Métodos Numéricos

Métodos Numéricos

Unidad V.

Integración y diferenciación numérica.

La integración de una función dentro del ámbito de la ingeniería tiene tantas aplicaciones que es una herramienta indispensable. Una integral representa un área bajo la curva sobre el eje horizontal, acotada por un intervalo. La función a integrarse, en general deberá tener una de las tres formas siguientes.

1. Una función simple y continua tal como un polinomio, una función exponencial o una función trigonométrica.
2. Una función complicada y continua que es difícil o imposible de integrar directamente.
3. Una función tabulada en donde los valores de y se dan en un conjunto de puntos discretos, como es el caso, a menudo, de datos experimentales.

Fórmulas o ecuaciones de Newton-Cotes.

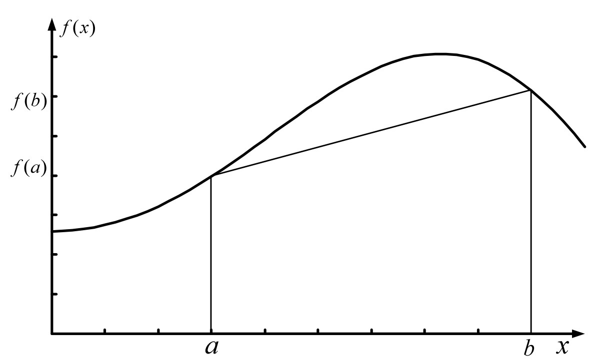
Son esquemas de integración numérica donde se reemplaza una función complicada con una función aproximada o fácil de integrar.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

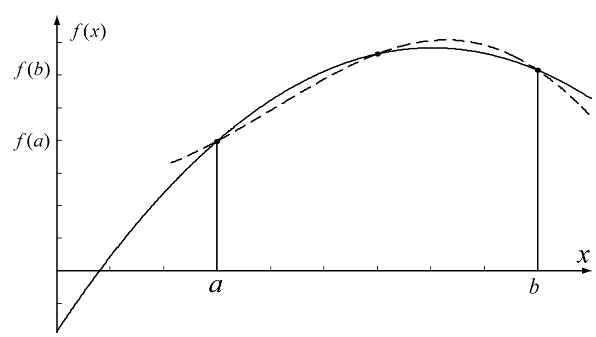
Donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

Donde n es el orden del polinomio.



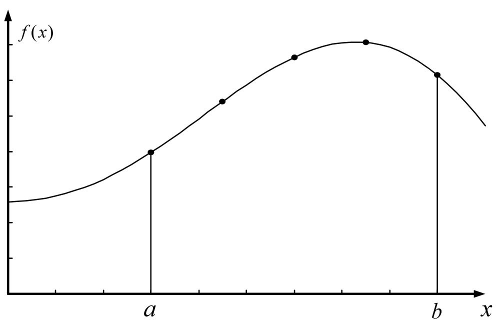
Estimación de una integral mediante una línea recta.



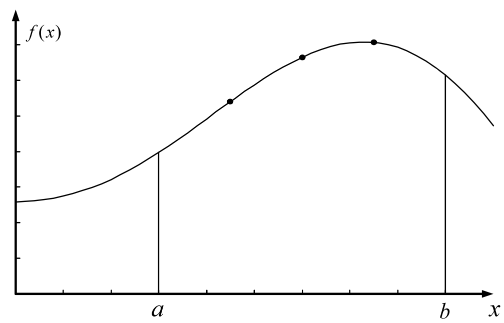
Estimación de una integral mediante una parábola.

La integral se puede aproximar mediante una serie de polinomios aplicados por pedazos a la función o datos sobre segmentos de longitud constante.

Se disponen de formas cerradas y abiertas de las ecuaciones de Newton-Cotes. Las formas cerradas son aquellas en las que se conocen los datos al inicio y al final del intervalo de la integración. Las formas abiertas son aquellas en las cuales los límites de integración se extienden más allá del intervalo de los datos conocidos.



