Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Unidad III

Solución numérica de sistemas de ecuaciones

Una matriz consiste de un arreglo rectangular de elementos representado por un solo símbolo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

A es de *n* renglones por *m* columnas. Su dimensión es de $n \times m$ donde $A_{n\times m}$

Si $n = 1$,se le conoce como **vector renglón;** Si $m = 1$,se le conoce como **vector columna**

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Si $m = n$ se le llama **matriz cuadrada.**

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

En este caso la dimensión es: $Dim[A] = 4 \times 4$

A los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} y en general a_{ii} se les conoce como diagonal principal.

Tipos de matrices cuadradas

Matriz simétrica es aquella donde $a_{ij} = a_{ji} \; \forall \; i, j$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

La matriz diagonal es aquella donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz identidad es aquella cuyos elementos de la diagonal principal son 1 y los demás 0.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz triangular superior es aquella en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz triangular inferior es aquella en la que todos los elementos por encima de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz banda, tribanda o tridiagonal La matriz banda tiene todos los elementos igual a 0 excepto en una banda centrada sobre la diagonal principal.

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

Dos matrices de $n \times m$ son iguales si y solo si cada elemento se encuentra en la segunda matriz $A = B$ Si $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall$ i, j .

Suma de matrices

$$C = A + B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \cdots, n \\ j = 1, 2, 3, \cdots, m \end{cases}$$

Resta de matrices

$$C = A - B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \text{para} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \cdots, n \\ j = 1, 2, 3, \cdots, m \end{cases}$$

La suma y la resta de matrices son conmutativas y asociativas $A + B = B + A$:

$E\text{-}F = \text{-}F + E$

Multiplicación

Multiplicación por un escalar

$$D = gA = \begin{bmatrix} ga_{11} & ga_{21} & \cdots & ga_{1m} \\ ga_{21} & ga_{22} & \cdots & ga_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ga_{n1} & ga_{n2} & \cdots & ga_{nm} \end{bmatrix}$$

Multiplicación de dos matrices

La multiplicación de dos matrices se puede realizar si y solo si la primera matriz tiene el mismo número de columnas que el número de renglones de la segunda matriz. El producto de dos matrices se presenta como: $C = AB$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} b_{kj} \qquad (A_{n\times m})(B_{m\times l}) = C_{n\times l}$$

La multiplicación es asociativa si se cumple las condiciones $(AB)C = A(BC)$

La multiplicación es distributiva si $A(B+C) = AB + AC$

Aunque la multiplicación de matrices es posible la división de matrices no esta definida. Sin embargo, si la matriz A es cuadrada y no singular (Determinante diferente de cero) existe una matriz A^{-1} llamada inversa de la matriz para la cual $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

La multiplicación de una matriz por la inversa es análoga a la división en el sentido de que un número dividido por si mismo es igual a 1.

Para matrices cuadradas de la inversa esta dada de la siguiente forma.

Para matrices de 2×2

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Para matrices de 3×3

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Matriz transpuesta

Si los renglones y las columnas de una matriz A se intercambian, entonces la matriz resultante de $n \times m$ se conoce como la transpuesta de A y se denota A^T

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \text{ entonces } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad a_{ij} = a_{ji}$$

La traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal principal.

$$tr[A] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Determinante de una matriz

Para matrices de 2×2

$$Det[A] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para matrices de 3×3

$$Det[A] = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -\left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right) \end{matrix}$$

Regla de Cramer

La regla de Cramer permite resolver sistemas lineales de ecuaciones de n ecuaciones, con n incógnitas. Si $Ax = b$ es un sistema de ecuaciones. (A es la matriz de coeficientes del sistema, x es el vector columna de las incógnitas y b es el vector columna los términos independientes). Entonces la solución al sistema se presenta así:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

Por ejemplo si se tiene un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

escribiendo el sistema lineal en forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Obtenemos el determinante de los coeficientes del sistema, luego sustituimos en cada columna la matriz de resultados del sistema y se obtiene su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ejemplo

Utilizar la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema lineal.

$$\begin{array}{ccccccc} 0.3\,x_1 & + & 0.5\,x_2 & + & x_3 & = & -0.01 \\ 0.5\,x_1 & + & x_2 & + & 1.9\,x_3 & = & 0.67 \\ 0.1\,x_1 & + & 0.3\,x_2 & + & 0.5\,x_3 & = & -0.44 \end{array}$$

