{3}{16}hk_1 + \tfrac{9}{16}hk_4)$$

$$k_6 = f(x_i + h, y_i - \tfrac{3}{7}hk_1 + \tfrac{2}{7}hk_2 + \tfrac{12}{7}hk_3 - \tfrac{12}{7}hk_4 + \tfrac{8}{7}hk_5)$$

Se pueden disponer de formulas de Runge-Kutta de orden superior, tales como el método de Butcher, pero, en general, la ganancia obtenida en exactitud por métodos de orden superior al cuarto orden se contrapone con la complejidad y esfuerzo de cálculo.

Ejemplo

Utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden clásico para resolver (Integrar) numéricamente la ecuación diferencial $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$ desde $x = 0$ a $x = 4$ con tamaño de paso 1. La condición inicial en $(x, y) = (0,2)$.

Donde la solución verdadera es:

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8x} - e^{-0.5x}\right) + 2e^{-0.5x}$$

i	x_i	y_i	V_v	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}	$\lvert E_v \rvert$
0	0	2.00000	2.00000	3.00000	4.21730	3.91297	5.94568	6.20104	0.00
1	1.0	6.20104	6.19463	5.80165	8.72954	7.99756	12.71283	14.86248	0.10
2	2.0	14.86248	14.84392	12.38089	19.02976	17.36754	27.97769	33.72135	0.13
3	3.0	33.72135	33.67717	27.23203	42.10991	38.39044	62.07423	75.43917	0.13
4	4.0	75.43917	75.33896						0.13

Utilizando las ecuaciones de Runge-Kutta clásico de cuarto orden se calculan las k_n

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,2) = 4e^{0.8\times 0} - 0.5\times 2 = 3$$

$$k_2 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1\, h) = f(0.5,3.5) = 4e^{0.8\times 0.5} - 0.5\times 3.5 = 4.21730$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_2\, h) = f(0.5,4.10865) = 4e^{0.8\times 0.5} - 0.5\times 4.10865 = 3.91297$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3\, h) = f(1,5.91297) = 4e^{0.8\times 1} - 0.5\times 5.91297 = 5.94568$$

Sustituyendo las k_n obtenemos la siguiente aproximación

$$y_{i+1} = y_i + \left[\tfrac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\right]h = 2 + \left[\tfrac{1}{6}\left(3 + 2\times 4.21730 + 2\times 3.91297 + 5.94568\right)\right]\times 1 = 6.20104$$

Obteniendo le error verdadero

$$\lvert E_v \rvert = \left|\frac{6.19463 - 6.20104}{6.19463}\right|\times 100 = 0.10\%$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Los procedimientos numéricos vistos en esta unidad solo se aplicaron a ecuaciones de primer orden $dy/dx = f(x,y)$, sujeta a la condición inicial $y(x_0) = y_0$. En este apartado se aplicaran para ordenes superiores, por ejemplo, para aproximar una solución de una ecuación diferencial de segundo orden, se rescribe la ecuación de tal manera que se despeje la derivada de mayor orden para que tenga la forma siguiente en el caso de una ecuación diferencial de segundo orden tenemos que.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y + g(x)$$

Donde

y es la variable dependiente

x es la variable independiente

$a_i(x)$ son las coeficientes de la ecuación diferencial

$g(x)$ es el coeficiente independiente la ecuación diferencial

Se puede escribir de forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} g(x)$$

Para una ecuación diferencial de tercer orden

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y + g(x)$$

Escribiéndola en forma matricial

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) & a_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g(x)$$

Por ejemplo escriba de manera matricial la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$y''+xy'+y=0$$

Despejando la derivada de mayor orden tenemos

$$y''=-xy'-y$$

Escribiéndola de manera matricial

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 0$$

Como $g(x)=0$ la ecuación a resolver es

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

Para una ecuación diferencial de tercer orden

$$x^3y'''+5x^2y''+7xy'+8y=1$$

Despejando la derivada de mayor orden tenemos

$$y'''=1-5x^{-1}y''-7x^{-2}y'-8x^{-3}y$$

Escribiéndola de manera matricial

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8x^{-3} & -7x^{-2} & -5x^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1$$

