Métodos Numéricos

Unidad IV **2**
Aproximación funcional e interpolación. **2**
Repaso de estadística. 2
Aproximación por mínimos cuadrados en una recta. 3
Interpolación lineal. 5
Interpolación cuadrática. 6
Interpolación de Polinomios de Newton. 8
Interpolación de polinomios de Lagrange. 10

Métodos Numéricos

Unidad IV

Aproximación funcional e interpolación.

A menudo se proporcionan datos mediante un conjunto de puntos discretos. Sin embargo a veces se requieren estimaciones de puntos entre esos valores discretos.

Repaso de estadística.

Media. $$\bar{y} = \mu = \mu(y) = E[y] = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$$

Suma de cuadrados. $$S_t = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2$$

Varianza. $$\sigma^2 = \frac{S_t}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}{N-1} = \frac{N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}{N(N-1)}$$

Desviación estándar. $$S_y = \sigma = \sqrt{\frac{S_t}{N-1}} = \sqrt{\sigma^2}$$

Suma del error cuadrático medio. $$S_r = \sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

Coeficiente de varianza. $$C_v = \frac{S_y}{\bar{y}} * 100\%$$

Error estándar del estimado. $$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}$$

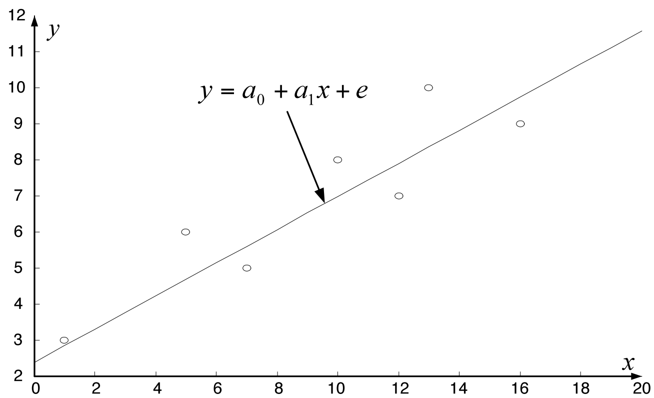
Coeficiente de correlación. $$r = \sqrt{r^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

Ajuste perfecto cuando $S_r = 0$ y $r = r^2 = 1$.

Aproximación por mínimos cuadrados en una recta.

La forma más simple de una aproximación por mínimos cuadrados es el ajuste de una línea recta a un conjunto de parejas de datos observadas.



La expresión matemática de una línea recta es $y = a_0 + a_1 x + e$ donde a_0 y a_1 son coeficientes que representan la intersección con el eje de las abscisas y la pendiente respectivamente y e es el error o residuo entre el modelo y las observaciones.

Donde a_0 y a_1 vienen dadas por:

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x}$$

Ejemplo.

Ajustar a una línea recta los valores de x y y. Calcular la desviación estándar, el error estándar del estimado y el coeficiente de correlación.

x	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
y	9.1	7.3	3.2	4.6	4.8	2.9	5.7	7.1	8.8	10.2

Obteniendo las sumas

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
0	9.1	0	82.81	0
1	7.3	1	53.29	7.3
2	3.2	4	10.24	6.4
3	4.6	9	21.16	13.8
4	4.8	16	23.04	19.2
5	2.9	25	8.41	14.5
6	5.7	36	32.49	34.2
7	7.1	49	50.41	49.7
8	8.8	64	77.44	70.4
9	10.2	81	104.04	91.8
$\sum x_i = 45$	$\sum y_i = 63.7$	$\sum x_i^2 = 285$	$\sum y_i^2 = 463.33$	$\sum x_i y_i = 307.3$

De donde a_1 y a_0

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{10\times(307.3)-(45)\times(63.7)}{10\times(285)-(45)^2} = 0.250303$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 4.5 \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 6.37$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} = 6.37 - (0.250303)\times(4.5) = 5.2436364$$

Por lo tanto la ecuación el ajuste con mínimos cuadrados es:

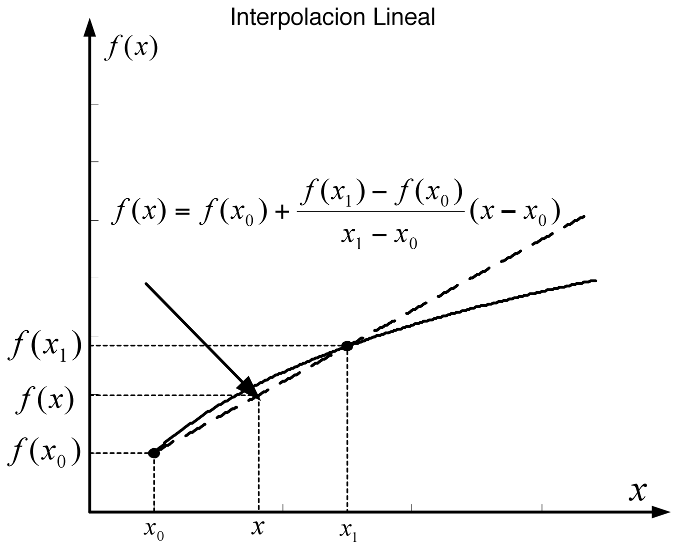
$$\hat{y} = a_0 + a_1 x = 5.2436364 - 0.250303x$$

La correlación es

$$r = \sqrt{r^2} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} = \frac{10\times(307.3)-(45)\times(63.7)}{\sqrt{10\times(285)-(45)^2}\sqrt{10\times(463.33)-(63.7)^2}} = 0.2996601$$

Interpolación lineal.

Con frecuencia se tienen que estimar valores intermedios entre valores conocidos. La forma mas simple de interpolación es conectar dos puntos con una línea recta, este método es llamado interpolación lineal.



La forma de una ecuación lineal esta dada por $f(x) = a_0 + a_1 x_1$

Donde para encontrar la aproximación mediante una línea recta, usamos triángulos semejantes y se obtiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

de donde es fácil despejar a $f(x)$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

donde $f(x)$ representa la interpolación del polinomio mediante una línea recta.

Ejemplo:

Estimar el $Ln(2)$ mediante interpolación lineal tomando los puntos de $Ln(1) = 0$ y $Ln(6) = 1.791759$. Después repita el procedimiento pero usando un intervalo más pequeño de $Ln(1) = 0$ a $Ln(4) = 1.386294$. El valor real de $Ln(2) = 0.693147$.

$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0$

$x_1 = 6 \quad f(x_1) = 1.791759$

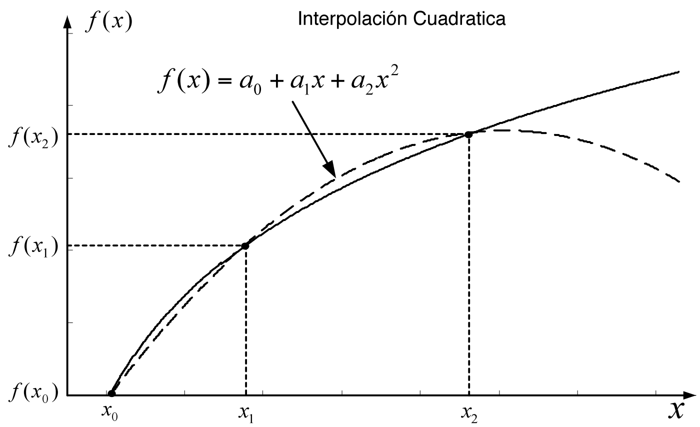
$$f(2) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = 0 + \frac{1.791759 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0.358352$$

$$|Ev| = \left|\frac{v_v - v_a}{v_v}\right| = \left|\frac{0.693147 - 0.358352}{0.693147}\right| \times 100 = 48.30\%$$

Interpolación cuadrática.

