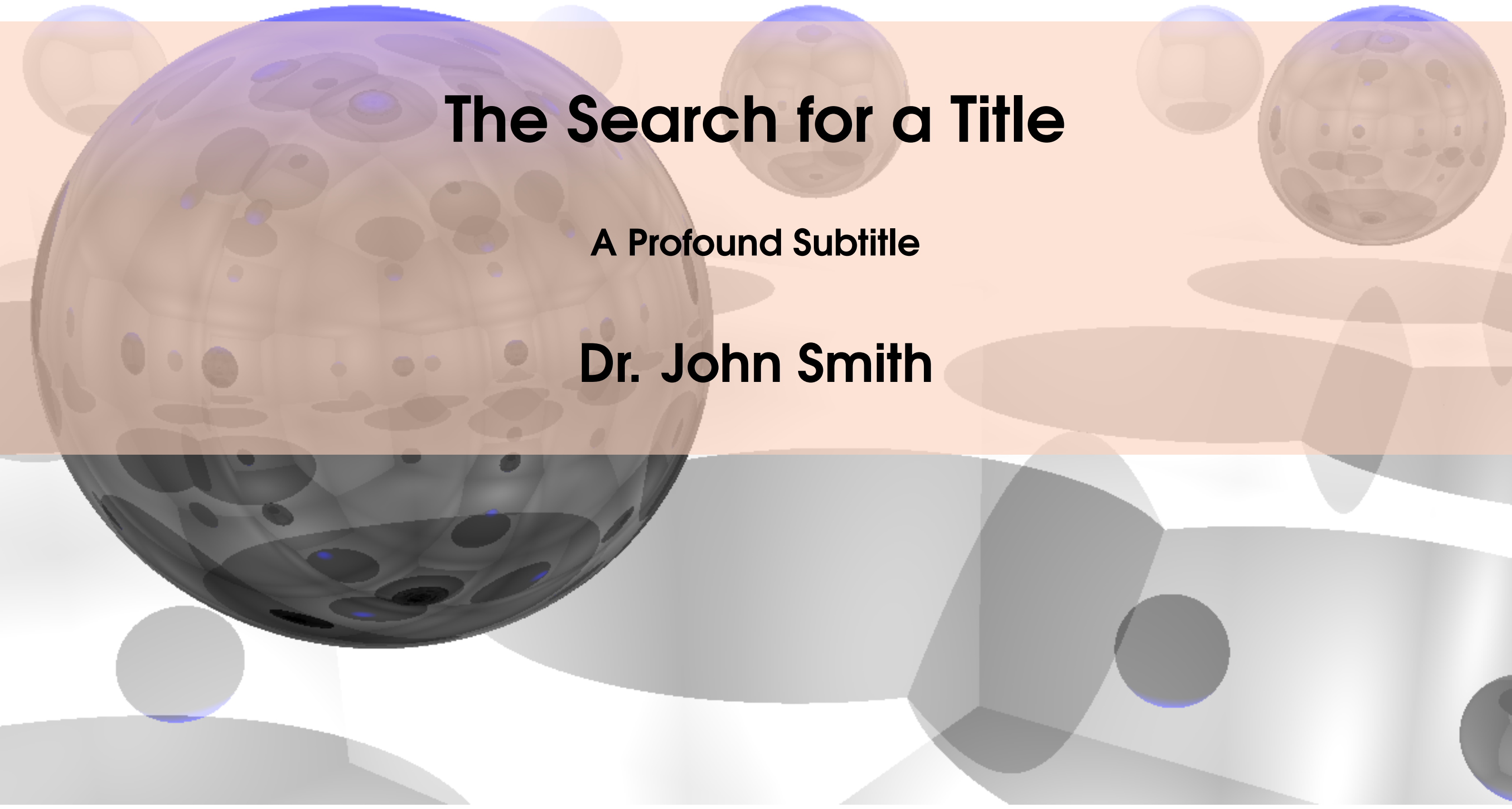


The Search for a Title

A Profound Subtitle

Dr. John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, March 2013

Contents

Part One

1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Va

1.1 Persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel yang memuat nilai mutlak

1.1.1 Pendahuluan

Kompetensi Dasar

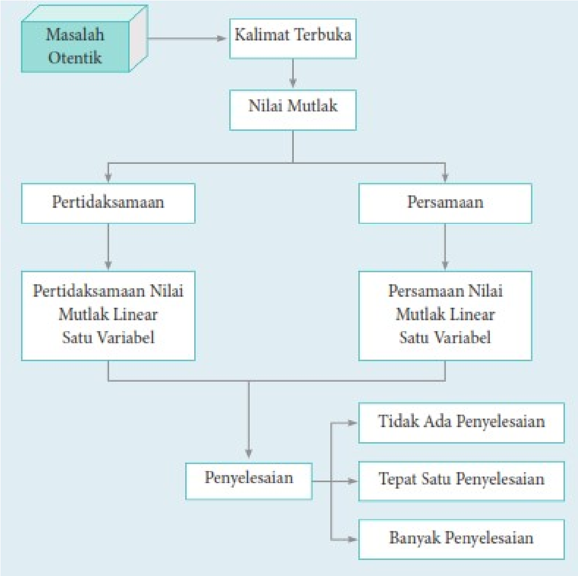
Mengintepretasi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dengan persamaan dan pertidaksamaan linear Aljabar lainnya.

Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variable.

Indikator

1. Menjelaskan konsep nilai mutlak
2. Menyelesaikan persamaan nilai mutlak
3. Menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak satu variable
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan satu variable yang memuat nilai mutlak

Materi Pokok



Persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variable

1.1.2 Uraian Materi

Kalimat Terbuka, Variabel, dan Konstanta

Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum dapat diketahui nilai kebenarannya.

Variable (peubah) adalah lambang (symbol) pada kalimat terbuka yang dapat diganti oleh sembarang anggota himpunan yang telah ditentukan

Konstanta adalah lambang yang menyatakan suatu bilangan tertentu

Pada kalimat berikut

x + 5 = 12

Belum dapat mengatakan kalimat itu benar atau salah, sebab nilai (x) belum diketahui. Bila lambang (x) diganti dengan lambang bilangan cacah, barulah itu dapat dikatakan kalimat itu benar atau salah. Jika (x) diganti dengan “3” , kalimat itu bernilai salah ; tetapi bila (x) diganti dengan 7 , kalimat itu bernilai benar. Lambang (x) dapat pula diganti menggunaan huruf-huruf kecil dalam abjad lainnya, yaitu ; a, b,c,. . . x,y,z dari bentuk diatas

x+5 +12 (kalimat terbuka)

3+ 5 = 12 (kalimat Salah)

7+5 = 12 (kalimat benar)

Huruf x pada x + 5 = 12 disebut variable (peubah), sedangkan 5 dan 12 disebut konstanta

Contoh :

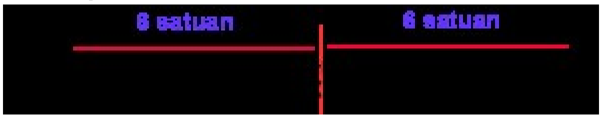
Kalimat Terbuka	Peubah	Konstanta
x + 13 + 17	x	13 dan 17
7 – y = 12	y	7 dan 12
4z – 1 = 11	z	-1 dan 11

Catatan :

Kalimat terbuka adalah kalimat yang mengandung satu atau lebih variabel dan belum diketahui nilai kebenarannya, contoh :

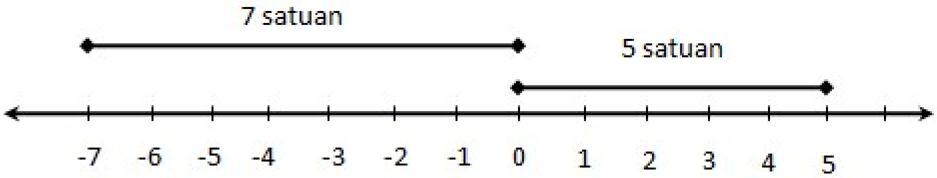
x + 2 =5

Konsep Nilai Mutlak



Nilai mutlak suatu bilangan dapat diartikan jarak antara bilangan tersebut dari titik nol(0).

Dengan demikian jarak selalu bernilai positif.



Jarak angka 6 dari titik 0 adalah 6
Jarak angka -6 dari titik 0 adalah 6
jarak angka -7 dari titik 0 adalah 7
Jarak angka 5 dari titik 0 adalah 5.
Dari penjelesan di atas memang tampak bahwa nilai mutlak suatu bilangan selalu bernilai positif.

$$|x| = \begin{cases} x \; jika \; x \geq 0 \\ -x \; jika \; x < 0 \end{cases}$$

Nilai mutlak dapat didefinisikan dengan Misalkan x bilangan real, didefinisikan
Nilai mutlak juga dapat didefinisikan dengan
"Apabila x adalah sebuah bentuk aljabar, sedangkan n merupakan bilangan real positif, maka |x| = n dapat diimplikasikan menjadi x = n atau x = -n".

$|-7| = 7 \quad |-11| = 11 \quad |-15| = 15$

$|9| = 9 \quad |-23| = 23 \quad |-10| = 10$

Berkaitan dengan menentukan nilai mutlak suatu bilangan, maka muncullah tanda mutlak. Tanda mutlak disimbolkan dengan garis 2 ditepi suatu bilangan atau bentuk aljabar.
Definisi di atas dapat diungkapkan dengan kalimat sehari-hari seperti berikut ini. Nilai mutlak suatu bilangan positif atau nol adalah bilangan itu sendiri, sedangkan nilai mutlak dari suatu bilangan negatif adalah lawan dari bilangan negatif itu. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa:

a. $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, karena $\frac{1}{2} > 0$ ($\frac{1}{2}$ adalah bilangan positif)

b. $|5| = 5$, karena $5 > 0$ (5 adalah bilangan positif)

c. $|-3| = -(-3) = 3$, karena $-3 < 0$ (-3 adalah bilangan negatif)

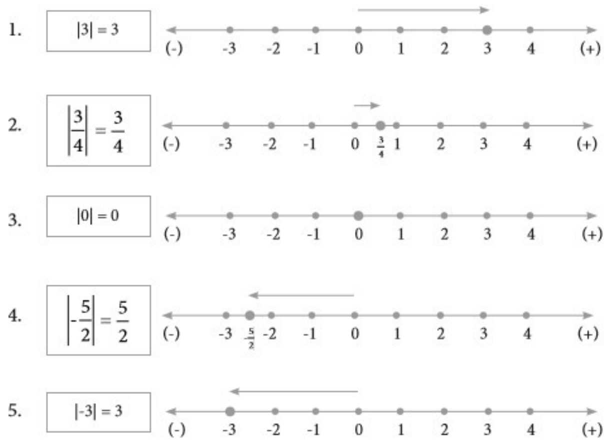
Tabel 1.1 Nilai Mutlak

Bilangan Non Negatif	Nilai Mutlak	Bilangan Negatif	Nilai Mutlak
0	0	-2	2
2	2	-3	3
3	3	-4	4
5	5	-5	5

Berdasarkan kedua cerita dan tabel di atas, dapatkah kamu menarik suatu kesimpulan tentang pengertian nilai mutlak? Jika x adalah variabel pengganti sebarang bilangan real, dapatkah kamu menentukan nilai mutlak dari x tersebut?

Perhatikan bahwa x anggota himpunan bilangan real (ditulis $x \in R$). Berdasarkan tabel, kita melihat bahwa nilai mutlak dari x akan bernilai positif atau nol (non negatif). Secara geometris, nilai mutlak suatu bilangan adalah jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan real. Dengan demikian, tidak mungkin nilai mutlak suatu bilangan bernilai negatif, tetapi mungkin saja bernilai nol.

Ada beberapa contoh percobaan perpindahan posisi pada garis bilangan, yaitu sebagai berikut:



Catatan:

Garis bilangan digunakan sebagai media untuk menunjukkan nilai mutlak.

Tanda panah digunakan untuk menentukan besar nilai mutlak, dimana arah ke kiri menandakan nilai mutlak dari bilangan negatif, dan begitu juga sebaliknya. Arah ke kanan menandakan nilai mutlak dari bilangan positif.

Besar nilai mutlak dilihat dari panjang tanda panah dan dihitung dari bilangan nol.

Penjelasan

Garis bilangan 1: Tanda panah bergerak ke arah kanan berawal dari bilangan 0 menuju bilangan 3, dan besar langkah yang dilalui tanda panah adalah 3. Hal ini berarti nilai |3| = 3 atau berjarak 3 satuan dari bilangan 0.

Garis bilangan 5: Tanda panah bergerak ke arah kiri berawal dari bilangan 0 menuju bilangan -3, dan besar langkah yang dilalui tanda panah adalah 3. Hal ini berarti bahwa nilai |-3| = 3 atau berjarak 3 satuan dari bilangan 0.