Escribiendo el sistema lineal en forma matricial se tiene que

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.67 \\ -0.44 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Obteniendo el determínate de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0.3(1\times 0.5 - 0.3\times 1.9) - 0.5(0.5\times 0.5 - 0.3\times 1) + 0.1(0.5\times 1.9 - 1\times 1) = -0.001$$

Sustituyendo el vector columna b en la primera columna de A_j se obtiene x_j

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0.01 & 0.5 & 1 \\ 0.67 & 1 & 1.9 \\ -0.44 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.001} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.3 & -0.01 & 1 \\ 0.5 & 0.67 & 1.9 \\ 0.1 & -0.44 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.001} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.3 & 0.5 & -0.01 \\ 0.5 & 1 & 0.67 \\ 0.1 & 0.3 & -0.44 \end{vmatrix}}{-0.001}$$

$$x_1 = \frac{-0.01(1\times 0.5 - 1.9\times 0.5) - 0.67(0.5\times 0.5 - 0.3\times 1) + (-0.44)(0.5\times 1.9 - 1\times 1)}{-0.001}$$

$$= \frac{0.0562}{-0.001} = -56.2$$

$$x_2 = \frac{0.3(0.67\times 0.5 - 1.9\times -0.44) - 0.5(-0.01\times 0.5 - (-0.44)\times 1) + 0.1((-0.01)\times 1.9 - 0.67\times 1)}{-0.001}$$

$$= \frac{0.0649}{-0.001} = -64.9$$

$$x_3 = \frac{0.3(1\times(-0.44) - 03\times 0.67) - 0.5(0.5\times(-0.44) - 0.3\times(-0.01)) + 0.1(0.5\times 0.67 - 1\times(-0.01))}{-0.001}$$

$$= \frac{-0.0493}{-0.001} = 49.3$$

Por lo tanto la solución del sistema es $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -56.2 \\ -64.9 \\ 49.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.67 \\ -0.44 \end{bmatrix}$

Eliminación de Gauss o Gaussiana Simple

Este método consiste en expresar el sistema como una matriz aumentada de la forma

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

La idea del método es llevar el sistema a la forma triangular superior y de allí despejar una variable a la vez partiendo de la última. Él último paso se conoce como sustitución en reversa. Para lograr llevar el sistema a la forma triangular superior, se emplean las operaciones elementales de matrices como son el intercambio de renglones, división entre un escalar a cada renglón, así como suma y resta entre renglones.

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss

$$\begin{array}{ccccccccc} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15 \end{array}$$

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 11 & -1 & 3 & 25 \\ 2 & -1 & 10 & -1 & -11 \\ 0 & 3 & -1 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

Para simplificar el sistema se avanzara por la diagonal principal. Los elementos de la diagonal principal se denominaran pivote.

Primero localicemos en la primera columna el primer elemento que sea $\neq 0$ y lo llevaremos al primer renglón. En este caso se tiene que el pivote es 10. Como no es 0, no hacemos nada. En caso de ser necesario habríamos intercambiado 2 renglones de la matriz. A continuación pasaremos a hacer 0 los elementos que están debajo del pivote. Para ello sumaremos múltiplos apropiados del renglón pivote a cada renglón de tal forma que los elementos debajo del pivote sean 0.

Avancemos por la diagonal principal al segundo renglón. Este será ahora el renglón pivote.

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \to R_2 - R_1(-1)/10 \\ R_3 \to R_3 - R_1(2)/10 \\ R_4 \to R_4 - R_1(0)/10 \end{array}\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 10.9 & -0.8 & 3 & 25.6 \\ 0 & -0.8 & 9.6 & -1 & -12.2 \\ 0 & 3 & -1 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

Busquemos el primer elemento que sea $\neq 0$ para que sea el pivote, el pivote es 10.9. Eliminado los elementos debajo del pivote tenemos

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3 \to R_3 - R_2(-0.8)/10.9 \\ R_4 \to R_4 - R_2(3)/10.9 \end{array}\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 10.9 & -0.8 & 3 & 25.6 \\ 0 & 0 & 9.541284 & -0.779816 & -10.321100 \\ 0 & 0 & -0.779816 & 7.174311 & 7.954128 \end{bmatrix}$$

Llevando el elemento $\neq 0$ al renglón pivote, el pivote es 9.541, haciendo 0 elementos abajo del elemento pivote

