CONCURSO PÚBLICO Nº SENASAG/BID/BO-3797/CI-001/2018

SENASAG Bolivia

Av. José Natusch Velasco, casi esquina Félix Sattori, en la ciudad de Trinidad – Beni

Teléfono – Fax 4628105 - 4628683

Postulante: Saul Mamani Mamani (cel: 76137269)

CUCE: 18-0047-15-840562-1-1

CONCURSO PÚBLICO Nº SENASAG/BID/BO-3797/CI-003/2018

SENASAG Bolivia

Av. José Natusch Velasco, casi esquina Félix Sattori, en la ciudad de Trinidad – Beni

Teléfono – Fax 4628105 - 4628683

Postulante: Saul Mamani Mamani (cel: 76137269)

CUCE: 18-0047-15-840707-1-1

SUMA DE ANGULOS

Sean α y β dos ángulos. Las **razones trigonométricas** del **ángulo suma (α+β)** se pueden expresar en función de las razones trigonométricas de ambos ángulos.

- **Seno** del **ángulo suma**:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

- **Coseno** del **ángulo suma**:

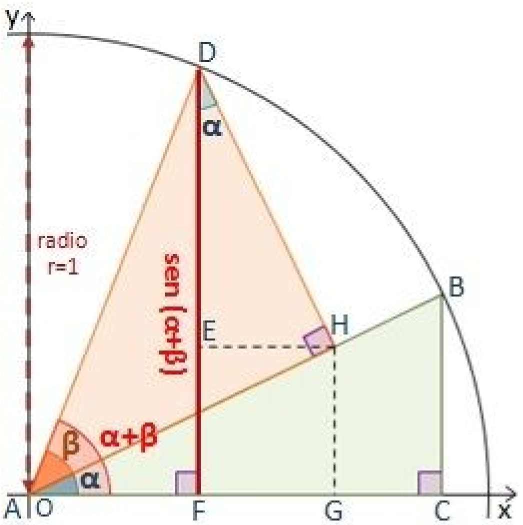
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

- **Tangente** del **ángulo suma**:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

¿Cómo se obtienen?

Seno del ángulo suma



El **seno** del **ángulo suma** es el segmento *DF*.

$$DF=DE+EF=sen(\alpha+\beta) \qquad (1)$$

Calcularemos los segmentos *DE* y *EF*.

$$DE=DH\cdot\cos\alpha$$

$$DH=\operatorname{sen}\beta$$

$$\text{De donde } DE=\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

Por otra parte:

$$EF=HG=AH\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

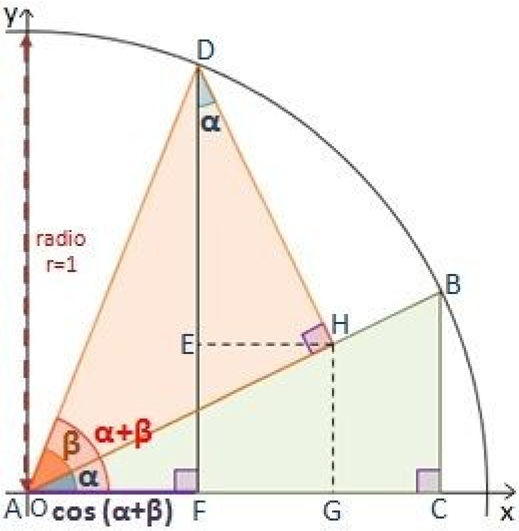
$$AH=\cos\beta$$

$$\text{De donde } EF=cos\beta\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

Sustituyendo en (1) obtenemos la **fórmula**:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Coseno del ángulo suma



De la misma manera que en el seno, el **coseno** del **ángulo suma** es el segmento AF.

$$AF = AG - FG = AG - EH =$$
$$= \cos(\alpha+\beta) \qquad (2)$$

Calcularemos los segmentos *AG* y *EH*.

$$AG = AH \cdot \cos\alpha$$
$$AH = \cos\beta$$

$$\text{De donde } AG = \cos\beta \cdot \cos\alpha$$

Por otra parte:

$$EH = DH \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$DH = \operatorname{sen}\beta$$

$$\text{De donde } EH = \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Sustituyendo en (2) obtenemos la **fórmula**:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Tangente del ángulo suma

