Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Unidad II

Solución numérica de ecuaciones de una sola variable.

Las soluciones de una ecuación $f(x)=0$, se llaman ceros o raíces de $f(x)$. En algunos casos las raíces pueden ser obtenidas con métodos directos como por ejemplo para una ecuación cuadrática se utiliza formula general. Aunque existen ecuaciones que no pueden se pueden resolver directamente, por ejemplo una función tan simple tal como $f(x)=e^{-x}-x$. Para estos casos, la única alternativa es una técnica de solución numérica

Aproximación Grafica

Un método simple para obtener una aproximación a la raíz de la ecuación $f(x)=0$, consiste en graficar la función y observar en donde cruza al eje x.

Este punto representa el valor de x para el cual $f(x)=0$ proporciona una aproximación de la raíz de la función $f(x)$.

Ejemplo

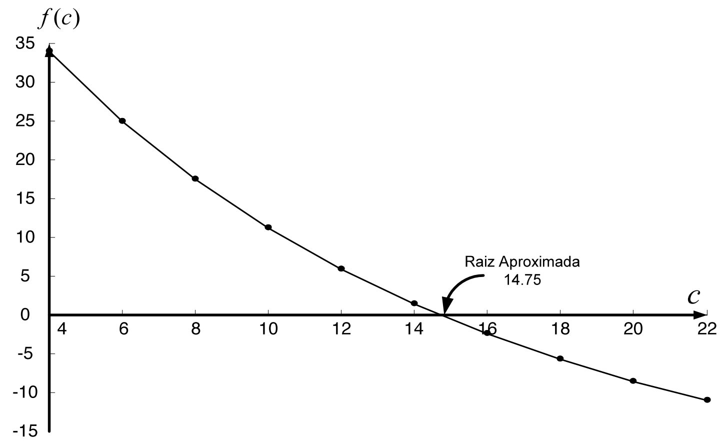
Usando la aproximación gráfica para obtener el coeficiente de razonamiento c, necesario para que un paracaidista de masa = 68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de 10 s, $g=9.81m/s^2$ donde la función que representa este echo esta dada por:

$$v(t)=\frac{gm}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

En este caso se rescribe la función de tal manera que sea igualada a cero, lo cual queda:

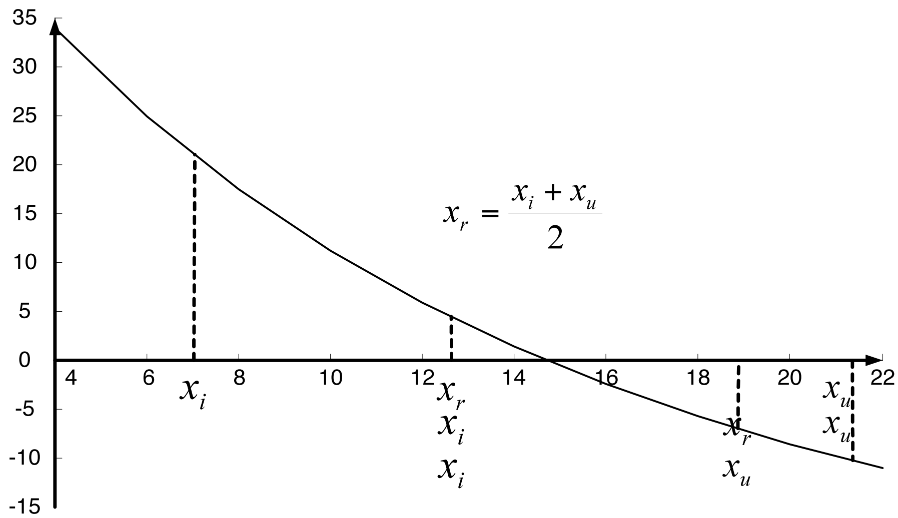
$$f(c) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v$$

c	$f(c)$
2	45.00718
4	34.19047
6	25.20892
8	17.71226
10	11.42152
12	6.11394
14	1.61112
16	-2.23026
18	-5.52565
20	-8.36838
22	-10.83416



Método de Bisección

Este método consiste en encerrar una raíz entre un intervalo en el cuál la función debe cruzar al eje horizontal, e ir dividiendo el internalo a la mitad hasta encontrar la mejor aproximación.