Dari kedua penjelasan di atas, dapat dituliskan konsep nilai mutlak, sebagai berikut.

Misalkan x bilangan real, $|x|$ dibaca nilai mutlak x, dan didefinisikan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Definisi di atas dapat diungkapkan dengan kalimat sehari-hari seperti berikut ini. Nilai mutlak suatu bilangan positif atau nol adalah bilangan itu sendiri, sedangkan nilai mutlak dari suatu bilangan negatif adalah lawan dari bilangan negatif itu. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa:

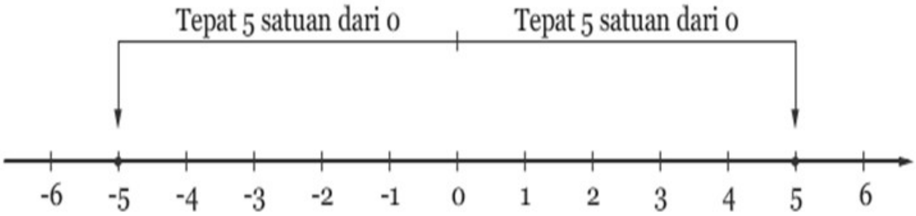
a) 11 = 22 , karena 1 2 >0 (1 2 adalah bilangan positif).

b) |5| = 5, karena $5 > 0$ (5 adalah bilangan positif).

c) |-3| = -(-3) = 3, karena $-3 < 0$ (-3 adalah bilangan negatif).

Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

Nilai mutlak dari suatu bilangan x dapat diartikan sebagai jarak bilangan tersebut terhadap titik 0 pada garis bilangan, dengan tidak memperhatikan arahnya. Ini berarti $|x| = 5$ memiliki dua selesaian, karena terdapat dua bilangan yang jaraknya terhadap 0 adalah 5: $x = -5$ dan $x = 5$ (perhatikan gambar berikut).



Himpuana Penyelesaian (HP) adalah himpunan dari penyelesaian-penyelesaian suatu persamaan .

Ada dua cara untuk menentukan penyelesaian dan himpunan penyelesaian dari suatu persamaan linier satu variable , yaitu :

1. **Subtitusi**

Selesaikan persamaan 3x-1=14; jika x Merupakan anggota himpunan P = (3,4,5,6) !

Jawab :

3x-1+14 x ? P = (3,4,5,6)

Cara subtitusi :

3x-1= 14; jika x = 3 = maka 3(**??**) – 1 = 8 (salah)

3x-1= 14; jika x = 4 = maka 3(**??**) – 1 = 11 (salah)

3x-1= 14; jika x = 5 = maka 3(**??**) – 1 = 14 (benar)

3x-1= 14; jika x = 6 = maka 3(**??**) – 1 = 17 (salah)

Jadi , penyelesaian dari 3x-1+14 adalah 5

1. **Mencari persamaan-persamaan yang ekuivalen**

Mencari persamaan-persamaan yang ekuivalen

	Persamaan	Operasi Hitung	Hasil
A b. c.	3x-1=14 (i)	Kedua ruas ditambah 1	3x-1+1 = 14 + 1 3x = 15 (ii)
	3x = 15	Kedua ruas dikalikan 1/3	3x = 15 x = 5 (iii)
	X =5		

Dari table diatas, bila x = 5, disubtituskan pada (a),(b) dan (c) maka persamaan tersebut menjadi suatu kesamaan .

1. 3x-1=14
   3 (**??**) – 1 = 14
   14 = 14 (ekuivalen)
1. 3x =15
   15 = 15 (ekuivalen)
1. x = 5

5 = 5 (ekuivalen)

Berarti 3x – 1 = 14 dan 3x = 15 merupakan persamaan yang ekuivalen.

Suatu persamaan dapat dinyatakan ke dalam persamaan yang ekuivalen, dengan cara :

1. Menambah atau mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama

2. Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan bukan nol yang sama.

Persamaan yang ekuivalen adalah persamaan-persamaan yang memiliki himpunan penyelesaian sama jika pada persamaan tersebut dilakukan operasi tertentu

Contoh Soal :

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan nilai Mutlak di bawah ini.

1. $|x + 5| = 3$

2. $|2x - 3| = 5$

3. $|x + 1| + 2x = 7$

3. $|3x + 4| = x - 8$ **Jawaban:**Bentuk-Bentuk persamaan nilai mutlak di atas dapat diselesaikan sebagai berikut. Pada prinsipnya, langkah langkah penyelesaian nilai mutlak diusahakan bentuk mutlak berada di ruas kiri. 1. Pada bentuk ini ada dua penyelesaian. (*) x + 5 = 3 , maka x = 3 - 5 = -2 (**) x + 5 = -3, maka x = -3 - 5 = -8 Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {-2, -8}2. Pada bentuk ini ada dua penyelesaian. (*) 2x + 3 = 5 , maka 2x = 5 - 3 2x = 2 <==> x = 1 (**) 2x + 3 = -5 , maka 2x = -5 -3 2x = -8 <==> x = -4 Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {-4, 1}3. Perhatikan bentuk aljabar di dalam tanda mutlak, yaitu x+1. Penyelesaian persamaan nilai mutlak ini juga dibagi menjadi dua bagian.Bagian pertama untuk batasan x+1>= 0 atau x >= -1Bagian kedua untuk batasan x+1< 0 atau x < -1Mari kita selesaikan.(*) untuk x >=-1 Persamaan mutlak dapat ditulis: (x + 1) + 2x = 7 3x = 7 - 1 3x = 6 x = 2 (terpenuhi, karena batasan >= -1)(**) untuk x < -1 Persamaan mutlak dapat ditulis: -(x + 1) + 2x = 7 -x - 1 + 2x = 7 x = 7 + 1 x = 8 (tidak terpenuhi, karena batasan < -1)Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah {2}.

4. Perhatikan bentuk aljabar di dalam tanda mutlak, yaitu 3x + 4. Penyelesaian persamaan nilai mutlak ini juga dibagi menjadi dua bagian.Bagian pertama untuk batasan 3x+4>= 0 atau x >= -4/3Bagian kedua untuk batasan 3x+4< 0 atau x < -4/3Mari kita selesaikan.(*) untuk x >=-4/3 Persamaan mutlak dapat ditulis: (3x + 4) = x - 8 3x - x = -8 - 4 2x =-12 x = -6 (tidak terpenuhi, karena batasan >= -4/3)(**) untuk x < -4/3 Persamaan mutlak dapat ditulis: -(3x + 4) = x - 8 -3x - 4 = x -8 -3x - x = -8 + 4 -4x = -4 x = 1 (tidak terpenuhi, karena batasan < -4/3)Jadi, Tidak ada Himpunan penyelesaiannya.

Rangkuman

1. Untuk setiap bilangan x (x R), harga mutlak dari x ditulis x dan

$$|x| = \begin{cases} x\ , x \geq 0 \\ -x\ , x \leq 0 \end{cases}$$

2. Persamaan adalah kalimat matematika terbuka yang memuat tanda sama dengan (“=”), sedangkan kesamaan adalah kalimat matematika tertutup yang memuat tanda sama dengan (“=”).

3. Jika P(x), Q(x), dan R(x) bentuk-bentuk akar dalam x, maka kalimat terbuka P(x) = R(x)

A. $P(x) + R(x) = Q(x) + R(x)$

B. $P(x) . R(x) = Q(x) . R(x)$

C. $\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{R(x)}$

adalah ekivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut :

1. $\sqrt{x^2} = |x|$ Untuk setiap x R berlaku

(a). $|x| = |-x|$

(b). $|x|^2 = |-x^2| = x^2$

(c). $|xy| = |x|.|y|$

1. "Jika U(x) dan V(x) ungkapan-ungkapan dalam x, maka himpunan penyelesaian dari U(x) = V(x) adalah himpunan bagian dari himpunan penyelesaian $\{u(x)\}^n = \{ V(x) \}^n$ untuk tiap-tiap x e N (himpunan bilangan asli)".

(d). $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(e). $|x - y| = |y - x|$

2. (f). $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ Untuk setiap x e R dan y e R berlaku

1. $|2 - \sqrt{3}| =$

A. $2 - \sqrt{3}$ B. $-2 + \sqrt{3}$

B. $2 + \sqrt{3}$ D. $-2 - \sqrt{3}$

2. Jika $x < 1$, maka $|x - 1| =$

A. $x - 1$ B. $1 - x$

C. $x + 1$ D $-x - 1$

3. $||-3| - |2(3-5)|| =$

A. 7 B. 4

C. 3 D. 1

4. $13 + |-1-4| - 3 - |-8| =$

A. 13 B. 11

C. 7 D. 5

5. Untuk setiap $x \in R$, berlaku $|-x| =$

TES FORMATIF 1

A. x B. -x

C. ± x D. A, B dan C salah

6. Untuk setiap a, b ∈ R berlaku $|a - b| =$

A. $|a+b| =$ B. $|b - a| =$

C. $|-a - b| =$ D. A, B dan C salah

7. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|5x+1| = 3$

A. $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ B. $\left\{\frac{-2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

C. $\left\{\frac{2}{5}, \frac{-4}{5}\right\}$ D. $\left\{\frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}\right\}$

8. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|3x+4| = -5$

A. $\left\{\frac{1}{3}, -3\right\}$ B. $\left\{-\frac{1}{3}, -3\right\}$

C. $\left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$ D. ϕ

9. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|1+2(x-1)| = |3x+7|$

A. { 6 } B. $\{ 6 , \frac{8}{6} \}$

C. $\{ \frac{8}{6} \}$ D. ϕ

10. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|3x-3| = |3x+5|$

A. $\{ -\frac{1}{4} , 4 \}$ B. $\{ \frac{1}{4} , -4 \}$

C. $\{ -\frac{1}{4} , -4$ D. $\{ \frac{1}{4} , 4 \}$

1.2 Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

1. **KOMPETENSI INTI (KI)**
2. Memahami dan menerapkan pengetahuan faktual, konseptual, prosedural dalam ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah
3. Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan

1. **KOMPETENSI DASAR (KD)**

1.1 Mengintepretasi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dengan persamaan dan pertidaksamaan linear Aljabar lainnya.

1.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variable

1. **INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI**
2. Memahami dan menjelaskan konsep nilai mutlak.
3. Menentukan penyelesaian persamaan nilai mutlak linear satu variabel.
4. Menentukan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel.
5. Menggunakan konsep nilai mutlak untuk menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan nilai mutlak.

6. Menggunakan konsep persamaan dan pertidaksamaan untuk menentukan penyelesaian permasalahan nilai mutlak.

1. **TUJUAN PEMBELAJARAN**
2. Setelah membaca, berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat memahami dan menjelaskan konsep nilai mutlak dengan baik dan percaya diri.
3. Setelah berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat menentukan penyelesaian persamaan nilai mutlak satu variable dengan percaya diri.
4. Setelah berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat pertidaksamaan nilai mutlak satu variable dengan percaya diri.
5. Disediakan permasalahan kontekstual dan LKS, peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan tersebut dengan konsep nilai mutlak secara mandiri.
6. Disediakan permasalahan nilai mutlak dan LKS, peserta didik dapat menyelesaikan persmasalahan nilai mutlak dengan menggunakan konsep persamaan dan pertidaksaman secara mandiri.

MATERI PEMBELAJARAN

Pertidaksamaan adalah kalimat/pernyataan matematika yang menunjukkan perbandingan ukuran dua objek atau lebih dan dihubungkan oleh satu dari beberapa simbol berikut :

1. $<$ (kurang dari)
2. $>$ (lebih dari)
3. $\leq$ (kurang dari atau sama dengan)
4. $\geq$ (lebih dari atau sama dengan)

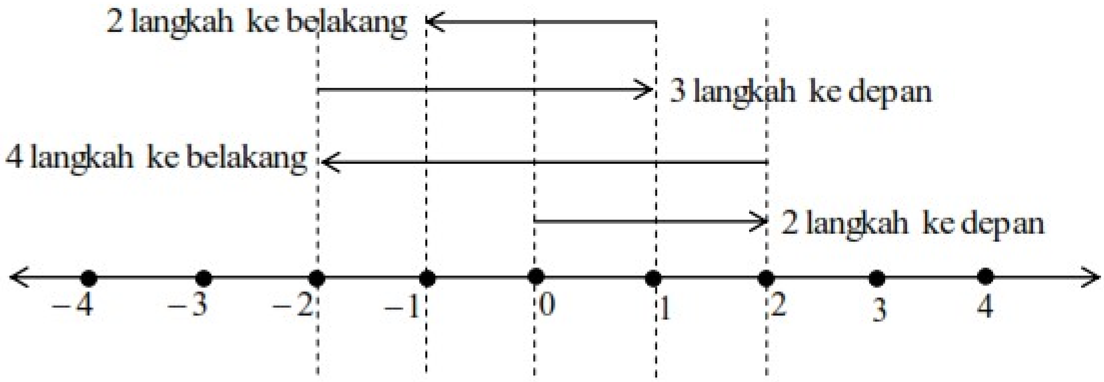
Nilai Mutlak adalah nilai suatu bilangan yang dihitung dari jarak bilangan itu dengan nol (0), sehingga bilangan yang dinilaimutlakkan selalu bernilai positif.