La **tangente** del **ángulo suma** es igual al seno dividido por el coseno.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

Si dividimos numerador y denominador por (cos α · cos β):

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha \cdot \cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha} \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha} \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha} \cdot \cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha} \cdot \cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}$$

Simplificamos y obtendremos la siguiente **fórmula**:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

RESTA DE ANGULOS

Sean α y β dos ángulos. Las **razones trigonométricas** del **ángulo resta (α-β)** se puedes expresar en función de las razones trigonométricas de ambos ángulos.

•**Seno** del **ángulo resta**:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

•**Coseno** del **ángulo resta**:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

•**Tangente** del **ángulo resta**:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

¿Cómo se obtienen?

Se pueden obtener fácilmente las **razones trigonométricas** del **ángulo resta** a partir de las **razones trigonométricas** del **ángulo suma** sustituyendo β por -β.

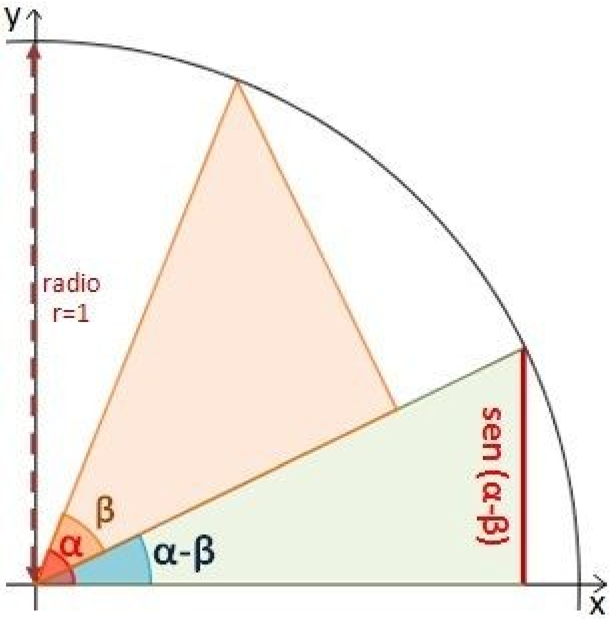
Se sabe que:

•sen (-β) = -sen β

•cos (-β) = cos β

•tan (-β) = -tan β

Seno del ángulo resta



Sea la fórmula del seno del ángulo suma:

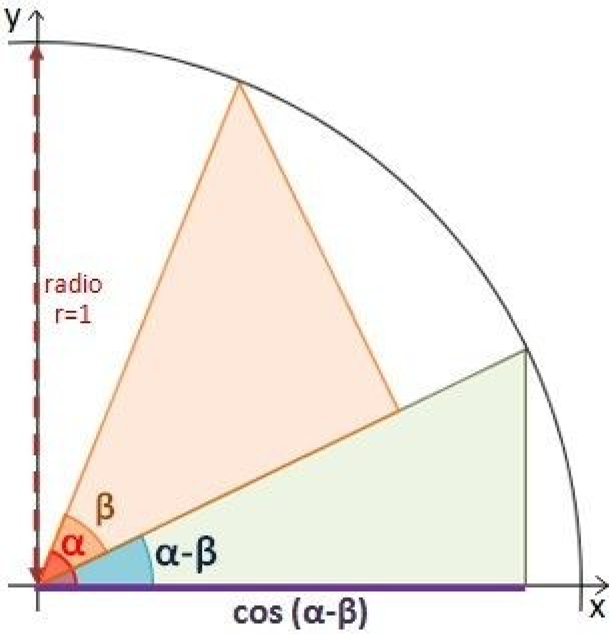
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Se aplica la transformación β = -β, tendremos el **seno** del **ángulo resta**.

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}(-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\beta)=$$

$$=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Coseno del ángulo resta



De la fórmula del **coseno** del ángulo suma se puede obtener el del **ángulo resta**.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Se aplica la transformación β = -β y se obtiene su **fórmula**:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot (-\operatorname{sen}\beta) =$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Tangente del ángulo resta

Sea la fórmula de la tangente del ángulo suma:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Con la transformación β = -β, se obtiene la **tangente** del **ángulo resta**.