El algoritmo se describe como sigue:

1.- Elegir límites superior x_u e inferior x_i

2.- Obtener la nueva aproximación a la raíz $x_r = \frac{x_i + x_u}{2}$

3.- Si $f(x_i)f(x_r) < 0$, entonces $x_i = x_i$ y $x_u = x_r$

Si no

Si $f(x_u)f(x_r) < 0$, entonces $x_i = x_r$ y $x_u = x_u$

4.- Si $f(x_u)f(x_r) = 0$, la raíz es igual a x_r; termina el calculo

Ejemplo:

Resolviendo el ejemplo anterior utilizando el método de bisección con $x_i = 12$ y $x_u = 16$ se tiene:

$$f(c) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v$$

i	x_i	x_u	x_r	$f(x_i)$	$f(x_u)$	$f(x_r)$	$\lvert e_r \rvert$
1	12.0000000	16.0000000	14.0000000	6.1139431	-2.2302607	1.6111164	-
2	14.0000000	16.0000000	15.0000000	1.6111164	-2.2302607	-0.3844581	6.6666667
3	14.0000000	15.0000000	14.5000000	1.6111164	-0.3844581	0.5936984	3.4482759
4	14.5000000	15.0000000	14.7500000	0.5936984	-0.3844581	0.0998300	1.6949153
5	14.7500000	15.0000000	14.8750000	0.0998300	-0.3844581	-0.1434972	0.8403361
6	14.7500000	14.8750000	14.8125000	0.0998300	-0.1434972	-0.0221312	0.4219409
7	14.7500000	14.8125000	14.7812500	0.0998300	-0.0221312	0.0387748	0.2114165
8	14.7812500	14.8125000	14.7968750	0.0387748	-0.0221312	0.0083032	0.1055966
9	14.7968750	14.8125000	14.8046875	0.0083032	-0.0221312	-0.0069187	0.0527704

1^a iteración

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{12 + 16}{2} = 14$$

$$f(12) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 6.1139431$$

$$f(16) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -2.2302607$$

$$f(14) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 1.6111164$$

2^a iteración

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{14 + 16}{2} = 15$$

$$f(14) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 1.6111164$$

$$f(16) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -2.2302607$$

$$f(15) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.3844581$$

$$e_r = \left|\frac{15 - 14}{15}\right| * 100 = 6.6666667$$

3^a iteración

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{14 + 15}{2} = 14.5$$

$$f(14) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 1.6111164$$

$$f(15) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.3844581$$

$$f(14.5) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 0.5936984$$

$$e_r = \left|\frac{14.5 - 15}{14.5}\right| * 100 = 3.4482759$$

4^a iteración

$$x_r = \frac{x_i + x_u}{2} = \frac{14.5 + 15}{2} = 14.75$$

$$f(14.5) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 0.5936984$$

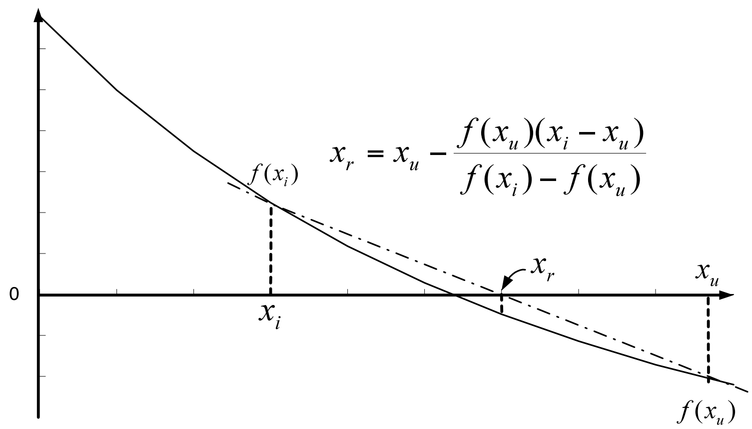
$$f(15) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.3844581$$

