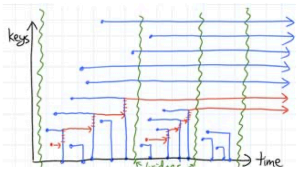
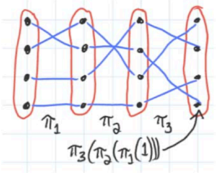
Estrutura de Dados

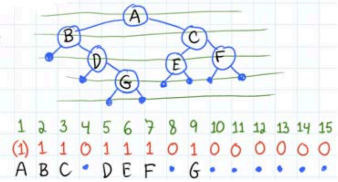
Introdução ao Comportamento Assintótico

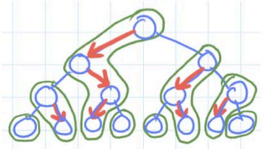
Curso de Análise e Desenvolvimento de Sistemas

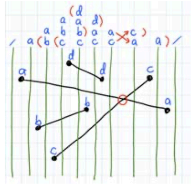
Última revisão: 2024.2

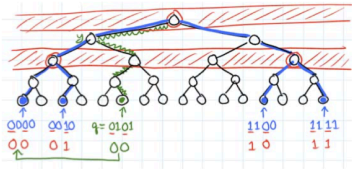

TIME TRAVEL

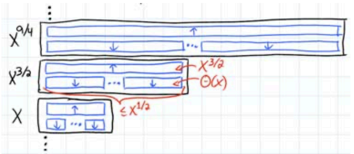

DYNAMIC GRAPHS

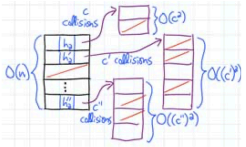

SUCCINCT

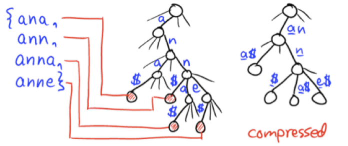

DYNAMIC OPTIMALITY


GEOMETRY


INTEGERS


MEMORY HIERARCHY


HASHING


STRINGS

Prof. **Saulo Oliveira** | @sauloafoliveira

ANÁLISE DE ALGORITMOS

Análise de algoritmos

Analisar um algoritmo consiste em **verificar** seu **custo** em relação a dois fatores*:

- **Tempo** gasto para executá-lo; e
- **Espaço** (memória) ocupado em sua execução.

CUSTO DE UM ALGORITMO

- O **menor custo** possível de uma classe de algoritmos nos dá a **dificuldade inerente para resolver o problema**;
- Quando o custo de um algoritmo é igual ao menor custo possível, o algoritmo é **ótimo** para aquela medida de custo considerada;
- Podem existir vários algoritmos **ótimos** para o mesmo problema;
- Se dispusermos de uma ferramenta comparativa, podemos **escolher o mais adequado**.

Exemplo: Maior elemento de uma lista (1)

Considere o algoritmo para encontrar o maior elemento de uma lista com no mínimo um elemento.

```python
def max(valores: list[float]) -> float:
    maior = valores[0]

    for valor in valores:
        if maior < valor: # comparação
            maior = valor

    return maior
```

- Seja f uma função de complexidade tal que $f(n)$ **é o número de comparações envolvendo os elementos de** `valores`, se `valores` contiver n elementos, isto é, `n = len(valores)`.
- Qual função é $f(n)$?

Exemplo: Maior elemento de uma lista (2)

Teorema: Qualquer algoritmo para encontrar o maior elemento de um conjunto com n elementos, $n \geq 1$, faz pelo menos $n - 1$ comparações.

Prova: Cada um dos $n - 1$ elementos tem de ser investigado por meio de comparações, que é menor do que algum outro elemento. **Logo, $n - 1$ comparações são necessárias.**

RESULTADO

O teorema acima nos diz que, se o número de comparações for utilizado como medida de custo, então a função Max do programa anterior é ótima.

Definições

MELHOR CASO

É o **menor tempo de execução** sobre todas as entradas de tamanho n.

PIOR CASO

É o **maior tempo de execução** sobre todas as entradas de tamanho n.