La forma general de una Interpolación cuadrática es:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$



Expandiendo el polinomio se obtiene.

$$f(x) = b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2 x^2 + b_2 x_0 x_1 - b_2 x\, x_0 - b_2 x\, x_1$$

Agrupando términos podemos representar al polinomio de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

de donde tenemos que:

$$a_0 = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1$$

$$a_2 = b_2$$

Los coeficientes b_0 , b_1 , b_2 y se obtienen mediante diferencias divididas.

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Con lo cual se obtiene el polinomio de interpolación cuadrático.

Ejemplo.

Ajustar a tres puntos dados para obtener $Ln(2)$, usando un polinomio de segundo orden de donde los puntos a interpolar son:

$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0$

$x_1 = 4 \quad f(x_1) = 1.386294$

$x_2 = 6 \quad f(x_2) = 1.791759$

Obteniendo los coeficientes b_0, b_1, b_2, tenemos que

$$b_0 = f(x_0) = 0$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.386294 - 0}{4 - 1} = 0.462098$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1.791759 - 1.386294}{6 - 4} - \frac{1.386294 - 0}{4 - 1}}{6 - 1} = -0.051873$$

Obteniendo los coeficientes del polinomio

$$a_0 = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1 = 0 - (0.462098)(1) + (-0.051873)(1)(4) = -0.669591$$

$$a_1 = b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1 = (0.462098) - (-0.051873)(1) - (-0.051873)(1) = 0.721464$$

$$a_2 = b_2 = -0.051873$$

Donde el polinomio queda

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = -0.669591 + 0.721464x - 0.051873x^2$$

Evaluando el polinomio para $f(x = 2)$ tenemos que

$$f(x = 2) = -0.669591 + 0.721464x - 0.051873x^2 = 0.565844$$

donde el error verdadero es:

$$\left|\mathrm{E_v}\right| = \left|\frac{V_v - V_a}{V_v}\right| \times 100 = \left|\frac{0.693147 - 0.565844}{0.693147}\right| \times 100 = 18.3659\%$$

Interpolación de Polinomios de Newton.

La Formula general para la interpolación de Newton para un polinomio de *n* orden. $f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$ (1)

Para un polinomio de n-ésimo orden se requiere $n+1$ puntos. Donde:

$$\begin{aligned} b_0 &= f(x_0) \\ b_1 &= f(x_1, x_0) \\ b_2 &= f(x_2, x_1, x_0) \\ b_3 &= f(x_3, x_2, x_1, x_0) \\ &\vdots \\ b_n &= f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0) \end{aligned} \tag{2}$$

Donde las evaluaciones puestas entre paréntesis son diferencias divididas finitas.

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \tag{3}$$

La segunda diferencia dividida:

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k} \tag{4}$$

La n-ésima diferencia dividida es:

$$f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0) = \frac{f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1, x_0)}{x_n - x_0} \tag{5}$$

Estas diferencias se utilizan para evaluar los coeficientes $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ los cuales se utilizan para obtener el polinomio de interpolación, el cual es conocido como el polinomio de interpolación por diferencias divididas de Newton.

$$\begin{aligned} f_n(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0) f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_2, x_1, x_0) \\ & + \cdots + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0) \end{aligned} \tag{6}$$

i	x_i	$f(x_i)$	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
1	x_0	$f(x_0)$	$f(x_1, x_0)$	$f(x_2, x_1, x_0)$	$f(x_3, x_2, x_1, x_0)$	$f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$
2	x_1	$f(x_1)$	$f(x_2, x_1)$	$f(x_3, x_2, x_1)$	$f(x_4, x_3, x_2, x_1)$	
3	x_2	$f(x_2)$	$f(x_3, x_2)$	$f(x_4, x_3, x_2)$		
4	x_3	$f(x_3)$	$f(x_4, x_3)$			
5	x_4	$f(x_4)$				

Ejemplo.

Utilice la interpolación de polinomios de Newton para interpolar los siguientes puntos a un polinomio de tercer orden para estimar $Ln(2)$.