$$f(14.75) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 0.0998300$$

$$e_r = \left|\frac{14.75 - 14.5}{14.75}\right| * 100 = 1.6949153$$

Método de Falsa Posición

Un defecto del método de bisección es que al dividir el intervalo de x_i a x_u en mitades, no se considera la magnitud de $f(x_i)$ y de $f(x_u)$ .Por ejemplo, si $f(x_i)$ esta más cercano a 0 que $f(x_u)$, es lógico pensar que la raíz se encuentra más cerca de x_i que de x_u. El método de falsa posición aprovecha la visualización gráfica de unir $f(x_i)$ y $f(x_u)$ con una recta, donde la intersección de esta recta con el eje x representa una mejor estimación a la raíz.



De la gráfica se observan triángulos semejantes

$$\frac{f(x_i)}{x_r - x_i} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

de la ecuación anterior despejamos x_r y se obtiene:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_i - x_u)}{f(x_i) - f(x_u)}$$

El algoritmo es igual al del método de bisección, lo único que cambia es la ecuación para x_r

Ejemplo

Utilizando el método de la falsa posición para determinar la raíz de la ecuación del ejemplo anterior con $x_i = 12$ y $x_u = 16$ se tiene:

i	x_i	x_u	x_r	$f(x_i)$	$f(x_u)$	$f(x_r)$	$\lvert e_r \rvert$
1	12.0000000	16.0000000	14.9308695	6.1139431	-2.2302607	-0.2514869	-
2	12.0000000	14.9308695	14.8150760	6.1139431	-0.2514869	-0.0271452	0.7815922
3	12.0000000	14.8150760	14.8026327	6.1139431	-0.0271452	-0.0029159	0.0840618
4	12.0000000	14.8026327	14.8012966	6.1139431	-0.0029159	-0.0003131	0.0090264
5	12.0000000	14.8012966	14.8011532	6.1139431	-0.0003131	-0.0000336	0.0009691
6	12.0000000	14.8011532	14.8011378	6.1139431	-0.0000336	-0.0000036	0.0001040
7	12.0000000	14.8011378	14.8011361	6.1139431	-0.0000036	-0.0000004	0.0000112
8	12.0000000	14.8011361	14.8011360	6.1139431	-0.0000004	0.0000000	0.0000012
9	12.0000000	14.8011360	14.8011359	6.1139431	0.0000000	0.0000000	0.0000001
10	12.0000000	14.8011359	14.8011359	6.1139431	0.0000000	0.0000000	0.0000000

1^a iteración

$$f(12) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 6.1139$$

$$f(16) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -2.2302$$

$$x_r = 16 - \frac{(-2.2302)(12 - 16)}{(-2.2302) - (6.1139)} = 14.9308$$

$$f(14.9308) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.2514$$

2^a iteración

$$f(12) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 6.1139$$

$$f(14.9308) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.2514$$

$$x_r = 14.9308 - \frac{(-0.2514)(12 - 14.9308)}{(6.1139) - (-0.2514)} = 14.8150$$

$$f(14.8150) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.0271$$

$$e_r = \left|\frac{14.8150 - 14.9308}{14.8150}\right| * 100 = 0.7815$$

3^a iteración

$$f(12) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 6.1139$$

$$f(14.8150) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.0271$$

$$x_r = 14.8150 - \frac{(-0.0271)(12 - 14.8150)}{(6.1139) - (-0.0271)} = 14.8026$$

$$f(14.8026) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.0029$$

$$e_r = \left|\frac{14.8026 - 14.8150}{14.8026}\right| * 100 = 0.0840$$

4^a iteración

$$f(12) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = 6.1139$$

$$f(14.8026) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.0029$$

$$x_r = 14.8026 - \frac{(-0.0029)(12 - 14.8026)}{(6.1139) - (-0.0029)} = 14.8012$$