1. (a) **Konsep Nilai Mutlak**

Untuk memahami konsep nilai mutlak, akan diilustrasikan dengan cerita berikut ini: Seorang anak pramuka sedang latihan baris berbaris. Dari posisi diam, si anak diminta maju 2 langkah ke depan, kemudian 4 langkah ke belakang. Dilanjutkan dengan 3 langkah ke depan dan akhirnya 2 langkah ke belakang. Dari cerita di atas dapat diambil permasalahan :

1. (a) i. Berapakah banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir ?
   ii. Dimanakah posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam? (berapa langkah ke depan atau berapa langkah ke belakang)

Untuk menjawab permasalahan diatas, akan diberikan gambar garis bilangan berikut:



Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa x = 0 adalah posisi diam (awal) si anak. Anak panah ke kanan menunjukkan arah langkah ke depan (bernilai positif) dan anak panah ke kiri menunjukkan arah langkah ke belakang (bernilai negatif). Sehingga permasalahan di atas dapat dijawab sebagai berikut :

1. Banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir adalah bentuk penjumlahan 2 + 4 + 3 + 2 = 11 langkah. Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan tampa memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif)
2. Dari gambar diatas, dapat dilihat bahwa posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam adalah 1 langkah ke belakang (x = –1). Hasil ini didapat dari bentuk penjumlahan 2 + (–4) + 3 + (–1) = –1. Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan dengan memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif).

Ilustrasi dari penyelesaian soal (a) di atas merupakan dasar dari konsep nilai mutlak.Dimana ***Nilai mutlak suatu bilangan real x merupakan jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan***. Dan dilambangkan dengan x. Secara formal nilai mutlak didefinisikan :

Misalkan x bilangan real, maka : $|x| = \begin{cases} x, & jika\ x \geq 0 \\ -x, & jika\ x < 0 \end{cases}$

1. (a) **Pertidaksamaan Nilai Mutlak Satu Variabel**

Pertidaksamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat berikut :

Bentuk 1

1. $Jika\ |f(x)| < a,\ maka\ -a < f(x) < a$
2. $Jika\ |f(x)| > a,\ maka\ f(x) < -a\ atau\ f(x) > a$

Bentuk 2

1. $Jika\ |f(x)| < g(x),\ maka\ f^2(x) < g^2(x),\ dengan\ syarat\ g(x) > 0$
2. $Jika\ |f(x)| > g(x),\ maka\ f^2(x) > g^2(x),\ dengan\ syarat\ g(x) > 0$

Bentuk 3

1. $Jika\ |f(x)| < |g(x)|,\ maka\ f^2(x) < g^2(x)$
2. $Jika\ |f(x)| > |g(x)|,\ maka\ f^2(x) > g^2(x)$

Contoh :

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x+3| < 5$

Jawab :

$$|2x+3| < 5$$
$$-5 < 2x+3 < 5$$
$$-5-3 < 2x+3-3 < 5-3$$
$$-8 < 2x < 2$$
$$-4 < x < 1$$

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x-9| < 4x-3$

Jawab :

$$|2x-9| < 4x-3$$
$$(2x-9)^2 < (4x-3)^2$$
$$4x^2-36x+81 < 16x^2-24x+9$$
$$-12x^2-12x+72 < 0$$
$$x^2+x-6 > 0$$
$$(x+3)(x-2) > 0$$

$x < -3$ atau $x > 2$ .... (**??**)

Syarat : $4x-3 > 0 \implies x > \frac{3}{4}$ .... (**??**)

Dari (**??**) dan (**??**) diperoleh interval : $x > 2$

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|x+4| \geq |3x-8|$

Jawab :

$$|x+4| \geq |3x-8|$$

$$(x+4)^2 \geq (3x-8)^2$$

$$x^2+8x+16 \geq 9x^2-48x+64$$

$$-8x^2+56x-48 \geq 0$$

$$x^2-7x+6 \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 6$$

1. (a) **Menemukan konsep nilai mutlak**

Nilai mutlak dari suatu bilangan adalah positif. Hal ini sama dengan akar dari sebuah bilangn selalu positif. Misal $a \in R$, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$. Dengan demikian grafik fungsi nilai mutlak selalu berada di atas sumbu X.

Konsep

Persamaan dan pertidaksamaan linier dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan.

Misalnya jika diketahui $|ax+b| = c,\ untuk\ a,\ b,\ c\ \in R$,

maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax+b=c$.

Demikian juga untuk pertidaksamaan linier.

Prinsip

1. Bentuk umum dari persamaan linier dinyatakan : $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linier satu variable dan apabila $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ maka diperoleh persamaan linier dua variable.
2. Pertidaksamaan linier adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan tanda pertidaksamaan $<, \leq, >$, dan $\geq$. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n > 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan linier satu variable dan apabila $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ maka diperoleh pertidaksamaan linier dua variableBentuk umum dari persamaan linier dinyatakan :

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linier satu variable dan apabila $a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ maka diperoleh persamaan linier dua variable.

1. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linier adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variable yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaan dapat :

(**??**) tepat satu,

(**??**) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian, atau

(**??**) tidak punya penyelesaian.

4. Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan lambing $<, >, \geq$, dan $\leq$. Contohnya bentuk pertidaksamaan : y + 7 $<$ 7 dan 2y + 1 $>$ y + 4. Pertidaksamaan linier dengan satu variable adalah suatu kalimat terbuka yang hanya memuat satu variable dengan derajad satu, yang dihubungkan oleh lambang $<, >, \geq$, dan $\leq$. Variablenya hanya satu yaitu y dan berderajad satu. Pertidaksamaan yang demikian disebut pertidaksamaan linier dengan satu variable (peubah).

Menentukan Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linier Satu variable

Sifat- sifat pertidaksamaan adalah :

1. Jika pada suatu pertidaksamaan kedua ruasnya ditambah atau dikurang dengan bilangan yang sama, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
2. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan positif , maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
3. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan negatif , maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula bila arah dari tanda ketidaksamaan dibalik
4. Jika pertidaksamaannya mengandung pecahan, cara menyelesaikannya adalah mengalikan kedua ruasnya dengan KPK penyebut-penyebutnya sehingga penyebutnya hilang .

Menyelesaikan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak caranya hampir sama dengan persamaan nilai mutlak. hanya saja berbeda sedikit pada tanda ketidaksamaannya. Langkah-langkah selanjutnya seperti menyelesaikan pertidaksamaan linear atau kuadrat satu variabel .Pertidaksamaan mutlak dapat digambarkan sebagai berikut.

$$\text{Untuk } |x|, \begin{cases} |x| < a & \text{, maka penyelesaiannya } -a < x < a \\ |x| > a & \text{, maka penyelesaiannya } x < -a \text{ atau } x > a \end{cases}$$

$$\text{Dengan } a \geq 0, x \in R, a \in R$$

Apabila fungsi di dalam nilai mutlak berbentuk ax + b maka pertidaksamaan nilai mutlak dapat diselesaikan seperti berikut.

$$\text{Untuk } |ax+b|, \begin{cases} |ax+b| < p & \text{, maka penyelesaiannya } -p < x < p \\ |ax+b| > p & \text{, maka penyelesaiannya } x < -p \text{ atau } x > p \end{cases}$$

$$\text{Dengan } p \geq 0, \quad x \in R, \quad a, b \in R$$

Lebih jelasnya perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1 :

Tentukan himpunan penyelesaian 3x – 7 > 2x + 2 jika x merupakan anggota {1,2,3,4,... ,15}

Jawab :

3x – 7 > 2x + 2; x ? {1, 2, 3, 4... 15}
3x –2x – 7 > 2x - 2x + 2 (kedua ruas dikurangi 2x)
x – 7 > 2
x – 7 + 7 > 2 + 7 (kedua ruas dikurangi7)
x > 9
jadi himpunan penyelesaiannya adalah {x | x > 9 ; x bilangan asli ≤ 15}
HP = {10, 11, 12, 13, 14, 15}

Contoh 2 :

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan 3x – 1 < x + 3 dengan x variable pada himpunan bilangan cacah.

Jawab :

3x – 1 < x + 3
3x – 1+ 1 < x + 3 + 1 (kedua ruas ditambah 1)
3x < x + 4
3x + (-x) < x + (-x) +4 (kedua ruas ditambah – x)
2x < 4
X < 2
Karena x anggota bilangan cacah maka yang memenuhi x < 2 adalah x = 0 atau x = 1
Jadi himpunan pnyelesaiannya adalah { 0,1 } .

Contoh 3 :
Sebuah perahu angkut dapat menampung dengan berat tidak lebih dari 1 ton . jika sebuah kotak beratnya 15 kg, maka berapa paling banyak kotak yang dapat diangkut oleh perahu ?
Jawab :
Kalimat matematika : 15 kg x $\leq$ 1 ton
Penyelesaian : 15 kg x $\leq$ 1 .500 kg
x $\leq$ 1 .500 kg
15 kg
x $\leq$ 100
jadi perahu paling banyak mengangkut 100 kotak .
Contoh 4 :
Jarak terpendek yang diperlukan untuk menghentikan suatu mobil sejak pengereman dilakukan disebut jarak henti. Jarak henti ini merupakan faktor penting yang perlu diuji sebelum peluncuran produk mobil baru. Data mengenai jarak henti dapat digunakan untuk menghitung waktu reaksi pengemudi (selang waktu mulai pengemudi melihat kejadian sampai dia bereaksi menginjak pada rem) berdasarkan tingkat kelajuan mobil (dalam meter/jam).
Suatu penelitian menyatakan bahwa jarak henti dapat dinyatakan dengan formula :d = |0,44v2 + 1,1v|, dimana v adalah kelajuan dan d dalam meter.
Pada batas kelajuan berapakah jarak henti mobil lebih dari 100 meter?
Penyelesaian :
Oleh karena kelajuan selalu bernilai positif, maka |0,44v2 + 1,1v| = 0,44v2 + 1,1v. Selanjutnya, agar jarak henti mobil lebih dari 100 meter, maka d haruslah lebih besar dari seratus.

$$|0,44v^2 + 1,1v| > 100$$
$$\Leftrightarrow 0,44v^2 + 1,1v - 100 > 0$$
$$\Leftrightarrow 22v^2 + 55v - 5000 > 0$$

$$a = 22,\ b = 55,\ c = -5000$$

$$v = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$v = \frac{-55 \pm \sqrt{3025 + 440000}}{44}$$
$$v = \frac{-55 \pm \sqrt{443025}}{44}$$
$$v \approx \frac{-55 \pm 665,6}{44}$$
$$v_1 \approx \frac{-55 + 665,6}{44} \approx 13,9 \text{ meter/jam}$$
$$v_2 \approx \frac{-55 - 665,6}{44} \approx -16,4 \text{ meter/jam}$$

Jadi, batas kelajuannya jarak henti mobil lebih dari 100 meter adalah **-16,4 $<$ v $<$ 13,9 meter/jam**.
Contoh 5 :
Selisih antara panjang dan lebar suatu persegi panjang kurang dari 6 cm. Jika keliling persegi panjang adalah 32 cm, maka tentukan batas nilai lebar persegi panjang tersebut!
Penyelesaian :
Oleh karena keliling persegi panjang adalah 32 cm, maka *2(p + l) = 32 <=> p + l*

= 16 <=> p = 16-l
Selanjutnya, karena selisih antara panjang dan lebar persegi kurang dari 6 cm, maka

$$
\begin{aligned}
&|p-l|<6\\
&\Leftrightarrow -6<16-l-l<6\\
&\Leftrightarrow -6<16-2l<6\\
&\Leftrightarrow -6-16<-2l<6-16\\
&\Leftrightarrow -22<-2l<-10\\
&\Leftrightarrow -11<-l<-5\\
&\Leftrightarrow 11>l>5\\
&\Leftrightarrow 5<l<11
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, batas nilai lebar persegi panjang yang dimaksud adalah antara 5 cm sampai dengan 11 cm.

Contoh 6 :

Pergerakan suatu titik dalam koordinat kartesius ditentukan oleh nilai absis dan memenuhi pertidaksamaan |x – 1|2 + 2|x – 1| < 15. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan tersebut!