CASO MÉDIO (OU CASO ESPERADO) – O MAIS DIFÍCIL DE CALCULAR

É a **média dos tempos de execução** de todas as entradas de tamanho n.

$$\text{Melhor caso} \leq \text{Caso mé dio} \leq \text{Pior caso}$$

Exemplo: ficha de treino 🏋️‍♀️🏋️

PROBLEMA

Considere o problema de encontrar sua ficha de treino na academia que o IFCE vai inaugurar. Cada ficha contém um indentificador único que é utilizada para recuperá-lo (a matrícula).

Situação:
Dado que as fichas são armazenadas numa caixa qualquer sem organização, localizar qualquer a ficha com base matrícula;

Solução:
O algoritmo de pesquisa mais simples é o que faz a **pesquisa sequencial**.

Exemplo: ficha de treino (análise)

Seja $f(n)$ uma função de complexidade, em que n corresponde ao número de fichas. A complexidade será definida pelo número de fichas consultadas (número de comparações de matrícula):

Melhor caso:
É quando a ficha procurada é a **primeira consultada**, isto é, $f(n) = 1$.

Pior caso:
É quando a ficha procurada é a **última consultada**, isto é, $f(n) = n$.

Caso médio:
É quando a ficha procurada é a ..., e isso significa o quê? $f(n) = \ ?$

Exemplo: ficha de treino (análise do caso médio)

No estudo do caso médio, consideremos que toda pesquisa recupera uma ficha.

- Se p_i for a probabilidade de que a i-ésima ficha seja procurada, e considerando que para recuperá-la são necessárias i comparações, então:

$$f(n) = 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + \ldots + n \times p_n$$

- Para calcular $f(n)$ basta conhecer a distribuição de probabilidades p_i;
- Para facilitar, vamos supor que cada ficha tem a mesma probabilidade de ser recuperada que todas as outras, então:

$$p_i = \frac{1}{n}, 1 \leq i \leq n$$

- Logo, $f(n) = \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n \times (n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$.

Exercícios

Exercícios

Avalie os dois códigos abaixo e responda:

a) O resultado será o mesmo? Justifique sua resposta.

b) Qual a função de complexidade de cada um? Defina as operações relevantes.

c) Caso o resultado seja o mesmo, qual dos dois você escolheria?

```python
def fn1(n: int) -> int:
    i = a = 0
    while i < n:
        a += i
        i += 2
    return a
```

```python
def fn2(n: int) -> int:
    a = 0
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            a += i + j
    return a
```

Dica: Avalie o código e faça testes na mão, só depois de responder às perguntas, implemente o código e execute-os para conferir os resultados.

MinMax

MinMax (1)

Considere o problema de encontrar o maior e o menor valor de uma lista de inteiros `A` de tamanho n, isto é, `n = len(A)`.

```python
def minmax(A: list[int]) -> tuple[int, int]:
    minimo = maximo = A[0]

    for a in A:
        if a < minimo:
            minimo = a

        if a > maximo:
            maximo = a

    return minimo, maximo
```

- Seja $f(n)$ o número de comparações entre os elementos de `A`, se `A` contiver n elementos.
- Então, $f(n) = 2(n-1)$ para $n > 0$, para o melhor caso, pior caso e caso médio!

MinMax (2)

O algoritmo de `minmax` pode ser levemente melhorado, pois a comparação `a > maximo` só é necessária quando a comparação `a < minimo` é `False`.

E agora, qual é a função de complexidade?

```python
def minmax(A: list) -> tuple[int, int]:

    minimo = maximo = A[0]

    for a in A:
        if a < minimo:
            minimo = a

        elif a > maximo: # aqui!
            maximo = a

    return minimo, maximo
```

- **Melhor caso** é quando a lista está ordenada crescentemente. Logo, $f(n) = n - 1$;
- **Pior caso** é quando o valor máximo é o primeiro. Logo, $f(n) = 2(n - 1)$;
- **Caso médio** é quando se testa `a < minimo` em metade das vezes. Logo, $f(n) = \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$.