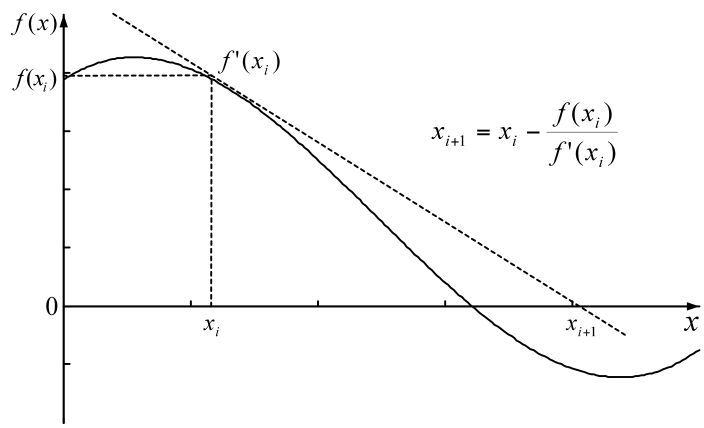
$$f(14.8012) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) - v = -0.0003$$

$$e_r = \left|\frac{14.8012 - 14.8026}{14.8012}\right| * 100 = 0.0090$$

Método de Newton-Raphson.

Los métodos de Bisección y Falsa posición son llamados métodos por intervalos en los cuales los valores iniciales deben encerrar a la raíz deseada. Los métodos siguientes son llamados métodos de intervalo abierto dado que las condiciones iniciales no necesariamente tienen que contener a la raíz.

Si el valor inicial de la raíz es x_i, entonces se puede trazar una tangente del punto $f(x_i)$; el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación de la raíz.



Si la pendiente en un punto dado le llamamos primera derivada de la función $f'(x)$ y la pendiente de una recta es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ podemos tener que:

$$f'(x) = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Despejando x_{i+1} tenemos la ecuación de Newton-Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Ejemplo:

Utilizar el método de Newton-Raphson para encontrar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$ empleando un valor inicial de $x_0 = 0$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert e_r \rvert$
0	0.0000000	1.0000000	-2.0000000	-
1	0.5000000	0.1065307	-1.6065307	100.0000000
2	0.5663110	0.0013045	-1.5676155	11.7092910
3	0.5671432	0.0000002	-1.5671434	0.1467287
4	0.5671433	0.0000000	-1.5671433	0.0000221
5	0.5671433	0.0000000	-1.5671433	0.0000000

Se tiene que $f(x) = e^{-x} - x$ y su derivada es $f'(x) = -e^{-x} - 1$

1^a iteración

$x_0 = 0$

$f(x_0) = e^{-x} - x = 1$

$f'(x_0) = -e^{-x} - 1 = -2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{-2} = 0.5$$

$$e_r = \left| \frac{0.5 - 0}{0.5} \right| * 100 = 100$$

2^a iteración

$x_1 = 0.5$

$f(x_1) = e^{-x} - x = 0.1065307$

$f'(x_1) = -e^{-x} - 1 = -1.6065307$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.5 - \frac{0.1065307}{-1.6065307}$$

$= 0.5663110$

$$e_r = \left| \frac{0.5663110 - 0.5}{0.5663110} \right| * 100$$

$= 11.7092910$

3^a iteración

$x_2 = 0.5663110$

$f(x_2) = e^{-x} - x = 0.0013045$

$f'(x_2) = -e^{-x} - 1 = -1.6065307$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.5663110 - \frac{0.0013045}{-1.5676155}$$

$= 0.5671432$

$$e_r = \left| \frac{0.5671432 - 0.5663110}{0.5671432} \right| * 100$$

$= 11.7092910$

4^a iteración

$x_3 = 0.5671432$

$f(x_3) = e^{-x} - x = 0.0000002$

$f'(x_3) = -e^{-x} - 1 = -1.5671434$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.5671432 - \frac{0.0000002}{-1.5671434}$$

$= 0.5671433$

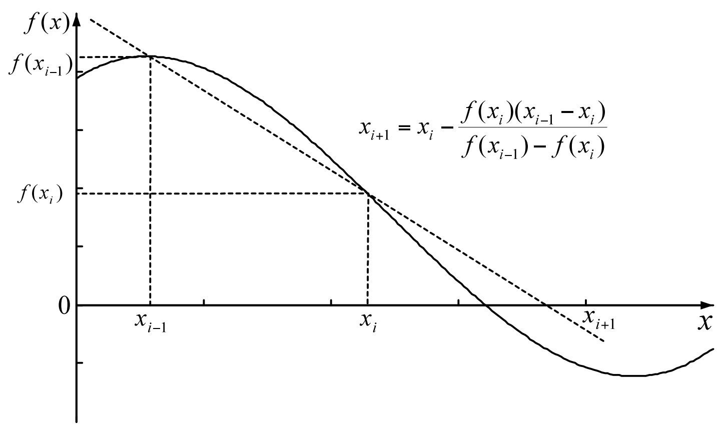
$$e_r = \left| \frac{0.5671433 - 0.5671432}{0.5671433} \right| * 100$$