Penyelesaian :

Jika dimiisalkan |x – 1| = p, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
&p^2+2p<15\\
&\Leftrightarrow p^2+2p-15<0\\
&\Leftrightarrow (p+5)(p-3)<0\\
&\Leftrightarrow -5<p<3\\
&\Leftrightarrow p<3 atau p>-5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p<3\\
&\Leftrightarrow \ |x-1|<3\\
&\Leftrightarrow -3<x-1<3\\
&\Leftrightarrow -3+1<x<3+1\\
&\Leftrightarrow -2<x<4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p>-5\\
&\Leftrightarrow \ |x-1|>-5 selalu terpenuhi untuk setiap px\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

jadi, nilai x yang memenuhi adalah { **x** $\in \mathbb{R}$ **| -2** < **x** < **4** }.

Mengubah soal cerita ke bentuk pertidaksamaan linear

Pertidaksamaan Linear adalah peridaksamaan yang memiliki variabel atau peubah yang berderajat satu. Pada kesempatan sebelumnya telah dibahas bagaimana penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel. Berdasarkan prinsip penyelesaian tersebut, pertidaksamaan linear ternyata dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu untuk menyelesaikan berbagai persoalan atau perhitungan yang melibatkan pertidaksamaan. Beberapa perhitungan matematika dapat diterjemahkan ke dalam model matematika berbentuk pertidaksamaan satu variabel. Soal tersebut dapat diubah ke pertidaksamaannilai mutlak sesuai model soalnya. Pada kesempatan ini, bahan belajar sekolah akan membahas bagaimana cara mengubah soal cerita ke bentuk pertidaksamaan linear dan menentukan penyelesaiannya.

Bentuk Pertidaksamaan Linear

Setiap masalah memiliki bentuknya masing-masing. Tidak sesuai soal dapat diselesaikan dengan model matematika berbentuk pertidaksamaan linear. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan suatu permasalahan kita harus mengidentifikasi bentuk pertidaksamaan yang paling relevan dengan masalah tersebut.

Karena kita berbicara tentang pertidaksamaan linear, maka kita harus terlebih dahulu memahami ciri dari pertidaksamaan linear dan mengenali ciri-ciri soal yang berkaitan dengan pertidaksamaan linear. Salah satu ciri utama yang dapat kita lihat adalah penggunaan kata-kata pertidaksamaan. Dalam Soal cerita, hubungan pertidaksamaan seringkali dihadirkan dengan penggunaan kata-kata seperti kurang dari, sebanyak-banyaknya, maksimal, dan sebagainya. Kata-kata tersebut merupakan indikasi bahwa soal tersebut berbentuk pertidaksamaan. Selanjutnya, kita harus mengidentifikasi kondisi yang diketahui dalam soal. Kita harus mengidentifikasi besaran yang digunakan dalam soal dan selanjutnya menyatakan besaran tersebut sebagai variabel. Setelah itu, kita susunlah pertidaksamaan yang sesuai dengan soal. Sebagai acuan, kita harus memahami bentuk umum atau bentuk baku dari pertidaksamaan yang ingin kita gunakan. Karena kita membahas pertidaksamaan linear satu variabel, maka kita harus memahami bentuk baku dari pertidaksamaan linear satu variabel.

Bentuk baku pertidaksamaan linear satu variabel dalam variabel x :

1. Pertidaksamaan kurang dari : ax + b < 0
2. Pertidaksamaan kurang dari sama dengan : ax + b ≤ 0
3. Pertidaksamaan lebih dari : ax + b > 0
4. Pertidaksamaan lebih dari sama dengan : ax + b ≥ 0

Pada bentuk di atas, x merupakan variabel atau peubah sedangkan a dan b merupakan bilangan-bilangan real. Nilai a dan b diperoleh dari soal cerita sehingga bentuk pertidaksamaannya akan bergantung pada soal ceritanya.

Suatu pertidaksamaan linear satu variabel dapat diselesaikan dengan metode manipulasi aljabar. Dalam memanipulasi aljabar pertidaksamaan linear, ada aturan atau sifat-sifat yang harus diperhatikan.

Menyelesaikan soal cerita berbentuk pertidaksamaan linear

Untuk menyelesaikan suatu soal cerita, kita harus memastikan bentuk pertidaksamaan yang sesuai. Jika soal cerita sudah dipastikan berbentuk pertidaksamaan linear satu variabel, maka soal tersebut dapat kita selesaikan dengan prinsip penyelesaian pertidaksamaan linear.

Langkah pertama yang harus kita lakukan adalah mengidentifikasi besaran yang tidak diketahui nilainya dalam soal. Besaran inilah yang nanti akan kita nyatakan sebagai variabel. Kemudian kita identifikasi nilai-nilai yang diketahui dalam soal dan hubungan pertidaksamaan yang digunakan.

Selanjutnya kita lakukan pemisalan untuk menyatakan besaran sebagai variabel. Kita bisa menggunakan symbol huruf abjad yang paling relevan dengan besaran tersebut kemudian kita susun bentuk pertidaksamaannya berdasarkan nilai-nilai yang diketahui dalam soal.

Setelah dihasilkan bentuk pertidaksamaan linear satu variabel, selanjutnya kita selesaikan pertidaksamaan tersebut dengan prinsip manipulasi aljabar. Dalam manipulasi ini kita harus memperhatikan sifat-sifat perubahan tanda pertidaksamaan.

Berdasarkan uraian diatas, maka berikut langkah menyelesaikan soal cerita yang berbentuk pertidaksamaan linear satu variabel:

1. Identifikasi besaran yang tidak diketahui dalam soal
2. Nyatakan besaran tersebut sebagai variabel
3. Identifikasi hubungan pertidaksamaan yang digunakan
4. Susun pertidaksamaan linear satu variabel sesuai soal
5. Tentukan penyelesaian pertidaksamaannya.

Contoh Soal Cerita

Jumlah dua bilangan tidak kurang dari 400. Jika bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan kedua, maka tentukanlah batas-batas nilai dari kedua bilangan tersebut.

Pembahasan :

Langkah pertama, kita identifikasi besaran yang belum diketahui. Besaran tersebut adalah bilangan pertama dan bilangan kedua. Selanjutnya kita misalkan bilangan pertama dan bilangan kedua sebagai variabel.

Misalkan :

Bilangan pertama = x

Bilangan kedua = y

Dari soal diketahui kalau bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan kedua, dengan demikian berlaku hubungan x=4y

Selanjutnya diketahui bahwa jumlah kedua bilangan tersebut tidak kurang dari 400. Kata "Tidak kurang" dalam soal merupakan indikasi hubungan pertidaksamaan lebih besar sama dengan ($\geq$). Itu artinya, model pertidaksamaannya adalah pertidaksamaan lebih dari sama dengan.

Berdasarkan kondisi yang diketahui dalam soal, maka bentuk pertidaksamaan yang sesuai dengan soal adalah sebagai berikut :

1. $x + y \geq 400$

Karena x = 4y, maka pertidaksamaannya menjadi:

1. $4y + y \geq 400$
2. $5y \geq 400$

Selanjutnya, kita selesaikan pertidaksamaan linear tersebut dengan manipulasi aljabar yaitu dengan membagi kedua ruas dengan 5 sehingga diperoleh :

1. $5y \geq 400$
2. $y \geq 80$

Karena kedua ruas sama-sama dibagi 5 (bilangan positif), maka tanda pertidaksamaannya tetap. Nilai y di atas merupakan batas nilai untuk bilangan kedua.

Selanjutnya kita tentukan batas nilai untuk bilangan pertama:

1. $x + y \geq 400$
2. $x + 80 \geq 400$
3. $x + 80 - 80 \geq 400 - 80$
4. $x \geq 320$

Jadi, batas nilai untuk bilangan pertama tidak kurang dari 80 dan batas nilai untuk bilangan kedua tidak kurang dari 320.

2. Linear Tiga Variabel

2.1 SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL

SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL (SPLTV)

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah sistem persamaan yang terdiri dari tiga persamaan dimana masing-masing persamaan memiliki tiga variabel. Contoh SPLTV dengan variabel x, y dan z:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = d_1 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = d_2 \\ a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = d_3 \end{cases}$$

dimana a, b, c dan d adalah bilangan-bilangan real.

Pada SPLTV terdapat 2 cara penyelesaian, yaitu:

1. Metode Subtitusi

Langkah yang dilakukan pada metode ini yaitu:

1. Ubah salah satu persamaan yang ada pada sistem dan nyatakan x sebagai fungsi dari y dan z, atau y sebagai fungsi dari x dan z, atau z sebagai fungsi dari x dan y..
2. Subtitusikan fungsi x atau y atau z dari langkah pertama pada dua persamaan yang lain, sehingga diperoleh SPLDV.
3. Selesaikan SPLDV yang diperoleh dengan metode yang dibahas pada penyelesaian SPLDV di atas.

Contoh Soal:Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \cdots (I) \\ 3x + y - 2z = 4 \cdots (II) \\ 7x - 6y - z = 10 \cdots (III) \end{cases}.$$

Jawab:

Langkah pertama, nyatakan persamaan (I) menjadi fungsi dari x, yaitu: $x - 2y + z = 6 \Rightarrow x = 6 + 2y - z$.

Kemudian subtitusikan pada persamaan (II) dan (III), menjadi

Persamaan (II): $3(6 + 2y - z) + y - 2z = 4$

Selesaikan, didapat: $7y - 5z = -14 \cdots (IV)$
Persamaan (III): $7(6 + 2y - z) - 6y - z = 10$
Selesaikan, didapat: $8y - 8z = -32$ atau $y - z = -4 \cdots (V)$.
Persamaan (IV) dan (V) membentuk SPLDV
Dari persamaan (V), $y - z = -4 \Leftrightarrow y = z - 4$, kemudian disubtitusikan pada persamaan (IV), menjadi:
$7(z - 4) - 5z = -14$
$7z - 28 - 5z = -14$
$2z = 14$

$z = 7$
Kemudian subtitusikan $y = 7$ pada persamaan $y = z - 4$ diperoleh $y = 7 - 4$ atau $y = 3$.
Subtitusikan $z = 7$ dan $z = 3$ pada persamaan $x = 6 + 2y - z$, menjadi $x = 6 + 2(3) - 7$, diperoleh $x = 5$.
Sehingga himpunan penyelesaian adalah $\{3, 5, 7\}$

1. Metode Eliminasi

Langkah penyelesaian pada metode eliminasi yaitu:

1. Eliminasi salah satu variabel sehingga diperoleh SPLDV
2. Selesaikan SPLDV yang diperoleh dengan langkah seperti pada penyelesaian SPLDV yang telah dibahas
3. Subtitusikan variabel yang telah diperoleh pada persamaan yang ada.

Metoda meyelesaikan persamaan
1. Metoda Eliminasi
2. Metoda subtitusi
3. Metoda determinan
4. Metoda matriks
5. Metoda operasi baris elementer

Metoda Eliminasi
Supaya lebih mudah langsung saja kita masuk ke contoh-contoh
Contoh soal 1 :
2x + 3y – z = 20
3x + 2y + z = 20
x + 4y + 2z = 15
Jawab :
Ketiga persamaan bisa kita beri nama persamaan (**??**), (**??**), dan (**??**)
2x + 3y – z = 20 . . . .(**??**)
3x + 2y + z = 20 . . . .(**??**)
x + 4y + 2z = 15 . . . .(**??**)
Sistem persamaan ini harus kita sederhanakan menjadi sistem persamaan linear 2 variabel. Untuk itu kita eliminasi variabel z
Sekarang persamaan (**??**) dan (**??**) kita jumlahkan
2x + 3y – z = 20
3x + 2y + z = 20_____ +
5x + 5y = 40
x + y = 8 . . . .(**??**)
Selanjutnya persamaan (**??**) dikali (**??**) dan persamaan (**??**) dikali (**??**) sehingga diperoleh
6x + 4y + 2z = 40

x + 4y + 2z = 15____ _
5x = 25
x = 5
Nilai x ini kita subtitusi ke persamaan (??) sehingga
x + y = 8
5 + y = 8
y = 3
selanjutnya nilai x dan y yang ada kita subtitusikan ke persamaan (??)
3x + 2y + z = 20
3.5 + 2.3 + z = 20
15 + 6 + z = 20
z = -1
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {(5, 3, -1)}
Contoh soal 2 :
Tentukan himpunan penyelesaian dari
3x + 4y – 3z = 3
2x – y + 4z = 21
5x + 2y + 6z = 46
Jawab :
Agar lebih mudah, ketiga persamaan kita beri nama (??), (??), dan (??)
3x + 4y – 3z = 3 ....(??)
2x – y + 4z = 21 ....(??)
5x + 2y + 6z = 46 ....(??)
Selanjutnya persamaan (??) dikali 1 dan persamaan (??) dikali 4, sehingga diperoleh
3x + 4y – 3z = 3 |1| $\rightarrow$ 3x + 4y – 3z = 3
2x – y + 4z = 21 |4| $\rightarrow$ 8x – 4y+16z = 84 +
. 11x + 13z = 87 ....(??)
Berikutnya persamaan (??) dikali 1 dan persamaan (??) dikali 2, sehingga diperoleh
5x + 2y + 6z = 46 |1| $\rightarrow$ 5x + 2y + 6z = 46
2x – y + 4z = 21 |2| $\rightarrow$ 4x – 2y + 8z = 42 +
. 9x + 14z = 88 ....(??)
Sekarang persamaan (??) dikali 11 dan persamaan (??) dikali 9 sehingga diperoleh
9x + 14z = 88 |11| 99x +154z = 968
11x + 13z = 87 |9| 99x + 117z=783 _
. 37z = 185
. z = 5
Nilai z=5 kita subtitusi ke persamaan (??)
11x + 13z = 87
11x + 13.5 = 87
11x + 65 = 87
11x = 22
x = 2
Nilai x=2 dan z=5 kita subtitusikan ke persamaan (??) sehingga
5x +2y +6z = 46
5.2 +2y +6.5 = 46
10 + 2y + 30 = 46
2y = 6
y = 3
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {(2, 3, 5)}

1.Penyelesaian:
2.Penyelesaian:

2.2 Penerapan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel adalah sistem persamaan yang terdiri dari Tiga Variabel/Peubah.
Bentuk Umum SPLTV:
Bentuk umum SPLTV x, y, dan z dapat ditulis sebagai berikut:
a1x + b1y + c1z = d1
a2x + b2y + c2z = d2
a3x + b3y + c3z = d3
dengan a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3, d1, d2, d3, Î R
Persamaan a1x + b1y + c1z = d1, a2x + b2y + c2z = d2, dan a3x + b3y + c3z = d3 merupakan persamaan di R3. Ketiga bidang tersebut dapat saling berpotongan di sebuah titik, sebuah garis, atau tidak berpotongan.