Forma cerrada



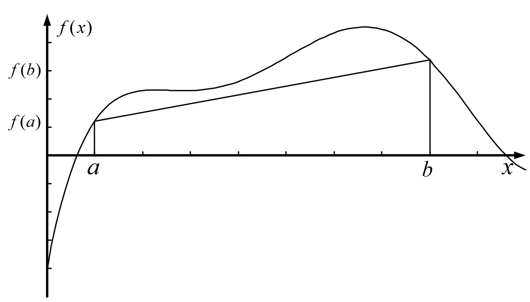
Forma abierta

Integración por el método trapezoidal.

Es la primera forma o método de integración de Newton-Cotes. La integral aproximada es:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Geométricamente el método trapezoidal es un equivalente a aproximar gráficamente el área de un trapezoide bajo la recta que una a $f(a)$ y $f(b)$



El error aproximado está dado por:

$$E_a = -\frac{(b-a)^2}{12}\int_a^b f''(x)dx$$

Ejemplo.

Utilice el método de integración trapezoidal para integrar numéricamente la siguiente función desde $a = 0$ y $b = 0.8$. El valor verdadero es 1.640533.

$$f(x) = 400x^5 - 900x^4 + 675x^3 - 200x^2 + 25x + 0.2$$

Evaluando a y b en $f(x)$ se tiene

$a = 0 \qquad f(a) = 0.2$

$b = 0.8 \quad f(b) = 0.232$

Sustituyendo en los valores en la regla trapezoidal tenemos.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(a) - f(b)}{2}(b - a) \cong \frac{(0.2) - (0.232)}{2}(0.8 - 0) = 0.1728$$

Obteniendo el error verdadero y E_a, por lo tanto E_a es:

$$\int_0^{.8} f''(x)dx = -48$$

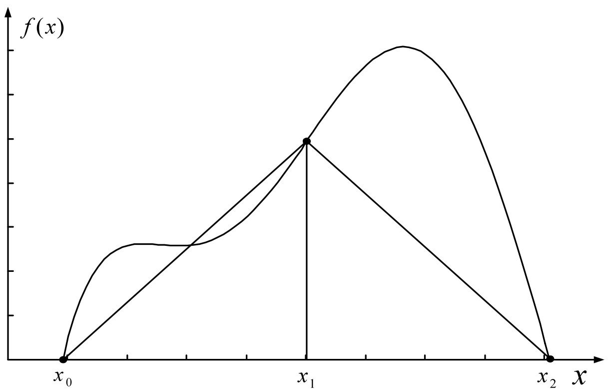
Donde $f''(x) = 8000x^3 - 10800x^2 + 4050x - 400$

$$E_a = -\frac{(b - a)^2}{12}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{(0.8 - 0)^2}{12} \times (-48) = 2.56$$

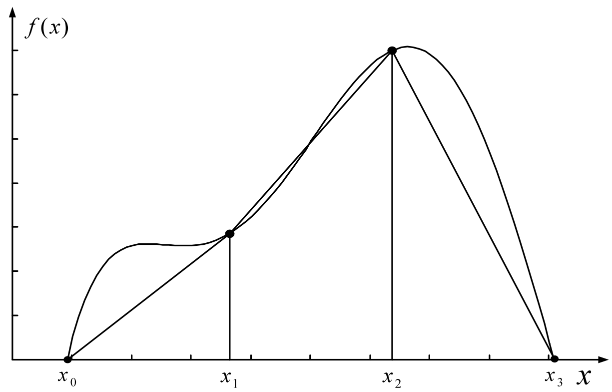
$$\left|E_v\right| = \left|\frac{v_v - v_a}{v_v}\right| \times 100 = \left|\frac{1.640533 - 0.172800}{1.640533}\right| \times 100 = 89.47\%$$