$= 0.1467287$

Método de la secante

La principal problema de la implementación del método de Newton-Raphson es la evaluación de la derivada. Aunque esto no es ningún inconveniente para los polinomios, en algunos de los casos ciertas derivadas son difíciles de evaluar.

En estos casos se puede aproximar la derivada mediante una diferencia dividida finita regresiva.



Si se toma como triángulos semejantes como sigue $\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ y despejando x_{i+1} se obtiene la ecuación de Newton-Raphson para la aproximación de la nueva raíz

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Ejemplo:

Utilice el método de la secante para calcular la raíz de $f(x)=e^{-x}-x$. Comenzando con los valores iniciales de $x_{i-1}=0$ y $x_i=1$

	i	x_i	$f(x_i)$	$\lvert e_r \rvert$
x_0	0	0.00000000	1.00000000	-
x_1	1	1.00000000	-0.63212056	100.00000000
x_2	2	0.61269984	-0.07081395	63.21205588
x_3	3	0.56383839	0.00518235	8.66586039
x_4	4	0.56717036	-0.00004242	0.58747239
x_5	5	0.56714331	-0.00000003	0.00476984
x_6	6	0.56714329	0.00000000	0.00000286
x_7	7	0.56714329	0.00000000	0.00000000

Primera iteración

$$x_0=0 \qquad f(x_0)=e^{-x}-x=1$$
$$x_1=1 \qquad f(x_1)=e^{-x}-x=\text{-}0.6321$$
$$e_r=\left|\frac{1-0}{1}\right|*100=100$$
$$x_2=1-\frac{(\text{-}0.6321)(0-1)}{(1)-(\text{-}0.6321)}=0.6126$$

Segunda iteración

$$x_1=1 \qquad f(x_1)=e^{-x}-x=\text{-}0.6321$$
$$x_2=0.6126 \qquad f(x_2)=e^{-x}-x=\text{-}0.0708$$
$$e_r=\left|\frac{0.6126-1}{0.6126}\right|*100=63.2120$$
$$x_3=0.6126-\frac{(\text{-}0.0708)(1-0.6126)}{(\text{-}0.6321)-(\text{-}0.0708)}=0.5638$$

Tercera iteración

$$x_2=0.6126 \qquad f(x_2)=e^{-x}-x=\text{-}0.0708$$
$$x_3=0.5638 \qquad f(x_3)=e^{-x}-x=0.0051$$
$$e_r=\left|\frac{0.5638-0.6126}{0.5638}\right|*100=8.6658$$
$$x_4=0.5638-\frac{(0.0051)(0.6126-0.5638)}{(\text{-}0.0708)-(0.0051)}=0.5671$$

Cuarta iteración

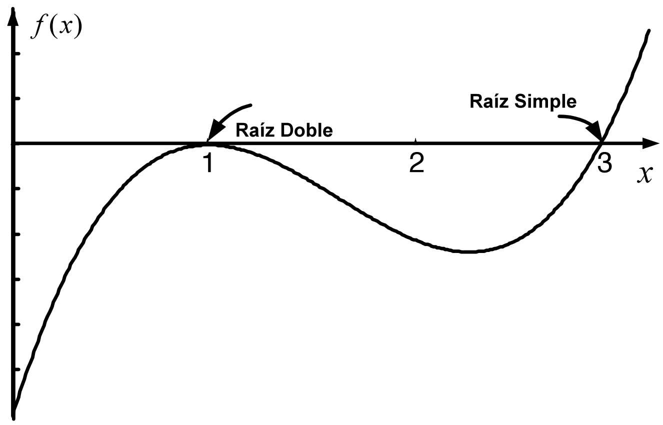
$$x_3=0.5638 \qquad f(x_3)=e^{-x}-x=0.0051$$
$$x_4=0.5671 \qquad f(x_4)=e^{-x}-x=\text{-}0.00000003$$
$$e_r=\left|\frac{0.5671-0.5638}{0.5671}\right|*100=0.0047$$
$$x_5=0.5671-\frac{(\text{-}0.00000003)(0.5638-0.5671)}{(0.0051)-(\text{-}0.00000003)}$$
$$=0.56714331$$