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ R_4 \to R_4 - R_3(-0.779816)/9.541284 \end{array}\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 10.9 & -0.8 & 3 & 25.6 \\ 0 & 0 & 9.541284 & -0.779816 & -10.321100 \\ 0 & 0 & 0 & 7.110576 & 7.110576 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos la matriz A en la forma triangular superior. Continuación usamos la sustitución en reversa.

$$\begin{array}{ccccccccc} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ & & 10.9x_2 & - & 0.8x_3 & + & 3x_4 & = & 25.6 \\ & & & & 9.541284x_3 & - & 0.779816x_4 & = & -10.321100 \\ & & & & & & 7.110576x_4 & = & 7.110576 \end{array}$$

Por lo tanto tenemos que la solución es:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación de Gauss Jordán

Jordán propuso una modificación al procedimiento anterior. En vez de llevar el sistema a la forma triangular superior y de allí usar la sustitución en reversa, él pensó que seria más fácil continuar el procedimiento de eliminación de elementos, es decir, él propuso eliminar los elementos tanto arriba como abajo del pivote hasta llegar a la matriz identidad. De esta manera la solución del sistema se puede leer directamente de la última columna de la matriz aumentada.

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordán

$$\begin{array}{ccccccccc} 10x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 6 \\ -x_1 & + & 11x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 25 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \\ & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & = & 15 \end{array}$$

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 11 & -1 & 3 & 25 \\ 2 & -1 & 10 & -1 & -11 \\ 0 & 3 & -1 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

Buscando el primer pivote que no sea 0 y llevándolo al renglón pivote, por lo tanto el pivote es 10. Dividiendo entre el pivote el renglón pivote y eliminando los elemento arriba y abajo del renglón pivote

$$\begin{array}{c} R_1 \to R_1/10 \\ R_2 \to R_2 - R_1(-1) \\ R_3 \to R_3 - R_1(2) \\ R_4 \to R_4 - R_1(0) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0.2 & 0 & 0.6 \\ 0 & 10.9 & -0.8 & 3 & 25.6 \\ 0 & -0.8 & 9.6 & -1 & -12.2 \\ 0 & 3 & -1 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

Avanzando por la diagonal principal al segundo renglón. Buscando el primer elemento no sea 0 y llevándolo a la diagonal principal tenemos que el pivote es 10.9. Dividiendo entre el pivote y eliminando los elemento arriba y abajo del pivote

$$\begin{array}{r} R_1 \to R_1 - R_2(-0.1) \\ R_2 \to R_2/10.9 \\ R_3 \to R_3 - R_2(-0.8) \\ R_4 \to R_4 - R_2(3) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1927 & 2.7523E-2 & 0.8349 \\ 0 & 1 & -73.3944E-3 & 0.2752 & 2.3486 \\ 0 & 0 & 9.541 & -0.7798 & -10.32 \\ 0 & 0 & -0.7798 & 7.714 & 7.954 \end{bmatrix}$$

Pasando al tercer renglón. Llevando el elemento $\neq 0$ al renglón pivote, el pivote es 9.541y dividiendo entre el elemento pivote y haciendo 0 elementos arriba y abajo del elemento pivote

$$\begin{array}{r} R_1 \to R_1 - R_3(0.1927) \\ R_2 \to R_2 - R_3(-73.3944E-3) \\ R_3 \to R_3/9541 \\ R_4 \to R_4 - R_3(-0.7798) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4.3269E-2 & 1.043 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2692 & 2.269 \\ 0 & 0 & 1 & -8.1937E-2 & -10.82 \\ 0 & 0 & 0 & 7.111 & 7.111 \end{bmatrix}$$

Pasemos al cuarto renglón. Llevando el elemento $\neq 0$ al renglón pivote, el pivote es 7.111. Dividiendo entre el elemento pivote y haciendo 0 elementos arriba y abajo del elemento pivote

$$\begin{array}{r} R_1 \to R_1 - R_4(4.3269E-2) \\ R_2 \to R_2 - R_4(0.2692) \\ R_3 \to R_3 - R_4(-8.1937E-2) \\ R_4 \to R_4/7.111 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por simple inspección la solución es:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Inversión de matrices

Este método es más teórico. Consiste en expresar el sistema como una ecuación matricial de la forma $Ax = b$ y despejar el vector columna x. Dado que no esta definida la división de matrices se usa la matriz inversa A^{-1}. Multiplicando por la matriz inversa ambos lados se tiene $A^{-1}Ax = A^{-1}b$ de donde $\mathrm{I}x = A^{-1}b$ y finalmente $x = A^{-1}b$. El problema se reduce a hallar la matriz inversa para multiplicarla por el vector columna b y así hallar x.