MinMax (3)

- Considerando o número de comparações realizadas, existe a possibilidade de obter um algoritmo mais eficiente.
- Os elementos da lista são comparados dois a dois.
    - Somente o valor menor do par é comparado com a variável `minimo`;
    - Somente o valor maior do par é comparado com a variável `maximo`;
- Para evitar um tratamento de exceção, deixamos a lista com tamanho com par. Para isso, repetimos o último elemento quando o tamanho da lista é ímpar;
- Para implementação, tem-se que o **Melhor caso = Caso médio = Pior caso**.

$$f(n) = \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2} = \frac{3n}{2} - 2$$

MinMax (3)

```python
def minmax(A: list[int]) -> int:
    if len(A) % 2 != 0: # truque pra deixar a lista com tamanho par
        A.append(A[-1])

    if A[0] < A[1]:
        minimo, maximo = A[0], A[1]
    else:
        minimo, maximo = A[1], A[0]

    for a, b in zip(A[2::2], A[3::2]):
        if a > b:
            if a > maximo: maximo = a
            if b < minimo: minimo = b
        else:
            if a < minimo: minimo = a
            if b > maximo: maximo = b
    return maximo, minimo
```

Comportamento assintótico de funções

Recapitulando ...

- Aprendemos a calcular a função de complexidade $f(n)$.
- Para valores pequenos de n, praticamente qualquer algoritmo custa pouco para ser executado. Logo, a escolha do algoritmo tem pouquíssima influência em problemas de tamanho pequeno;
- Assim, a análise de algoritmos deve ser realizada para valores grandes de n. Para isso, estuda-se o comportamento assintótico das funções de custo.

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

O comportamento assintótico de uma função $f(n)$ representa o limite do comportamento do custo quando n cresce, ou seja, qunado $n \to \infty$.

Exemplo

Considere o número de operações de cada um dos dois algoritmos que resolvem o mesmo problema:

a) **Alg. 1** tem custo $f_1(n) = 2n^2 + 5n$ operações;
b) **Alg. 2** tem custo $f_2(n) = 50n + 4000$ operações.

Dependendo do valor de n, o **Alg. 1** pode requerer mais ou menos operações que o **Alg. 2**:

$n = 10$	$n = 100$
$f_1(10) = 2 * (10)^2 + 5 * 10 = 250$	$f_1(100) = 2 * (100)^2 + 5 * 100 = 20.500$
$f_2(10) = 50 * 10 + 4000 = 4.500$	$f_2(100) = 50 * 100 + 4000 = 9.000$

Notação $O(n)$

Comportamento assintótico

Comportamento assintótico

- Quando n tem valor muito grande $(n \to \infty)$;
- Termos inferiores e constantes multiplicativas contribuem pouco na comparação e podem ser descartados

Tomando o exemplo anterior:

- Alg. 1 definido por $f_1(n) = 2n^2 + 5n$ operações;
- Alg. 2 definido por $f_2(n) = 50n + 4000$ operações;
- f_1 cresce com n^2;
- f_2 cresce com n;
- Como o crescimento quadrático é pior que o linear, o **Alg. 2 é melhor do que o Alg. 1**.

A notação O (*Big O* ou ômicron)

A notação O nos dá um limite **superior assintótico** – o **Pior Caso**.

DEFINIÇÃO

- Sejam f e g duas funções de domínio X.
- Dizemos que a função $f = O(g(n))$ se e somente se:

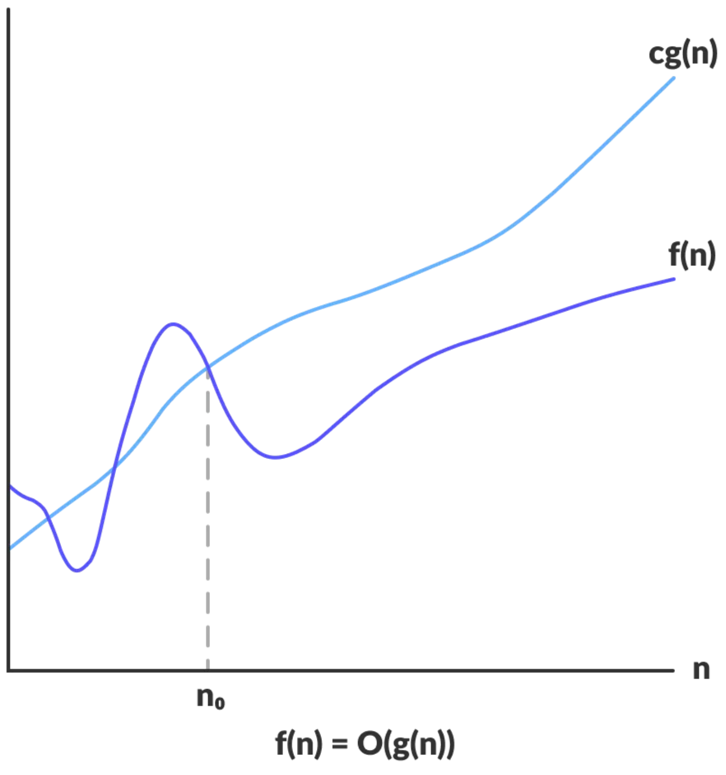
$$(\exists\, c \in \mathbb{R}_+)(\exists\, n_0 \in X)(\forall\, n \geq n_0)(0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)).$$

Exemplos:

- $3n + 2 = O(n)$, pois $3n + 2 \leq 4n$ para todo $n \geq 2$
- $1000n^2 + 100n - 6 = O(n^2)$, pois $1000n^2 + 100n - 6 \leq 1001n^2$ para $n \geq 100$
- $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0 \Rightarrow f(n) = O(n^m)$

A notação O (*Big O* ou ômicron)

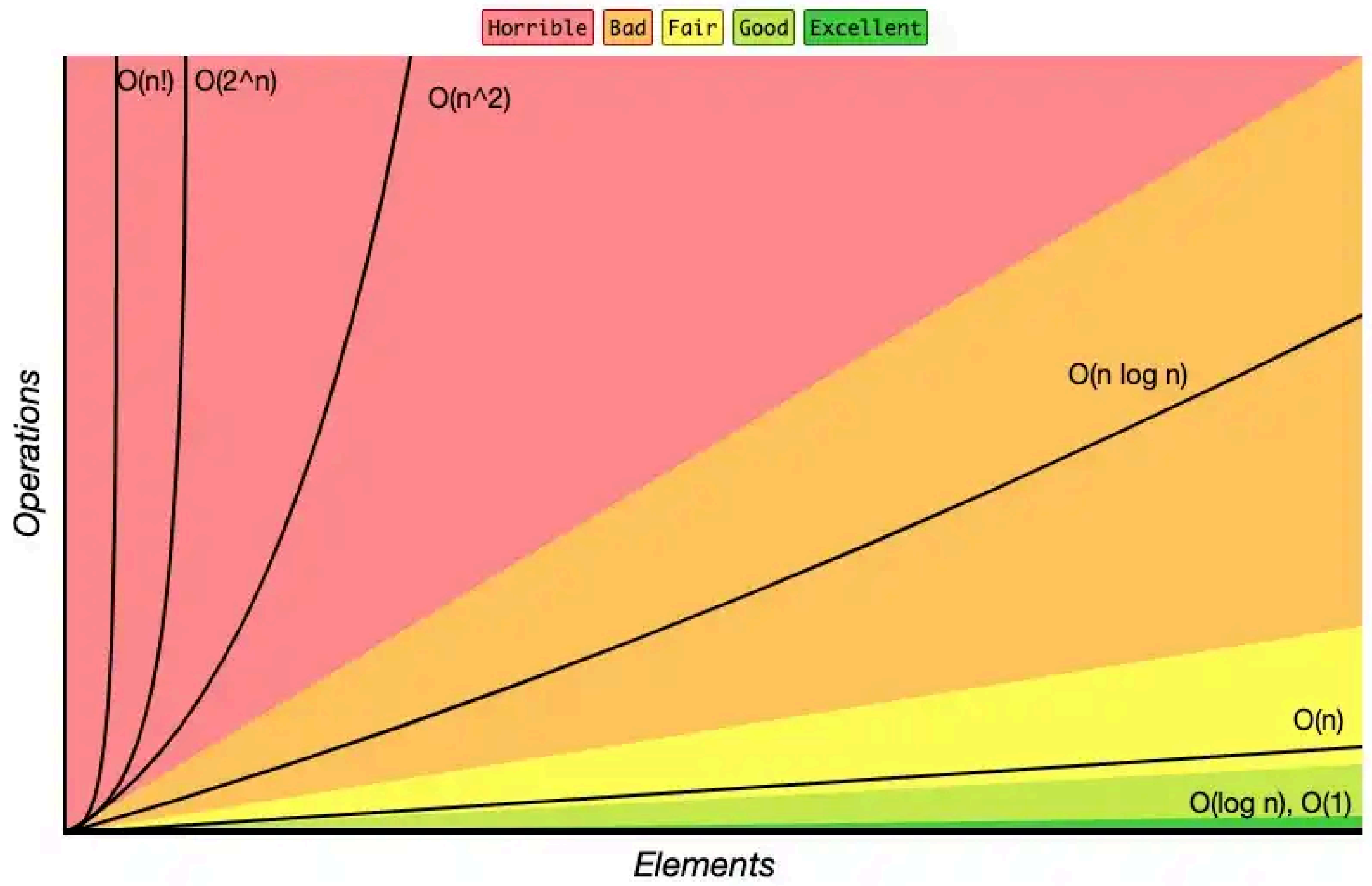
Exemplo gráfico de dominação assintótica que ilustra a notação O.