Raíces Múltiples

Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje horizontal x, por ejemplo si $f(x)$ es formada por una multiplicación de binomios iguales se encontrara una raíz repetida.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

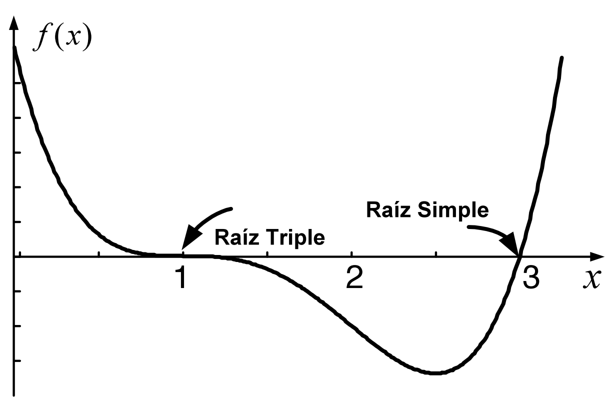
$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1) = (x-3)(x-1)^2$



La ecuación anterior tiene una raíz doble porque un valor de x hace que dos términos de la ecuación sean iguales a cero en $x = 1$, se observa que en la curva toca al eje x pero no lo cruza.

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

$$f(x) = (x-3)(x-1)(x-1)(x-1) = (x-3)(x-1)^3$$



Para la ecuación $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$ se observa que la función es tangente al eje x. En general, la multiplicación impar de raíces cruza al eje horizontal x, mientras que la multiplicidad par no lo hace. Las raíces múltiples ofrecen ciertas dificultades a los métodos anteriormente expuestos.

Método de Newton-Raphson modificado para raíces múltiples

Para el método de Newton-Raphson modificado es necesario la obtención de la primera y segunda derivada de la función y la obtención de la aproximación de la raíz esta dada por:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\, f'(x_i)}{\left[f'(x_i)\right]^2 - f(x_i)\, f''(x_i)}$$

La manera en que se realizan las iteraciones es de la misma forma que el del método de Newton-Raphson

Ejemplo:

Utilice el método de Newton-Raphson modificado para evaluar la raíz múltiple de la ecuación con un valor inicial de $x_0 = 0$ $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

Obteniendo la primera y segunda derivada de la función $f(x)$ se tiene que

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 \qquad f''(x) = 6x - 10$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	$\lvert e_r \rvert$
0	0.0000000	-3.0000000	7.0000000	-10.0000000	-
1	1.1052632	-0.0209943	-0.3878116	-3.3684211	100.0000000
2	1.0030817	-0.0000190	-0.0122982	-3.9815100	10.1867572
3	1.0000024	0.0000000	-0.0000095	-3.9999857	0.3079275
4	1.0000000	0.0000000	0.0000000	-4.0000000	0.0002381

Primera iteración

$x_0 = 0$

$f(x_0) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = -3$

$f'(x_0) = 3x^2 - 10x + 7 = 7$

$f''(x_0) = 6x - 10 = -10$

$$x_1 = 0 - \frac{(-3)\,(7)}{\left[7\right]^2 - (-3)(-10)} = 1.1052$$

Segunda iteración

$x_1 = 1.1052$

$f(x_1) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = \text{-}0.0209$

$f'(x_1) = 3x^2 - 10x + 7 = \text{-}0.3878$

$f''(x_1) = 6x - 10 = \text{-}3.3684$

$$e_r = \left|\frac{1.1052 - 0}{1.1052}\right| * 100 = 100$$

$$x_2 = 1.1052 - \frac{(\text{-}0.0209)\,(\text{-}0.3878)}{\left[-0.3878\right]^2 - (\text{-}0.0209)(3.3684)}$$