Para hallar la matriz inversa se puede utilizar el siguiente procedimiento.

Se coloca la matriz A junto a una matriz identidad I del mismo tamaño, es decir,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Se aplica la eliminación de Gauss Jordán a la matriz A, las operaciones que se le hagan a la matriz A, también se le aplican a I. La matriz A se convierte en I. Se puede demostrar que matriz I se convierte en A^{-1}.

Una vez hallada A^{-1} se procede a multiplicarla por b. $x = A^{-1}b$

Normas de Vector y Matrices

Norma 1

$$\| V_i \| = \sum_{i=1}^{n} | a_i |$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$\| V_1 \| = |3| + |-0.11| + |-0.2| = 33$

$\| V_2 \| = |0.1| + |7| + |-0.3| = 7.4$

$\| V_3 \| = |0.3| + |-0.2| + |10| = 10.5$

Norma 2

$$\| V_i \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}}$$

$\| V_1 \|_2 = \sqrt{(3)^2 + (-0.1)^2 + (-0.2)^2} = 3.008321$

$\| V_1 \|_2 = \sqrt{(0.1)^2 + (7)^2 + (-0.3)^2} = 7.007139$

$\| V_1 \|_2 = \sqrt{(0.3)^2 + (-0.2)^2 + (10)^2} = 10.00649$

Norma infinito

$$\| V_i \|_\infty = \max\left\{ | a_i |, i = 1,2,3,\ldots,n \right\}$$

$\| V_1 \|_\infty = 3$

$\| V_2 \|_\infty = 7$

$\| V_3 \|_\infty = 10$

Número de condición

Sea A una matriz no singular (determinante diferente de cero) de $n \times n$ y E otra matriz no singular de $n \times n$ muy pequeña (de valores muy pequeños).

¿Qué tan pequeña debe de ser E para que la matriz perturbada $A + E$ sea también no singular (que tenga inversa), y que tanto difiere A^{-1} de $(A + E)^{-1}$?

La inversa calculada de A es muy común que se encuentre muy cerca de la matriz ligeramente perturbada $A + E$.

Sin embargo, este resultado no garantiza la precisión de la inversa A^{-1} y $(A + E)^{-1}$ pueden diferir significativamente, entonces se dice que dicha matriz $(A + E)^{-1}$ esta mal condicionada a la inversión. Existe un número de condición que mide el grado de condicionamiento de una matriz y esta dado por:

$$cond[A] = \| A \|_\infty \times \| A^{-1} \|_\infty$$

Si el número de condición es grande, entonces A^{-1} es sensible a pequeñas perturbaciones, y por lo tanto la inversa calculada se encuentra mal condicionada

Para calcular el número de condición de la matriz debemos de normalizar la matriz para que su mayor elemento por vector sea 1

Si $cond[A]$ es cercano a 1, la matriz esta bien condicionada.

Ejemplo

Encuentre el número de condición de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Se normaliza la matriz para que el elemento máximo sea 1en la primer columna

Normalizando A se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \sum = 1.83333 \\ \sum = 2.16667 \\ \sum = 2.35000 \end{array}$$

Obteniendo la norma infinito $\| A \|_{\infty} = Max \left\{ \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right\}$

$\| A \|_{\infty} = Max\{1.83333, 2.16667, 2.35000\}$ $\qquad$ $\| A \|_{\infty} = 2.35000$

La inversa de la matriz normalizada A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -36 & 96 & -60 \\ 30 & -90 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -36 & 96 & -60 \\ 30 & -90 & 60 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \sum = 37.0 \\ \sum = 192 \\ \sum = 180 \end{array}$$

$$\| A \|_{\infty} = Max\{37, 192, 180\} = 192$$

Obteniendo el número de condición tenemos que:

$$Cond[A] = \| A \|_{\infty} \times \| A^{-1} \|_{\infty}$$

$$Cond[A] = (2.35) \times (192) = 451.2$$

Con lo cual se observa que la matriz A esta mal condicionada a pequeñas perturbaciones

Mínimos Cuadrados

Si se tiene un sistema sobredeterminado del estilo

$$A_{n\times m}\, x_{m\times n} = b_{n\times m}$$

Si $n > m$ por lo tanto existe m error dado por

$$e = b - A\hat{x}$$

donde $\hat{x}$ es el vector de soluciones estimado

El error

$$E = \sum_{i=1}^{n} \| e_i \|^2 = e^T e$$

Donde E es un escalar.