ALGUMAS PROPRIEDADES PARA O CÔMPUTO DE $O(n)$

- $f(n) = O(f(n))$
- $c * O(f(n)) = O(f(n)),\ c =$ constante
- $O(f(n)) + O(f(n)) = O(f(n))$
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$
- $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$
- $O(f(n)) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$
- $f(n) * O(g(n)) = O(f(n) * g(n))$

Colinha



$$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < O(c^n) < O(n!)$$

Exercícios

Exercícios (1)

1. Para os itens que segue, indique se $g(n)$ domina $f(n)$ assintoticamente. Justifique.

- $f(n) = (n+1)^2$ e $g(n) = n^2$
- $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$
- $f(n) = 3n^3 + 2n^2 + n$ e $g(n) = O(n^{40})$

2. Qual a ordem de complexidade do MaxMin (1) ?

3. Suponha um algoritmo com três trechos cujos tempos de execução são $O(n)$, $O(n^2)$ e $O(n \log n)$, respectivamente. Qual a ordem de complexidade deste algoritmo?

Exercícios (2)

4. No próximo slide há dois algoritmos. Obtenha a função de complexidade $f(n)$ dos algoritmos abaixo. Considere apenas as operações envolvendo as variáveis `x` e `y`.

```python
def funcao1(n: int) -> None:

    x = y = 0

    for i in range(1, n + 1):

        for j in range(i, n + 1):
            x += 1

        for j in range(i):
            y += 1
```

```python
def funcao2(n: int) -> None:
    x = 0

    for i in range(1, n + 1):

        for j in range(1, n + 1):

            for j in range(1, j):
                x += j + k

    x = n
```

Referências

- Paul Rail. **All you need to know about "Big O Notation" to crack your next coding interview.** Disponível em: https://www.freecodecamp.org/news/all-you-need-to-know-about-big-o-notation-to-crack-your-next-coding-interview-9d575e7eec4/.
- Prof. José Maria Monteiro. **INF 1010 Estruturas de Dados Avançadas: Complexidade de Algoritmos**. Disponível em: https://www.inf.puc-rio.br/~noemi/eda-19.1/complexidade.pdf.
- Prof. Reinaldo Fortes. **BCC202 - Estrutura de Dados I Aula 04: Análise de Algoritmos (Parte 1).** Disponível em: https://www.decom.ufop.br/reifortes.
- Prof. Reinaldo Fortes. **BCC202 - Estrutura de Dados I Aula 05: Análise de Algoritmos (Parte 2).** Disponível em: https://www.decom.ufop.br/reifortes.
- Programiz. **Asymptotic Analysis: Big-O Notation and More.** Disponível em: https://www.programiz.com/dsa/asymptotic-notations.