

The background features a large, textured sphere on the left, resembling a planet or moon with various shades of brown and tan. Several smaller, translucent spheres float in the background. A horizontal band of light orange color spans the middle of the image, serving as a backdrop for the text. Below this band, there are abstract, rounded shapes in shades of gray and white, suggesting a landscape or architectural elements.

# **The Search for a Title**

**A Profound Subtitle**

**Dr. John Smith**

Copyright © 2013 John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First printing, March 2013*

# Contents

I	Part One	
1	Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak .....	7
1.1	Paragraphs of Text	7
1.2	Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel	8
2	Linear Tiga Variabel .....	17
2.1	Corollaries	17
2.2	Penerapan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel	17
II	Part Two	
3	Fungsi .....	25
3.1	Relasi dan Fungsi	25
3.2	Operasi Aritmatika	36
3.3	Komposisi Fungsi	40
3.4	Fungsi Linear	40
3.5	Fungsi Kuadrat	40
3.6	Fungsi Inversi	40
3.7	Fungsi Rasional	40

<b>4</b>	<b>Trigonometri</b> .....	<b>41</b>
4.1	Pengukuran Sudut	41
4.2	Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku	48
4.3	Sudut-sudut Berelasi	48
4.4	Identitas Trigonometri	48
4.5	Aturan Sinus dan Cosinus	54
4.6	Fungsi Trigonometri	54
	<b>Bibliography</b> .....	<b>59</b>
	Books	59
	Articles	59



# Part One

<b>1</b>	<b>Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak</b>	<b>7</b>
1.1	Paragraphs of Text	
1.2	Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel	
<b>2</b>	<b>Linear Tiga Variabel</b>	<b>17</b>
2.1	Corollaries	
2.2	Penerapan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel	





# 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Va

## 1.1 Paragraphs of Text

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.

## 1.2 Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

### 1. KOMPETENSI INTI ( KI )

- Memahami dan menerapkan pengetahuan faktual, konseptual, prosedural dalam ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah
- Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan

### 1. KOMPETENSI DASAR ( KD )

1.1 Menginterpretasi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dengan persamaan dan pertidaksamaan linear Aljabar lainnya.

1.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel

#### 1. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

- Memahami dan menjelaskan konsep nilai mutlak.
- Menentukan penyelesaian persamaan nilai mutlak linear satu variabel.
- Menentukan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel.
- Menggunakan konsep nilai mutlak untuk menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan nilai mutlak.
- Menggunakan konsep persamaan dan pertidaksamaan untuk menentukan penyelesaian permasalahan nilai mutlak.

### 1. TUJUAN PEMBELAJARAN

- Setelah membaca, berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat memahami dan menjelaskan konsep nilai mutlak dengan baik dan percaya diri.
- Setelah berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat menentukan penyelesaian persamaan nilai mutlak satu variabel dengan percaya diri.



4. Setelah berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat pertidaksamaan nilai mutlak satu variabel dengan percaya diri.
5. Disediakan permasalahan kontekstual dan LKS, peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan tersebut dengan konsep nilai mutlak secara mandiri.
6. Disediakan permasalahan nilai mutlak dan LKS, peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan nilai mutlak dengan menggunakan konsep persamaan dan pertidaksamaan secara mandiri.

### MATERI PEMBELAJARAN

Pertidaksamaan adalah kalimat/ Pernyataan matematika yang menunjukkan perbandingan ukuran dua objek atau lebih dan dihubungkan oleh satu dari beberapa simbol berikut :

1.  $<$  (kurang dari)
2.  $>$  (lebih dari)
3.  $\leq$  (kurang dari atau sama dengan)
4.  $\geq$  (lebih dari atau sama dengan)

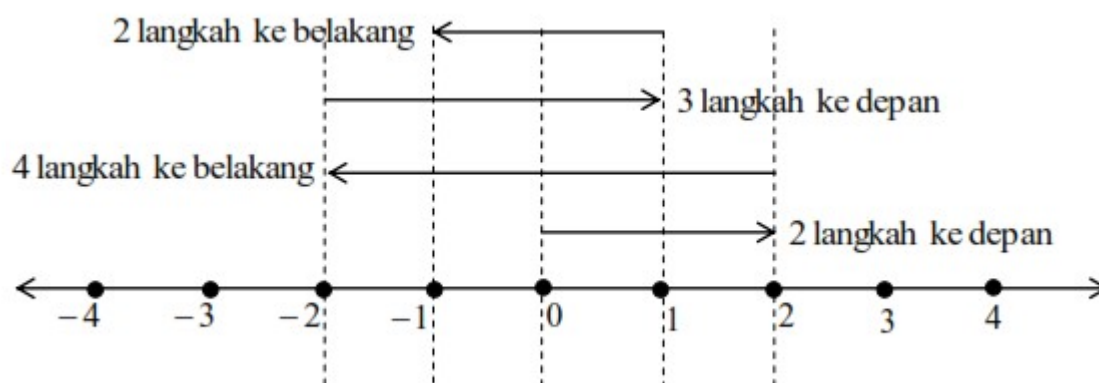
Nilai Mutlak adalah nilai suatu bilangan yang dihitung dari jarak bilangan itu dengan nol (0), sehingga bilangan yang dinilai mutlakkan selalu bernilai positif.

#### 1. (a) Konsep Nilai Mutlak

Untuk memahami konsep nilai mutlak, akan diilustrasikan dengan cerita berikut ini: Seorang anak pramuka sedang latihan baris berbaris. Dari posisi diam, si anak diminta maju 2 langkah ke depan, kemudian 4 langkah ke belakang. Dilanjutkan dengan 3 langkah ke depan dan akhirnya 2 langkah ke belakang. Dari cerita di atas dapat diambil permasalahan :

1. (a) i. Berapakah banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir ?
- ii. Dimanakah posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam? (berapa langkah ke depan atau berapa langkah ke belakang)

Untuk menjawab permasalahan diatas, akan diberikan gambar garis bilangan berikut:



Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa  $x = 0$  adalah posisi diam (awal) si anak. Anak panah ke kanan menunjukkan arah langkah ke depan (bernilai positif) dan anak panah ke kiri menunjukkan arah langkah ke belakang (bernilai negatif). Sehingga permasalahan di atas dapat dijawab sebagai berikut :

1. Banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir adalah bentuk penjumlahan  $2 + 4 + 3 + 2 = 11$  langkah. Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan tanpa memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif)
2. Dari gambar diatas, dapat dilihat bahwa posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam adalah 1 langkah ke belakang ( $x = -1$ ). Hasil ini didapat dari bentuk penjumlahan  $2 + (-4) + 3 + (-1) = -1$ . Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan dengan memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif).

## Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak

10

Ilustrasi dari penyelesaian soal (a) di atas merupakan dasar dari konsep nilai mutlak. Dimana *Nilai mutlak suatu bilangan real  $x$  merupakan jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan*. Dan dilambangkan dengan  $|x|$ . Secara formal nilai mutlak didefinisikan :

Misalkan  $x$  bilangan real, maka :  $|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$

### 1. (a) Pertidaksamaan Nilai Mutlak Satu Variabel

Pertidaksamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat berikut :

#### Bentuk 1

1. Jika  $|f(x)| < a$ , maka  $-a < f(x) < a$
2. Jika  $|f(x)| > a$ , maka  $f(x) < -a$  atau  $f(x) > a$

#### Bentuk 2

1. Jika  $|f(x)| < g(x)$ , maka  $f^2(x) < g^2(x)$ , dengan syarat  $g(x) > 0$
2. Jika  $|f(x)| > g(x)$ , maka  $f^2(x) > g^2(x)$ , dengan syarat  $g(x) > 0$

#### Bentuk 3

1. Jika  $|f(x)| < |g(x)|$ , maka  $f^2(x) < g^2(x)$
2. Jika  $|f(x)| > |g(x)|$ , maka  $f^2(x) > g^2(x)$

Contoh :

1. Tentukan interval nilai  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $|2x + 3| < 5$

Jawab :

$$|2x + 3| < 5$$

$$-5 < 2x + 3 < 5$$

$$-5 - 3 < 2x + 3 - 3 < 5 - 3$$

$$-8 < 2x < 2$$

$$-4 < x < 1$$

1. Tentukan interval nilai  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $|2x - 9| < 4x - 3$

Jawab :

$$|2x - 9| < 4x - 3$$

$$(2x - 9)^2 < (4x - 3)^2$$

$$4x^2 - 36x + 81 < 16x^2 - 24x + 9$$

$$-12x^2 - 12x + 72 < 0$$

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x + 3)(x - 2) > 0$$

$$x < -3 \text{ atau } x > 2 \dots\dots\dots (??)$$

$$\text{Syarat : } 4x - 3 > 0 \implies x > \frac{3}{4} \dots\dots\dots (??)$$

Dari (??) dan (??) diperoleh interval :  $x > 2$

1. Tentukan interval nilai  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan  $|x + 4| \geq |3x - 8|$

Jawab :

$$|x + 4| \geq |3x - 8|$$

$$(x + 4)^2 \geq (3x - 8)^2$$

$$x^2 + 8x + 16 \geq 9x^2 - 48x + 64$$

$$-8x^2 + 56x - 48 \geq 0$$

$$x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 6$$

### 1. (a) Menemukan konsep nilai mutlak

Nilai mutlak dari suatu bilangan adalah positif. Hal ini sama dengan akar dari sebuah bilangan selalu positif. Misal  $a \in R$ , maka  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ . Dengan demikian grafik fungsi nilai mutlak selalu berada di atas sumbu X.

#### Konsep

Persamaan dan pertidaksamaan linier dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan.

Misalnya jika diketahui  $|ax + b| = c$ , untuk  $a, b, c \in R$ ,

maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan  $ax + b = c$ .

Demikian juga untuk pertidaksamaan linier.

#### Prinsip

1. Bentuk umum dari persamaan linier dinyatakan :  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0$  dengan setiap koefisien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan riil. Jika  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ , maka diperoleh persamaan linier satu variable dan apabila  $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$  maka diperoleh persamaan linier dua variable.
2. Pertidaksamaan linier adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan tanda pertidaksamaan  $<, \leq, >, \text{ dan } \geq$ .  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n > 0$  dengan setiap koefisien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan riil. Jika  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ , maka diperoleh pertidaksamaan linier satu variable dan apabila  $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$  maka diperoleh pertidaksamaan linier dua variable.

Bentuk umum dari persamaan linier dinyatakan :  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0$  dengan setiap koefisien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan riil. Jika  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ , maka diperoleh persamaan linier satu variable dan apabila  $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$  maka diperoleh persamaan linier dua variable.

1. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linier adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variable yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaan dapat :

(??) tepat satu,

(??) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian, atau

(??) tidak punya penyelesaian.

### 4. Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan lambing  $<, >, \geq$ , dan  $\leq$ . Contohnya bentuk pertidaksamaan :  $y + 7 < 7$  dan  $2y + 1 > y + 4$ . Pertidaksamaan linier dengan satu variable adalah suatu kalimat terbuka yang hanya memuat satu variable dengan derajat satu, yang dihubungkan oleh lambang  $<, >, \geq$ , dan  $\leq$ . Variablenya hanya satu yaitu y dan berderajat satu. Pertidaksamaan yang demikian disebut pertidaksamaan linier dengan satu variable (peubah).

#### Menentukan Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linier Satu variable

Sifat- sifat pertidaksamaan adalah :

1. Jika pada suatu pertidaksamaan kedua ruasnya ditambah atau dikurang dengan bilangan yang sama, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
2. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan positif, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
3. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan negatif, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula bila arah dari tanda ketidaksamaan dibalik

## Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak

4. Jika pertidaksamaannya mengandung pecahan, cara menyelesaikannya adalah mengalikan kedua ruasnya dengan KPK penyebut-penyebutnya sehingga penyebutnya hilang .

**Menyelesaikan Pertidaksamaan Nilai Mutlak** Menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak caranya hampir sama dengan persamaan nilai mutlak. hanya saja berbeda sedikit pada tanda ketidaksamaan-nya. Langkah-langkah selanjutnya seperti menyelesaikan pertidaksamaan linear atau kuadrat satu variabel .Pertidaksamaan mutlak dapat digambarkan sebagai berikut.

$$\text{Untuk } |x|, \begin{cases} |x| < a, & \text{maka penyelesaiannya } -a < x < a \\ |x| > a, & \text{maka penyelesaiannya } x < -a \text{ atau } x > a \end{cases}$$

Dengan  $a \geq 0, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

Apabila fungsi di dalam nilai mutlak berbentuk  $ax + b$  maka pertidaksamaan nilai mutlak dapat diselesaikan seperti berikut.

$$\text{Untuk } |ax + b|, \begin{cases} |ax + b| < p, & \text{maka penyelesaiannya } -p < x < p \\ |ax + b| > p, & \text{maka penyelesaiannya } x < -p \text{ atau } x > p \end{cases}$$

Dengan  $p \geq 0, x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$

Lebih jelasnya per-

hatikan contoh berikut ini.

### Contoh 1 :

Tentukan himpunan penyelesaian  $3x - 7 > 2x + 2$  jika  $x$  merupakan anggota  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$

Jawab :

$$3x - 7 > 2x + 2; x \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$$

$$3x - 2x - 7 > 2x - 2x + 2 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 2x)$$

$$x - 7 > 2$$

$$x - 7 + 7 > 2 + 7 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 7)$$

$$x > 9$$

jadi himpunan penyelesaiannya adalah  $\{x \mid x > 9; x \text{ bilangan asli} \leq 15\}$

$$\text{HP} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

### Contoh 2 :

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan  $3x - 1 < x + 3$  dengan  $x$  variable pada himpunan bilangan cacah.

Jawab :

$$3x - 1 < x + 3$$

$$3x - 1 + 1 < x + 3 + 1 \quad (\text{kedua ruas ditambah } 1)$$

$$3x < x + 4$$

$$3x + (-x) < x + (-x) + 4 \quad (\text{kedua ruas ditambah } -x)$$

$$2x < 4$$

$$x < 2$$

Karena  $x$  anggota bilangan cacah maka yang memenuhi  $x < 2$  adalah  $x = 0$  atau  $x = 1$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah  $\{0, 1\}$  .

### Contoh 3 :

Sebuah perahu angkut dapat menampung dengan berat tidak lebih dari 1 ton . jika sebuah kotak beratnya 15 kg, maka berapa paling banyak kotak yang dapat diangkut oleh perahu ?

Jawab :

Kalimat matematika :  $15 \text{ kg } x \leq 1 \text{ ton}$

Penyelesaian :  $15 \text{ kg } x \leq 1.500 \text{ kg}$

$$x \leq 1.500 \text{ kg}$$

$$x \leq 100$$

jadi perahu paling banyak mengangkut 100 kotak .

**Contoh 4 :**

Jarak terpendek yang diperlukan untuk menghentikan suatu mobil sejak pengereman dilakukan disebut jarak henti. Jarak henti ini merupakan faktor penting yang perlu diuji sebelum peluncuran produk mobil baru. Data mengenai jarak henti dapat digunakan untuk menghitung waktu reaksi pengemudi (selang waktu mulai pengemudi melihat kejadian sampai dia bereaksi menginjak pada rem) berdasarkan tingkat kelajuan mobil (dalam meter/jam).

Suatu penelitian menyatakan bahwa jarak henti dapat dinyatakan dengan formula :  $d = 0,44v^2 + 1,1v$ , dimana  $v$  adalah kelajuan dan  $d$  dalam meter.

Pada batas kelajuan berapakah jarak henti mobil lebih dari 100 meter?

*Penyelesaian :*

Oleh karena kelajuan selalu bernilai positif, maka  $0,44v^2 + 1,1v = 0,44v^2 + 1,1v$ . Selanjutnya, agar jarak henti mobil lebih dari 100 meter, maka  $d$  haruslah lebih besar dari seratus.

$$\begin{aligned} |0,44v^2 + 1,1v| &> 100 \\ \Leftrightarrow 0,44v^2 + 1,1v - 100 &> 0 \\ \Leftrightarrow 22v^2 + 55v - 5000 &> 0 \end{aligned}$$

$$a = 22, \quad b = 55, \quad c = -5000$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ v &= \frac{-55 \pm \sqrt{3025 + 440000}}{44} \\ v &= \frac{-55 \pm \sqrt{443025}}{44} \\ v &\approx \frac{-55 \pm 665,6}{44} \\ v_1 &\approx \frac{-55 + 665,6}{44} \approx 13,9 \text{ meter/jam} \\ v_2 &\approx \frac{-55 - 665,6}{44} \approx -16,4 \text{ meter/jam} \end{aligned}$$

Jadi, batas kelajuannya jarak henti mobil lebih dari 100 meter adalah  $-16,4 < v < 13,9$  meter/jam.