Aplicación múltiple de la regla trapezoidal

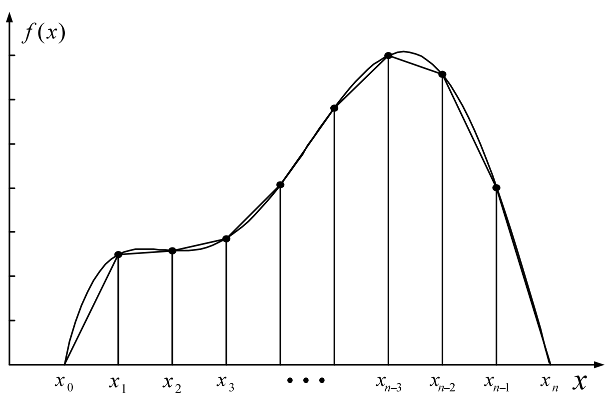
Para mejorar la exactitud de la regla trapezoidal se divide el intervalo de integración de a a b en un número n de segmentos y se aplica el método en cada uno de los nuevos segmentos



Para dos segmentos.



Para tres segmentos.



Para n segmentos.

Con lo cual se tiene que la regla trapezoidal múltiple es:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_0) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}(b-a)$$

De donde $(b-a)$ es la anchura del intervalo de integración.

Y $\dfrac{f(x_0) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$ es la altura promedio del trapecio.

Para calcular la anchura de los nuevos intervalos tenemos que: $h = \dfrac{b-a}{n}$

Y el error aproximado está dado por: $E_a = -\dfrac{(b-a)^2}{12n^2}\displaystyle\int_a^b f''(x)dx$

Ejemplo.

Utilice el método de integración trapezoidal múltiple para integrar numéricamente la siguiente función desde $a = 0$ y $b = 0.8$. Utilizando dos y tres segmentos. El valor verdadero es 1.640533

$$f(x) = 400x^5 - 900x^4 + 675x^3 - 200x^2 + 25x + 0.2$$

Para dos segmentos

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{2} = 0.4$$

$x_0 = 0 \qquad f(x_0) = 0.2$

$x_1 = 0.4 \qquad f(x_1) = 2.456$

$x_2 = 0.8 \qquad f(x_2) = 0.232$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_0) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}(b-a) = \frac{(0.2) + 2\times(2.456) + (0.232)}{2\times 2}(0.8-0) = 1.0688$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^2}{12n^3}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{(0.8-0)^2}{12\times 2^2}(-48) = 0.64$$

$$\left|E_v\right| = \left|\frac{v_v - v_a}{v_v}\right|\times 100 = \left|\frac{1.640533 - 1.0688}{1.640533}\right|\times 100 = 34.85\%$$

Para tres segmentos

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{3} = 0.266667$$

$x_0 = 0 \qquad f(x_0) = 0.2$

$x_1 = 0.266667 \qquad f(x_1) = 1.432724$

$x_2 = 0.533333 \qquad f(x_2) = 3.487177$

$x_3 = 0.8 \qquad f(x_2) = 0.232$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{(0.2) + 2\times(1.432724 + 3.487177) + (0.232)}{2\times 3}(0.8-0) = 1.369574$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^2}{12n^3}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{(0.8-0)^2}{12\times 3^2}(-48) = 0.284444$$

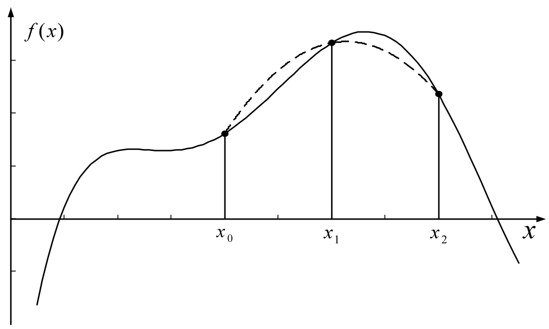
$$\left|E_v\right| = \left|\frac{v_v - v_a}{v_v}\right|\times 100 = \left|\frac{1.640533 - 1.369574}{1.640533}\right|\times 100 = 16.51\%$$

Regla de Simpson.