El vector de soluciones estimado es

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Donde $(A^T A)^{-1} A^T$ es llamada pseudoinversa Monroe Penrose

El error mínimo se encuentra

$$E_{\min} = e^T e = b^T b - b^T A\hat{x}$$

Ejemplo

Realice un programa que encuentre el estimado de $\hat{x}$, así mismo que proporcione el error mínimo $E_{\min}$ para el siguiente sistema sobredeterminado.

$$\begin{array}{lllllll} a & - & 3b & + & 9c & = & 18 \\ a & - & 2b & + & 4c & = & 10 \\ a & & & & & = & 2 \\ a & + & 3b & + & 9c & = & 2 \\ a & + & 4b & + & 16c & = & 5 \end{array}$$

Método de Jacobi.

Esta técnica muestra cierta similitud con el método de iteración de punto fijo, ya que consiste en despejar una de las incógnitas de una ecuación dejándola en función de las otras. La manera más sencilla es despejar a x_1 de la primer ecuación, x_2 de la segunda ecuación, x_i de la i-ésima ecuación, hasta x_n de la n-ésima ecuación. Es necesario por razones obvias que todos los elementos de la diagonal principal de la matriz de coeficientes del sistema lineal, sean diferentes de cero.

Sea el sistema lineal:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Al realizar los despejes propuestos se tiene x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda ecuación, etc. se tiene:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n\right)}{a_{11}} \\
x_2 &= \frac{b_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n\right)}{a_{22}} \\
x_3 &= \frac{b_3 - \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n\right)}{a_{33}} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{b_1 - \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \cdots + a_{1n-1}x_{n-1}\right)}{a_{nn}}
\end{aligned}$$

Para estimar la primera aproximación a la solución se debe partir de un vector inicial, el cual puede ser el vector $x^0 = 0$, o algún otro que se encuentre próximo al vector de solución x. En general, el vector de aproximación a la solución después de las iteraciones se puede calcular de la siguiente manera.

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$$

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Jacobi. Emplear el vector inicial de $x^0 = 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 6x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 17 \\ x_1 & - & 10x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -17 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & - & x_4 & = & 19 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & -14 \end{array}$$

Al despejar las incógnitas correspondientes se tiene.

$$x_1 = \frac{17-(-x_2-x_3+4x_4)}{6} \qquad x_2 = \frac{-17-(x_1+2x_3-x_4)}{-10}$$

$$x_3 = \frac{19-(3x_1-2x_2-x_4)}{8} \qquad x_4 = \frac{-14-(x_1+x_2+x_3)}{-5}$$

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$\lvert Ex_1 \rvert$	$\lvert Ex_2 \rvert$	$\lvert Ex_3 \rvert$	$\lvert Ex_4 \rvert$
0	0	0	0	0	-	-	-	-
1	2.833333	1.700000	2.375000	2.800000	100	100	100	100
2	1.645833	2.178333	2.087500	4.181667	72.151899	21.958684	13.772455	33.041052
3	0.756528	1.863917	2.825104	3.982333	117.550945	16.868601	26.108919	5.005441
4	0.959948	1.942440	3.055073	3.889110	21.190747	4.042524	7.527439	2.397042
5	1.073512	2.018098	2.986768	3.991492	10.578776	3.748981	2.286907	2.565018
6	1.006483	2.005556	2.975894	4.015676	6.659766	0.625399	0.365414	0.602230
7	0.986458	1.994260	3.000917	3.997587	2.030015	0.566434	0.833855	0.452505
8	1.000805	1.999071	3.003342	3.996327	1.433584	0.240665	0.080719	0.031519
9	1.002851	2.001116	2.999007	4.000643	0.203982	0.102221	0.144546	0.107896
10	0.999591	2.000022	2.999290	4.000595	0.326059	0.054703	0.009464	0.001219
11	0.999489	1.999758	3.000233	3.999781	0.010259	0.013216	0.031418	0.020349
12	1.000145	2.000017	3.000104	3.999896	0.065556	0.012983	0.004312	0.002879
13	1.000090	2.000046	2.999937	4.000053	0.005505	0.001409	0.005552	0.003930
14	0.999962	1.999991	2.999984	4.000014	0.012786	0.002727	0.001578	0.000967
15	0.999986	1.999992	3.000014	3.999987	0.002459	0.000028	0.000983	0.000675
16	1.000009	2.000003	3.000001	3.999998	0.002301	0.000553	0.000415	0.000273
17	1.000002	2.000001	2.999997	4.000003	0.000752	0.000064	0.000150	0.000108
18	0.999998	1.999999	3.000000	4.000000	0.000384	0.000104	0.000101	0.000067
19	1.000000	2.000000	3.000001	3.999999	0.000193	0.000024	0.000020	0.000014
20	1.000000	2.000000	3.000000	4.000000	0.000056	0.000018	0.000022	0.000015