**Contoh 5 :**

Selisih antara panjang dan lebar suatu persegi panjang kurang dari 6 cm. Jika keliling persegi panjang adalah 32 cm, maka tentukan batas nilai lebar persegi panjang tersebut!

*Penyelesaian :*

Oleh karena keliling persegi panjang adalah 32 cm, maka  $2(p + l) = 32 \Leftrightarrow p + l = 16 \Leftrightarrow p = 16 - l$

Selanjutnya, karena selisih antara panjang dan lebar persegi kurang dari 6 cm, maka

$$|p - l| < 6$$

$$\Leftrightarrow -6 < 16 - l - l < 6$$

$$\Leftrightarrow -6 < 16 - 2l < 6$$

$$\Leftrightarrow -6 - 16 < -2l < 6 - 16$$

$$\Leftrightarrow -22 < -2l < -10$$

$$\Leftrightarrow -11 < -l < -5$$

$$\Leftrightarrow 11 > l > 5$$

$$\Leftrightarrow 5 < l < 11$$

Dengan demikian, batas nilai lebar persegi panjang yang dimaksud adalah antara 5 cm sampai dengan 11 cm.

**Contoh 6 :**

Pergerakan suatu titik dalam koordinat kartesius ditentukan oleh nilai absis dan memenuhi pertidaksamaan  $|x - 1| + 2|x - 1| < 15$ . Tentukan nilai  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan tersebut!

*Penyelesaian :*

Jika dimisalkan  $|x - 1| = p$ , maka diperoleh hasil sebagai berikut :

$$p^2 + 2p < 15$$

$$\Leftrightarrow p^2 + 2p - 15 < 0$$

$$\Leftrightarrow (p + 5)(p - 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow -5 < p < 3$$

$$\Leftrightarrow p < 3 \text{ atau } p > -5$$

$$p < 3$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 + 1 < x < 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 4$$

$$p > -5$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| > -5 \text{ selalu terpenuhi untuk setiap } x \in \mathbb{R}$$

jadi, nilai  $x$  yang memenuhi adalah  $\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4 \}$ .

**Mengubah soal cerita ke bentuk pertidaksamaan linear**

Pertidaksamaan Linear adalah pertidaksamaan yang memiliki variabel atau peubah yang berderajat satu. Pada kesempatan sebelumnya telah dibahas bagaimana penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel. Berdasarkan prinsip penyelesaian tersebut, pertidaksamaan linear ternyata dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu untuk menyelesaikan berbagai persoalan atau perhitungan yang melibatkan pertidaksamaan. Beberapa perhitungan matematika dapat diterjemahkan ke dalam model matematika berbentuk pertidaksamaan satu variabel. Soal tersebut dapat diubah ke pertidaksamaan nilai mutlak sesuai model soalnya. Pada kesempatan ini, bahan belajar sekolah akan membahas bagaimana cara mengubah soal cerita ke bentuk pertidaksamaan linear dan menentukan penyelesaiannya.

**Bentuk Pertidaksamaan Linear**

Setiap masalah memiliki bentuknya masing-masing. Tidak sesuai soal dapat diselesaikan dengan model matematika berbentuk pertidaksamaan linear. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan suatu permasalahan kita harus mengidentifikasi bentuk pertidaksamaan yang paling relevan dengan masalah tersebut.

Karena kita berbicara tentang pertidaksamaan linear, maka kita harus terlebih dahulu memahami ciri dari pertidaksamaan linear dan mengenali ciri-ciri soal yang berkaitan dengan pertidaksamaan linear. Salah satu ciri utama yang dapat kita lihat adalah penggunaan kata-kata pertidaksamaan. Dalam Soal cerita, hubungan pertidaksamaan seringkali dihadirkan dengan penggunaan kata-kata seperti kurang dari, sebanyak-banyaknya, maksimal, dan sebagainya. Kata-kata tersebut merupakan indikasi bahwa soal tersebut berbentuk pertidaksamaan. Selanjutnya, kita harus mengidentifikasi kondisi yang diketahui dalam soal. Kita harus mengidentifikasi besaran yang digunakan dalam soal dan selanjutnya menyatakan besaran tersebut sebagai variabel. Setelah itu, kita susunlah pertidaksamaan yang sesuai dengan soal. Sebagai acuan, kita harus memahami bentuk umum atau bentuk baku dari pertidaksamaan yang ingin kita gunakan. Karena kita membahas pertidaksamaan linear satu variabel, maka kita harus memahami bentuk baku dari pertidaksamaan linear satu variabel.

Bentuk baku pertidaksamaan linear satu variabel dalam variabel  $x$  :

1. Pertidaksamaan kurang dari :  $ax + b < 0$
2. Pertidaksamaan kurang dari sama dengan :  $ax + b \leq 0$
3. Pertidaksamaan lebih dari :  $ax + b > 0$
4. Pertidaksamaan lebih dari sama dengan :  $ax + b \geq 0$

Pada bentuk di atas,  $x$  merupakan variabel atau peubah sedangkan  $a$  dan  $b$  merupakan bilangan-bilangan real. Nilai  $a$  dan  $b$  diperoleh dari soal cerita sehingga bentuk pertidaksamaannya akan bergantung pada soal ceritanya.

Suatu pertidaksamaan linear satu variabel dapat diselesaikan dengan metode manipulasi aljabar. Dalam memanipulasi aljabar pertidaksamaan linear, ada aturan atau sifat-sifat yang harus diperhatikan.

### Menyelesaikan soal cerita berbentuk pertidaksamaan linear

Untuk menyelesaikan suatu soal cerita, kita harus memastikan bentuk pertidaksamaan yang sesuai. Jika soal cerita sudah dipastikan berbentuk pertidaksamaan linear satu variabel, maka soal tersebut dapat kita selesaikan dengan prinsip penyelesaian pertidaksamaan linear.

Langkah pertama yang harus kita lakukan adalah mengidentifikasi besaran yang tidak diketahui nilainya dalam soal. Besaran inilah yang nanti akan kita nyatakan sebagai variabel. Kemudian kita identifikasi nilai-nilai yang diketahui dalam soal dan hubungan pertidaksamaan yang digunakan.

Selanjutnya kita lakukan pemisalan untuk menyatakan besaran sebagai variabel. Kita bisa menggunakan symbol huruf abjad yang paling relevan dengan besaran tersebut kemudian kita susun bentuk pertidaksamaannya berdasarkan nilai-nilai yang diketahui dalam soal.

Setelah dihasilkan bentuk pertidaksamaan linear satu variabel, selanjutnya kita selesaikan pertidaksamaan tersebut dengan prinsip manipulasi aljabar. Dalam manipulasi ini kita harus memperhatikan sifat-sifat perubahan tanda pertidaksamaan.

Berdasarkan uraian diatas, maka berikut langkah menyelesaikan soal cerita yang berbentuk pertidaksamaan linear satu variabel:

1. Identifikasi besaran yang tidak diketahui dalam soal
2. Nyatakan besaran tersebut sebagai variabel
3. Identifikasi hubungan pertidaksamaan yang digunakan
4. Susun pertidaksamaan linear satu variabel sesuai soal
5. Tentukan penyelesaian pertidaksamaannya.

### Contoh Soal Cerita

Jumlah dua bilangan tidak kurang dari 400. Jika bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan

kedua, maka tentukanlah batas-batas nilai dari kedua bilangan tersebut.

**Pembahasan :**

Langkah pertama, kita identifikasi besaran yang belum diketahui. Besaran tersebut adalah bilangan pertama dan bilangan kedua. Selanjutnya kita misalkan bilangan pertama dan bilangan kedua sebagai variabel.

Misalkan :

Bilangan pertama =  $x$

Bilangan kedua =  $y$

Dari soal diketahui kalau bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan kedua, dengan demikian berlaku hubungan  $x=4y$

Selanjutnya diketahui bahwa jumlah kedua bilangan tersebut tidak kurang dari 400. Kata “Tidak kurang” dalam soal merupakan indikasi hubungan pertidaksamaan lebih besar sama dengan ( $\geq$ ). Itu artinya, model pertidaksamaannya adalah pertidaksamaan lebih dari sama dengan.

Berdasarkan kondisi yang diketahui dalam soal, maka bentuk pertidaksamaan yang sesuai dengan soal adalah sebagai berikut :

$$1. x + y \geq 400$$

Karena  $x = 4y$ , maka pertidaksamaannya menjadi:

$$1. 4y + y \geq 400$$

$$2. 5y \geq 400$$

Selanjutnya, kita selesaikan pertidaksamaan linear tersebut dengan manipulasi aljabar yaitu dengan membagi kedua ruas dengan 5 sehingga diperoleh :

$$1. 5y \geq 400$$

$$2. y \geq 80$$

Karena kedua ruas sama-sama dibagi 5 (bilangan positif), maka tanda pertidaksamaannya tetap. Nilai  $y$  di atas merupakan batas nilai untuk bilangan kedua.

Selanjutnya kita tentukan batas nilai untuk bilangan pertama:

$$1. x + y \geq 400$$

$$2. x + 80 \geq 400$$

$$3. x + 80 - 80 \geq 400 - 80$$

$$4. x \geq 320$$

Jadi, batas nilai untuk bilangan pertama tidak kurang dari 80 dan batas nilai untuk bilangan kedua tidak kurang dari 320.



## 2. Linear Tiga Variabel

### 2.1 Corollaries

### 2.2 Penerapan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

#### CONTOH SOAL PERSAMAAN LINEAR 3 VARIABEL

##### Contoh 1: Memodelkan Permasalahan Keuangan

Suatu perusahaan rumahan meminjam Rp 2.250.000.000,00 dari tiga bank yang berbeda untuk memperluas jangkauan bisnisnya. Suku bunga dari ketiga bank tersebut adalah 5%, 6%, dan 7 %. Tentukan berapa pinjaman perusahaan tersebut terhadap masing-masing bank jika bunga tahunan yang harus dibayar perusahaan tersebut adalah Rp 130.000.000,00 dan banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%?

**Pembahasan** Misalkan  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  secara berturut-turut adalah banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5%, 6%, dan 7%. Ini berarti yang menjadi persamaan pertama kita adalah  $x + y + z = 2.250$  (dalam jutaan). Persamaan kedua diperoleh dari total bunga pertahunnya, yaitu Rp 130.000.000,00:  $0,05x + 0,06y + 0,07z = 130$ . Sedangkan persamaan ketiga dapat diperoleh dari kalimat, “banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%”, sehingga persamaannya adalah  $x = 2z$ . Ketiga persamaan tersebut membentuk sistem seperti berikut.

Suku- $x$  pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi

Gunakan  $-5P1 + P2$  untuk mengeliminasi suku- $x$  di  $P2$ , dan  $-P1 + P3$  untuk mengeliminasi suku- $x$  di  $P3$ .

Sehingga,  $P2$  yang baru adalah  $y + 2z = 1.750$  dan  $P3$  yang baru adalah  $y + 3z = 2.250$  (setelah dikalikan dengan  $-1$ ), yang menghasilkan sistem berikut.

Dengan menyelesaikan subsistem  $2 \times 2$  (dua persamaan terakhir) menggunakan  $-P2 + P3$  menghasilkan  $z = 500$ . Selanjutnya dengan menerapkan substitusi balik akan menghasilkan  $x = 1.000$  dan  $y = 750$ . Diperoleh selesaian SPLTV tersebut adalah (1.000, 750, 500). Ini berarti bahwa

perusahaan tersebut meminjam 1 miliar rupiah pada bunga 5%, 750 juta rupiah pada bunga 6%, dan 500 juta rupiah pada bunga 7%.

Sumber : <https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

### Contoh 2: Permasalahan Masa Kehamilan Hewan

Masa kehamilan rata-rata (dalam hari) dari gajah, badak, dan unta apabila dijumlahkan adalah 1.520 hari. Masa kehamilan badak adalah 58 hari lebih lama daripada unta. Dua kali masa kehamilan unta kemudian dikurangi 162 merupakan masa kehamilan gajah. Berapa hari masa kehamilan dari masing-masing hewan tersebut?

**Pembahasan** Misalkan  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  secara berturut-turut adalah masa kehamilan gajah, badak, dan unta. Sehingga, persamaan pertama kita adalah  $x + y + z = 1.520$ . Karena masa kehamilan badak 58 hari lebih lama daripada unta, maka persamaan keduanya adalah  $y = z + 58$ . Sedangkan dari kalimat, “Dua kali masa kehamilan unta kemudian dikurangi 162 merupakan masa kehamilan gajah”, diperoleh persamaan ketiganya adalah  $x = 2z - 162$ . Ketiga persamaan tersebut membentuk sistem sebagai berikut.

Suku- $x$  pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi

Eliminasi suku- $x$  pada  $P3$  dengan  $P1 + (-P3)$  ( $P2$  tidak memiliki suku- $x$ ) akan diperoleh persamaan  $y + 3z = 1.682$ . Sehingga SPLTV di atas ekuivalen dengan SPLTV,

Selanjutnya kita dapat menyelesaikan subsistem  $2 \times 2$  dan diperoleh  $z = 406$ . Dengan menerapkan substitusi balik akan menghasilkan  $x = 650$  dan  $y = 464$ , sehingga selesai dari SPLTV di atas adalah  $(650, 464, 406)$ . Jadi, masa kehamilan rata-rata dari gajah, badak, dan unta secara berturut-turut adalah 650 hari, 464 hari, dan 406 hari.

Sumber : <https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

### Contoh 3: Teka-teki Sejarah Indonesia

Sampai saat ini, bangsa Indonesia telah mengalami peristiwa-peristiwa sejarah yang patut diketahui, tiga diantaranya adalah kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Surat Perintah Sebelas Maret (Supersemar). Jika kita menjumlahkan tahun terjadinya ketiga peristiwa tersebut maka kita akan mendapatkan 5.441. Supersemar lahir 87 tahun setelah lahirnya tokoh emansipasi wanita Indonesia, R. A. Kartini, dan 370 tahun setelah kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman. Pada tahun berapa masing-masing peristiwa sejarah tersebut terjadi?

**Pembahasan** Misalkan  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  secara berturut-turut adalah tahun terjadinya peristiwa kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Supersemar. Maka kita akan mendapatkan SPLTV sebagai berikut.

SPLTV di atas memiliki bentuk standar seperti berikut.

Dengan menggunakan  $P1 + P3$  kita akan mengeliminasi suku- $a$  pada  $P3$  dan menghasilkan persamaan  $P3$  yang baru:  $b + 2c = 5.811$ .

Selanjutnya kita dapat menyelesaikan subsistem persamaan linear dua variabel (dua persamaan terbawah) dan mendapatkan  $c = 1.966$ . Dengan substitusi balik, kita juga akan memperoleh  $a = 1.596$  dan  $b = 1.879$ . Sehingga, selesai dari SPLTV di atas adalah  $(1.596, 1.879, 1.966)$ . Atau dengan kata lain, kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Supersemar secara berturut-turut terjadi pada tahun 1596, 1879, dan 1966.

Sumber : <https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

### Contoh 4: Permasalahan Campuran Kimia

Seorang ahli kimia mencampur tiga larutan glukosa yang memiliki konsentrasi 20%, 30%, dan 45% untuk menghasilkan 10 L larutan glukosa dengan konsentrasi 38%. Jika volume larutan 30% yang

digunakan adalah 1 L lebih besar daripada dua kali larutan 20% yang digunakan, tentukan volume masing-masing larutan yang digunakan.

**Pembahasan** Misalkan  $p$ ,  $q$ , dan  $r$  secara berturut-turut merupakan volume dari larutan glukosa yang memiliki konsentrasi 20%, 30%, dan 45%. Maka kita akan mendapatkan persamaan pertamanya adalah  $p + q + r = 10$  dan persamaan keduanya adalah  $0,2p + 0,3q + 0,45r = 3,8$  (3,8 diperoleh dari  $0,38 \cdot 10$ ). Dari kalimat, “volume larutan 30% yang digunakan adalah 1 L lebih besar daripada dua kali larutan 20% yang digunakan”, kita mendapatkan persamaan ketiga, yaitu  $q = 2p + 1$ . Sehingga, ketiga persamaan tersebut akan membentuk sistem,

Suku- $p$  pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi

Gunakan  $-4P1 + P2$  dan  $2P1 + P3$  untuk mengeliminasi suku- $p$  pada  $P2$  dan  $P3$ .

Sehingga,  $P2$  yang baru adalah  $2q + 5r = 36$  dan  $P3$  yang baru adalah  $3q + 2r = 21$  yang membentuk sistem,

Selanjutnya gunakan  $3P2 + (-2P3)$  untuk mengeliminasi suku- $q$  pada  $P3$ .