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha \cdot \tan(-\beta)} = \frac{\tan\alpha + (-\tan\beta)}{1 - \tan\alpha \cdot (-\tan\beta)} =$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

ANGULO DOBLE

Sea α un ángulo. Las **razones trigonométricas** del **ángulo doble (2α)** se pueden expresar en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

•**Seno** del **ángulo doble**:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

•**Coseno** del **ángulo doble**:

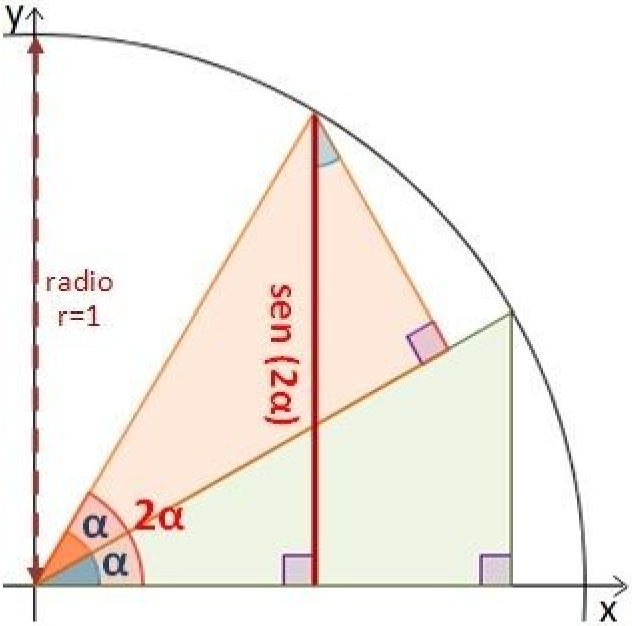
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

•**Tangente** del **ángulo doble**:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

¿Cómo se obtienen?

Seno del ángulo doble



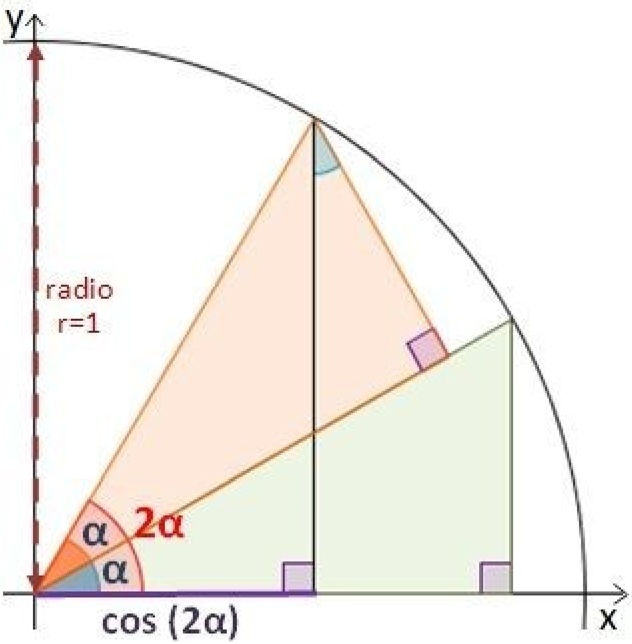
Sea la fórmula del seno del ángulo suma:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Con la transformación β = α, tendremos el **seno** del **ángulo doble**.

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

Coseno del ángulo doble



De la fórmula del **coseno** del ángulo suma se puede obtener el del **ángulo doble**.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Se aplica la transformación β = α y obtenemos la **fórmula**:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$

Tangente del ángulo doble

Sea la fórmula de la tangente del ángulo suma:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Con la transformación β = α, se obtiene la **tangente** del **ángulo doble**.

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

ANGULO MITAD

Sea α un ángulo. Las **razones trigonométricas** del **ángulo mitad (α/2)** se pueden expresar en función de las razones trigonométricas de α. En particular, del coseno de α.