Método de Gauss-Seidel.

Este método trabaja de manera similar al método de Jacobi, ya que realizan los mismos despejes. La diferencia consiste en que en el proceso iterativo, cada una de las aproximaciones de cada variable que se calcula se sustituye inmediatamente en el cálculo de la siguiente variable en esa misma iteración. De esta manera la convergencia es más rápida.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Seidel. Emplear el vector inicial de $x^0 = 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 6x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 17 \\ x_1 & - & 10x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -17 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 8x_3 & - & x_4 & = & 19 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & -14 \end{array}$$

Al despejar las incógnitas correspondientes se tiene.

$$x_1 = \frac{17-(-x_2-x_3+4x_4)}{6} \qquad x_2 = \frac{-17-(x_1+2x_3-x_4)}{-10}$$

$$x_3 = \frac{19-(3x_1-2x_2-x_4)}{8} \qquad x_4 = \frac{-14-(x_1+x_2+x_3)}{-5}$$

#	x_1	x_2	x_3	x_4	$\lvert Ex_1\rvert$	$\lvert Ex_2\rvert$	$\lvert Ex_3\rvert$	$\lvert Ex_4\rvert$
0	0	0	0	0	-	-	-	-
1	2.83333333	1.98333333	1.80833333	4.125	100	100	100	100
2	0.71527778	1.72069444	3.05256944	3.89770833	296.116505	15.263540	40.760288	5.831418
3	1.03040509	2.02378356	2.98175752	4.00718924	30.582857	14.976360	2.374838	2.732112
4	0.99613069	1.99524565	3.00116106	3.99850748	3.440754	1.430296	0.646534	0.217125
5	1.00039613	2.00042108	2.99977015	4.00011747	0.426375	0.258717	0.046367	0.040249
6	0.99995356	1.99993764	3.00001651	3.99998154	0.044260	0.024173	0.008212	0.003398
7	1.00000466	2.00000561	2.99999735	4.00000153	0.005111	0.003399	0.000639	0.000500
8	0.99999948	1.99999926	3.0000002	3.99999979	0.000519	0.000317	0.000095	0.000043
9	1.00000005	2.00000007	2.99999997	4.00000002	0.000058	0.000040	0.000008	0.000006
10	0.99999999	1.99999999	3	4	0.000006	0.000004	0.000001	0.000001
11	1	2	3	4	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000

Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergerán si en la matriz de coeficientes el valor absoluto de cada elemento de la diagonal principal es mayor que la suma de los valores absolutos de todos los demás electos de la misma fila y columna.

Entonces se asegura convergencia si:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n$$

Y

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n$$

Ejemplo

Aplicar el criterio de convergencia para los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 6 \\
x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & - & 4x_4 & = & 7 \\
5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & = & 30
\end{array}$$

Aplicando el criterio de convergencia se tiene.

$$\begin{array}{cccccccccl}
x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 6 & |1| > |6| + |-1| + |-1| = 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & - & 4x_4 & = & 7 & |-1| > |1| + |8| + |-4| = 13 \\
5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 & |-1| > |5| + |-1| + |-1| = 7 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & = & 30 & |6| > |1| + |1| + |1| = 3
\end{array}$$

Reacomodando y aplicando el criterio de convergencia.

$$\begin{array}{cccccccccl}
5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 & |5| > |1| + |-1| + |-1| = 3 \\
x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 6 & |6| > |1| + |-1| + |-1| = 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & - & 4x_4 & = & 7 & |8| > |1| + |-1| + |-4| = 6 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 6x_4 & = & 30 & |6| > |1| + |1| + |1| = 3
\end{array}$$