Dengan membagi persamaan di atas dengan 11, maka akan dihasilkan persamaan  $r = 6$  yang akan menjadi  $P3$  baru pada sistem berikut.

Selanjutnya kita gunakan substitusi balik untuk mendapatkan nilai  $p$  dan  $q$ , yaitu  $p = 1$  dan  $q = 3$ . Sehingga selesai dari SPLTV tersebut adalah (1, 3, 6). Atau dengan kata lain, volume larutan glukosa dengan konsentrasi 20%, 30%, dan 45% secara berturut-turut adalah 1 L, 3 L, dan 6L.

Sumber :<https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

#### Contoh 5: Menulis Kembali Fungsi Rasional

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi rasional,

dapat ditulis dalam bentuk penjumlahan dua suku

di mana koefisien-koefisien  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  adalah selesai-an-selesai-an untuk SPLTV

Tentukan koefisien-koefisien tersebut dan uilah jawabanmu dengan menjumlahkan dua suku tersebut.

**Pembahasan** Dengan menggunakan  $P1 + (-P3)$  kita dapat mengeliminasi suku- $A$  pada  $P3$  untuk dijadikan  $P3$  yang baru.

Dengan menyelesaikan subsistem  $2 \times 2$  diperoleh  $C = -3$ . Kemudian dengan substitusi balik, diperoleh  $A = 2$  dan  $B = -2$ . Sehingga selesai dari SPLTV tersebut adalah (2, -2, -3). Selanjutnya kita uji penjumlahan dua sukunya.

Setelah diuji, ternyata penjumlahan dua suku tersebut sama dengan fungsi rasional di awal. Semoga bermanfaat, yos3prens.

Sumber :<https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

#### Contoh 6

Ahmad membeli di sebuah Toko peralatan sekolah berupa 4 buah penggaris, 6 buah buku tulis dan 2 buah pena biaya sebesar Rp 19.000,00. Di Toko yang sama Sulaiman berbelanja 3 buah buku tulis dan sebuah penggaris dengan menghabiskan uang Rp 7.000,00. Jika harga sebuah penggaris adalah Rp 1.000,00 maka berpakah harga sebuah dengan menghabiskan pena?

Untuk menyelesaikan kasus diatas, kita dapat menggunakan konsep sistem persamaan tiga variabel.  
**Pembahasan!** Dimisalkan bahwa;  
 $X$  = harga sebuah penggaris  
 $Y$  = harga sebuah buku  
 $Z$  = harga sebuah pena  
**Diketahui:**  $4X + 6Y + 2Z = 19.000$  persamaan (I)

$3Y + X = 7.000$  persamaan (II)

$X = 1.000$  persamaan (III) **Ditanya:**  $Z = ?$  **Jawab:** Kita selesaikan terlebih dahulu persamaan (II)

dengan bantuan persamaan (III), untuk mengetahui nilai  $Y$  (harga sebuah buku).  $3Y + X = 7.000$

(  $X = 1.000$  )  $3Y + 1.000 = 7.000$   $3Y = 7.000 - 1.000$   $3Y = 6.000$   $Y =$

$6.000/3Y = 2.000$  persamaan (IV) Kita lanjutkan untuk menyelesaikan persamaan

(I) dengan bantuan persamaan (III) dan persamaan (IV) yang dihasilkan dari penghitungan di atas untuk mencari nilai  $Z$  (harga sebuah pena). Kita sudah memiliki nilai;  $Y = 2.000$  dan,  $X =$

1.000. Maka,  $4X + 6Y + 2Z = 19.000$   $4(??) + 6(??) + 2Z = 19.000$   
 $4.000 + 12.000 + 2Z = 19.000$   
 $16.000 + 2Z = 19.000$   
 $2Z = 19.000 - 16.000$   
 $2Z = 3.000$   
 $Z = 3.000/2 = 1.500$  Sudah terjawab masing – masing nilai X, Y dan Z sebagai berikut;  $X = 1.000$   $Y = 2.000$   $Z = 1.500$

Jadi, harga sebuah pena adalah Rp 1.500,00

Sumber : <http://www.berpendidikan.com/2015/05/sistem-persamaan-linear-tiga-variabel-dan-contohnya.html>

### Contoh 7

3 orang siswi sd yang bernama nazsa, chindy dan euis akan membeli penghapus, pensil, dan buku. :

1. Nazsa membeli 3 penghapus, 4 pensil, dan 5 buku dengan harga Rp.26.000,00
2. Chindy membeli 5 penghapus, 2 pensil, dan 1 buku dengan harga Rp.12.000,00
3. Euis membeli 1 penghapus, 1 pensil, dan 2 buku dengan harga Rp.9.000,00

Tentukan berapa harga penghapus, pensil, dan buku !!!! Jawab : untuk mengerjakan soal matematika cerita kita rubah dulu kalimat soal di atas menjadi kalimat matematika :  
 Penghapus : x  
 Pensil : y  
 Buku : z  
 maka : persamaan 1 Nazsa :  $3x + 4y + 5z = \text{Rp.}26.000,00$   
 persamaan 2 Chindy :  $5x + 2y + z = \text{Rp.}12.000,00$   
 persamaan 3 Euis :  $x + y + 2z = \text{Rp.}9.000,00$   
 ada 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel

### Langkah ke-1 :

Kita lakukan metode eliminasi. Kita ambil persamaan ke-2 dan persamaan ke-3  
 $5x + 2y + z = 9.000$   
 $x + y + 2z = 9.000$   
 dikalikan dua dan persamaan tiga kita kalikan satu, tujuannya untuk menghilangkan variabel z supaya semua variabel menjadi variabel x  
 maka :  $10x + 4y + 2z = 18.000$   
 $x + y + 2z = 9.000$   
 $-9x - 3y = 9.000$   
 $3(3x + y) = 15.000$   
 $3x + y = 5.000$   
 supaya lebih sederhana maka persamaan kita bagi dengan 3, maka :  
 $3(3x + y)/3 = 15.000/3$   
 $3x + y = 5.000$   
 supaya lebih sederhana maka persamaan kita kurangi  $3x$ , maka :  
 $3x + y - 3x = 5.000 - 3x$   
 $y = 5.000 - 3x$   
 kemudian karena y sudah menjadi nilai x maka kita lakukan metode substitusi tujuannya untuk mengganti variabel z menjadi bernilai x, kita ambil persamaan 3 untuk melakukan substitusi :  
 $x + y + 2z = 9.000$   
 $x + y + 2z - y - 2z = 9.000 - y - 2z$   
 supaya lebih sederhana persamaan kita kurangi -y dan -2z  
 $x = 9.000 - y - 2z$   
 kita substitusikan y ke persamaan 3, maka :  
 $x = 9.000 - y - 2z$   
 dikarenakan  $y = 5.000 - 3x$ , maka :  
 $x = 9.000 - (5.000 - 3x) - 2z$   
 $x = 9.000 - 5.000 + 3x - 2z$   
 $x = 4.000 + 3x - 2z$   
 supaya lebih sederhana maka persamaan kita kurangi  $3x$  :  
 $x - 3x = 4.000 - 3x - 2z - 3x$   
 $-2x = 4.000 - 2z$   
 untuk lebih menyederhanakan lagi persamaan kita kurangi  $-2x$  :  
 $-2x - 4.000 = 4.000 - 2z - 4.000$   
 $-2x = -2z$   
 supaya  $-2x$  menjadi z maka persamaan kita bagi dengan  $-2$  :  
 $x = z$

$$x + 2.000 = z$$

### Langkah ke-2

Untuk langkah ke-2 kita cari berapakah nilai yang sesungguhnya dari variabel x, dengan cara mensubstitusikan variabel y dan variabel z yang sudah kita rubah nilainya menjadi x untuk melakukan substitusi menemukan variabel x kita gunakan persamaan ke-1 karena persamaan ke-2 dan ke-3 sudah kita gunakan pada langkah yang pertama.  
 Maka :  $3x + 4y + 5z = 26.000$   
 $3x + 4y + 5z - 4y - 5z = 26.000 - 4y - 5z$   
 $3x = 26.000 - 4y - 5z$   
 kita substitusikan variabel y dan z yang sudah saya tandai warna hijau, maka :  
 $3x = 26.000 - 4(5.000 - 3x) - 5(x + 2.000)$   
 $3x = 26.000 - 20.000 + 12x - 5x - 10.000$   
 $3x = -4.000 + 7x$   
 supaya persamaan menjadi lebih sederhana kita kurangi  $-7x$  :  
 $3x - 7x = -4.000 + 7x - 7x$   
 $-4x = -4.000$   
 supaya  $-4x$  menjadi x maka persamaan kita bagi dengan  $-4$  :  
 $x = 1.000$

### Langkah ke-3

Untuk langkah ke-3, dikarenakan nilai variabel x sudah di temukan maka masalah yang belum kita temukan kita harus mencari berapa nilai variabel y dan z. perhatikan persamaan yang sudah saya tandai warna hijau di atas! gunakan kedua persamaan yang sudah saya tandai warna hijau untuk mencari nilai dari variabel y dan z. Kita cari nilai y terlebih dahulu  $y = 5.000 - 3x$ , di karenakan  $x = 1.000$  maka :  
 $y = 5.000 - 3(1.000)$   
 $y = 5.000 - 3.000$   
 $y = 2.000$   
 kemudian kita cari nilai z :  
 $z = 2.000 + x$   
 dikarenakan  $x = 1.000$  maka :  
 $z = 2.000 + 1.000$   
 $z = 3.000$   
 Persamaan yang saya tandai warna

Sumber : <https://matematikaakuntansi.blogspot.co.id/2015/10/cara-menyelesaikan-sistem-persamaan.html>

Tentukan Hp dari  $SPLx - 2y + z = 0$ .....(Pers1) $3x + y - z = 5$ .....(Pers2) $x - 3y - 2z = - 15$ ....(Pers3)Penyelesaian:langkah 1:

kedua variabel

$$4x - y = 5 \quad \dots\dots\dots(\text{Pers4})$$
$$\begin{array}{l} |x2| \quad 2x - 4y + 2z = 0 \\ x - 3y - 2z = -15 \quad |x1| \quad x - 3y - 2z = -15 \end{array}$$

---

+

$$3x - 7y = -15$$

$$4x - y = 5 \quad | \times 7 | \quad 28x - 7y = 35$$

$$3x - 7y = -15 \quad |x1| \quad 3x - 7y = -15$$

—

$$50 \qquad \qquad \qquad \underline{x = 50 / 25}$$

$$3x - 7y = -15$$

$$-15 \qquad 6-7y = -15 \qquad -7y = -15-6$$

$$y = -21 / -7 \qquad y = 3$$

$$+z=0 \qquad 2-6+z=0 \qquad -4+z=0 \qquad z=4$$

Sumber : <https://itsystemresearch.blogspot.co.id/2016/06/soal-dan-pembahasan-sistem-persamaan.html>





# Part Two

<b>3</b>	<b>Fungsi</b> .....	<b>25</b>
3.1	Relasi dan Fungsi	
3.2	Operasi Aritmatika	
3.3	Komposisi Fungsi	
3.4	Fungsi Linear	
3.5	Fungsi Kuadrat	
3.6	Fungsi Inversi	
3.7	Fungsi Rasional	
<b>4</b>	<b>Trigonometri</b> .....	<b>41</b>
4.1	Pengukuran Sudut	
4.2	Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku	
4.3	Sudut-sudut Berelasi	
4.4	Identitas Trigonometri	
4.5	Aturan Sinus dan Cosinus	
4.6	Fungsi Trigonometri	
	<b>Bibliography</b> .....	<b>59</b>
	Books	
	Articles	





## 3. Fungsi

### 3.1 Relasi dan Fungsi

#### 1. RELASI

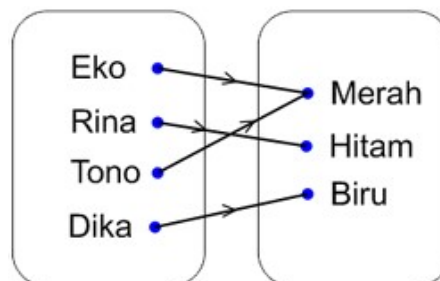
##### (a) Pengertian Relasi

Relasi adalah hubungan antara 2 elemendua himpunan. Relasi dikatakan sebagai suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan yang lain. Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan korespondensi dari anggota-anggota himpunan A ke anggota-anggota himpunan B. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B dengan aturan tertentu.

##### Contoh 1.1

Ada 4 orang anak Eko, Rina, Tono, dan Dika. Mereka diminta untuk menyebutkan warna favorit mereka. Hasilnya adalah sebagai berikut:

Dari hasil uraian di atas terdapat dua buah himpunan. Pertama adalah himpunan anak, kita sebut dengan A dan himpunan warna yang kita sebut dengan B. Hubungan antara A dan B digambarkan seperti ilustrasi di bawah ini:



*Gambar 1 contoh relasi himpunan*

Kesimpulannya, relasi antara himpunan A dan himpunan B adalah “suka dengan warna”. Eko dipasangkan dengan merah karena eko suka dengan warna merah. Rina dipasangkan dengan warna hitam karena rina menyukai warna hitam, dan seterusnya. Dari uraian di atas kita dapat mengambil kesimpulan bahwa definisi relasi adalah

“Relasi antara dua himpunan, contoh himpunan A dengan himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B.”

### Contoh 1.2

Ada 3 anak mengatakan makanan kesukaannya yaitu : Anis menyukai Bakso, Rina menyukai Sate dan Diko menyukai Nasi Padang.

Dari pernyataan diatas terdapat dua himpunan yaitu :

A = Himpunan anak {Anis, Rina, Diko}

B = Himpunan makanan {Bakso, Sate, Nasi Padang}

Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah menyukai atau menyenangi.

Dari contoh di atas, himpunan A tersebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut daerah tujuan (ko-domain) . Sementara itu menyukai disebut relasi. Himpunan semua anggota ko-domain di sebut range (daerah hasil).

#### 1. (a) Menyatakan Relasi

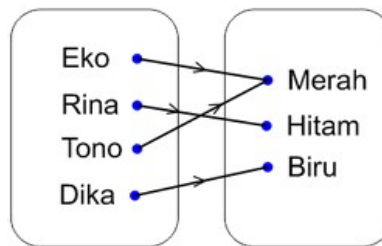
Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu menggunakan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram Cartesius.

##### 1. Diagram Panah

Perhatikan gambar di bawah ini. Relasi antara himpunan A dengan himpunan B dinyatakan dengan panah-panah yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B. Karena penggambarannya menggunakan bentuk panah (arrow) maka disebut dengan diagram panah.

Langkah-langkah menyatakan relasi dengan diagram panah :

- Membuat dua lingkaran atau elips
- Untuk meletakkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B  $x=A$  diletakkan pada lingkaran A dan  $y=B$  diletakkan pada lingkaran B
- X dan Y dihubungkan dengan anak panah
- Arah anak panah menunjukkan arah relasi
- Anak panah tersebut mewakili aturan relasi



Gambar 2 diagram panah

#### 1. Himpunan Pasangan Berurutan

Sebuah relasi juga dapat dinyatakan dengan menggunakan pasangan berurutan. Artinya kita memasangkan himpunan A dengan himpunan B secara berurutan.

menyatakan relasinya dengan pasangan berurutan sebagai berikut:  $(eko, merah), (rina, hitam), (tono, merah), (dika, biru)$ .

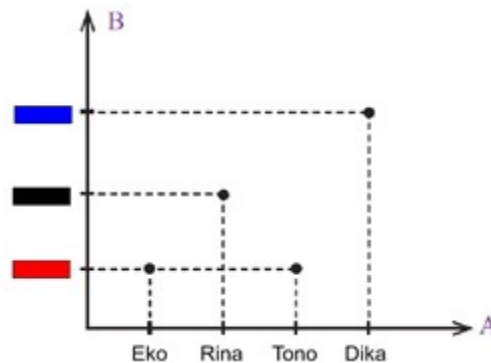
Jadi relasi antara himpunan A dengan himpunan B dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan  $(x,y)$  dengan  $x \in A$  dan  $y \in B$ .

##### 1. Diagram Cartesius

Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan ke dalam pasangan berurutan yang kemudian dituangkan dalam dot (titik-titik) dalam diagram cartesius. Contoh dari relasi suka dengan warna di atas dapat digambarkan dalam bentuk diagram cartesius sebagai berikut:

Pada diagram Cartesius diperlukan dua salip sumbu yaitu : sumbu mendatar (horizontal) dan sumbu tegak (vertical) yang berpotongan tegak lurus.

- $X = A$  diletakkan pada sumbu mendatar
- $Y = B$  diletakkan pada sumbu tegak
- Pemasangan  $(x,y)$  ditandai dengan sebuah Noktah (titik) yang koordinatnya ditulis sebagai pasangan berurutan  $x,y$ .