$= 1.0030$

Tercera iteración

$x_1 = 1.0030$

$f(x_1) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = \text{-}0.000019$

$f'(x_1) = 3x^2 - 10x + 7 = \text{-}0.01229$

$f''(x_1) = 6x - 10 = \text{-}3.9815$

$$e_r = \left|\frac{1.0030 - 1.1052}{1.0030}\right| * 100 = 10.1867$$

$$x_2 = 1.0030 - \frac{(\text{-}0.000019)\,(\text{-}0.01229)}{\left[-0.01229\right]^2 - (\text{-}0.000019)(\text{-}3.9815)}$$

$= 1.0000024$

Iteración de punto fijo

Otro método que podemos utilizar y que puede englobar a los demás métodos se denomina iteración de punto fijo. Este método se obtiene directamente del problema original es decir:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

De esta ecuación lo que puede intentarse para resolverla es despejar x, pero como ya sabemos, esto puede ser imposible. El método de iteración de punto fijo, sigue esta idea, pero como no es posible despejar x, al menos lo que se hace es poner x en función de si misma, es decir:

$$x = g(x) \qquad (2)$$

Esto se logra despejando x reacomodando la ecuación original. Para resolver la ecuación se comienza con un valor inicial evaluando la función $g(x)$ para hallar otro valor de x. La x obtenida de esta manera, se usa para generar otra x, evaluándola en la función $g(x)$. Se repite el procedimiento nuevamente hasta que se cumpla algún criterio de convergencia.

Por lo anterior la ecuación (3) define el método es:

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (3)$$

Se puede demostrar que este método por lo regular tiene convergencia lineal, por lo cual podría ser lento. Ejemplo del método de iteración de punto fijo

La ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ se puede expresar de varias maneras como un punto fijo:

$$x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2 + 2x_n + 10} \qquad (4)$$

$$x_{n+1} = \frac{20 - x_n^3 + 2x_n^2}{10} \qquad (5)$$

de la ecuación $\sin(x) = 0$

$$x_{n+1} = \sin(x_n) + x_n \qquad (6)$$

de la ecuación $-x^2 + x + \sin(x + 0.15) = 0$

$$x_{n+1} = x_n^2 - \sin(x_n + 0.15) \qquad (7)$$

La desventaja de este método es hallar una función $g(x)$ que sea convergente. Se puede demostrar que el método será convergente sí

$$\left|\frac{dg(x)}{dx}\right| \leq 1 \tag{8}$$

Como en general es difícil probar esto se prefiere ensayar con varias funciones $g(x)$ hasta hallar una que sea convergente. En la práctica en algunos casos el problema se plantea directamente como una iteración de punto fijo.

Los demás métodos se pueden expresar como puntos fijos. Por ejemplo sí

$$g(x_{n+1}) = x_n - \frac{y(x_n)}{\frac{dy(x_n)}{dx}} \tag{9}$$

Se tiene el método de Newton-Raphson. Si

$$g(x_{n+1}) = x_n - \frac{y(x_n)(x_n - x_{n-1})}{y(x_n) - y(x_{n-1})} \tag{10}$$

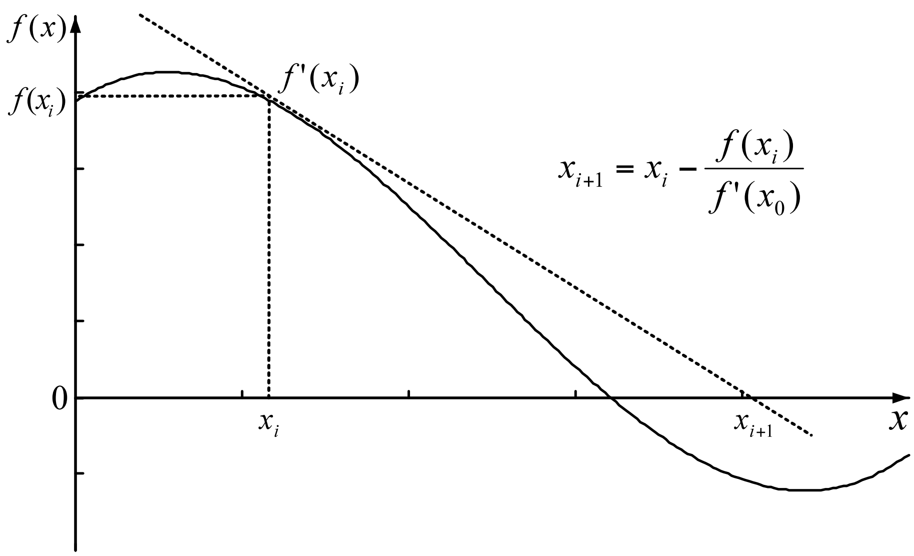
Se obtiene el método de la secante.