$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0$

$x_1 = 4 \quad f(x_1) = 1.386294$

$x_2 = 6 \quad f(x_2) = 1.791759$

$x_3 = 5 \quad f(x_3) = 1.609438$

x_i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i-1})$	$f(x_i, x_{i-1}, x_{i-2})$	$f(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3})$
x_0	1	0	0.46209812	-0.05187311	0.00786553
x_1	4	1.38629436	0.20273255	-0.02041100	
x_2	6	1.79175947	0.18232156		
x_3	5	1.60943791			

Donde las diferencias divididas son:

$f(x_0) = 0$

$f(x_1, x_0) = 0.46209812$

$f(x_2, x_1, x_0) = \text{-}0.05187311$

$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = 0.00786553$

Y el polinomio resultante queda:

$$f_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_2, x_1, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f(x_3, x_2, x_1, x_0)$$

$$f_3(x) = (0) + (x-1)(0.46209812) + (x-1)(x-4)(\text{-}0.05187311) + (x-1)(x-4)(x-6)(0.00786553)$$

$$f_3(2) = (0) + (2-1)(0.46209812) + (2-1)(2-4)(\text{-}0.05187311) + (2-1)(2-4)(2-6)(0.00786553)$$

$$f_3(2) = 0.62876858$$

Donde el error verdadero es

$$|\mathrm{E_v}| = \left|\frac{V_v - V_a}{V_v}\right| \times 100 = \left|\frac{0.693147 \text{ - } 0.62876858}{0.693147}\right| \times 100 = 9.287868$$

Interpolación de polinomios de Lagrange.

El polinomio de interpolación de Lagrange se puede obtener de manera directa a partir de la formulación del polinomio de Newton. Haremos esto únicamente para el caso del polinomio en primer orden. Para obtener la forma de Lagrange, reformulamos las diferencias divididas. Por ejemplo, la primera diferencia dividida
Se puede reformular como.

$$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{1}$$

La cual es referida como

$$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_0 - x_1} \tag{2}$$

Por ultimo, al agrupar términos similares y simplificar se tiene la forma del polinomio de Lagrange

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \tag{3}$$

La interpolación de polinomios de Lagrange es simplemente una reformulación del polinomio de Newton que evita el cálculo por diferencias divididas. Se puede expresar de manera concisa como

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{4}$$

Donde

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{5}$$

Donde Π designa el producto de por ejemplo cuando $n = 1$ es

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \tag{6}$$

Cuando $n = 2$ es

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \tag{7}$$

Cuando $n = 3$

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3) \quad (8)$$

Para los casos en donde el orden del polinomio se desconozca, el método de Newton tiene ventajas debido a que profundiza en el comportamiento de las diferentes fórmulas de orden superior. En general puede integrarse fácilmente en los cálculos de Newton ya que la aproximación usa una diferencia dividida. De esta forma, desde el punto de vista de cálculo, a menudo, se prefiere el método de Newton.

Ejemplo.

Utilice la interpolación de polinomios de Lagrange para interpolar los siguientes puntos a un polinomio de primero y segundo orden para estimar $Ln(2)$,

$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 0$

$x_1 = 4 \quad f(x_1) = 1.386294$

$x_2 = 6 \quad f(x_2) = 1.791759$

Para $n = 1$ sustituyendo en la ecuación los punto se tiene

$$f(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \qquad f(x) = \frac{x-4}{1-4}(0) + \frac{x-1}{4-1}(1.386294)$$

Para $x = 2$

$$f(2) = \frac{2-4}{1-4}(0) + \frac{2-1}{4-1}(1.386294) = 0.462098$$

Donde el error verdadero es

$$\left|\mathrm{E_v}\right| = \left|\frac{V_v - V_a}{V_v}\right| \times 100 = \left|\frac{0.693147 - 0.462098}{0.693147}\right| \times 100 = 33.3333\%$$

Para $n = 2$

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$f(x) = \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)}(0) + \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)}(1.386294) + \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)}(1.791759)$$

Para $x = 2 \qquad f(2) = 0.565844$

Donde el error verdadero es $\qquad \left|\mathrm{E_v}\right| = 18.3659\%$