•**Seno** del **ángulo mitad**:

$$\operatorname{sen}(\alpha/2)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

•**Coseno** del **ángulo mitad**:

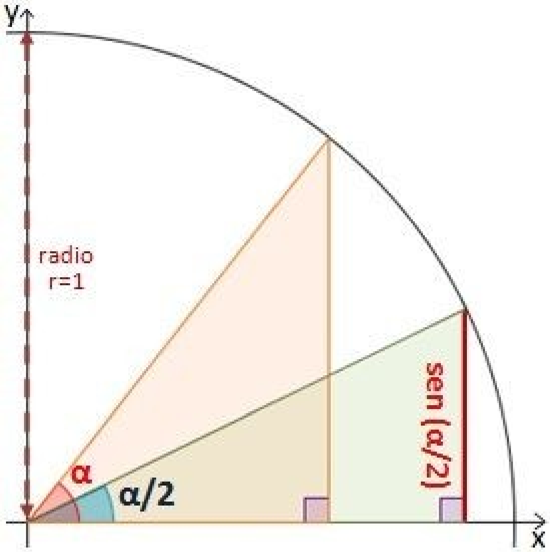
$$\cos(\alpha/2)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

•**Tangente** del **ángulo mitad**:

$$\tan(\alpha/2)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

¿Cómo se obtienen?

Seno del ángulo mitad



De las fórmulas conocidas:

$$1 = \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta$$

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta$$

Si hacemos β=α/2, se transformarán en:

$$1 = \operatorname{sen}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)$$

$$\cos \alpha = \cos^2(\alpha/2) - \operatorname{sen}^2(\alpha/2)$$

Restando ambas igualdades obtendremos que:

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2(\alpha/2) \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \rightarrow$$

Por lo que la **fórmula** del **seno** del **ángulo mitad** es:

$$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

Coseno del ángulo mitad

De las fórmulas conocidas:

$$1 = \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta$$

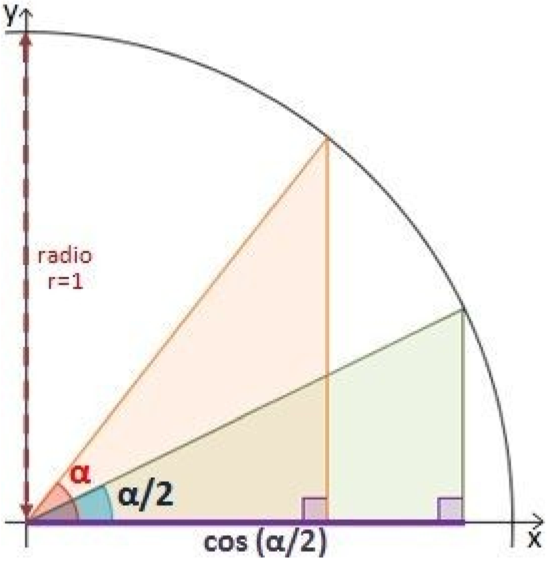
$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta$$

Si hacemos β=α/2 (de igual forma que con el seno, se transformarán en:

$$1 = \operatorname{sen}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)$$

$$\cos \alpha = \cos^2(\alpha/2) - \operatorname{sen}^2(\alpha/2)$$

Sumando ambas igualdades tendremos:



$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2) \quad \rightarrow \quad \cos^2(\alpha/2) = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \rightarrow$$

Y se obtiene la **fórmula** del **coseno** del **ángulo mitad**:

$$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Tangente del ángulo suma

La **tangente** del **ángulo mitad** es igual al seno dividido por el coseno.

$$\tan(\alpha/2) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Por lo que la **fórmula** de la **tangente** del **ángulo mitad** es:

$$\tan(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

ScrumAlliance®

Transforming the World of Work

Saúl Mamani Mama

is awarded the designation Certified ScrumMaste
this day, April 24, 2018, for completing the presc
requirements for this certification and is hereby e
to all privileges and benefits offered by
SCRUM ALLIANCE®.

Scrum Alliance CSM CERTIFIED

Certificant ID: 000774509 Certification Expires: 24 April 2020

Certified Scrum Trainer®