Método de Von Mises.

Este método se basa en el de aproximación de tangentes, es decir, en el método de Newton Raphson la diferencia es que únicamente la primera aproximación se realiza mediante una recta tangente, el resto es a través de rectas paralelas, con lo cual el denominador de la razón en el modelo de Newton Raphson se convierte en una constante.

La ventaja es la facilidad de la manipulación del modelo, por ser todavía más sencillo que el propio modelo de newton, sin embargo el costo de esta economía es la disminución de la velocidad de convergencia, en algunos casos muy especiales no se logra la convergencia, por diversas razones, como por ejemplo, el valor inicial propuesto y el tipo de curvatura de la gráfica de la función, sin embargo éste obstáculo puede salvarse mediante la propuesta de otro valor inicial.

Si el valor inicial de la raíz es x_i, entonces se puede trazar una tangente del punto $f(x_i)$; el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación de la raíz.



Partiendo del método de Newton Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

y haciendo que $f'(x_i) = f'(x_0)$, tenemos la ecuación de Von Mises.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)}$$

Ejemplo:

Utilizar el método de Von Mises para encontrar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$ empleando un valor inicial de $x_0 = 0$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert e_r \rvert$
0	0	1	-2	-
1	0.5	0.106531	-2	100
2	0.55326533	0.021804	-2	9.627448
3	0.56416714	0.004667	-2	1.932373
4	0.56650042	0.001008	-2	0.411877
5	0.56700421	0.000218	-2	0.088851
6	0.56711319	0.000047	-2	0.019216
7	0.56713678	0.000010	-2	0.004158
8	0.56714188	0.000002	-2	0.000900
9	0.56714299	0.000000	-2	0.000195
10	0.56714322	0.000000	-2	0.000042

Se tiene que $f(x) = e^{-x} - x$ y su derivada es $f'(x) = -e^{-x} - 1$

1^a iteración

$x_0 = 0$

$f(x_0) = e^{-x} - x = 1$

$f'(x_0) = -e^{-x} - 1 = -2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{-2} = 0.5$$

$$e_r = \left|\frac{0.5 - 0}{0.5}\right| * 100 = 100$$

2^a iteración

$x_1 = 0.5$

$f(x_1) = e^{-x} - x = 0.1065307$

$f'(x_0) = -e^{-x} - 1 = -2$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{0.1065307}{-2}$$

$$= 0.55326533$$

$$e_r = \left|\frac{0.55326533 - 0.5}{0.55326533}\right| * 100$$

$$= 9.627448$$

3^a iteración

$x_2 = 0.55326533$

$f(x_2) = e^{-x} - x = 0.021804$

$f'(x_0) = -e^{-x} - 1 = -2$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_0)} = 0.55326533 - \frac{0.021804}{-2}$$

$$= 0.56416714$$

$$e_r = \left|\frac{0.56416714 - 0.55326533}{0.56416714}\right| * 100$$

$$= 1.932373$$

4^a iteración

$x_3 = 0.56416714$

$f(x_3) = e^{-x} - x = 0.004667$

$f'(x_0) = -e^{-x} - 1 = -2$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_0)} = 0.56416714 - \frac{0.004667}{-2}$$

$$= 0.56650042$$

$$e_r = \left|\frac{0.56650042 - 0.56415714}{0.56650042}\right| * 100$$

$$= 0.411877$$