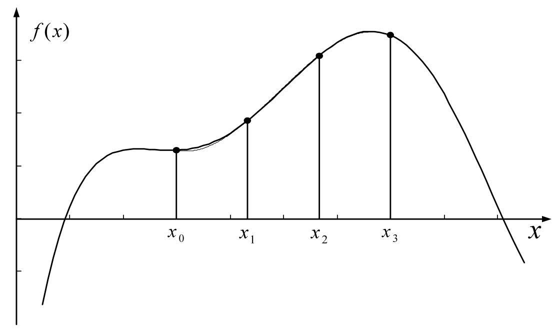
Una manera de mejorar la exactitud del método trapezoidal es usar polinomios de mayor orden para conectar los puntos. Por ejemplo, si existe un punto entre $f(a)$ y $f(b)$, a la mitad, estos puntos se pueden conectar mediante una parábola.

Si hay dos puntos igualmente espaciados entre $f(a)$ y $f(b)$, los cuatro puntos se pueden conectar mediante un polinomio de tercer orden.

A las ecuaciones que se utilizan para calcular las integrales bajo estos polinomios se conocen como reglas de Simpson.



Simpson $\frac{1}{3}$ (Parábolas)



Simpson $\frac{3}{8}$ (Cúbicas)

Regla de Simpson $1/3$

Utilizando un polinomio de segundo orden tenemos que la aproximación del área bajo la curva mediante tres puntos o una parábola esta dada por:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}(b-a)$$

Para calcular la anchura de los nuevos intervalos tenemos que:

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Y el error aproximado está dado por:

$$E_a = -\frac{(b-a)^4}{2280}\int_a^b f^{IV}(x)dx$$

Ejemplo

Utilice el método de Simpson $\frac{1}{3}$ para integrar numéricamente la siguiente función, desde $a = 0$ y $b = 0.8$.

$$f(x) = 400x^5 - 900x^4 + 675x^3 - 200x^2 + 25x + 0.2$$

Obteniendo la anchura

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{2} = 0.4$$

Por lo tanto

$x_0 = 0 \qquad f(x_0) = 0.2$

$x_1 = 0.4 \qquad f(x_1) = 2.456$

$x_2 = 0.8 \qquad f(x_2) = 0.232$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}(b-a) = \frac{(0.2) + 4(2.456) + (0.232)}{6}(0.8-0) = 1.367467$$

$$|E_v| = \left|\frac{v_v - v_a}{v_v}\right| \times 100 = \left|\frac{1.640533 - 1.367467}{1.640533}\right| \times 100 = 16.64\%$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^4}{2280}\int_a^b f^{IV}(x)dx = E_a = -\frac{(0.8-0)^4}{2280}(-1920) = 0.273066$$

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$ de aplicación múltiple.

Utilizando un polinomio de segundo orden de manera múltiple tenemos que la aproximación del área bajo la curva mediante estos puntos esta dada por.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5\cdots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6\cdots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}(b-a)$$

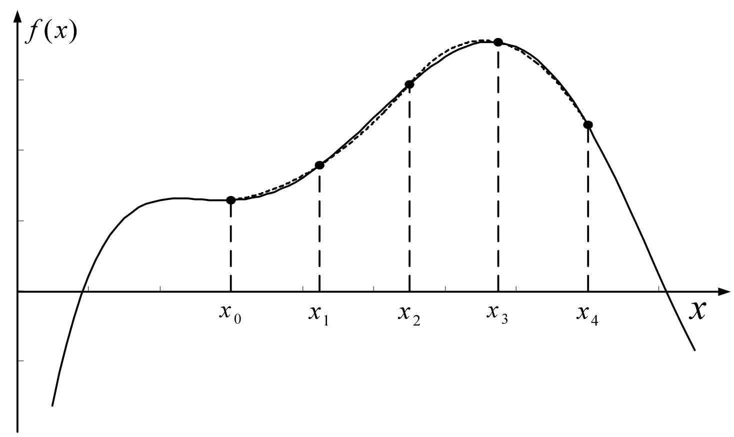
Para calcular la anchura de los nuevos intervalos tenemos que:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Y el error aproximado está dado por:

$$E_a = -\frac{(b-a)^4}{180n^4}\int_a^b f^{IV}(x)dx$$

Para $n = 2$ tendríamos gráficamente.