Gambar 3 Diagram Cartecius

### 1.3 Sifat-Sifat Relasi

#### a. Relasi Refleksif ( Bercermin)

Relasi disebut *refleksif* jika dan hanya jika untuk setiap  $x$  anggota semesta-nya,  $x$  berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi  $R$  refleksif jika dan hanya jika  $xRx$ .

##### Contoh:

Jika diketahui  $A = \{1,2,3,4\}$  dan relasi  $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$  Pada  $A$ , maka  $R$   $x \in A$  adalah refleksif, karena untuk setiap  $x \in A$  terdapat  $(x,x)$  pada  $R$ . Perhatikan relasi pada himpunan  $= \{1,2,3,4\}$  berikut:

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

Relasi-relasi tersebut merupakan relasi refleksif karena memiliki elemen  $(1,1)$ ,  $(2,2)$ ,  $(3,3)$ , dan  $(4,4)$ .

#### b. Relasi Irrefleksif

Relasi  $R$  pada  $A$  disebut *Irrefleksif* (anti refleksif) jika dan hanya jika setiap elemen di dalam tidak berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi, irrefleksif jika dan hanya jika  $x \not R x$ .

##### Contoh :

Diketahui himpunan  $B = \{a,b,c\}$  dan relasi  $R = \{(a,c), (b,c), (b,a)\}$ . Relasi  $R$  adalah irrefleksif, karena  $(a,a)$ ,  $(b,b)$ , dan  $(c,c)$  bukan elemen.

Diketahui  $A = \{1,2,3,4\}$  dan relasi  $R = \{(2,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$ . Relasi  $R$  merupakan relasi irrefleksif, karena tidak terdapat elemen  $(x,x)$ , dimana  $x \in A$ .

#### 1. Relasi Nonrefleksif

Relasi  $R$  pada  $A$  disebut *nonrefleksif* jika dan hanya jika ada sekurang-kurangnya satu elemen di dalam  $A$  yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

##### Contoh :

Perhatikan relasi pada himpunan  $A = \{1,2,3\}$

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)\}$$

Relasi tersebut merupakan relasi non refleksif, karena ada  $(1,2)$  dan  $(2,3)$ .

### 1. Relasi Simetri

Relasi  $R$  disebut *simetri* pada  $S$  jika dan hanya jika setiap dua anggota  $a$  dan  $b$  dari  $S$  berlaku jika  $a$  berelasi  $R$  dengan  $b$  maka  $b$  juga berelasi dengan  $a$ .

Secara simbolik:  $aRb \rightarrow bRa$ .

#### Contoh:

1. Relasi  $R = \{ (a,b), (b,a), (a,c), (c,a) \}$  dalam himpunan  $\{a, b, c\}$ .
2. Ani menyukai Budi, Budi menyukai Ani  $\{(Ani,Budi),(Budi,Ani)\}$

### 1. Relasi Asimetri

Relasi  $R$  disebut *asimetri* pada  $S$  jika dan hanya jika setiap dua anggota  $a$  dan  $b$  dari  $S$  berlaku: jika  $a$  berelasi  $R$  dengan  $b$  maka  $b$  tidak berelasi  $R$  dengan  $a$ .

Secara simbolik:  $R$  asimetri pada  $S$  jhj  $(\forall a,b \in S) aRb \rightarrow b \nrightarrow Ra$ .

#### Contoh:

1. Relasi  $R = \{ (a,b), (b,c), (c,a) \}$  dalam himpunan  $\{a, b, c\}$ .

### 1. Relasi Nonsimetri

Relasi  $R$  disebut *nonsimetri* pada  $S$  jika dan hanya jika ada dua anggota  $a$  dan  $b$  dari  $S$  sedemikian hingga berlaku:  $a$  berelasi  $R$  dengan  $b$  tetapi  $b$  tidak berelasi  $R$  dengan  $a$ . Perhatikan bahwa nonsimetri adalah negasi/ingkaran dari simetri.

#### Contoh:

1. Relasi  $R = \{ (a,b), (a,c), (c,a) \}$  dalam himpunan  $\{a, b, c\}$

### 1. Relasi Antisimetri

Relasi  $R$  disebut *antisimetri* pada  $S$  jika dan hanya jika setiap dua anggota  $a$  dan  $b$  dari  $S$  berlaku: jika  $a$  berelasi  $R$  dengan  $b$  dan  $b$  berelasi  $R$  dengan  $a$  maka  $a=b$ .

#### Contoh:

1.  $A$  = keluarga himpunan.

Relasi “himpunan bagian” adalah relasi yang antisimetris pada  $A$ , karena untuk setiap dua himpunan  $x$  dan  $y$ , jika  $x \subset y$  dan  $y \subset x$ , maka  $x = y$ .

1. Relasi “kurang dari atau sama dengan ( $\leq$ )” dalam himpunan bilangan real. Jadi, relasi “kurang dari atau sama dengan ( $\leq$ )” bersifat anti simetri, karena jika  $a \leq b$  dan  $b \leq a$  berarti  $a = b$ .
1. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat asli  $N$  merupakan contoh relasi yang tidak simetri karena jika  $a$  habis membagi  $b$ ,  $b$  tidak habis membagi  $a$ , kecuali jika  $a = b$ . Sementara itu, relasi “habis membagi” merupakan relasi yang anti simetri karena jika  $a$  habis membagi  $b$  dan  $b$  habis membagi  $a$  maka  $a = b$ .

### 1. Relasi Transitif

$R$  adalah relasi pada  $A$ .  $R$  disebut relasi *Transitif* pada  $A$  jika dan hanya jika setiap 3 anggota himpunan  $A$ ,  $(a,b,c \in A)$  jika  $(a,b) \in R$ , dan  $(b,c) \in R$  maka  $(a,c) \in R$  (setiap tiga anggota  $a,b,c$  dari  $A$ , jika  $a$  berelasi dengan  $b$  dan  $b$  berelasi dengan  $c$  maka  $a$  berelasi dengan  $c$ ).

#### Contoh:

1. Relasi  $R = \{ (a,b), (b,c), (a,c), (c,c) \}$  dalam himpunan  $\{a, b, c\}$ .

### 1. Relasi Nontransitif

$R$  adalah relasi pada  $A$ .  $R$  disebut relasi *nontransitif* pada  $A$  jika dan hanya jika ada tiga anggota himpunan  $A$ ,  $(a,b,c \in A)$  sedemikian hingga  $(a,b) \in R$ , dan  $(b,c) \in R$  dan  $(a,c) \notin R$  (ada tiga anggota  $a,b,c$  dari  $A$  sedemikian hingga  $a$  berelasi dengan  $b$  dan  $b$  berelasi dengan  $c$  dan  $a$  tidak berelasi dengan  $c$ ).

#### Contoh:

$R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$  dalam himpunan  $\{1,2,3,4\}$

### 1. Relasi Intransitif

$R$  adalah relasi pada himpunan  $A$ .  $R$  disebut relasi intransitif pada  $A$  jika dan hanya jika setiap tiga anggota himpunan  $A$ ,  $(a,b,c \in A)$  jika  $(a,b) \in R$  dan  $(b,c) \in R$  maka  $(a,c) \notin R$  (setiap tiga anggota  $a,b,c$  dari  $A$ , jika  $a$  berelasi dengan  $b$  dan  $b$  berelasi dengan  $c$  maka  $a$  tidak berelasi dengan  $c$ ).

Misal  $E = \{1,2,3\}$ ,  $R = \{(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(5,7)\}$

Relasi di atas intransitif karena :

$(1,2) \in R$  dan  $(2,3) \in R$ , tetapi  $(1,3) \notin R$

$(1,2) \in R$  dan  $(2,5) \in R$ , tetapi  $(1,5) \notin R$

$(2,3) \in R$  dan  $(3,4) \in R$ , tetapi  $(2,4) \notin R$

$(2,5) \in R$  dan  $(5,7) \in R$ , tetapi  $(2,7) \notin R$

### 1.4 Komposisi Relasi

$R$  adalah relasi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$

$T$  adalah relasi dari himpunan  $B$  ke himpunan  $C$ .

· Komposisi  $R$  dan  $S$ , dinotasikan dengan  $T \circ R$ , adalah relasi dari  $A$  ke  $C$  yang didefinisikan oleh :

$T \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ dan untuk suatu } b \in B \text{ sehingga } (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$

· Contoh komposisi relasi

Ø Misalkan,  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  dan  $C = \{s, t, u\}$

Ø Relasi dari  $A$  ke  $B$  didefinisikan oleh :

$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$

Ø Relasi dari  $B$  ke  $C$  didefinisikan oleh :

$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$

Ø Maka komposisi relasi  $R$  dan  $T$  adalah

$T \circ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$

**contoh soal relasi dan jawabannya** Dikelas 8 SMP belajar matematika terdapat 4 orang siswa yang lebih menyukai pelajaran tertentu. berikut ke-4 anak tersebut :

1. Buyung menyukai pelajaran IPS dan Kesenian
2. Doni menyukai pelajaran ketrampilan dan olah raga
3. Vita menyukai pelajaran IPA, dan
4. Putri lebih menyukai pelajaran matematika dan bahasa ingris

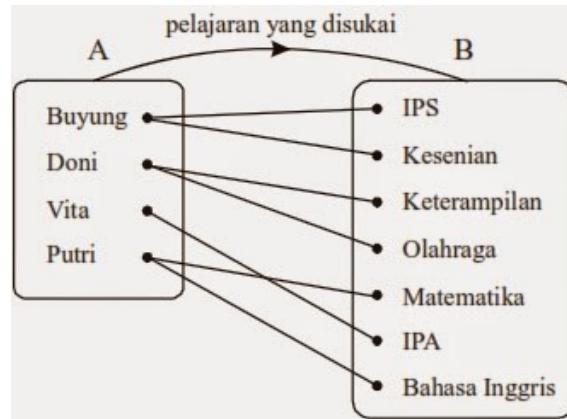
Buatlah relasi dari soal diatas dan disajikan menggunakan diagram panah, diagram cartesius, dan himpunan pasangan berurutan. Jawab: Untuk mempermudah menjawab persoalan diatas gunakanlah permisalan seperti :

Himpunan  $A = \{\text{Buyung, Doni, Vita, Putri}\}$

Himpunan  $B = \{\text{IPS, kesenian, keterampilan, olahraga, matematika, IPA, bahasa Inggris}\}$

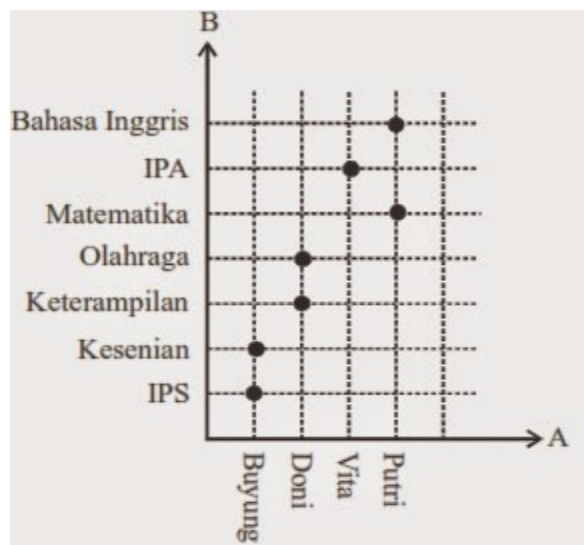
“pelajaran yang disukai” adalah relasi yang menghubungkan himpunan  $A$  ke  $B$ .

### 1. Diagram panah



Gambar 4 Diagram Panah

**b. Diagram Cartesius**



Gambar 5 Diagram Cartecius

**1. Himpunan pasangan berurutan**

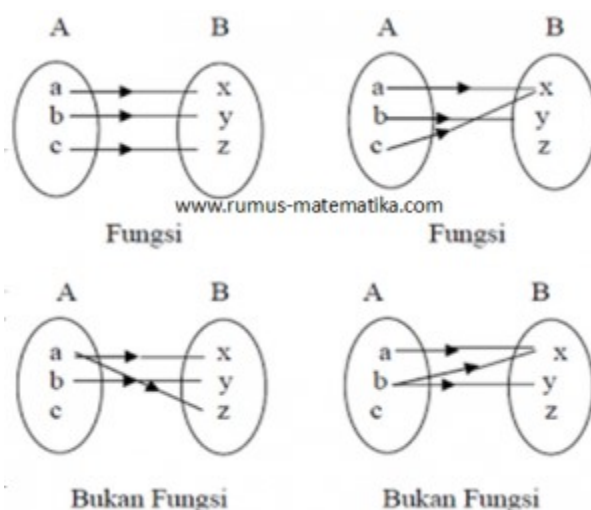
Himpunan pasangan berurutan dari soal diatas adalah :

$\{(Buyung, IPS), (Buyung, kesenian), (Doni, keterampilan), (Doni, olahraga), (Vita, IPA), (Putri, matematika), (Putri, bahasa Inggris)\}$

## 2. FUNGSI

### 2.1 Pengertian Fungsi

Fungsi adalah bentuk khusus dari relasi. Sebuah relasi dikatakan fungsi jika  $xRy$ , untuk **setiap**  $x$  anggota  $A$  memiliki **tepat satu** pasangan,  $y$ , anggota himpunan  $B$ . Kita dapat menuliskan  $f(a) = b$ , jika  $b$  merupakan unsur di  $B$  yang dikaitkan oleh  $f$  untuk suatu  $a$  di  $A$ . Ini berarti bahwa jika  $f(a) = b$  dan  $f(a) = c$  maka  $b = c$ . Jika  $f$  adalah fungsi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ , kita dapat menuliskan dalam bentuk :  $f : A \rightarrow B$



Gambar 5 fungsi dan bukan fungsi

Perhatikan contoh kasus diatas, gambar satu dan dua merupakan fungsi dan gambar tiga dan empat bukan merupakan fungsi. Sehingga dari penjelasan contoh diatas yang merupakan fungsi adalah jika setiap anggota  $A$  memiliki pasangan dengan anggota  $B$ , dan setiap anggota memiliki tepat satu kawan dengan anggota  $B$ . Maka dapat kita simpulkan bahwa relasi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota  $A$  dengan tepat satu anggota  $B$ . Relasi seperti ini disebut sebagai fungsi atau pemetaan.

*Fungsi atau pemetaan dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  merupakan relasi khusus yang memasangkan setiap anggota  $A$  dengan tepat satu anggota  $B$ .*

Dimana syarat suatu relasi adalah fungsi atau pemetaan sebagai berikut.

1. Setiap anggota  $A$  memiliki pasangan di  $B$
2. Setiap anggota  $A$  dipasangkan dengan tepat satu anggota di  $B$

### 2.2 Domain, Kodomain, Dan Range

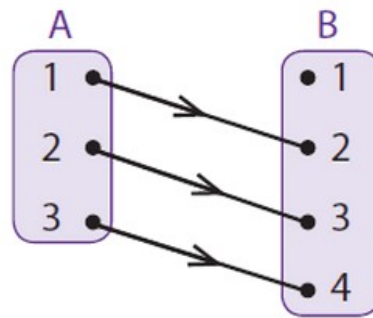
?  $f : A \rightarrow B$

?  $A$  dinamakan daerah asal (*domain*) dari  $f$  dan  $B$  dinamakan daerah hasil (*codomain*) dari  $f$ .

? Misalkan  $f(a) = b$ , maka  $b$  dinamakan bayangan (*image*) dari  $a$ , dan  $a$  dinamakan pra-bayangan (*pre-image*) dari  $b$ .

? Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan  $f$  dinamakan jelajah (*range*) dari  $f$ .

Dalam materi fungsi dikenal istilah Domain, Kodomain, dan juga Range Fungsi. Coba perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 6 Domain dan kodomain

Dari diagram panah tersebut himpunan A atau himpunan daerah asal disebut dengan **Domain**. Himpunan B yang merupakan daerah kawan disebut dengan **Kodomain** sedangkan anggota daerah kawan yang merupakan hasil dari pemetaan disebut dengan daerah hasil atau **range fungsi**. Jadi dari diagram panah di atas dapat disimpulkan

**Domain ( $D_f$ )** adalah  $A = \{1,2,3\}$  **Kodomain** adalah  $B = \{1,2,3,4\}$  **Range Hasil ( $R_f$ )** adalah  $\{2,3,4\}$

## 2.3 Jenis-jenis Fungsi

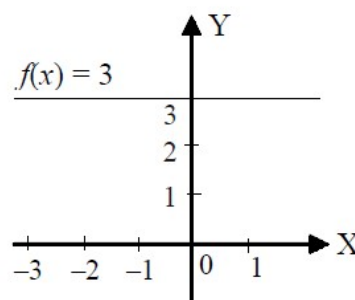
### 1 Fungsi konstan (fungsi tetap)

Suatu fungsi  $f : A \rightarrow B$  ditentukan dengan rumus  $f(x)$  disebut fungsi konstan apabila untuk setiap anggota domain fungsi selalu berlaku  $f(x) = C$ , di mana  $C$  bilangan konstan. Untuk lebih jelasnya, pelajari contoh soal berikut ini.