Jika tiga bidang berpotongan dan perpotongannya berupa titik, maka SPLTV tersebut mempunyai satu anggota dalam himpunan penyelesaiannya (mempunyai penyelesaian tunggal), yaitu titik potong tersebut.

Jika tiga bidang berpotongan dan perpotongannya berupa garis, maka SPLTV tersebut mempunyai tak hingga banyak penyelesaian, yaitu titik-titik pada garis potong ketiga bidang tersebut.

Jika ketiga bidang tidak berpotongan sama sekali, maka SPLTV tersebut dapat digambarkan ke dalam tiga kemungkinan berikut ini.
Dengan kata lain SPLTV ini tidak mempunyai anggota dalam himpunan Penyelesaiannya (himpunan Penyelesaiannya adalah himpunan kosong).

Secara aljabar, penyelesaian SPLTV dapat dicari dengan beberapa cara/metode antara lain:

Metode substitusi

Metode gabungan/kombinasi eliminasi dan substitusi

Metode determinan (dipelajari dalam materi matriks)

1. Menyelesaian SPLTV dengan Metode Substitusi

Untuk menentukan penyelesaian/himpunan penyelesaian SPLTV dengan metode substitusi, langkah-langkahnya sebagai berikut:

Pilihlah salah satu persamaan yang paling sederhana, kemudian nyatakan x sebagai fungsi y dan z, atau y sebagai fungsi x dan z, atau z sebagai fungsi x dan y.

Substitusikan x atau y atau z yang diperoleh pada langkah pertama (1) ke dalam dua persamaan yang lainnya sehingga diperoleh SPLDV.

Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah kedua (2)
Contoh:

Tentukan penyelesaian SPLTV berikut dengan substitusi
x + y + 2x = 9 . . . . (1)
2x + 4y – 3z = 1 . . . . (2)
3x + 6y – 5z = 0 . . . . (3)
Jawab:

- Dari persamaan (1), kita dapatkan x = 9 – y – 2z . . . . (4)
- Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (2) dan (3)

$2(9 - y - 2z) + 4y - 3z = 1$
$2y - 7z = -17$ .... (5)
Dan
$3(9 - y - 2z) + 6 - 5z = 0$
$3y - 11z = -27$ ....(6)
Sehingga diperoleh SPLTV berikut ini.
$2y - 7z = -17$ .... (5)
$3y - 11z = -27$ .... (6)
Selanjutnya, kita dapat mencari nilai y dan z dengan cara substitusi seperti pada SPLDV.

- Dari persamaan (5) diperoleh: y = ... (7)
- Substitusi persamaan (7) ke persamaan (6)
- $-51 + 21z - 22z = -54$
- $-z = -3$
- $z = 3$
- Kemudian nilai $z = 3$ disubstitusikan ke persamaan (7), diperoleh nilai $y = 2$
- Substitusikan $y = 2$ dan $z=3$ ke persamaan (4) diperoleh nilai $x= 1$.
  Jadi SPLTV tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yaitu (1,2,3) atau Himpunan Penyelesaiannya adalah {(1,2,3) }.

- Tentukan penyelesaian dari SPLTV dengan substitusi
  $2x + y - z = 2$ .... (1)
  $x - 2y + 3z = 1$ .... (2)
  $3x - y + 2z = 3$ .... (3)
  Jawab:
  Misalkan substitusi dimulai pada variabel z terlebih dahulu (persamaan yang paling sederhana).
- Dari persamaan (1) diperoleh: $z = 2x + y - 2$ .... (4)
- Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (2) dan (3) diperoleh:
  $x - 2y + 3(2x + y - 2) = 1$
  - $7x + y = 7$ .... (5)
    Dan
  $3x - y + 2(2x + y - 2) = 3$
  - $7x + y = 7$ .... (6)
- Persamaan (5) sama dengan persamaan (6), sehingga dari kedua persamaan ini dapat kita peroleh nilai satu peubah sebagai fungsi dari peubah yang lain, misalnya:
  $y = 7 - 7x$ .... (7)
- Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (4), maka diperoleh:
  $z = 2x + (7 - 7x) - 2$
  $z = -5x + 5$
  Jadi, penyelesaian dari SPLTV tersebut adalah:
  $x = x$
  $y = 7 - 7x$
  $z = 5 - 5x$
  Penyelesaian dari SPLTV ini banyak sekali, tergantung pada nilai x yang kita tentukan, misalnya.
  - Jika $x = 1$, maka $y = 0$ dan $z = 0$ atau
  - Jika $x = 0$, maka $y = 7$ dan $z = 5$ atau
  - Jika $x = -1$, maka $y = 14$ dan $z = 10$ dan seterusnya

Dengan kata lain SPLTV ini mempunyai tak hingga banyak anggota dalam Himpunan Penyelesaiannya.

Cara lain

Persamaan (5) sama dengan persamaan (6): berarti persamaan yang satu merupakan kelipatan dari persamaan yang lain, maka himpunan penyelesaiannya mempunyai tak hingga banyak anggota.

- Tentukan penyelesaian dari SPLTV dengan substitusi

$x + 2y - 3z = -1$ .... (1)
$3x - y + 2z = 7$ .... (2)
$5x + 3y - 4z = 2$ .... (3)
Jawab:
Misalkan substitusi dimulai pada variabel x, dari persamaan (1) diperoleh:
$x = -2y + 3z - 1$ .... (4)
Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (2) dan (3) diperoleh:
$3(-2y + 3z - 1) - y + 2z = 7$
– $-7y + 11z = 10$ .... (5)
dan
$5(-2y + 3z - 1) + 3y - 4z = 2$
– $-7y + 11z = 7$ .... (6)

Persamaan (5) dan (6) menyatakan bahwa SPLDV tersebut tidak konsisten sehingga SPLTV tidak mempunyai penyelesaian.

2. Menyelesaian SPLTV dengan Metode Eliminasi Substitusi

Untuk menentukan penyelesaian/himpunan penyelesaian SPLTV dengan metode eliminasi, langkah-langkahnya sebagai berikut:

- Eliminasi salah satu variabel x atau y atau z sehingga diperoleh Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLTV).
- Selesaikan SPLTV yang diperoleh dari langkah (1)
- Substitusikan nilai-nilai variabel yang diperoleh pada langkah-langkah 2 ke dalam salah satu persamaan semula untuk mendapatkan nilai variabel yang lainnya.

Contoh:

- Tentukan penyelesaian dari SPLTV berikut dengan Eliminasi

$x + y + 2z = 9$ .... (1)
$2x + 4y - 3z = 1$ .... (2)
$3x + 6y - 5z = 0$ .... (3)
Jawab:
Eliminasi z dari persamaan (1) dan (2) sehingga diperoleh:

$x + y + 2z = 9$ | x 3 ó $3x + 3y + 6z = 27$
$2x + 4y - 3z = 1$ | x 2 ó $4x + 8y - 6z = 2$ +
$7x + 11y \quad = 29$ ....(4)

Eliminasi z dari persamaan (2) dan (3) sehingga diperoleh persamaan:

$2x + 4y - 3z = 1$ | x 5 $10x + 20y - 15z = 5$
$3x + 6y - 5z = 0$ | x 3 $9x + 18y - 15z = 0$ _
$x + 2y \quad = 5$ .... (5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh SPLDV, yaitu:
$7x + 11y = 29$ .... (4)
$x + 2y \quad = 5$ .... (5)

Eliminasi x pada persamaan (4) dan (5) diperoleh nilai y

$$\begin{array}{lll} 7x + 11y = 29 & | \times 1 & 7x + 11y = 29 \\ x + 2y = 5 & | \times 7 & \underline{7x + 14y = 35} \; - \\ & & \quad -3y = -6 \\ & & \quad\quad y = 2 \end{array}$$

Eliminasi y pada persamaan (4) dan (5) diperoleh nilai x

$$\begin{array}{lll} 7x + 11y = 29 & | \times 2 & 14x + 22y = 58 \\ x + 2y = 5 & | \times 11 & \underline{11x + 22y = 55} \; - \\ & & 3x \quad = 3 \\ & & x \quad = 1 \end{array}$$

Substitusikan nilai x = 1 dan y = 2 ke persamaan yang paling sederhana (misal persamaan (1)) sehingga diperoleh nilai z

$$\begin{aligned} x + y + 2x &= 9 \\ 1 + 1 + 2z &= 9 \\ 2z &= 6 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Penyelesaian SPLTV tersebut adalah x = 1, y = 2, z = 3 atau (1, 2, 3)

Sedangkan himpunan penyelesaiannya {(1,2,3) }

- Tentukan penyelesaian dari SPLTV berikut dengan Eliminasi

  2x + y – z = 2 .... (1)
  x – 2y + 3x = 1 .... (2)
  3x – y + 2z = 3 .... (3)

  Jawab:

  Eliminasi z dari persamaan (1) dan (2) diperoleh persamaan (4)

$$\begin{array}{lll} 2x + y - z = 2 & | \times 3 & 6x + 3y - 3z = 6 \\ x - y + 3z = 1 & | \times 1 & \underline{x - 2y + 3z = 1} \; + \\ & & 7x + y \quad = 7 \; \dots\dots\dots\dots (4) \end{array}$$

  Eliminasi z dari persamaan (1) dan (3) diperoleh persamaan (5)

$$\begin{array}{lll} 2x + y - z = 2 & | \times 2 & 4x + 2y - 2z = 4 \\ 3x - y + 2z = 3 & | \times 1 & \underline{3x - y + 2z = 3} \; + \\ & & 7x + y \quad = 7 \; \dots\dots\dots\dots (5) \end{array}$$

  Terlihat bahwa persamaan (4) sama dengan persamaan (5) sehingga kita peroleh nilai satu variabel yang merupakan fungsi dari variabel yang lain, yaitu y = 7 – 7x.

  Substitusikan nilai y = 7 – 7x ke persamaan (1), diperoleh:

$$\begin{aligned} 2x + (7 - 7x) - z &= 2 \\ z &= -5x + 5 \end{aligned}$$

  Penyelesaian SPLTV tersebut adalah:

  x = x
  y = -7x + 7
  z = -5x + 5

  Dengan kata lain, SPLTV ini mempunyai banyak penyelesaian tergantung pada nilai variabel x yang kita tentukan.

  Cara Lain

  Persamaan (4) sama dengan persamaan (5), berarti persamaan yang satu mrupakan kelipatan dari persamaan yang lain, maka himpunan penyelesaiannya mempunyai tak hingga banyak anggota.

