Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Unidad I.

Introducción.

En el campo de la ingeniería y ciencias, existen infinidad de fenómenos que requieren representarse mediante modelos matemáticos. Desafortunadamente, la gran mayoría de estos modelos no tiene una solución exacta ó no es fácil encontrarla. Es estos casos es en donde los métodos numéricos proporcionan una solución aproximada al problema original. Un *método numérico* es aquel que obtiene números que se aproximan a los que se obtendrían aplicando la solución analítica de un problema.

Los métodos numéricos son herramientas extremadamente poderosas para la solución de problemas. Son capaces de manejar sistemas de ecuaciones grandes, no linealidades geométricas complicadas que son comunes en la practica de la ingeniería y que, a menudo, son imposibles de resolver analíticamente.

Aproximación numérica y teoría de errores

Debemos conformarnos siempre, en la práctica de la ingeniería y de las ciencias, con una solución aproximada a un problema por las siguientes razones:

Los modelos matemáticos son aproximados esto es, simplificaciones al problema real. No se toman en cuenta todos los factores que afectan a un fenómeno. Por ejemplo, en el caso del tiro parabólico, se suele despreciar la resistencia del aire, sin embargo, esta puede ser importante.

Los modelos matemáticos requieren de parámetros, los cuales la mayoría de las veces provienen de mediciones experimentales y estas, solo tienen una precisión limitada, que depende del instrumento de medición. Por ejemplo la constante de los gases ideales. También pueden provenir de cálculos y estos tienen una precisión limitada que depende tanto del método como del instrumento de cálculo que se utilicen. Por ejemplo π.

Los modelos matemáticos resultantes son imposibles de resolver por métodos analíticos y se debe de aproximar la solución numéricamente. Por ejemplo una ecuación de quinto grado.

Por lo anterior, humildemente tenemos que aceptar que siempre se tendrán presentes errores, estos pueden clasificarse en:

Errores inherentes.

Errores de truncamiento.

Errores de redondeo.

Errores inherentes

Los *errores inherentes* son aquellos que tienen los datos de entrada de un problema, y son debidos principalmente a que se obtienen experimentalmente, debiéndose tanto al instrumento de medición, como a las condiciones de realización del experimento. Por ejemplo, sí el experimento es a temperatura constante y no se logra esto mas que en forma aproximada. También pueden deberse a que se obtengan de cálculos previos. Por ejemplo el valor calculado es el de un número irracional como π ó $\sqrt{2}$.

Errores de truncamiento

Los *errores de truncamiento* se originan por el hecho de aproximar la solución analítica de un problema, por medio de un método numérico. Por ejemplo al evaluar la función exponencial por medio de la serie de Taylor, se tiene que calcular el valor de la siguiente serie infinita:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \tfrac{x^N}{N!} = \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{x^N}{N!}$$

Ante la imposibilidad de tomar todos los términos de la serie, se requiere truncar después de cierto número de términos. Esto nos introduce ciertamente un error, que es el error de truncamiento. Este es independiente de la manera de realizar los cálculos. Solo depende del método numérico empleado.

Errores de redondeo

Los *errores de redondeo*, se originan al realizar los cálculos que todo método numérico o analítico requieren y son debidos a la imposibilidad de tomar todas las cifras que resultan de operaciones aritméticas como los productos y los cocientes, teniendo que retener en cada operación el número de cifras que permita el instrumento de cálculo que se este utilizando. Por ejemplo al calcular el valor de $\frac{1}{3}$, tenemos que conformarnos solo con la mayor cantidad de cifras 3, que maneje nuestro instrumento de calculo.

Los errores anteriores también suelen denominarse como las fuentes de error.

La magnitud del error generada por alguna o todas las fuentes de error mencionadas anteriormente, se puede cuantificar con ayuda de los siguientes parámetros:

Error.

Error relativo.

Error porcentual.