Diketahui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dengan rumus  $f(x) = 3$  dengan daerah domain:  $\{x \mid -3 \leq x < 2\}$ . Sehingga, gambar grafiknya.

$x$	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	3	3	3	3

Grafik:



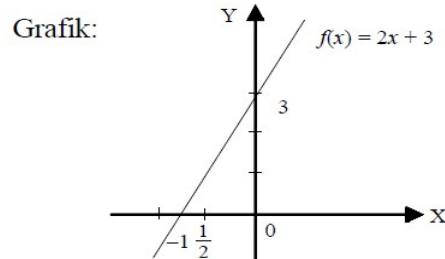
Gambar 7 grafik fungsi konstan

### 1. Fungsi linear

Suatu fungsi  $f(x)$  disebut fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh  $f(x) = ax + b$ , di mana  $a \neq 0$ ,  $a$  dan  $b$  bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus. Perhatikan contoh berikut. Diketahui  $f(x) = 2x + 3$ , gambar grafiknya



$2x + 3$		
$x$	0	$-1\frac{1}{2}$
$f(x)$	3	0

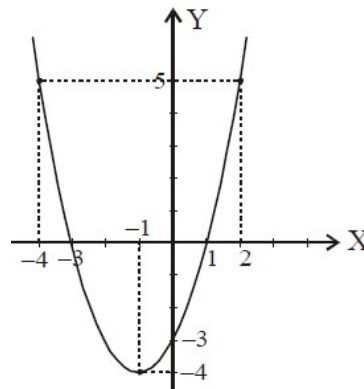


Gambar 8 grafik fungsi Linier

### 1. Fungsi Kuadrat

Suatu fungsi  $f(x)$  disebut fungsi kuadrat apabila fungsi itu ditentukan oleh  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , di mana  $a \neq 0$  dan  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola. Perhatikan contoh fungsi kuadrat berikut.

Fungsi  $f$  ditentukan oleh  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ , gambar grafiknya



Gambar 8 grafik fungsi kuadrat

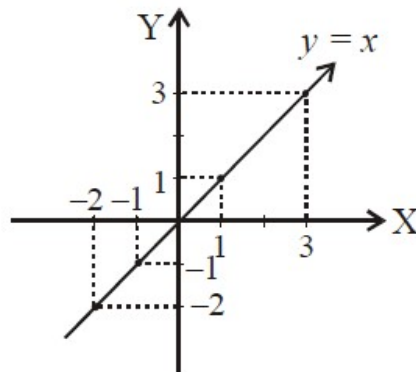
### 1. Fungsi identitas

Suatu fungsi  $f(x)$  disebut fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku  $f(x) = x$  atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama. Fungsi identitas ditentukan oleh  $f(x) = x$ . Agar lebih memahami tentang fungsi identitas, pelajailah contoh berikut ini.

Fungsi pada  $\mathbb{R}$  didefinisikan sebagai  $f(x) = x$  untuk setiap  $x$ . a. Carilah  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(??)$ ,  $f(??)$ . b. Gambarkan grafiknya.

Penyelesaian: a. Nilai  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(??)$ , dan  $f(??)$ .  $f(x) = x$   
 $f(-2) = -2$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(??) = ??$ ,  $f(??) = ??$

b. Gambar grafik.



Gambar 9 grafik fungsi identitas

### 1. (a) Sifat-sifat Fungsi

Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal tiga sifat fungsi yakni sebagai berikut :

#### 1. Injektif (Satu-satu)

Misalkan fungsi  $f$  menyatakan A ke B maka fungsi  $f$  disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B. Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa  $f:A \rightarrow B$  adalah fungsi injektif apabila  $a \neq a'$  berakibat  $f(a) \neq f(a')$  atau ekuivalen, jika  $f(a) = f(a')$  maka akibatnya  $a = a'$ .

? Fungsi satu-satu

? Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk sembarang  $a_1$  dan  $a_2$  dengan  $a_1$  tidak sama dengan  $a_2$  berlaku  $f(a_1)$  tidak sama dengan  $f(a_2)$ . Dengan kata lain, bila  $a_1 = a_2$  maka  $f(a_1)$  sama dengan  $f(a_2)$ .

#### 2. Surjektif (Onto)

Misalkan  $f$  adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil  $f(A)$  dari fungsi  $f$  adalah himpunan bagian dari B. Apabila  $f(A) = B$ , yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan  $f$  adalah suatu fungsi surjektif atau “ $f$  memetakan A Onto B”.

? Fungsi kepada

? Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi kepada jika dan hanya jika untuk sembarang  $b$  dalam kodomain B terdapat paling tidak satu  $a$  dalam domain A sehingga berlaku  $f(a) = b$ .

? Suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan *range*-nya (semua kodomain adalah peta dari domain).

#### 3. Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan  $f: A \rightarrow B$  sedemikian rupa sehingga  $f$  merupakan n fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan “ $f$  adalah fungsi yang bijektif” atau “A dan B berada dalam korespondensi satu-satu

? Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika untuk sembarang  $b$  dalam kodomain B terdapat tepat satu  $a$  dalam domain A sehingga  $f(a) = b$ , dan tidak ada anggota A yang tidak terpetakan dalam B.

? Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah **fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif**.

### 1. (a) Menghitung Nilai dari Sebuah Fungsi

#### 2. Penulisan Fungsi

#### 1. Himpunan pasangan terurut.

? Misalkan fungsi kuadrat pada himpunan  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :

$$f = \{(2, 4), (3, 9)\}$$

#### 1. Formula pengisian nilai (assignment)

?  $f(x) = x^2 + 10,$

?  $f(x) = 5x$

#### 1. Notasi Fungsi

Sebuah fungsi dinotasikan dengan huruf kecil seperti f, g, h, i, dan sebagainya. Pada fungsi g yang memetakan himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan g(x). Misal ada fungsi f yang memetakan A ke B dengan aturan  $f : x \rightarrow 2x + 2$ . Dari notasi fungsi tersebut, x merupakan anggota domain. fungsi  $x \rightarrow 2x + 2$  berarti fungsi f memetakan x ke  $2x+2$ . Jadi daerah bayangan x oleh fungsi f adalah  $2x + 2$ . Dapat di notasikan dengan  $f(x) = 2x + 2$ . Kesimpulan

*Jika fungsi  $f : x \rightarrow ax + b$  dengan x anggota domain f maka rumus fungsi f adalah  $f(x) = ax + b$*

#### 1. Menghitung nilai dari Sebuah Fungsi

Menghitung nilai dari sebuah fungsi cukup sederhana. Kita hanya perlu mengikuti *rules* dari fungsi tersebut. Semakin susah fungsi yang memetakannya maka akan semakin susah menghitung nilai fungsinya. Terkadang soal-soal membalik fungsi tersebut, diketahui daerah hasil kemudian diminta mencari daerah asal. Yuk mari disimak contoh berikut:

Diketahui fungsi  $f : x \rightarrow 2x - 2$  dengan x anggota bilangan bulat. Coba tentukan nilai dari

1.  $f(?)$
2.  $f(?)$
3. bayangan (-3) oleh f
4. nilai f untuk  $x = -10$
5. nilai a jika  $f(a) = 14$

#### Jawaban :

fungsi fungsi  $f : x \rightarrow 2x - 2$  dapat dinyatakan dengan  $f(x) = 2x - 2$

1.  $f(x) = 2x - 2f(?) = 2(?) - 2 = 4$
1.  $f(x) = 2x - 2f(?) = 2(?) - 2 = 6$
1.  $f(x) = 2x - 2f(-3) = 2(-3) - 2 = -8$
1.  $f(x) = 2x - 2f(?) = 2(?) - 2 = 18$
1.  $f(a) = 2a - 214 = 2a - 22a = 16a = 8$

#### 1. Menentukan Rumus sebuah fungsi

Sebuah fungsi dapat ditemukan rumusnya apabila ada nilai atau data yang diketahui. Kemudian dengan menggunakan aljabar kita bisa dengan mudah menemukan rumus dari fungsi tersebut. Untuk lebih jelasnya bisa simak contoh berikut:

Fungsi g yang berlaku pada himpunan bilangan riil ditentukan oleh rumus  $g(x) = ax + b$  dengan a dan b adalah bilangan bulat. Jika  $g(-2) = -4$  dan  $g(?) = 5$ . Coba tentukan nilai dari:

1. nilai dari a dan b
2. rumus fungsi
3.  $g(-3)$

#### Jawaban :

Untuk mencari nilai a dan b kita buat persamaan dulu dari himpunan pasangan berurutan yang diketahui.

$$g(-2) = -4 \rightarrow -4 = -2a + b \rightarrow b = 2a - 4 \quad \dots(?) \quad g(?) = 5 \rightarrow 5 = a + b \quad \dots(?)$$

kita substitusikan persamaan 1 ke persamaan 2

5	= a + b
5	= a + 2a - 4
5	= 3a - 4
9	= 3a
a	= 3

1. (a) i.  $b = 2a - 4$   $b = 2(3) - 4 = 2$  jadi nilai  $a = 3$  dan  $b = 2$
1. (a) i. rumus fungsinya  $g(x) = 3a + 2$
1. (a) i.  $g(x) = 3a + 2g(-3) = 3(-3) + 2g(-3) = -7$

## 3.2 Operasi Aritmatika

### 3.1 Operasi Aritmatika

Dasar operasi aritmatika adalah **PENJUMLAHAN** dan **PENGURANGAN**, sedangkan operasi selanjutnya yang dikembangkan dari kedua operasi dasar tersebut adalah operasi **PERKALIAN** dan operasi **PEMBAGIAN**.

#### 3.1.1 Penjumlahan Bilangan

##### 3.1.1.1 Penjumlahan Bilangan Biner

Pada penjumlahan berlaku aturan seperti di bawah ini ,

$0 + 0$	$= 0$
$0 + 1$	$= 1$
$1 + 0$	$= 1$
$1 + 1$	$= 0 / + 1$ sebagai carry
$1 + 1 + 1$	$= 1 / + 1$ sebagai carry

Sebagai cara penjumlahan bilangan desimal yang Anda kenal sehari-hari, penjumlahan bilangan biner juga harus selalu memperhatikan *carry* (sisanya) dari hasil penjumlahan pada tempat yang lebih rendah.

**Contoh :**

Data A = 

1	0	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

 dan data B = 

0	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 akan

dijumlahkan ,

Data A = 

1	0	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

 $\cong 154_{10}$

Data B = 

0	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 $\cong 73_{10}$

carry                      1 1

---

Hasil A + B = 

1	1	1	0	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 $\cong 227_{10}$

Dalam contoh diatas, telah dilakukan penjumlahan 8 bit tanpa *carry*, sehingga hasil penjumlahannya masih berupa 8 bit data. Untuk contoh berikutnya akan dilakukan penjumlahan 8 bit yang menghasilkan *carry*.

**Contoh :**

Data A = 

1	0	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

 dan data B = 

1	1	1	0	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 akan dijumlahkan ,

Data A = 

1	0	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

 =  $154_{10}$

Data B = 

1	1	1	0	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 =  $227_{10}$

carry            1

Hasil penjumlahan diatas menjadi 9 bit data, sehingga untuk 8 bit data, hasil penjumlahannya bukan merupakan jumlah 8 bit data A dan B tetapi bit yang e-8 (dihitung mulai dari 0) atau yang disebut *carry* juga harus diperhatikan sebagai hasil penjumlahan.

### 3.1.1.2 Penjumlahan Bilangan Oktal

Proses penjumlahan bilangan oktal sama seperti proses penjumlahan bilangan desimal. Sisa akan timbul / terjadi jika jumlahnya telah melebihi 7 pada setiap tempat.

**Contoh :**

a. Bilangan Oktal A =  $232_8$  dan bilangan Oktal B =  $111_8$  akan dijumlahkan ,

$$\begin{array}{r} \text{Bilangan Oktal A} = 232_8 = 154_{10} \\ \text{Bilangan Oktal B} = 111_8 = 73_{10} \\ \hline \text{carry} \\ \text{Hasil A + B} = 343_8 = 227_{10} \end{array}$$

b. Bilangan Oktal A =  $232_8$  dan bilangan Oktal B =  $667_8$  akan dijumlahkan ,

$$\begin{array}{r} \text{Bilangan Oktal A} = 232_8 = 154_{10} \\ \text{Bilangan Oktal B} = 667_8 = 439_{10} \\ \hline \text{carry} \quad 111 \\ \text{Hasil A + B} = 1121_8 = 593_{10} \end{array}$$

### 3.1.1.3 Penjumlahan Bilangan Heksadesimal

Dalam penjumlahan bilangan heksadesimal, sisa akan terjadi jika jumlah dari setiap tempat melebihi 15.

**Contoh**

a. Bilangan Heksadesimal A =  $9A_{16}$  dan bilangan Heksadesimal B =  $43_{16}$  akan dijumlahkan ,

$$\begin{array}{r} \text{Bilangan Heksadesimal A} = 9A_{16} = 154_{10} \\ \text{Bilangan Heksadesimal B} = 43_{16} = 67_{10} \\ \hline \text{carry} \\ \text{Hasil A + B} = DD_{16} = 221_{10} \end{array}$$

b. Bilangan Heksadesimal A =  $E8_{16}$  dan bilangan Heksadesimal B =  $9A_{16}$  akan dijumlahkan ,

$$\begin{array}{r} \text{Bilangan Heksadesimal A} = E8_{16} = 232_{10} \\ \text{Bilangan Heksadesimal B} = 9A_{16} = 154_{10} \\ \hline \text{carry} \quad 11 \\ \text{Hasil A + B} = 182_{16} = 386_{10} \end{array}$$

## 3.1.2 Pengurangan Bilangan

### 3.1.2.1 Pengurangan Bilangan Biner

Pada pengurangan bilangan biner berlaku aturan seperti di bawah ini,

$0 - 0$	$= 0$
$0 - 1$	$= 1 / -1$ sebagai <i>borrow</i>
$1 - 0$	$= 1$
$1 - 1$	$= 0$
$0 - 1 - 1$	$= 0 / -1$ sebagai <i>borrow</i>
$1 - 1 - 1$	$= 1 / -1$ sebagai <i>borrow</i>

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi.

**Contoh :**

Data A = 

1	0	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

 dan data B = 

0	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 akan dikurangkan ,

Data A = 

1	0	0	1	1	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---

 =  $154_{10}$

Data B = 

0	1	0	0	1	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 =  $73_{10}$

borrow                      1                      1

---

**Hasil A - B =**

0	1	0	1	0	0	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---

 =  $81_{10}$

### 3.1.2.2 Pengurangan Bilangan Oktal

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi (dengan nilai 8).

**Contoh :**

154							
127 -							
25							
↑↑↑	4 <sub>8</sub> - 7 <sub>8</sub>	+ 8 <sub>8</sub>	(borrow of)	= 5 <sub>8</sub>			
	5 <sub>8</sub> - 2 <sub>8</sub> - 1 <sub>8</sub>			= 2 <sub>8</sub>			
	1 <sub>8</sub> - 1 <sub>8</sub>			= 0 <sub>8</sub>			

### 3.1.2.2 Pengurangan Bilangan Heksadesimal

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi (dengan nilai 16).

**Contoh :**

$$\begin{array}{r}
 12E1 \\
 627 - \\
 \hline
 \text{CBA} \\
 \begin{array}{l}
 \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\
 16_{10} \text{ (pinjam)} + 1_{10} - 7_{10} = 10_{10} = A_{16} \\
 14_{10} - 2_{10} - 1_{10} \text{ (dipinjam)} = 11_{10} = B_{16} \\
 16_{10} \text{ (pinjam)} + 2_{10} - 6_{10} = 12_{10} = C_{16} \\
 1_{10} - 1_{10} \text{ (dipinjam)} = 0_{10} = 0_{16}
 \end{array}
 \end{array}$$

### 3.1.3 Increment dan Decrement

*Increment* (bertambah) dan *Decrement* (berkurang) adalah dua pengertian yang sering sekali digunakan dalam teknik mikroprosesor. Dalam matematik pengertian *increment* adalah **Bertambah Satu** dan *decrement* artinya **Berkurang Satu**.

#### 3.1.3.1 Increment Sistem Bilangan

Seperti penjelasan diatas bahwa *increment* artinya bilangan sebelumnya ditambah dengan 1.