Como $g(x)=1$ la ecuación a resolver es

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8x^{-3} & -7x^{-2} & -5x^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Utilizar el método de Runge-Kutta de segundo orden (Ralston) para resolver (Integrar) numéricamente la ecuación diferencial se segundo orden $y''+5y'+4y=0$ desde $x=0$ a $x=1$ con tamaño de paso 0.25. la condición inicial en $y(0)=1$ y $y'(0)=0$ Donde la solución verdadera es:

$$y=\tfrac{4}{3}e^{-x}-\tfrac{1}{3}e^{-4x}$$

Despejando la derivada de mayor orden podemos rescribir la ecuación diferencial de la siguiente manera

$$y''=-5y'-4y$$

Escribiéndola en forma matricial

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\times 0$$

Como no existe el término independiente

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

i	x_i	y_i	y'_i	k_1	k'_1	k_2	k'_2	v_v	$\lvert E_a \rvert$
0	0.00	1.0000	0.0000	0.0000	-4.0000	-0.7500	-0.2500	1.0000	0.00
1	0.25	0.8750	-0.3750	-0.3750	-1.6250	-0.6797	0.1797	0.9158	4.66
2	0.50	0.7305	-0.4805	-0.4805	-0.5195	-0.5779	0.3279	0.7636	4.54
3	0.75	0.5941	-0.4691	-0.4691	-0.0309	-0.4749	0.3499	0.6132	3.22
4	1.00	0.4759	-0.4134					0.4844	1.79

Dado que $f(x_i,y_i)=\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ donde $\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$son las condiciones iniciales $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

calculando k_1 y k_2

$$k_1 = f(x_i,y_i) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = f(x_i+\tfrac{3}{4}h, y_i+\tfrac{3}{4}k_1\,h) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\tfrac{3}{4}\times 0.25, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\tfrac{3}{4}\times\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}\times 0.25\right) = f\left(\begin{bmatrix} 0.1875 \\ 0.1875 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ -0.75 \end{bmatrix}\right)$$

$$k_2 = f\left(\begin{bmatrix} 0.1875 \\ 0.1875 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ -0.75 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 \\ -0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

Calculando y_1

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2 \right)h = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\times\begin{bmatrix}-0.75\\-0.25\end{bmatrix}\right)\times 0.25 = \begin{bmatrix}0.8750\\-0.3750\end{bmatrix}$$

Realizando otra iteración tenemos que k_1 y k_2

$$k_1 = f(x_i, y_i) = f\left(\begin{bmatrix}0.25\\0.25\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.8750\\-0.3750\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\-4 & -5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.8750\\-0.3750\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.3750\\-1.6250\end{bmatrix}$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{3}{4}h, y_i + \tfrac{3}{4}k_1\, h) = f\left(\begin{bmatrix}0.25\\0.25\end{bmatrix} + \tfrac{3}{4}\times 0.25, \begin{bmatrix}0.8750\\-0.3750\end{bmatrix} + \tfrac{3}{4}\times\begin{bmatrix}-0.3750\\-1.6250\end{bmatrix}\times 0.25\right) = f\left(\begin{bmatrix}0.4375\\0.4375\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.8047\\-0.6797\end{bmatrix}\right)$$

$$k_2 = f\left(\begin{bmatrix}0.4375\\0.4375\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0.8047\\-0.6797\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\-4 & -5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.8047\\-0.6797\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.6797\\0.1797\end{bmatrix}$$

Calculando y_2

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2 \right)h = \begin{bmatrix}0.8750\\-0.3750\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\times\begin{bmatrix}-0.3750\\-1.6250\end{bmatrix} + \frac{2}{3}\times\begin{bmatrix}-0.6797\\0.1797\end{bmatrix}\right)\times 0.25 = \begin{bmatrix}0.7305\\-0.4805\end{bmatrix}$$

En la siguiente figura se observa los resultados graficados