- Tentukan penyelesaian SPLTV berikut dengan Eliminasi
  $x + 2y - 3z = -1$ .... (1)
  $3x - y + 2z = 7$ .... (2)
  $5x + 3y - 4z = 2$ .... (3)

Jawab:
Eliminasi x dari persamaan (1) dan (2) diperoleh persamaan (4)

$$\begin{array}{lll} x + 2y - 3z = -1 & \mid x3 & 3x + 6y - 9z = -3 \\ 3x - y + 2z = 7 & \mid x1 & \underline{3x - y + 2z = 7} \; - \\ & & \quad 7y - 11z = -10 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (4) \end{array}$$

Eliminasi x dari persamaan (1) dan (3) diperoleh persamaan (5)

$$\begin{array}{lll} x + 2y - 3z = -1 & \mid x5 & 5x + 10y - 15z = -5 \\ 5x + 3y + 2z = 2 & \mid x1 & \underline{5x + 3y - 4z = 2} \; - \\ & & \quad 7y - 11z = -7 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (5) \end{array}$$

Persamaan (4) dan persamaan (5) menyatakan bahwa persamaan tersebut tidak konsisten (sesuatu yang tak mungkin terjadi), sehingga dapat dikatakan bahwa SPLTV tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh 1
Asti dan Anton bekerja pada sebuah perusahaan sepatu. Asti dapat membuat tiga pasang sepatu setiap jam dan Anton dapat membuat empat pasang sepatu setiap jam. Jumlah jam bekerja Asti dan Anton 16 jam sehari, dengan banyak sepatu yang dapat dibuat 55 pasang. Jika banyaknya jam bekerja keduanya tidak sama, tentukan lama bekerja Asti dan Anton.
Penyelesaian:
Kita misalkan lama kerja Asti = x dan lama kerja Anton = y, maka:
$x + y = 16$
$3x + 4y = 55$
Selanjutnya, selesaikan dengan menggunakan salah satu metode penyelesaian, misalnya dengan metode cepat, maka:
=> $y = (1 . 55 - 16 . 3)/(1 . 4 - 1 . 3)$
=> $y = (55 - 48)/(4 - 2)$
=> $y = 7$
Substitusi nilai $y = 7$ ke persamaan $x + y = 16$, maka:
=> $x + y = 16$
=> $x + 7 = 16$
=> $x = 16 - 7$
=> $x = 9$
Dengan demikian, lama bekerja Asti adalah 9 jam dan Anton adalah 7 jam.

Contoh 2
Sebuah toko kelontong menjual dua jenis beras sebanyak 50 kg. Harga 1 kg beras jenis I adalah Rp 6.000,00 dan jenis II adalah Rp 6.200,00/kg. Jika harga beras seluruhnya Rp 306.000,00 maka tentukan jumlah beras jenis I dan beras jenis II yang dijual.
Penyelesaian:

Kita misalkan jumlah beras jenis I = x dan jumlah beras jenis I = y, maka:
x + y = 50
6000x + 6200y = 306000
Selanjutnya, selesaikan dengan menggunakan salah satu metode penyelesaian, misalnya dengan **metode cepat**, maka:
=> y = (1 . 306000 – 50 . 6000)/(1 . 6200 – 1 . 6000)
=> y = (306000 – 300000)/(6200 – 6000)
=> y = 6000/200
=> y = 30
Substitusi nilai y = 30 ke persamaan x + y = 50, maka:
=> x + y = 50
=> x + 30 = 50
=> x = 50 – 30
=> x = 20
Dengan demikian, jumlah beras jenis I dan beras jenis II yang dijual adalah 20 kg dan 30 kg.

Contoh 3
Ahmad membeli di sebuah Toko peralatan sekolah berupa 4 buah penggaris, 6 buah buku tulis dan 2 buah pena dengan menghabiskan biaya sebesar Rp 19.000,00. Di Toko yang sama Sulaiman berbelanja 3 buah buku tulis dan sebuah penggaris dengan menghabiskan uang Rp 7.000,00. Jika harga sebuah penggaris adalah Rp 1.000,00 maka berpakah harga sebuah pena? Untuk menyelesaikan kasus diatas, kita dapat menggunakan konsep sistem persamaan tiga variabel. **Pembahasan**! Dimisalkan bahwa; X = harga sebuah penggaris Y =

harga sebuah buku Z = harga sebuah pena

Diketahui: 4X + 6Y + 2Z = 19.000 persamaan (I) 3Y + X = 7.000 persamaan

(II)
X = 1.000 persamaan (III) **Ditanya**: Z = ?

Dijawab: Kita selesaikan terlebih dahulu persamaan (II) dengan bantuan persamaan (III),

untuk mengetahui nilai Y (harga sebuah buku). 3Y + X = 7.000 (X = 1.000

) 3Y + 1.000 = 7.000 3Y = 7.000 – 1.000 3Y = 6.000

Y = 6.000/3 Y = 2.000 persamaan (IV) Kita lanjutkan untuk menyelesaikan persamaan (I) dengan bantuan persamaan (III) dan persamaan (IV) yang dihasilkan dari penghitungan di atas untuk mencari nilai Z (harga sebuah pena). Kita

sudah memiliki nilai; Y = 2.000 dan, X = 1.000. Maka, 4X + 6Y + 2Z =

19.000 4(1.000) + 6(2.000) + 2Z = 19.000 4.000 + 12.000 + 2Z = 19.000 16.000

+ 2Z = 19.000 2Z = 19.000 – 16.000 2Z

= 3.000 Z = 3.000/2 Z = 1.500

Sudah terjawab masing – masing nilai X, Y dan Z sebagai berikut; X = 1.000 Y = 2.000

Z = 1.500 Jadi, harga sebuah pena adalah Rp 1.500,00

CONTOH SOAL PERSAMAAN LINEAR 3 VARIABEL

Contoh 1: Memodelkan Permasalahan Keuangan
Suatu perusahaan rumahan meminjam Rp 2.250.000.000,00 dari tiga bank yang berbeda untuk memperluas jangkauan bisnisnya. Suku bunga dari ketiga bank tersebut adalah 5%, 6%, dan 7 %. Tentukan berapa pinjaman perusahaan tersebut terhadap masing-masing bank jika bunga tahunan yang harus dibayar perusahaan tersebut adalah Rp 130.000.000,00 dan banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%?

Pembahasan Misalkan x, y, dan z secara berturut-turut adalah banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5%, 6%, dan 7%. Ini berarti yang menjadi persamaan pertama kita adalah $x + y + z = 2.250$ (dalam jutaan). Persamaan kedua diperoleh dari total bunga pertahunnya, yaitu Rp 130.000.000,00: $0{,}05x + 0{,}06y + 0{,}07z = 130$. Sedangkan persamaan ketiga dapat diperoleh dari kalimat, "banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%", sehingga persamaannya adalah $x = 2z$. Ketiga persamaan tersebut membentuk sistem seperti berikut.
Suku-x pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi
Gunakan $-5P1 + P2$ untuk mengeliminasi suku-x di P2, dan –P1 + P3 untuk mengeliminasi suku-x di P3.
Sehingga, $P2$ yang baru adalah $y + 2z = 1.750$ dan $P3$ yang baru adalah $y + 3z = 2.250$ (setelah dikalian dengan –1), yang menghasilkan sistem berikut.

Dengan menyelesaikan subsistem 2×2 (dua persamaan terakhir) menggunakan $-P2 + P3$ menghasilkan $z = 500$. Selanjutnya dengan menerapkan substitusi balik akan menghasilkan $x = 1.000$ dan $y = 750$. Diperoleh selesaian SPLTV tersebut adalah (1.000, 750, 500). Ini berarti bahwa perusahaan tersebut meminjam 1 miliar rupiah pada bunga 5%, 750 juta rupiah pada bunga 6%, dan 500 juta rupiah pada bunga 7%.
Sumber :https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/

Contoh 2: Permasalahan Masa Kehamilan Hewan
Masa kehamilan rata-rata (dalam hari) dari gajah, badak, dan unta apabila dijumlahkan adalah 1.520 hari. Masa kehamilan badak adalah 58 hari lebih lama daripada unta. Dua kali masa kehamilan unta kemudian dikurangi 162 merupakan masa kehamilan gajah. Berapa hari masa kehamilan dari masing-masing hewan tersebut?

Pembahasan Misalkan x, y, dan z secara berturut-turut adalah masa kehamilan gajah, badak, dan unta. Sehingga, persamaan pertama kita adalah $x + y + z = 1.520$. Karena masa kehamilan badak 58 hari lebih lama daripada unta, maka persamaan keduanya adalah $y = z + 58$. Sedangkan dari kalimat, "Dua kali masa kehamilan unta kemudian dikurangi 162 merupakan masa kehamilan gajah", diperoleh persamaan ketiganya adalah $x = 2z - 162$. Ketiga persamaan tersebut membentuk sistem sebagai berikut.
Suku-x pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi
Eliminasi suku-x pada $P3$ dengan $P1 + (-P3)$ ($P2$ tidak memiliki suku-x) akan diperoleh persamaan $y + 3z = 1.682$. Sehingga SPLTV di atas ekuivalen dengan SPLTV,
Selanjutnya kita dapat menyelesaikan subsistem 2×2 dan diperoleh $z = 406$. Dengan menerapkan substitusi balik akan menghasilkan $x = 650$ dan $y = 464$, sehingga selesaian dari SPLTV di atas adalah (650, 464, 406). Jadi, masa kehamilan rata-rata dari gajah, badak, dan unta secara berturut-turut adalah 650 hari, 464 hari, dan 406 hari.
Sumber :https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/
Contoh 3: Teka-teki Sejarah Indonesia
Sampai saat ini, bangsa Indonesia telah mengalami peristiwa-peristiwa sejarah yang patut diketahui, tiga diantaranya adalah kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Surat Perintah Sebelas Maret (Supersemar). Jika kita menjumlahkan tahun terjadinya ketiga peristiwa tersebut maka kita akan mendapatkan 5.441. Supersemar lahir 87 tahun setelah lahirnya tokoh emansipasi wanita Indonesia, R. A. Kartini, dan 370 tahun setelah kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman. Pada tahun berapa masing-masing peristiwa sejarah tersebut terjadi?
Pembahasan Misalkan a, b, dan c secara berturut-turut adalah tahun terjadinya peristiwa kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Supersemar. Maka kita akan mendapatkan SPLTV sebagai berikut.
SPLTV di atas memiliki bentuk standar seperti berikut.
Dengan menggunakan $P1 + P3$ kita akan mengeliminasi suku-a pada $P3$ dan menghasilkan persamaan $P3$ yang baru: $b + 2c = 5.811$.
Selanjutnya kita dapat menyelesaikan subsistem persamaan linear dua variabel (dua persamaan terbawah) dan mendapatkan $c = 1.966$. Dengan substitusi balik, kita juga akan memperoleh $a = 1.596$ dan $b = 1.879$. Sehingga, selesaian dari SPLTV di atas adalah (1.596, 1.879, 1.966). Atau dengan kata lain, kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Supersemar secara berturut-turut terjadi pada

tahun 1596, 1879, dan 1966.
Sumber :https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/

Contoh 4: Permasalahan Campuran Kimia

Seorang ahli kimia mencampur tiga larutan glukosa yang memiliki konsentrasi 20%, 30%, dan 45% untuk menghasilkan 10 L larutan glukosa dengan konsentrasi 38%. Jika volume larutan 30% yang digunakan adalah 1 L lebih besar daripada dua kali larutan 20% yang digunakan, tentukan volume masing-masing larutan yang digunakan.

Pembahasan Misalkan p, q, dan r secara berturut-turut merupakan volume dari larutan glukosa yang memiliki konsentrasi 20%, 30%, dan 45%. Maka kita akan mendapatkan persamaan pertamanya adalah $p + q + r = 10$ dan persamaan keduanya adalah $0{,}2p + 0{,}3q + 0{,}45r = 3{,}8$ (3,8 diperoleh dari 0,38 • 10). Dari kalimat, "volume larutan 30% yang digunakan adalah 1 L lebih besar daripada dua kali larutan 20% yang digunakan", kita mendapatkan persamaan ketiga, yaitu $q = 2p + 1$. Sehingga, ketiga persamaan tersebut akan membentuk sistem,

Suku-p pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi

Gunakan $-4P1 + P2$ dan $2P1 + P3$ untuk mengeliminasi suku-p pada $P2$ dan $P3$.

Sehingga, $P2$ yang baru adalah $2q + 5r = 36$ dan $P3$ yang baru adalah $3q + 2r = 21$ yang membentuk sistem,

Selanjutnya gunakan $3P2 + (-2P3)$ untuk mengeliminasi suku-q pada P3.

Dengan membagi persamaan di atas dengan 11, maka akan dihasilkan persamaan $r = 6$ yang akan menjadi $P3$ baru pada sistem berikut.

Selanjutnya kita gunakan substitusi balik untuk mendapatkan nilai p dan q, yaitu $p = 1$ dan $q = 3$. Sehingga selesaian dari SPLTV tersebut adalah (1, 3, 6). Atau dengan kata lain, volume larutan glukosa dengan konsentrasi 20%, 30%, dan 45% secara berturut-turut adalah 1 L, 3 L, dan 6L.