**Contoh :**

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Bilangan Biner} & A = & \boxed{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1} \\
 & & +1 \\
 \text{Increment } A & = & \boxed{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0} \\
 \\ 
 \text{Bilangan Heksadesimal} & B = & 7 \ F \\
 & & +1 \\
 \text{Increment } B & = & 8 \ 0
 \end{array}$$

#### 3.1.3.2 Decrement Sistem Bilangan

*Decrement* diperoleh dengan cara mengurangi bilangan sebelumnya dengan 1.

**Contoh :**

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Bilangan Biner} & A = & \boxed{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1} \\
 & & -1 \\
 \text{Decrement } A & = & \boxed{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0} \\
 \\ 
 \text{Bilangan Heksadesimal} & B = & 7 \ F \\
 & & -1 \\
 \text{Decrement } B & = & 7 \ E
 \end{array}$$

**3.3** Komposisi Fungsi**3.4** Fungsi Linear**3.5** Fungsi Kuadrat**3.6** Fungsi Inversi**3.7** Fungsi Rasional

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 3.1: Table caption

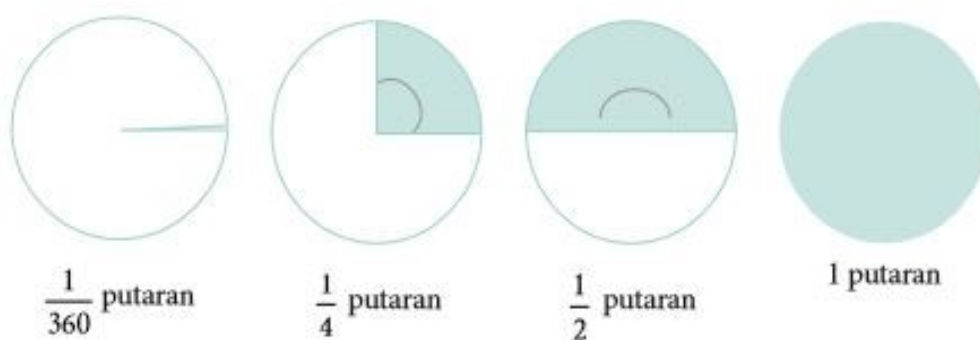


## 4. Trigonometri

### 4.1 Pengukuran Sudut

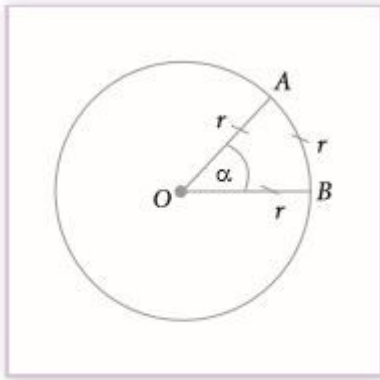
#### 1. (a) Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda “°” dan “*rad*” berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, satu putaran penuh = 360°, atau 1? didefinisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh  $\frac{1}{360}$  kali putaran.



**Gambar 4.1** Beberapa besar putaran/rotasi

Tentunya dari Gambar 4. 1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Misalnya, untuk  $\frac{1}{3}$  putaran,  $\frac{1}{6}$  putaran,  $\frac{2}{3}$  putaran. Sebelum memahami hubungan derajat dengan radian, berikut ini merupakan teori mengenai radian.



Gambar 4.2 Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai besar ukuran sudut pusat  $\alpha$  yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 4.2. Jika  $\angle AOB = \alpha$  dan  $AB = OA = OB$ , maka  $\alpha = \frac{AB}{r} = 1$  radian. Jika panjang busur tidak sama dengan  $r$ , maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian dapat dihitung menggunakan perbandingan:

**Sifat 4.1**

$$\angle AOB = \frac{\overline{AB}}{r} \text{ rad}$$

Dapat dikatakan bahwa hubungan satuan derajat dengan satuan radian, adalah 1 putaran sama dengan  $2\pi$  rad. Oleh karena itu, berlaku:

**Sifat 4.2**

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad atau } 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad atau } 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57,3^\circ$$

Dari Sifat 4.2, dapat disimpulkan sebagai berikut.

? Konversi  $x$  derajat ke radian dengan mengalikan  $x \times \frac{\pi}{180^\circ}$ .

Misalnya,  $45^\circ = 45^\circ \times (\frac{\pi}{180^\circ}) \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

? Konversi  $x$  radian ke derajat dengan mengalikan  $x \times \frac{\pi}{180^\circ}$

Misalnya,  $\frac{3}{2}\pi \text{ rad} = \frac{3}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$ .

**Contoh 4.1**

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini:

1.  $\frac{1}{4}$  putaran  $= \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$  atau  $90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$ .
2.  $\frac{1}{3}$  putaran  $= \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$  atau  $120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$ .
3. - putaran  $= \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$  atau  $180^\circ = 180 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$ .
4. 4 putaran  $= 4 \times 360^\circ = 1.440^\circ$  atau  $1.440^\circ = 1.440 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 8\pi \text{ rad}$ .
5. 5 putaran  $= 5 \times 360^\circ = 1.800^\circ$  atau  $1800^\circ = 1800 \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 10\pi \text{ rad}$ .
6.  $225^\circ = 225^\circ \times \frac{1}{360^\circ} \text{ putaran} = \frac{5}{8} \text{ putaran atau } 225^\circ = 225^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{5}{4}\pi \text{ rad}$ .
7.  $1.200^\circ = 3 \times 360^\circ + 120^\circ = [(3 \times 360^\circ) \times \frac{1}{360^\circ} + (120^\circ) \times \frac{1}{360^\circ}] \text{ putaran}$   
 $[3 + \frac{1}{3}] \text{ putaran} = 3\frac{1}{3} \text{ putaran}$

1. Pada saat pukul 11.00, berarti jarum panjang pada jam menunjuk ke angka 12 dan jarum pendek pada jam menunjuk ke angka 11. Artinya besar sudut yang terbentuk oleh setiap dua angka yang berdekatan adalah  $30^\circ$ .

$$30^\circ = 30^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{1}{6} \pi \text{ rad}$$

1. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, maka setiap satu detik pemancar berputar sebanyak 3.600 putaran.  
2. Ubahlah ukuran sudut berikut ke dalam ukuran derajat atau radian!

a.  $30^\circ$

f.  $\frac{4\pi}{3}$

b.  $90^\circ$

g.  $\frac{2\pi}{5}$

c.  $-45^\circ$

h.  $\frac{5\pi}{6}$

d.  $100^\circ$

i.  $\frac{\pi}{3}$

e.  $-390^\circ$

j.  $-\frac{3\pi}{4}$

1. Nyatakan sudut  $50^\circ$  dan  $89^\circ$  ke dalam radian!

Penyelesaian:

$$50^\circ = 50^\circ \times \pi/180^\circ$$

$$50^\circ = 0,277\pi$$

$$50^\circ = 0,277 (3,14)$$

$$50^\circ = 0,87 \text{ radian}$$

$$89^\circ = 89^\circ \times \pi/180^\circ$$

$$89^\circ = 0,494\pi$$

$$89^\circ = 0,494 (3,14)$$

$$89^\circ = 1,55 \text{ radian}$$

1. Sebuah kipas angin berputar dengan kecepatan 36 putaran per menit. Nyatakan kecepatan putaran kipas angin tersebut ke dalam satuan radian per detik!

Penyelesaian:

$$36 \text{ putaran/menit} = 36 \times 2\pi/60 \text{ putaran/detik}$$

$$36 \text{ putaran/menit} = 1,2\pi \text{ putaran/detik}$$

Jadi 36 putaran per menit sama dengan  $1,2\pi$  putaran per detik.

1. Nyatakan besar sudut berikut ke dalam satuan radian! a.  $30^\circ 20' 15''$  b.  $106^\circ 20'$

Penyelesaian:

a. kita ketahui bahwa:  $1'' = (1/3600)^\circ$ ,  $1' = (1/60)^\circ$ ,  $1^\circ = 0,0174 \text{ radian}$ , maka:  $30^\circ 20' = 30^\circ + 20 \cdot (1/60)^\circ + 15 \cdot (1/3600)^\circ = (108000 + 2000 + 15) / 3600^\circ = 108015 / 3600^\circ = 29,999^\circ$   
dian =  $0,53 \text{ rad}$   
b. kita ketahui bahwa:  $1' = (1/60)^\circ$ ,  $1^\circ = 0,0174 \text{ radian}$ , maka:  $106^\circ 20' = 106^\circ + 20 \cdot (1/60)^\circ = 106,333^\circ = (318/3)^\circ + (1/3)^\circ = 106,333^\circ + 0,333^\circ = 106,666^\circ$   
 $20' = 1,85 \text{ rad}$

1. Hitunglah jari-jari suatu lingkaran jika panjang busurnya 10 cm dan sudut pusatnya  $36^\circ$ !

Penyelesaian:

$$\theta = 36^\circ, \text{ maka:}$$

$$36^\circ = 36^\circ \times \pi/180^\circ$$

$$36^\circ = 0,2\pi$$

Kita ketahui bahwa :

$$r = s/\theta$$

$$r = 10 \text{ cm} / 0,2\pi$$

$$r = 10 \text{ cm} / 0,628$$

$r = 15,9 \text{ cm}$

Selanjutnya, dalam pembahasan topik selanjutnya terdapat beberapa sudut (sudut istimewa) yang sering digunakan.

Berikut merupakan sudut istimewa yang sering digunakan :

Derajat	Radian	Derajat	Radian
$0^\circ$	$0 \text{ rad}$	$90^\circ$	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6} \text{ rad}$	$120^\circ$	$\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$	$135^\circ$	$\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$	$150^\circ$	$\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

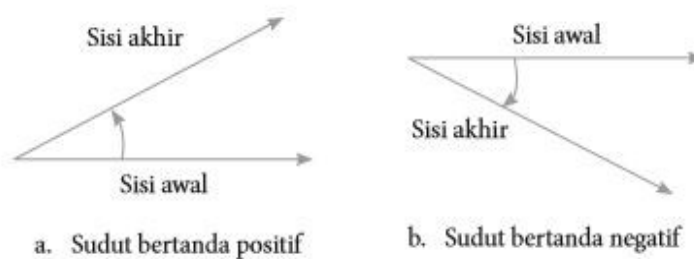
  

Derajat	Radian	Derajat	Radian
$180^\circ$	$\pi \text{ rad}$	$270^\circ$	$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
$210^\circ$	$\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$	$300^\circ$	$\frac{5\pi}{3} \text{ rad}$
$225^\circ$	$\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$	$315^\circ$	$\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$
$240^\circ$	$\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$	$330^\circ$	$\frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

#### Tanda-tanda Perbandingan Trigonometri

Perbandingan Trigonometri	Kuadran			
	I	II	III	IV
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	-	+
Cosec	+	+	-	-

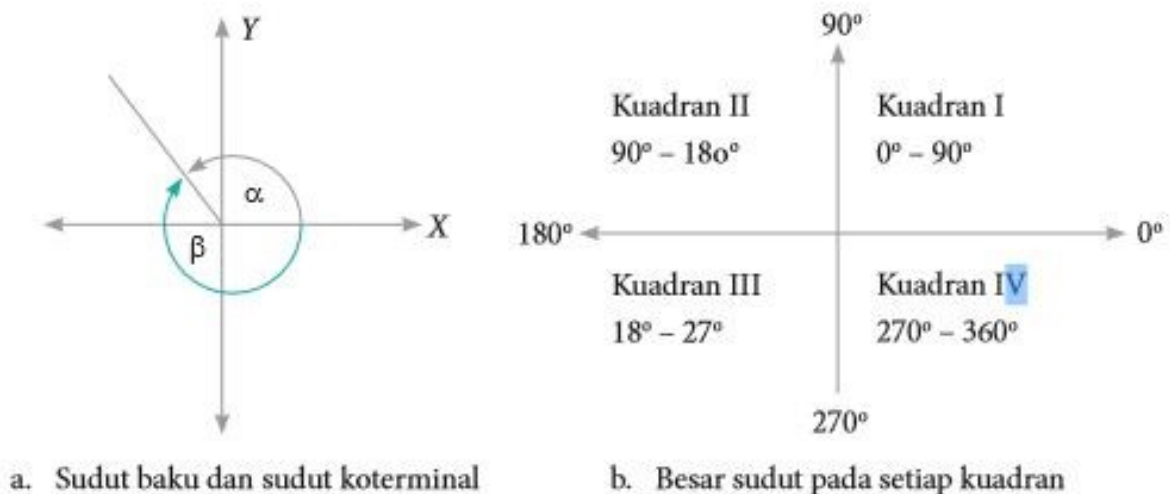
Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (initial side) ke sisi akhir (terminal side). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda “positif” jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda “negatif” jika arah putarannya searah dengan arah putaran jarum jam. Arah putaran sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



Gambar sudut berdasarkan arah putaran

Dalam koordinat kartesius, jika sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius, disebut sudut standar (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ , dan  $360^\circ$ .

Sebagai catatan bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya menggunakan huruf-huruf Yunani, seperti,  $\alpha$  (alpha),  $\beta$  (betha),  $\gamma$  (gamma) dan  $\theta$  (tetha) juga menggunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D. Selain itu, jika sudut yang dihasilkan sebesar  $\alpha$ , maka sudut  $\beta$  disebut sudut koterminal, seperti yang dideskripsikan pada gambar di bawah ini.



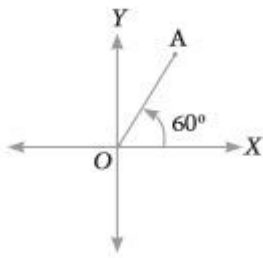
**Contoh soal :**

1. Gambarkan sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

- $60^\circ$
- $-45^\circ$
- $120^\circ$
- $600^\circ$

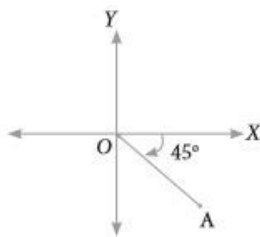
**Penyelesaian:**

- $60^\circ$



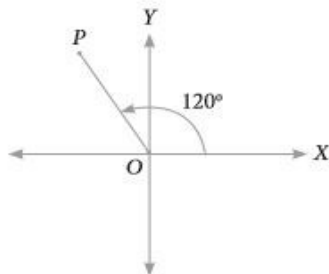
Sisi awal terletak pada sumbu  $X$  dan sisi terminal  $OA$  terletak di kuadran I.

1.  $-45^\circ$



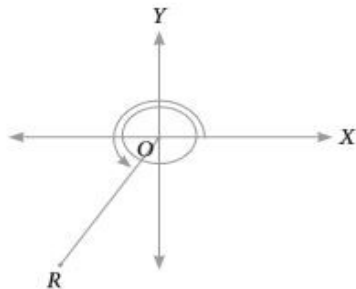
Sisi awal terletak pada sumbu  $X$  dan sisi terminal  $OA$  terletak di kuadran IV.

1.  $120^\circ$



Sisi awal terletak pada sumbu  $X$  dan sisi terminal  $OP$  terletak di kuadran II.

1.  $600^\circ$



Sisi awal terletak pada sumbu  $X$  dan sisi terminal  $OR$  terletak di kuadran III.

2. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam satuan radian (rad): a)  $270^\circ$  b)  $330^\circ$  Pembahasan Konversi:  $1 \pi$

$$\begin{aligned} 270^\circ &= 270^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3}{2} \pi \text{ rad} \\ 330^\circ &= 330^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11}{6} \pi \text{ rad} \end{aligned}$$

radian =  $180^\circ$  Jadi: a)  $270^\circ$

b)  $330^\circ$

3. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam satuan derajat: a)  $\frac{1}{2} \pi$  rad b)  $\frac{3}{4} \pi$  rad c)  $\frac{5}{6} \pi$  rad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pi &= \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ \\ \frac{3}{4} \pi &= \frac{3}{4} \times 180^\circ = 135^\circ \\ \frac{5}{6} \pi &= \frac{5}{6} \times 180^\circ = 150^\circ \end{aligned}$$

### Sudut-sudut Khusus

Kuadran	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$
Cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
Sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-
Cosec	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Kuadran II Sin & Csc +	Kuadran I Semua +
Kuadran III Tan & Cotg +	Kuadran IV Cos & Csc +

Contoh :

1. Diketahui  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  dikuadran II (sudut tumpul).

Tentukan nilai  $\sec \alpha$ ,  $\csc \alpha$ ,  $\cotg \alpha$

$$\text{Jawab : } \sin \alpha = \frac{3}{5}, y = 3, r = 5, x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Karena dikuadran II, nilai  $x = -4$

$$\text{Sehingga : } \sec \alpha = \frac{5}{-4}, \csc \alpha = \frac{5}{3}, \cotg \alpha = \frac{-4}{3}$$

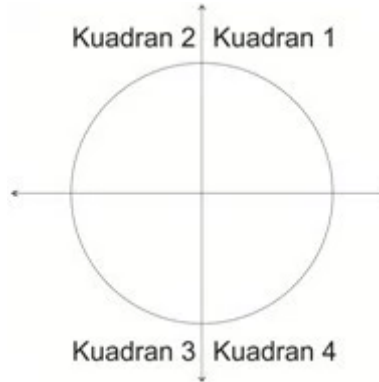
1. Tentukan nilai dari :

$$1. \sin 0^\circ + \csc 45^\circ = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$2. \frac{\sec \frac{\pi}{6} + \cot \frac{\pi}{3}}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

### Dalam Kuadran

Sudut dalam suatu lingkaran, memiliki rentang  $0^\circ - 360^\circ$ , sudut tersebut dibagi menjadi 4 kuadran, dengan masing-masing kuadran memiliki rentang sebesar  $90^\circ$ .