Error

El *error* se define como la diferencia entre el valor real V_r y una aproximación a este valor V_a:

$$e = V_r - V_a$$

Error relativo

El *error relativo* se define como el cociente del error entre el valor real V_r (sí $V_r \neq 0$):

$$e_r = \frac{e}{V_r} = \frac{V_r - V_a}{V_r}$$

En ciertos métodos numéricos se utilizan esquemas iterativos para calcular resultados. En tales esquemas, se hace una aproximación en base a la aproximación anterior. Este proceso se repite varias veces, o de forma iterativa, para calcular sucesivamente más y mejores aproximaciones.

En tales casos , el error a menudo se calcula como la diferencia entre aproximación previa y la actual por lo tanto, el error relativo porcentual o error porcentual esta dado por:

Error porcentual

El *error porcentual* es simplemente el error relativo expresado en por ciento (%).

$$e_p = \left| \frac{V_r - V_a}{V_r} \right| * 100\%$$

En 1966 Scarberough demostró que si el siguiente criterio se cumple puede tenerse la seguridad de que el resultado es correcto en al menos n cifras significativas.

$$Es = 0.5 \times 10^{2-n}$$

Cifras Significativas

El concepto de *cifras significativas* se ha desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico. El número de cifras significativas es el número de dígitos que se puede usar con plena confianza. Por ejemplo podemos calcular un número irracional con varias cifras, pero de ellas no todas, sobre todo las últimas pueden tomarse con plena confianza de que son correctas. Por otro lado, los ceros no siempre son cifras significativas ya que pueden usarse solo para ubicar al punto decimal. Por ejemplo los siguientes números tienen todos 4 cifras significativas: 0.00001985, 0.0001985, 0.001985, 1985, 19.85 Para asegurar que un cero nos represente una cifra significativa, es común emplear la notación científica. Por ejemplo los siguientes números tienen 3, 4 y 5 cifras significativas: $4.53 \times 10^{-5}, 4.530 \times 10^{-5}$ y 4.5300×10^{-5}. También se suele poner explícitamente los ceros. Los siguientes números tienen 5 cifras significativas: 19850, 0.019850, 19.850.

Cifras significativas: Son aquellas que pueden usarse en forma confiable.

Precisión y exactitud

Los errores asociados con los cálculos y mediciones se pueden caracterizar observando su *precisión* y *exactitud*. La mayoría de la gente piensa que estos términos son sinónimos, pero no es así. La precisión se refiere al número de cifras significativas que representan una cantidad. La exactitud se refiere al grado de aproximación que se tiene de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa, es decir, que tan cerca estamos del valor buscado. Por ejemplo, sí leemos la velocidad del velocímetro de un auto, esta tiene una precisión de 3 cifras significativas y una exactitud de $\pm$ 5 Kph.

Algoritmos

Algoritmo: Secuencia de pasos lógicos necesarios para llevar a cabo una tarea especifica, generalmente los algoritmos se describen mediante un pseudocódigo. Y pueden ser estables o inestables.

Ejemplo

Algoritmo hecho en pseudocódigo del promedio de n números.

1.- Pedir datos

2.- Contar datos: n =números de datos.

3.- Sumar los datos: $suma = suma + dato(i)$

4.- Dividir suma entre n : $prom = suma / n$

5.- Imprimir el $prom$

Los algoritmos pueden ser estables e inestables.

Estabilidad

Algoritmos estables: Son aquellos en los que los cambios pequeños en los datos de entrada generan cambios pequeños al final o a la salida.

Algoritmos inestables: Son aquellos en los que los cambios pequeños en la entrada producen grandes cambios en la salida.

Por ejemplo sí e_n es un error en alguna etapa de un proceso y k es una constante independiente de n el número de etapa, entonces sí el error después de n operaciones se puede representar por $f(n)=kn^{\varepsilon}$, se dice que el crecimiento del error es lineal. Sí en cambio el error se representa por $f(n)=k^{n}\varepsilon$ para $k>1$, el crecimiento del error se dice que es exponencial.