Sumber :https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/

Contoh 5: Menulis Kembali Fungsi Rasional

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi rasional,

dapat ditulis dalam bentuk penjumlahan dua suku

di mana koefisien-koefisien A, B, dan C adalah selesaian-selesaian untuk SPLTV

Tentukan koefisien-koefisien tersebut dan ujilah jawabanmu dengan menjumlahkan dua suku tersebut.

Pembahasan Dengan menggunakan $P1 + (-P3)$ kita dapat mengeliminasi suku-A pada $P3$ untuk dijadikan $P3$ yang baru.

Dengan menyelesaikan subsistem 2×2 diperoleh $C = -3$. Kemudian dengan substitusi balik, diperoleh $A = 2$ dan $B = -2$. Sehingga selesaian dari SPLTV tersebut adalah (2, –2, –3). Selanjutnya kita uji penjumlahan dua sukunya.

Setelah diuji, ternyata penjumlahan dua suku tersebut sama dengan fungsi rasional di awal. Semoga bermanfaat, yos3prens.

Sumber :https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/

Contoh 6

Ahmad membeli di sebuah Toko peralatan sekolah berupa 4 buah penggaris, 6 buah buku tulis dan 2 buah pena biaya sebesar Rp 19.000,00. Di Toko yang sama Sulaiman berbelanja 3 buah buku tulis dan sebuah penggaris dengan menghabiskan uang Rp 7.000,00. Jika harga sebuah penggaris adalah Rp 1.000,00 maka berpakah harga sebuah dengan menghabiskan

*pena?*Untuk menyelesaikan kasus diatas, kita dapat menggunakan konsep sistem persamaan tiga variabel.**Pembahasan**!Dimisalkan bahwa;X = harga sebuah penggarisY = harga sebuah bukuZ = harga sebuah pena**Diketahui**:4X + 6Y + 2Z = 19.000 persamaan (I)
3Y + X = 7.000 persamaan (II)
X=1.000 persamaan (III)**Ditanya**:Z = ?**Dijawab**:Kita selesaikan terlebih dahulu persamaan (II) dengan bantuan persamaan (III), untuk mengetahui nilai Y (harga sebuah buku).3Y + X = 7.000 (X = 1.000)3Y + 1.000 = 7.0003Y = 7.000 – 1.0003Y = 6.000Y = 6.000/3Y = 2.000 persamaan (IV)Kita lanjutkan untuk menyelesaikan persamaan (I) dengan bantuan persamaan (III) dan persamaan (IV) yang dihasilkan dari penghitungan di atas untuk mencari nilai Z (harga sebuah pena).Kita sudah memiliki nilai;Y = 2.000 dan,X = 1.000.Maka,4X + 6Y + 2Z = 19.0004(**??**) + 6(**??**) + 2Z = 19.0004.000 + 12.000 + 2Z = 19.00016.000 + 2Z = 19.0002Z = 19.000 – 16.0002Z = 3.000Z = 3.000/2Z = 1.500Sudah terjawab masing – masing nilai X, Y dan Z sebagai berikut;X = 1.000Y = 2.000Z = 1.500
Jadi, harga sebuah pena adalah Rp 1.500,00
Sumber : http://www.berpendidikan.com/2015/05/sistem-persamaan-linera-tiga-variabel-dan-contohnya.html

Contoh 7

3 orang siswi sd yang bernama nazsa, chindy dan euis akan membeli penghapus, pensil, dan buku. :

1. Nazsa membeli 3 penghapus, 4 pensil, dan 5 buku dengan harga Rp.26.000,00
2. Chindy membeli 5 penghapus, 2 pensil, dan 1 buku dengan harga Rp.12.000,00
3. Euis membeli 1 penghapus, 1 pensil, dan 2 buku dengan harga Rp.9.000,00

Tentukan berapa harga penghapus, pensil, dan buku !!!!Jawab :untuk mengerjakan soal matematika cerita kita rubah dulu kalimat soal di atas menjadi kalimat matematika :Penghapus : xPensil : yBuku : zmaka :persamaan 1 Nazsa : 3x+4y+5z = Rp.26.000,00persamaan 2 Chindy : 5x+2y+z = Rp.12.000,00persamaan 3 Euis : x+y+2z = Rp. 9.000,00ada 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel

Langkah ke-1 :

Kita lakukan metode eliminasi. Kita ambil persamaan ke-2 dan persamaan ke-35x+2y+ z = 12.000 x+ y+2z = 9.000dikarenakan tidak ada variabel yang sama maka persamaan dua kita kalikan dua dan persaman tiga kita kalikan satu, tujuannya untuk menghilangkan variabel z supaya semua variabel menjadi variabel xmaka :10x+4y+2z = 24.000 x+ y+2z = 9.000 -9x+3y = 15.0003(3x+y) = 15.000, supaya lebih sederhana maka persamaan kita bagi dengan 3, maka :3(3x+y)/3 = 15.000/33x+y = 5.000, supaya lebih sederhana maka persamaan kita kurangi 3x, maka :3x+y-3x = 5.000 - 3x**y = 5.000 - 3x**kemudian karena y sudah menjadi nilai x maka kita lakukan metode substitusi tujuannya untuk mengganti variabel z menjadi bernilai x, kita ambil persamaan 3 untuk melakukan substitusi :x + y + 2z = 9.000x + y + 2z - y - 2z = 9.000 - y -2z, supaya lebih sederhana persamaan kita kurangi -y dan -2zx = 9.000 -y -2zkita substitusikan y ke persamaan 3, maka :x = 9.000 - y - 2z, dikarenakan y = 5.000 - 3x, maka :x = 9.000 - (5.000 - 3x) - 2zx = 9.000 - 5.000 + 3x - 2z,x = 4.000 - 3x - 2z, supaya lebih sederhana maka persamaan kita kurangi 3x :x - 3x = 4.000 - 3x - 2z - 3x - 2x = 4.000 - 2z, untuk lebih menyederhanakan lagi persamaan kita kurangi 4.000-2x - 4.000 = 4.000 - 2z - 4.000-2x - 4.000 = -2z, supaya -2z menjadi z maka persamaan kita bagi dengan -2(-2x - 4.000) /-2 = -2z/-2
x + 2.000 = z

Langkah ke-2

Untuk langkah ke-2 kita cari berapakah nilai yang sesunggunya dari variabel x, dengan cara mensubstitusikan variabel y dan variabel z yang sudah kita rubah nilainya menjadi xuntuk melakukan substitusi menemukan varibable x kita gunakan persamaa ke-1 karena persama ke-2 dan ke-3 sudah kita gunakan pada langkah yang pertama.Maka :3x + 4y + 5z = 26.0003x + 4y + 5z - 4y - 5z = 26.000 - 4y - 5z 3x = 26.000 - 4y - 5z kita substitusikan variabel y dan z yang sudah saya tandi warna hijau, maka :3x = 26.000 - 4(5.000-3x) - 5(x+2.000)3x = 26.000 - 20.000 + 12x - 5x - 10.0003x = - 4.000 + 7x, supaya persamaan menjadi lebih sederhana kita kurangi -7x :3x - 7x = - 4.000 + 7x - 7x- 4x = - 4.000, supaya -4x menjadi x maka persamaan kira bagi dengan -4-4x/-4 = - 4.000/-4**x = 1.000**

Langkah ke-3

Untuk langkah ke-3, dikarenakan nilai variabel x sudah di temukan maka masalah yang belum kita temukan kita harus mencari berapa nilai variabel y dan z.perhatikan persamaan yang sudah saya tandai warna hijau di atas!gunakan kedua persaman yang sudah saya tandai warna hijau untuk mencari nilai dari varible y dan zKita cari nilai y terlebih dahulu y = 5.000 - 3x, di karenakan x = 1.000 makay = 5.000 - 3(**??**)y = 5.000 - 3.000**y = 2.000**kemudian kita cari nilai zz = 2.000 + x, dikarenakan x = 1.000 maka :z = 2.000 + 1.000, **z = 3.000**Persamaan yang saya tandai warna kuning ialah hasil dari pencarian kita :)alhamdullilah kita sudah memecahkan masalahnya yaitu :harga penghapus : Rp.1.000harga pensil : Rp.2.000harga buku : Rp.3.000

Sumber : https://matematikaakuntansi.blogspot.co.id/2015/10/cara-menyelesaikan-sistem-persamaan.html

Contoh 8

Tentukan Hp dari SPLx - 2y + z = 0.......(Pers1)3x + y - z = 5.......(Pers2)x - 3y - 2z = - 15....(Pers3)Penyelesaian:langkah1: eleminasi pers1 dan pers2 ==== > > > eleminasi variabel Z (x - 2y + z = 0 3x + y - z = 5 ____________ + ...==> > kenapa (+) bukannya(-),itu dikarenakan kedua varibel memiliki tanda yg berbeda (+z) dan (-z)

4x - y = 5 ....(Pers4)

langkah2.eleminasi pers1 dan pers 3 .....eleminasi var z (eleminasilah yg menurut anda lebih mudah dihilangkan seperti variabel x ,lebih mudah dieleminasi x - 2y + z = 0 |x2| 2x - 4y +2 z = 0 x - 3y - 2z = -15 |x1| x - 3y -2z = -15

______________ +

3x - 7y = -15 (pers5)langkah3.eleminasi pers4 dan pers5 (ingat :"selalu pilih yg paling mudah dieleminasi karna dapat mempersingkat waktu pengerjaan") eleminasi var y

4x - y = 5 |x7| 28x -7y = 35

3x - 7y = -15 |x1| 3x - 7y = -15

__________ - 25x = 50 x = 50 / 25 x = 2langkah4.subtitusi nilai var yang didapat kepers 4 atau pers 5 (karna hanya 2 variabel== lebih cepat) 3x - 7y = -15 ....pers5 3(**??**) - 7y = -15 6 -7y = -15 -7y = -15 -6 -7y = -21 y =-21 / -7 y = 3

langkah5.subtitusi nilai var yang didapat kepers 1 atau pers 2 x - 2y + z = 0 2 - 2(**??**) + z = 0 2 - 6 + z =0 -4 + z = 0 z = 4

Maka kita dapatkan HP {2,3,4}untuk ketiga persamaanx - 2y + z = 0.......(Pers1)3x + y - z = 5.......(Pers2)x - 3y - 2z = - 15....(Pers3)

Sumber : https://itsystemresearch.blogspot.co.id/2016/06/soal-dan-pembahasan-sistem-persamaan.html

Part Two

3. Fungsi

3.1 Relasi dan Fungsi

1. **RELASI**

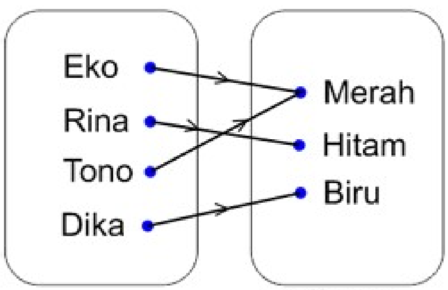
   (a) **Pengertian Relasi**

Relasi adalah hubungan antara 2 elemendua himpunan. Relasi dikatakan sebagai suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan yang lain. Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan korespondensi dari anggota-anggota himpunan A ke anggota-anggota himpunan B. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B dengan aturan tertentu.

Contoh 1.1

Ada 4 orang anak Eko, Rina, Tono, dan Dika. Mereka diminta untuk menyebutkan warna favorit mereka. Hasilnya adalah sebagai berikut:

Dari hasil uraian di atas terdapat dua buah himpunan. Pertama adalah himpunan anak, kita sebut dengan A dan himpunan warna yang kita sebut dengan B. Hubungan antara A dan B digambarkan seperti ilustrasi di bawah ini:



Gambar 1 contoh relasi himpunan

Kesimpulannya, relasi antara himpunan A dan himpunan B adalah "suka dengan warna". Eko dipasangkan dengan merah karena eko suka dengan warna merah. Rina dipasangkan dengan warna hitam karena rina menyukai warna hitam, dan seterusnya. Dari uraian di atas

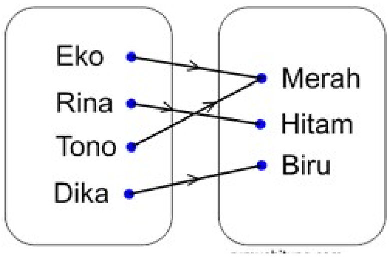
kita dapat mengambil kesimpulan bahwa definisi relasi adalah
"Relasi antara dua himpunan, contoh himpunan A dengan himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B."
Contoh 1.2
Ada 3 anak mengatakan makanan kesukaannya yaitu : Anis menyukasi Bakso, Rina menyukasi Sate dan Diko menyukasi Nasi Padang.
Dari pernyataan diatas terdapat dua himpunan yaitu :
A = Himpunan anak {Anis, Rina, Diko}
B = Himpunan makanan {Bakso, Sare, Nasi Padang}
Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah menyukasi atau menyenangi.
Dari contoh di atas, himpunan A tersebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut daerah tujuan (ko-domain) . Sementara itu menyukasi disebut relasi. Himpunan semua anggota ko-domain di sebut range (daerah hasil).