Kuadran 1 memiliki rentang sudut dari  $0^\circ - 90^\circ$  dengan nilai sinus, cosinus dan tangent positif.

Kuadran 2 memiliki rentang sudut dari  $90^\circ - 180^\circ$  dengan nilai cosinus dan tangen negatif, sinus positif.

Kuadran 3 memiliki rentang sudut dari  $180^\circ - 270^\circ$  dengan nilai sinus dan cosinus negatif, tangen positif.

Kuadran 4 memiliki rentang sudut dari  $270^\circ - 360^\circ$  dengan nilai sinus dan tangent negatif, cosinus positif.

## 4.2 Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

## 4.3 Sudut-sudut Berelasi

## 4.4 Identitas Trigonometri

### IDENTITAS TRIGONOMETRI

#### 1. Identitas Trigonometri

Dari nilai fungsi trigonometri tersebut kemudian diperoleh *identitas trigonometri*. Identitas trigonometri adalah suatu persamaan dari fungsi trigonometri yang bernilai benar untuk setiap sudutnya dengan kedua sisi ruasnya terdefinisi. Identitas trigonometri terbagi 3, yaitu *Identitas Kebalikan*, *Identitas Perbandingan* dan *Identitas Pythagoras* yang masing-masing memiliki fungsi dasar, yaitu:

Identitas Kebalikan	Identitas Perbandingan	Identitas Pythagoras
$\operatorname{Cosec} A = 1 / \sin A$ $\sec A = 1 / \cos A$ $\cot A = 1 / \tan A$	$\tan A = \sin A / \cos A$ $\cot A = \cos A / \sin A$	$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

#### 1. (a) Kuadran

Kuadran adalah pembagian daerah pada sistem koordinat kartesius → dibagi dalam 4 daerah. Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran memenuhi aturan seperti pada gambar: Untuk sudut  $b > 360^\circ \rightarrow b = (k \cdot 360 + a) \rightarrow b = a (k = \text{bilangan bulat} > 0)$



1. (a) **Mengubah fungsi trigonometri suatu sudut ke sudut lancip**
2. Jika menggunakan  $90 \pm a$  atau  $270 \pm a$  maka fungsi berubah:

$$\sin \leftrightarrow \cos$$

$$\tan \leftrightarrow \cot$$

$$\sec \leftrightarrow \csc$$

1. Jika menggunakan  $180 \pm a$  atau  $360 \pm a$  maka fungsi tetap

(a) **Sudut dengan nilai negatif**

Nilai negatif diperoleh karena sudut dibuat dari sumbu x, diputar searah jarum jam. Untuk sudut dengan nilai negatif, sama artinya dengan sudut yang berada di kuadran IV

**Contoh:**

1.  $\cos 120^\circ = \cos (180 - 60)^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$  ( $120^\circ$  ada di kuadran II sehingga nilai cos-nya negatif)
2.  $\cos 120^\circ = \cos (90 + 30)^\circ = -\sin 30^\circ = -1/2$
3.  $\tan 135^\circ = \tan (3.60 + 225)^\circ = \tan 225^\circ = \tan (180 + 45)^\circ = \tan 45^\circ = 1$  ( $225^\circ$  ada di kuadran III sehingga nilai tan-nya positif)
4.  $\sin -315^\circ = -\sin 315^\circ = -\sin (360 - 45)^\circ = -(-\sin 45^\circ) = \sin 45^\circ = 1/2 \sqrt{2}$
- 5.

**Identitas Trigonometri**

Dalam suatu segitiga siku-siku, selalu berlaku prinsip Pythagoras, yaitu . Pada materi ini, prinsip Pythagoras ini menjadi asal pembuktian identitas trigonometri sendiri.

bagi kedua ruas dengan , diperoleh persamaan baru . Sederhanakan dengan sifat eksponensial menjadi . Dari persamaan terakhir, substitusi bagian yang sesuai dengan perbandingan trigonometri pada segitiga, yaitu dan , sehingga diperoleh atau bisa ditulis menjadi .

Dari identitas yang pertama, dapat diperoleh bentuk lainnya, yaitu:

bagi kedua ruas dengan , diperoleh dimana dan , sehingga diperoleh:

Bentuk ketiga yaitu dibagi dengan menjadi , dimana dan , sehingga diperoleh persamaan: .

**Contoh Soal Trigonometri**

Tentukanlah nilai dari !

Jawab:

berada pada kuadran 2, sehingga nilainya tetap positif dengan besar sama seperti

berada pada kuadran 3, sehingga nilainya negatif dengan besar sama seperti

berada pada kuadran 4, sehingga nilainya positif dengan besar sama seperti

Sehingga, secara umum, berlaku:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$$

$$1 + \cot^2 a = \csc^2 a$$

1. (a) **Grafik fungsi trigonometri**

$y = \sin xy = \cos xy = \tan xy = \cot xy = \sec xy = \csc x$  5. **Menggambar Grafik fungsi  $y = A \sin/\cos/\tan/\cot/\sec/\csc (kx \pm b) \pm c$**

1. Periode fungsi untuk  $\sin/\cos/\sec/\csc = 2\pi/k \rightarrow$  artinya: grafik akan berulang setiap kelipatan  $2\pi/k$

Periode fungsi untuk  $\tan/\cot = \pi/k \rightarrow$  artinya: grafik akan berulang setiap kelipatan  $\pi/k$

1. Nilai maksimum =  $c + |A|$ , nilai minimum =  $c - |A|$

2. Amplitudo =  $(y_{\max} - y_{\min})$

3. Cara menggambar:

(a) Gambar grafik fungsi dasarnya seperti pada gambar di atas

(b) Hitung periode fungsi, dan gambarkan grafik sesuai dengan periode fungsinya

(c) Jika  $A \neq 1$ , kalikan semua nilai y pada grafik fungsi dasar dengan A

(d) Untuk  $kx + b \rightarrow$  grafik digeser ke kiri sejauh  $b/k$

Untuk  $kx - b \rightarrow$  grafik digeser ke kanan sejauh  $b/k$

1. (a) Untuk  $+c \rightarrow$  grafik digeser ke atas sejauh  $c$

Untuk  $-c \rightarrow$  grafik digeser ke bawah sejauh  $c$

1. **Aturan-Aturan pada Segitiga ABC**

2. **Aturan Sinus** Dari segitiga ABC di atas: Sehingga, secara umum, dalam segitiga ABC berlaku rumus: **Aturan Cosinus** Dari segitiga ABC di atas: Sehingga, secara umum:

3. **Luas Segitiga** Dari segitiga ABC di atas diperoleh: Sehingga, secara umum:

## B. RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SUDUT

Dari gambar segitiga ABC berikut:  $AD = b \cdot \sin \alpha$   $BD = a \cdot \sin \alpha$   $CD = a \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \alpha$

Untuk mencari  $\cos(\alpha + \beta) = \sin(90 - (\alpha + \beta))$  Untuk fungsi tangens:

### Contoh Soal

1. sederhanakan bentuk trigonometri  $(1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2)$ .

**Pembahasan** Dari pecahan  $(1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2)$ , sederhanakan masing-masing penyebut dan pembilangnya.  $1 + \cot^2 = \operatorname{cosec}^2 \Rightarrow 1 + \cot^2 = 1/\sin^2$   $\cot \cdot \sec^2 = (\cos / \sin) \cdot \sec^2 \Rightarrow \cot \cdot \sec^2 = (\cos / \sin) \cdot (1/\cos^2) \Rightarrow \cot \cdot \sec^2 = \cos / \sin \cdot \cos^2$  Setelah digabung kembali diperoleh :  $(1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = (1/\sin^2) / (\cos / \sin \cdot \cos^2) \Rightarrow (1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = (1/\sin^2) \cdot (\sin \cdot \cos^2 / \cos) \Rightarrow (1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = \sin \cdot \cos^2 / \sin^2 \cdot \cos \Rightarrow (1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = \cos / \sin \Rightarrow (1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = \cot$  Jadi,  $(1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = \cot$ .

1. Tentukan nilai dari  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

**Pembahasan** Karena keterbatasan ruang dan pengkodean, jadi soal di atas dikerjakan masing-masing agar tidak terlalu panjang.  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

Selanjutnya :  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$  Jadi,  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$ .

1. Buktikan bahwa  $\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha$ .

**Pembahasan**  $\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha (\sec^2 \alpha - 1) = \tan^2 \alpha (\tan^2 \alpha + 1) \Rightarrow \sec^2 \alpha (\tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha (\sec^2 \alpha) \Rightarrow \sec^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha$  Jadi,  $\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha$  Terbukti.

1. Nyatakan setiap bentuk berikut ke dalam faktor-faktor yang paling sederhana.

- a.  $1 - \cos^2$  b.  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$  c.  $\tan^2 \alpha - 1$  d.  $\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$  **Pembahasan**

1. (a)  $1 - \cos^2$

Dari identitas  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ , maka diperoleh :  $\Rightarrow 1 - \cos^2 = \sin^2$  Jadi,  $1 - \cos^2 = \sin^2$ .

1. (a)  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

Dari identitas  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , maka  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$  Karena  $2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$ , maka  $1 - 2 \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$  Jadi,  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$ .

1. (a)  $\tan^2 \alpha - 1$

Dari identitas  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ , maka  $\tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1 \Rightarrow \tan^2 \alpha - 1 = \sec^2 \alpha - 1 - 1 \Rightarrow \tan^2 \alpha - 1 = \sec^2 \alpha - 2$

?  $\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin 2\alpha$  Jadi,  $\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin 2\alpha$ .

? Buktikan tiap identitas trigonometri berikut.

- a.  $1/3 \sin^2 \alpha + 1/3 \cos^2 \alpha = 1/3$  b.  $3 \cos^2 \alpha - 2 = 1 - 3 \sin^2 \alpha$  c.  $3 + 5 \sin^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha$  **Pembahasan**

1.  $1/3 \sin^2 \alpha + 1/3 \cos^2 \alpha = 1/3$

$\Rightarrow 1/3 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1/3 \Rightarrow 1/3 (??) = 1/3 \Rightarrow 1/3 = 1/3$  Terbukti.

1.  $3 \cos^2 \alpha - 2 = 1 - 3 \sin^2 \alpha$

Ingat bahwa  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , maka  $3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3$ . Dari  $3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3$ , maka  $3 \cos^2 \alpha = 3 - 3 \sin^2 \alpha$ .

$\Rightarrow 3 \cos^2 \alpha - 2 = 1 - 3 \sin^2 \alpha \Rightarrow 3 - 3 \sin^2 \alpha - 2 = 1 - 3 \sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - 3 \sin^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha$ . Terbukti.

$$1. \quad 3 + 5 \sin^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha$$

Dari  $5 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha = 5$ , maka  $5 \sin^2 \alpha = 5 - 5 \cos^2 \alpha \Rightarrow 3 + 5 \sin^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha \Rightarrow 3 + 5 - 5 \cos^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha \Rightarrow 8 - 5 \cos^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha$ . Terbukti.

Bukti bahwa  $\cos 2x + \sin 2x =$

1

Pada segitiga siku-siku berlaku perbandingan trigonometri

Pada gambar di samping berlaku rumus pitagoras

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Kemudian kita bagi masing-masing ruas dengan  $r^2$

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\rightarrow (xr)^2 + (yr)^2 = 1$$

Dengan mengganti  $\sin \alpha = yr$

$$\cos \alpha = xr$$

didapat

$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$

(terbukti)

$$1. \quad \text{Buktikan bahwa } \cos 2x - \sin x - \tan x \cos x = 1$$

Bukti :

$$\cos 2x - \sin x - \tan x \cos x = 1 - \sin 2x - \sin x - \sin x \cos x \cos x$$

$$\cos 2x = 1 - \sin 2x$$

$$= (1 - \sin x)(1 + \sin x) - \sin x - \sin x$$

$$= 1 + \sin x - \sin x$$

$$= 1$$

1.

terbukti

$$1. \quad \text{Buktikan bahwa } 1 + \cos x \sin x = \sin x - \cos x$$

Bukti :

$$1 + \cos x \sin x = 1 + \cos x \sin x$$

$$\times 1 - \cos x = 1 - \cos x$$

$$= 1 - \cos 2x \sin x (1 - \cos x)$$

$$\sin 2x = 1 - \cos 2x$$

$$= \sin 2x \sin x (1 - \cos x)$$

$$= \sin x - \cos x$$

Terbukti

$$1. \quad \text{Jika } \sin x + \cos x = 1, 2$$

maka tentukan

a.

$$\sin x \cos x$$

b.

$$\sin 3x + \cos 3x$$



Jawab :

$$1. \quad \sin x \cos x$$

$$\sin x + \cos x = 1,2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1,2^2$$

kuadratkan kedua ruas

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1,44$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + 2\sin x \cos x = 1,44$$

$$2\sin x \cos x = 0,44$$

$$\sin x \cos x = 0,22$$

$$1. \sin^3 x + \cos^3 x$$

2.

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

Substitusikan  $a = \sin x$

dan  $b = \cos x$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$= (1,2)^3 - 3(0,22)(1,2)$$

$$= 1,728 - 0,792$$

$$= 0,936$$

1. Jika  $\sec x + \tan x = 11$   
maka tentukan nilai dari

a.
$\sec x$

b.
$\tan x$

--

Jawab :

1.  $\sec x$

$$\sec x + \tan x = 11$$

$$(\sec x + \tan x)^2 = (11)^2$$

$$\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x = 121$$

$$\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1 = 121$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$2\sec^2 x + 2\sec x \tan x = 122$$

$$2\sec x (\sec x + \tan x) = 122$$

$$2\sec x (11) = 122$$

$$\sec x = 122 / 22$$

$$= 6111$$

1.  $\tan x$

Dari  $\sec x + \tan x = 11$

Kita substitusikan  $\sec x = 6111$

$$6111 + \tan x = 11$$

$$\tan x = 11 - 6111$$

$$= 6011$$

Contoh Soal Identitas Trigonometri

1. Nilai dari  $\cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 75^\circ$  adalah...

Penyelesaian:

1. Soal dengan bentuk seperti ini dapat dikerjakan dengan rumus Kuadran I. Dimana:  
 $\sin \alpha = \cos (90 - \alpha)$  atau  $\cos \alpha = \sin (90 - \alpha)$ .

1. Penyelesaiannya juga bisa menggunakan identitas trigonometri. Dimana:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 1$$

Jadi,

$$\begin{aligned} & \cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 75^\circ \\ &= \cos 15^\circ + \cos 75^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ \\ &= \cos(90 - 75)^\circ + \cos 75^\circ + \cos(90 - 55)^\circ + \cos 55^\circ \\ &= \sin 75^\circ + \cos 75^\circ + \sin 55^\circ + \cos 55^\circ \\ &= 1 + 1 = 2 \quad \text{---> (identitas trigonometri } \sin \alpha + \cos \alpha = 1) \end{aligned}$$

2. Jika  $\sin(x - 600)^\circ = \cos(x - 450)^\circ$  maka nilai dari  $\tan x$  adalah...

Penyelesaian:

1. Penyetaraan antara sisi kiri dan sisi kanan. Menggunakan aturan Kuadran I (seperti pada soal nomor 1).

$$\sin(x + \alpha) = \cos(x + \alpha)$$

$$\sin(x + \alpha) = \sin(90 - (x + \alpha))$$

1. Setelah sisi kiri dan kanan sama, *nah* bisa ditentukan nilai  $x$  nya.

2. Setelah nilai  $x$  di dapat, *baru deh* dihitung nilai  $\tan x$  nya

Jadi,

$$\begin{aligned} & \sin(x - 600)^\circ = \cos(x - 450)^\circ \\ & \sin(x - 600)^\circ = \sin(90 - (x - 450))^\circ \\ & \sin(x - 600)^\circ = \sin(540 - x)^\circ \\ & x - 600^\circ = 540^\circ - x \\ & 2x = 540^\circ + 600^\circ \\ & x = 1140^\circ / 2 = 570^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tan x = \tan 570^\circ \\ &= \tan (360 + 210)^\circ = \tan 210^\circ \\ &= \tan (180 + 30)^\circ \quad \text{---> Kuadran III} \\ &= \tan 30^\circ = 1/3 \sqrt{3} \end{aligned}$$

(bernilai + karena tangen pada kuadran III bernilai positif).