Ejemplo.

Utilice el método de Simpson $\frac{1}{3}$ de aplicación múltiple con $n = 4$ para integrar numéricamente la siguiente función, desde $a = 0$ y $b = 0.8$.

$$f(x) = 400x^5 - 900x^4 + 675x^3 - 200x^2 + 25x + 0.2$$

Obteniendo la anchura

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{4} = 0.2$$

Por lo tanto

$$x_0 = 0 \qquad f(x_0) = 0.2$$

$$x_1 = 0.2 \qquad f(x_1) = 1.288$$

$$x_2 = 0.4 \qquad f(x_2) = 2.456$$

$$x_3 = 0.6 \qquad f(x_3) = 3.464$$

$$x_4 = 0.8 \qquad f(x_4) = 0.232$$

Aplicando le regla de simpson múltiple tenemos.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5\cdots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6\cdots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}(b-a)$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{(0.2) + 4\times(1.288 + 3.464) + 2\times(2.456) + (0.232)}{3n}(0.8-0) = 1.623467$$

$$|E_v| = \left|\frac{v_v - v_a}{v_v}\right| \times 100 = \left|\frac{1.640533 - 1.623467}{1.640533}\right| \times 100 = 1.04\%$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^4}{180n^4}\int_a^b f^{IV}(x)dx = -\frac{(0.8-0)^4}{180\times 4^4}(-1920) = 0.017066$$

Regla de Simpson $3/8$

Utilizando un polinomio de tercer orden tenemos que la aproximación del área bajo la curva mediante cuatro puntos o una ecuación cúbica esta dada por:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}(b-a)$$

Para calcular la anchura de los nuevos intervalos tenemos que:

$$h = \frac{b-a}{3}$$

Y el error aproximado está dado por:

$$E_a = -\frac{(b-a)^4}{6480}\int_a^b f^{IV}(x)\,dx$$

Ejemplo.

Utilice el método de Simpson $\frac{3}{8}$ para integrar numéricamente la siguiente función, desde $a = 0$ y $b = 0.8$.

$$f(x) = 400x^5 - 900x^4 + 675x^3 - 200x^2 + 25x + 0.2$$

Obteniendo la anchura

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.8-0}{3} = 0.266667$$

Por lo tanto

$x_0 = 0$ $\quad f(x_0) = 0.2$

$x_1 = 0.266667$ $\quad f(x_1) = 1.432724$

$x_2 = 0.533333$ $\quad f(x_2) = 3.487177$

$x_3 = 0.8$ $\quad f(x_2) = 0.232$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}(b-a)$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{(0.2) + 3\times(1.432724) + 3\times(3.487177) + (0.232)}{8}(0.8-0) = 1.519170$$

$$|E_v| = \left|\frac{v_v - v_a}{v_v}\right|\times 100 = \left|\frac{1.640533 - 1.519170}{1.640533}\right|\times 100 = 21.99\%$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^4}{6480}\int_a^b f^{IV}(x)\,dx = -\frac{(0.8-0)^4}{6480}(-1920) = 0.121363$$