El crecimiento del error lineal es por lo general inevitable, y cuando k y n son pequeños, los resultados son aceptables. El crecimiento del error exponencial debe ser evitado, ya que el término k^{n} será grande, aun para valores relativamente pequeños de n. Por lo tanto sí el crecimiento del error es lineal el método es estable y sí es exponencial es inestable.

Convergencia

Velocidad de convergencia (rapidez o razón de convergencia): Es el número de iteraciones que requiere un cálculo o algoritmo para converger o aproximarse a un valor.

Es decir la convergencia se refiere al hecho de que los métodos numéricos obtienen n términos de una sucesión de valores. Comenzamos con un valor inicial que sea una aproximación de la solución de un problema x_0 Aplicando un método numérico se obtiene otra aproximación x_1. Se repite el procedimiento para obtener x_2 y así sucesivamente, es decir, se generar la sucesión $x_0, x_1, \cdots, x_n$ (todos los términos son aproximaciones a la solución del problema). Sí la sucesión obtenida al cabo de n iteraciones tiende a un límite se dice que el método es convergente o divergente en caso contrario.

Recursividad

Formula recursiva: Relaciona términos sucesivos de una sucesión particular de números, funciones o polinomios, para proporcionar medios para calcular cantidades sucesivas en términos de las anteriores.

Series y sucesiones

$Serie: 2,4,6,8,\cdots$ (Infinita)

$Sucesión: 2,4,6,8,10.$ (Finita)

$$\textbf{Series y Sucesiones}\begin{cases}\textbf{geoméetrica}\\ \textbf{aritmética}\end{cases}$$

Sucesión aritmética

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(N-1)d)=\tfrac{1}{2}n(a+l)$$

donde: $l=a+(N-1)d$ y representa el ultimo termino de la sucesión.

Sucesión geométrica

$$a+ax+ax^2+ax^3+\cdots+ax^{N-1}=\frac{a(1-x^N)}{1-x}$$

se dice que una sucesión es creciente si:

$a_{n-1}\leq a_n\ \forall_n$

decreciente si:

$a_{n-1}\geq a_n\ \forall_n$

Criterio de convergencia y divergencia.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty}$ una serie infinita dada y sea $\{S_n\}$la sucesión de sumas parciales que definen esta serie infinita. Entonces si el $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe y es igual a S entonces se dice que la serie converge y que S es la suma infinita dada.

Si coexiste al $\lim_{n\to\infty} S_n$, entonces se dice que la serie diverge ó no converge y S no tiene valor. Una serie infinita es convergente si y solo si, la secuencia correspondiente es convergente.

Serie de Taylor

La serie de Taylor permite predecir o calcular el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto. Esto quiere decir que cualquier función suave puede ser aproximada mediante un polinomio.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + R_n$$

Donde R_n es el término residual

$$R_n = \frac{f^{n-1}(\xi)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Algunas series típicas de Taylor son las siguientes

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$ Para $-1 < x \leq 1$

$$\ln(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$$ Para $x \geq \frac{1}{2}$

$$\ln(x) = 2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n\right\}$$ Para $x > 0$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$ Para $-\infty < x < \infty$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$ Para $-\infty < x < \infty$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$ Para $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$sen^{-1}(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$ Para $|x| < 1$

$$\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - sen^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\frac{x^7}{7} + \cdots\right)$$ Para $|x| < 1$

$$senh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$ Para $-\infty < x < \infty$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$ Para $-\infty < x < \infty$

Serie binomial

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}}{3!}x^3 + \cdots$$

Serie de McLaurin.

En matemáticas a menudo se pueden representar funciones mediante una serie infinita por ejemplo la función exponencial se puede utilizar usando

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Que es conocida como expansión de serie de McLaurin, que es una modificación de la serie de Taylor para cuando $x_i = 0$