3. Diketahui  $\sin x + \cos x = -1/5$ . Maka nilai dari  $\sin 2x$  adalah...

Penyelesaian:

Identitas Trigonometri yang berpengaruh pada soal ini yakni:

$\sin \alpha + \cos \alpha = 1$  dan aturan sudut rangkap.

Jadi,

$$\sin x + \cos x = -1/5$$

$$(\sin x + \cos x) = (-1/5) \quad \text{---> (Kuadratkan kedua ruas.)}$$

$$\sin x + 2\sin x \cos x + \cos x = 1/25$$

$$\sin x + \cos x + 2\sin x \cos x = 1/25$$

$$1 + 2\sin x \cos x = 1/25 \quad \text{---> (Identitas trigonometri } \sin \alpha + \cos \alpha = 1)$$

$$2\sin x \cos x = 1/25 - 1$$

$$2\sin x \cos x = 1/25 - 25/25$$

$$2\sin x \cos x = -24/25$$

$$\sin 2x = -24/25$$

(aturan sudut rangkap  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ).

4. Diketahui  $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 8/25$ . Maka nilai dari  $1/\sin\alpha - 1/\cos\alpha$  adalah. . .

Penyelesaian:

1. Karena berbentuk pecahan maka samakan dulu penyebutnya.
2. Identitas trigonometri yg berlaku pada soal ini adalah  $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$
- 3.

Perhatikan pembahasannya pada gambar di bawah ini.

Jadi, nilai dari  $1/\sin\alpha - 1/\cos\alpha$  adalah  $17/8$ .

5. Nilai  $\tan x$  dari persamaan  $\cos 2x - 3\sin x - 1 = 0$  adalah. . .

Penyelesaian:

1. Karena berbentuk persamaan maka unsur trigonometrinya mesti disamakan/disetarakan.
2. Menggunakan aturan sudut rangkap  $\cos 2\alpha$ . Dimana:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \text{ atau}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \text{ atau}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

1. Setelah nilai  $x$  di dapat, kemudian dilanjutkan penentuan  $\tan x$  nya.

Jadi,

$$\cos 2x - 3\sin x - 1 = 0$$

$$\cos 2x - 3\sin x = 1$$

$$(1 - 2\sin x) - 3\sin x = 1$$

(mengubah  $\cos 2x$  yang sesuai dengan  $-3\sin x$  sehingga persamaan dapat dikerjakan karena bervariasi sama yakni  $\sin x$ ).

$$(1 - 2\sin x) - 3\sin x = 1$$

$$-2\sin x - 3\sin x = 1 - 1$$

$$-2\sin x - 3\sin x = 0$$

$$\sin x(-2\sin x - 3) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ atau } -2\sin x - 3 = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ atau } \sin x = -3/2$$

$$x = 0^\circ$$

( $\sin x = -3/2$  tidak memenuhi)

maka nilai  $\tan x = \tan 0^\circ = 0$

## 4.5 Aturan Sinus dan Cosinus

## 4.6 Fungsi Trigonometri

Pada subbab ini, kita akan mengkaji bagaimana konsep trigonometri jika dipandang sebagai suatu fungsi. Mengingat kembali konsep fungsi pada Bab 3, fungsi  $f(x)$  harus terdefinisi pada daerah asalnya. Jika  $y = f(x) = \sin x$ , maka daerah asalnya adalah semua  $x$  bilangan real. Namun, mengingat satuan sudut (subbab 4.1) dan nilai-nilai perbandingan trigonometri (yang disajikan pada Tabel 4.3), pada kesempatan ini, kita hanya mengkaji untuk ukuran sudut dalam derajat. Mari kita sketsakan grafik fungsi  $y = f(x) = \sin x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

1. **Grafik Fungsi  $y = \sin x$ , dan  $y = \cos x$  untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$**

**Problem 4.1** Dengan keterampilan kamu dalam menggambar suatu fungsi (Bab 3), gambarkan grafik fungsi  $y = \sin x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

### Alternatif Penyelesaian

Dengan mencermati nilai-nilai sinus untuk semua sudut istimewa yang disajikan pada Tabel

4.3, kita dapat memasangkan ukuran sudut dengan nilai sinus untuk setiap sudut tersebut, sebagai berikut.

$$(0, 0); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 1\right); \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right);$$

$$(\pi, 0); \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right); \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right); \text{ dan } (2\pi, 0).$$

Selanjutnya pada koordinat kartesius, kita menempatkan pasangan titiktitik untuk menemukan suatu kurva yang melalui semua pasangan titik-titik tersebut. Selengkapnya disajikan pada Gambar berikut ini.

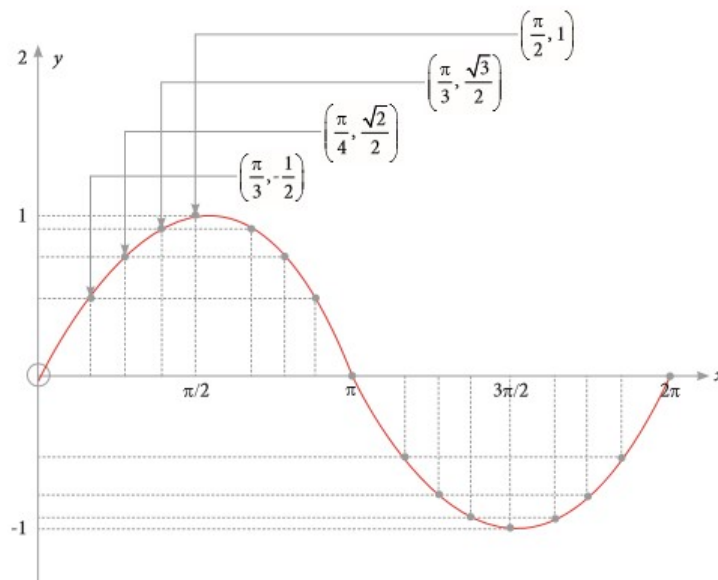


Figure 4.1: Grafik fungsi  $y = \sin x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari grafik di atas, kita dapat merangkum beberapa data dan informasi seperti berikut.

- Untuk semua ukuran sudut  $x$ , nilai maksimum fungsi  $y = \sin x$  adalah 1, dan nilai minimumnya adalah -1.
- Kurva fungsi  $y = \sin x$ , berupa gelombang.
- Untuk 1 periode (1 putaran penuh) kurva fungsi  $y = \sin x$ , memiliki 1 gunung dan 1 lembah.
- Nilai fungsi sinus berulang saat berada pada lembah atau gunung yang sama.
- Untuk semua ukuran sudut  $x$ , daerah hasil fungsi  $y = \sin x$ , adalah  $-1 \leq y \leq 1$ . Dengan konsep grafik fungsi  $y = \sin x$ , dapat dibentuk kombinasi fungsi sinus.

Misalnya  $y = 2 \cdot \sin x$ ,  $y = \sin 2x$ , dan  $y = \sin(x + \pi/2)$ . Selengkapnya dikaji pada contoh berikut.

■ **Example 4.1** Gambarkan grafik fungsi  $y = \sin 2x$  dan  $y = \sin(x + \pi/2)$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Kemudian tuliskanlah perbedaan kedua grafik tersebut.

**Alternatif Penyelesaian**

Dengan menggunakan nilai-nilai perbandingan trigonometri yang disajikan pada Tabel 4.3, maka pasangan titik-titik untuk fungsi  $y = \sin 2x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$  adalah:

Untuk  $x = 0$ , maka nilai fungsi adalah  $y = \sin 2 \cdot (0) = \sin 0 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Untuk  $x = (\pi/6)$ , maka nilai fungsi adalah  $y = \sin 2 \cdot (\pi/6) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 \Rightarrow (\pi/6, \sqrt{3}/2)$

Untuk  $x = \pi/4$ , maka nilai fungsi adalah  $y = \sin 2 \cdot (\pi/4) = \sin \pi/2 = 1 \Rightarrow (\pi/4, 1)$ .

Demikian seterusnya hingga

untuk  $x = 2\pi$ , maka nilai fungsi adalah  $y = \sin 2 \cdot (2\pi) = \sin 4\pi = \sin 0 = 0 \Rightarrow (2\pi, 0)$

Selengkapnya pasangan titik-titik untuk fungsi  $y = \sin 2x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ , yaitu

$$(0, 0); \left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}, 1\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); (\pi, 0); \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \dots; (2\pi, 0).$$

Dengan pasangan titik-titik tersebut, maka grafik fungsi  $y = \sin 2x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  disajikan pada Gambar.

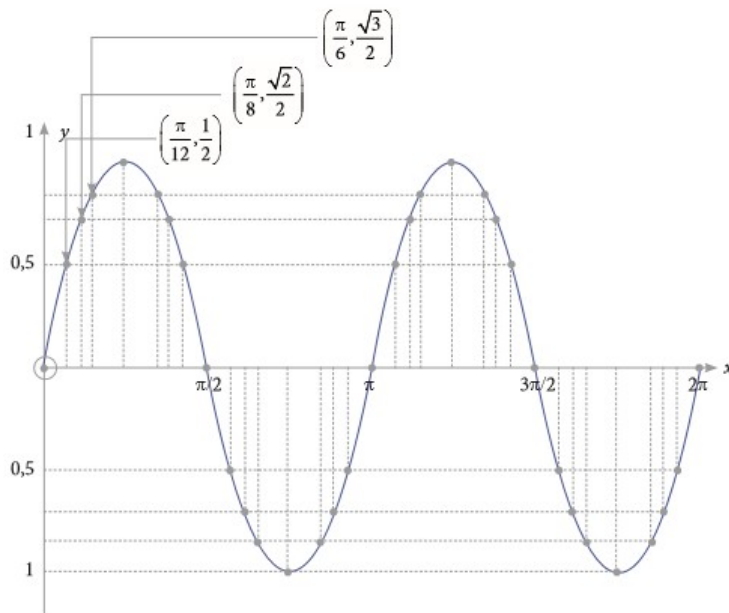


Figure 4.2: Grafik fungsi  $y = \sin 2x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$

Berbeda dengan fungsi  $y = \sin 2x$ , setiap besar sudut dikalikan dua, tetapi untuk fungsi  $y = \sin(x + \pi/2)$ , setiap besar sudut ditambah  $\pi/2$  atau  $90^\circ$ .

Sekarang kita akan menggambarkan fungsi  $y = \sin(x + \pi/2)$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Coba kita perhatikan kembali, bahwa  $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ . Artinya, sekarang kita akan menggambarkan fungsi  $y = \cos x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Dengan menggunakan nilai-nilai cosinus yang diberikan pada Tabel kita dapat merangkumkan pasangan titik-titik yang memenuhi fungsi  $y = \cos x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ , sebagai berikut.



$$(0, 1); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); (\pi, -1)$$

$$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (2\pi, 1).$$

Dengan demikian, grafik fungsi  $y = \cos x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ , disajikan pada Gambar berikut.

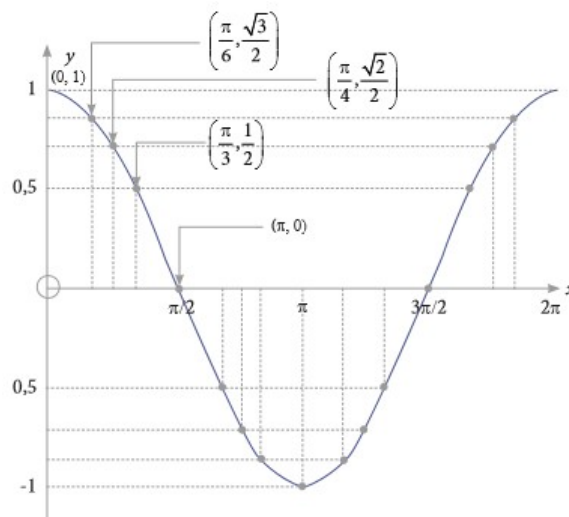


Figure 4.3: Grafik fungsi  $y = \cos x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari kajian grafik, grafik fungsi  $y = \sin 2x$  sangat berbeda dengan grafik fungsi  $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$ , meskipun untuk domain yang sama. Grafik  $y = \sin 2x$ , memiliki 2 gunung dan 2 lembah, sedangkan grafik fungsi  $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$ , hanya memiliki 1 lembah dan dua bagian setengah gunung. Nilai maksimum dan minimum fungsi  $y = \sin 2x$  sama  $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$  untuk domain yang sama. Selain itu, secara periodik, nilai fungsi  $y = \sin 2x$  dan  $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$ , berulang, terkadang menaik dan terkadang menurun.

■

**Exercise 4.1** Dengan pengetahuan dan keterampilan kamu akan tiga grafik di atas dan konsep yang sudah kamu miliki pada kajian fungsi, sekarang gambarkan dan gabungkan grafik  $y = \sin x$  dan  $y = \cos x$ , untuk domain  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Rangkumkan hasil analisis yang kamu temukan atas grafik tersebut. ■

2. **Grafik Fungsi  $y = \tan x$ , dan  $y = \cos x$  untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$**

Kajian kita selanjutnya adalah untuk menggambarkan grafik fungsi  $y = \tan x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Mari kita kaji grafik fungsi  $y = \tan x$ , melalui masalah berikut

**Problem 4.2** Untuk domain  $0 \leq x \leq 2\pi$ , gambarkan grafik fungsi  $y = \tan x$ .

**Alternatif Penyelesaian**

Dengan nilai-nilai tangen yang telah kita temukan pada Tabel 4.3 dan dengan pengetahuan serta keterampilan yang telah kamu pelajari tentang menggambarkan grafik suatu fungsi, kita dengan mudah memahami pasangan titik-titik berikut.

$$\begin{aligned}
 &(0, 0); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{\pi}{4}, 1\right); \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \sim\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\sqrt{3}\right); \left(\frac{3\pi}{4}, -1\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \\
 &(\pi, 0); \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{4}, 1\right); \left(\frac{4\pi}{3}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, \sim\right); \left(\frac{5\pi}{3}, -\sqrt{3}\right); \left(\frac{7\pi}{4}, -1\right); \\
 &\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); (2\pi, 0).
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, grafik fungsi  $y = \tan x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ , seperti pada Gambar berikut ini.

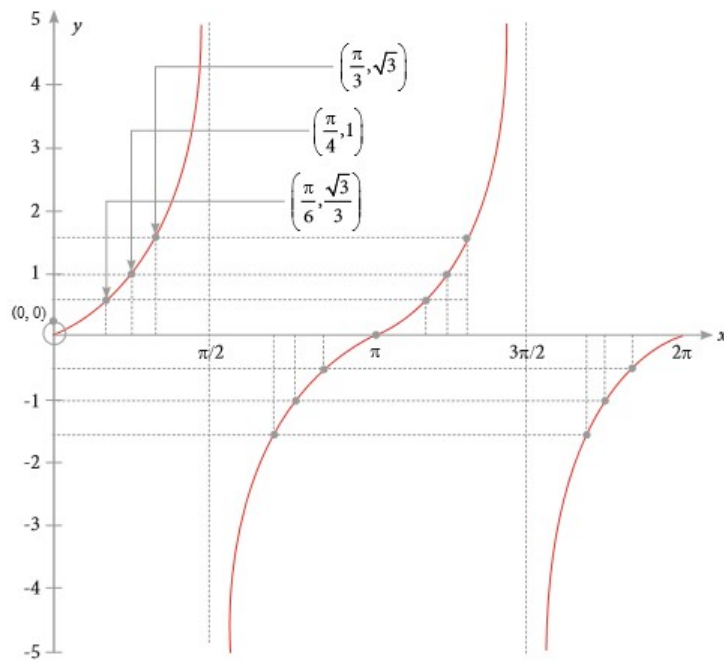


Figure 4.4: Grafik fungsi  $y = \tan x$ , untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari grafik di atas, jelas kita lihat bahwa jika  $x$  semakin mendekati  $\pi/2$  (dari kiri), nilai fungsi semakin besar, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terbesarnya. Sebaliknya, jika  $x$  atau mendekati  $\pi/2$  (dari kanan), maka nilai fungsi semakin kecil, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terkecilnya. Kondisi ini berulang pada saat  $x$  mendekati  $3\pi/2$ . Artinya, fungsi  $y = \tan x$ , tidak memiliki nilai maksimum dan minimum.



## Bibliography

**Books**

**Articles**