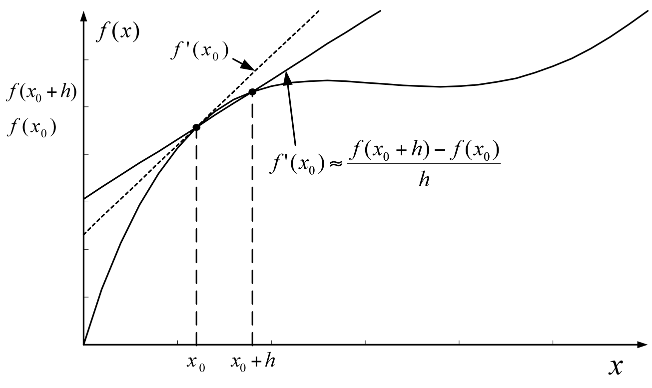
Diferenciación numérica

La diferenciación numérica, o aproximación numérica, es un método utilizado para evaluar las derivadas de funciones por medio de valores funcionales de puntos de datos discretos. Si se conocen los valores funcionales de dichos datos discretos, la función se puede expresar de una forma aproximada por medio de una interpolación polinomial. Por lo que, al diferenciar dicho polinomio, se pueden evaluar sus derivadas.

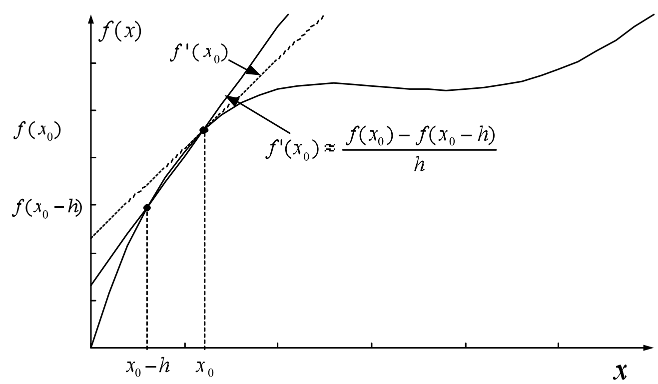
Por definición la derivada de una función esta dada por:

$$f'(x) = l\,\underset{h \to 0}{im} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

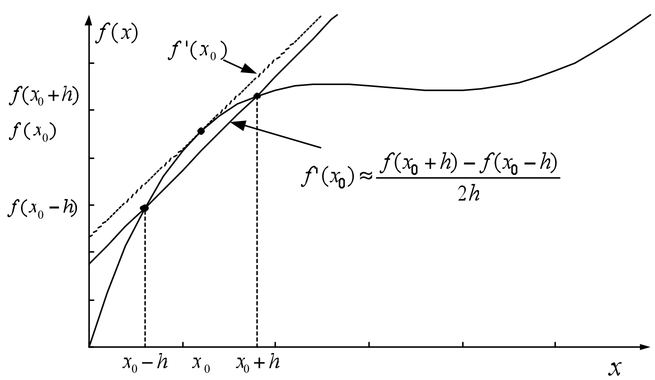
Diferenciación hacia delante, hacia atrás y centrada



Diferenciación hacia delante



Diferenciación hacia atrás



Diferenciación centrada

Lo que sigue es un resumen de las fórmulas de diferenciación que se pueden obtener a partir de desarrollos en serie de Taylor.

Expresiones de Primeras Diferencias Centrales

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + 2f(x_0-h) - f(x_0-2h)}{2h^3}$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 4f(x_0+h) + 6f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{h^4}$$

Expresiones de Primeras Diferencias Hacia delante

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_0+3h) - 3f(x_0+2h) + 3f(x_0+h) - f(x_0)}{2h^3}$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{f(x_0+4h) - 4f(x_0+3h) + 6f(x_0+2h) - 4f(x_0+h) + f(x_0)}{h^4}$$

Expresiones de Primeras Diferencias Hacia Atrás

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_0) - 3f(x_0-h) + 3f(x_0-2h) - f(x_0-3h)}{2h^3}$$

$$f^{IV}(x_0) = \frac{f(x_0) - 4f(x_0-h) + 6f(x_0-2h) - 4f(x_0-3h) + f(x_0-4h)}{h^4}$$

Ejemplo

Úsense aproximaciones de Diferencias Finitas Hacia Adelante, Hacia Atrás y Centradas para estimar la primera derivada en $x = 0.5$ de:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$