1. (a) **Menyatakan Relasi**

Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu menggunakan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram Cartesius.

1. **Diagram Panah**

Perhatikan gambar di bawah ini. Relasi antara himpunan A dengan himpunan B dinyatakan dengan panah-panah yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B. Karena penggambarannya menggunakan bentuk panah (arrow) maka disebut dengan diagram panah.
Langkah-langkah menyatakan relasi dengan diagram panah :
a. Membuat dua lingkaran atau elips
b. Untuk meletakkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B x=A diletakkan pada lingkaran A dan y=B diletakkan pada lingkaran B
c. X dan Y dihubungkan dengan anak panah
d. Arah anak panah menunjukkan arah relasi
e. Anak panah tersebut mewakili aturan relasi



Gambar 2 diagram panah

1. **Himpunan Pasangan Berurutan**

Sebuah relasi juga dapat dinyatakan dengan menggunakan pasangan beruturan. Artinya kita memasangkan himpunan A dengan himpunan B secara berurutan.
menyatakan relasinya dengan pasangan berurutan sebagai berikut:*(eko, merah), (rina, hitam),(tono, merah),(dika, biru).*
Jadi relasi antara himpunan A dengan himpunan B dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan (x,y) dengan x $\in$ A dan y $\in$ B.

1. **Diagram Cartesius**

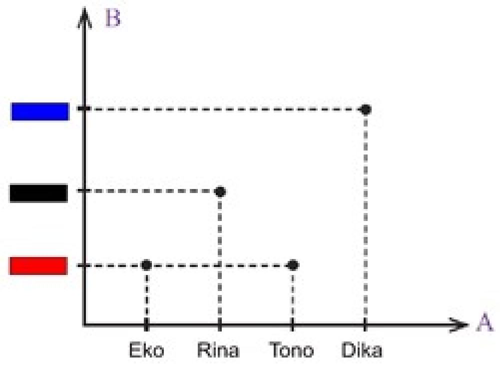
Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan ke dalam pasangan berurutan yang kemudian dituangkan dalam dot (titik-titk) dalam diagram cartesius. Contoh dari relasi suka dengan warna di atas dapat digambarkan dalam bentuk diagram cartesius sebagai berikut:

Pada diagram Cartesius diperlukan dua salip sumbu yaitu : sumbu mendatar (horizontal) dan sumbu tegak (vertical) yang berpotongan tegak lurus.

a. X= A diletakkan pada sumbu mendatar

b. Y= B diletakkan pada sumbu tegak

c. Pemasangan (x,y) ditandai dengan sebuah Noktah (titik) yang koordinatnya ditulis sebagai pasangan berurutan x,y.



Gambar 3 Diagram Cartecius

1.3 **Sifat-Sifat Relasi**

a. Relasi Refleksif (Bercermin)

Relasi disebut *refleksif* jika dan hanya jika untuk setiap x anggota semesta-nya, x berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi R refleksif jika dan hanya jika xRx.

Contoh:

Jika diketahui A= {1,2,3,4} dan relasi R= {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)} Pada A, maka R x∈A adalah refleksif, karena untuk setiap x∈A terdapat (x,x) pada R.Perhatikan relasi pada himpunan = {1,2,3,4} berikut:

R1= {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)}

R2= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)}

Relasi-relasi tersebut merupakan relasi refleksif karena memiliki elemen (1,1), (2,2), (3,3), dan (4,4).

b. Relasi Irrefleksif

Relasi R pada A disebut *Irrefleksif* (anti refleksif) jika dan hanya jika setiap elemen di dalam tidak berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi, irrefleksif jika dan hanya jika xRx.

Contoh :

Diketahui himpunan B= {a,b,c} dan relasi R= {(a,c), (b,c), (b,a)}. Relasi R adalah irrefleksif, karena (a,a), (b,b), dan (c,c) bukan elemen.

Diketahui A= {1,2,3,4} dan relasi R= {(2,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}. Relasi R merupakan relasi irrefleksif, karena tidak terdapat elemen (x,x), dimana x∈A.

1. **Relasi Nonrefleksif**

Relasi R pada A disebut *nonrefleksif* jika dan hanya jika ada sekurang-kurangnya satu elemen di dalam A yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh :

Perhatikan relasi pada himpunan A= {1,2,3,}

R= {(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)}

Relasi tersebut merupakan relasi non refleksif, karena ada (1,2) dan (2,3).

1. **Relasi Simetri**

Relasi R disebut *simetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku jika a berelasi R dengan b maka b juga berelasi dengan a.
Secara simbolik: aRb $\rightarrow$ bRa.
Contoh:

1. Relasi R = { (a,b), (b,a), (a,c), (c,a) } dalam himpunan {a, b, c}.
2. Ani menyukai Budi, Budi menyukai Ani {(Ani,Budi),(Budi,Ani)}

1. **Relasi Asimetri**

Relasi R disebut *asimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b maka b tidak berelasi R dengan a.
Secara simbolik: R asimetri pada S jhj ($\forall$a,b$\in$S) aRb $\rightarrow$ bRa.
Contoh:
1. Relasi R = { (a,b), (b,c), (c,a) } dalam himpunan { a,b,c }.

1. **Relasi Nonsimetri**

Relasi R disebut *nonsimetri* pada S jika dan hanya jika ada dua anggota a dan b dari S sedemikian hingga berlaku: a berelasi R dengan b tetapi b tidak berelasi R dengan a.Perhatikan bahwa nonsimetri adalah negasi/ingkaran dari simetri.
Contoh:
1. Relasi R = { (a,b), (a,c), (c,a) } dalam himpunan {a, b, c}

1. **Relasi Antisimetri**

Relasi R disebut *antisimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b dan b berelasi R dengan a maka a=b.
Contoh:

1. A = keluarga himpunan.

Relasi “ himpunan bagian” adalah relasi yang antisimetris pada A, karena untuk setiap dua himpunan x dan y, jika x y dan y x, maka x = y.

1. Relasi “kurang dari atau sama dengan ($\leq$)” dalam himpunan bilangan real. Jadi, relasi “kurang dari atau sama dengan ($\leq$)” bersifat anti simetri, karena jika a $\leq$ b dan b $\leq$ a berarti a = b.
1. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat asli N merupakan contoh relasi yang tidak simetri karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika a = b. Sementara itu, relasi “habis membagi” merupakan relasi yang anti simetri karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka a = b.
1. **Relasi Transitif**

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *Transitif* pada A jika dan hanya jika setiap 3 anggota himpunan A, (a,b,c $\in$A) jika (a,b)$\in$R, dan (b,c)$\in$R maka (a,c)$\in$R (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a berelasi dengan c).

Contoh:

1. Relasi R = {(a,b), (b,c), (a,c), (c,c) } dalam himpunan { a,b,c }.
1. **Relasi Nontransitif**

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *nontransitif* pada A jika dan hanya jika ada tiga anggota himpunan A, (a,b,c $\in$A) sedemikian hingga (a,b)$\in$R , dan (b,c)$\in$R dan (a,c)$\notin$R (ada tiga anggota a,b,c dari A sedemikian hingga a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c dan a tidak berelasi dengan c).
Contoh:

R = {(1,2),(2,3),(3,4)} dalam himpunan { 1,2,3,4}

1. **Relasi Intransitif**

R adalah relasi pada himpunan A. R disebut relasi intransitif pada A jika dan hanya jika setiap tiga anggota himpunan A, (a,b,c ∈A) jika (a,b)∈R dan (b,c)∈R maka (a,c)∉R (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a tidak berelasi dengan c).
Misal E = {1,2,3}, R = {(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(5,7)}
Relasi di atas intransitif karena :
(1,2)∈R dan (2,3)∈R, tetapi (1,3)∉R
(1,2)∈R dan (2,5)∈R, tetapi (1,5)∉R
(2,3)∈R dan (3,4)∈R, tetapi (2,4)∉R
(2,5)∈R dan (5,7)∈R, tetapi (2,7)∉R

1.4 Komposisi Relasi

R adalah relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*
T adalah relasi dari himpunan *B* ke himpunan *C*.

· Komposisi *R* dan *S*, dinotasikan dengan *T* o *R*, adalah relasi dari *A* ke *C* yang didefinisikan oleh :

$T \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, dan untuk suatu $b \in B$ sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$ }

· Contoh komposisi relasi

Ø Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$
Ø Relasi dari *A* ke *B* didefinisikan oleh :

$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$

Ø Relasi dari *B* ke *C* didefisikan oleh :

$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$

Ø Maka komposisi relasi *R* dan *T* adalah

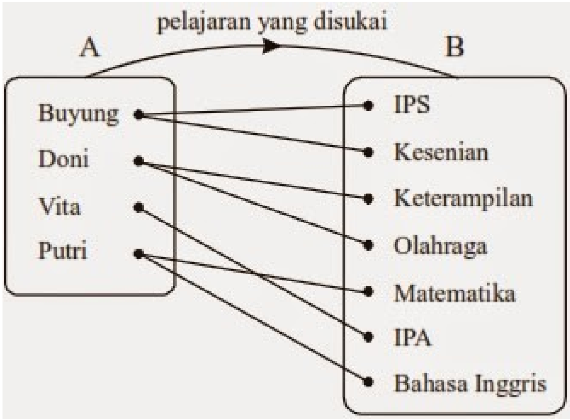
$T \circ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$

contoh soal relasi dan jawabannyaDikelas 8 SMP belajar matematika terdapat 4 orang siswa yang lebih menyukai pelajaran tertentu. berikut ke-4 anak tersebut :

1. Buyung menyukai pelajaran IPS dan Kesenian
2. Doni menyukai pelajaran ketrampilan dan olah raga
3. Vita menyukai pelajaran IPA, dan
4. Putri lebih menyukai pelajaran matematika dan bahasa ingris

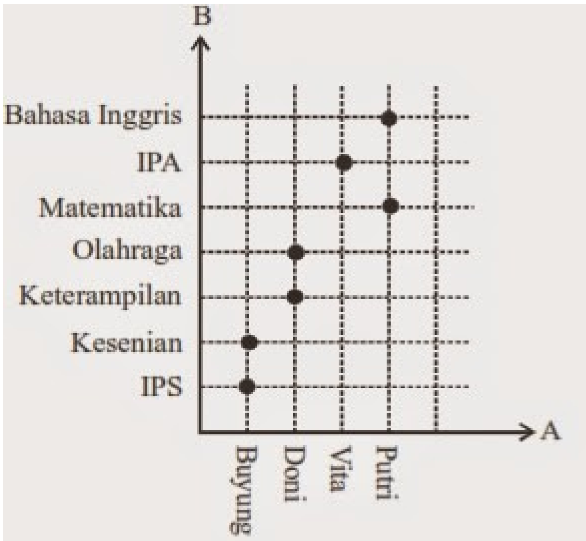
Buatlah relasi dari soal diatas dan disajikan menggunakan diagram panah, diagram cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.*Jawab:*Untuk mempermudah menjawab persoalan diatas gunakanlah permisalan seperti :
Himpunan A = {Buyung, Doni, Vita, Putri}
Himpunan B = {IPS, kesenian, keterampilan, olahraga, matematika, IPA, bahasa Inggris}
"pelajaran yang disukai" adalah relasi yang menghubungkan himpunan A ke B.

1. **Diagram panah**



Gambar 4 Diagram Panah

b. Diagram Cartesius



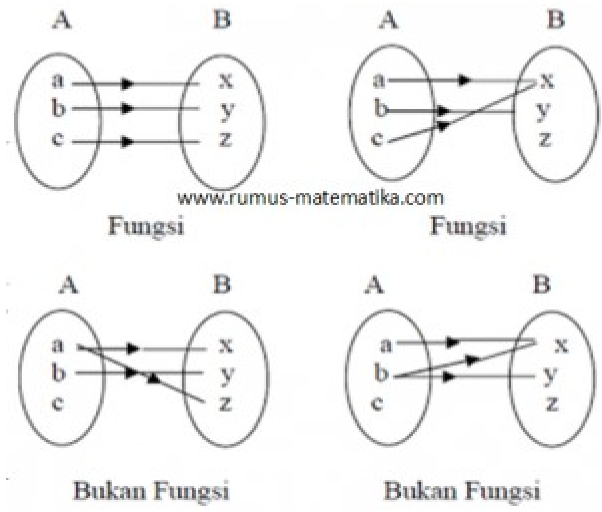
Gambar 5 Diagram Cartecius

1. **Himpunan pasangan berurutan**

Himpunan pasangan berurutan dari soal diatas adalah :
{(Buyung, IPS), (Buyung, kesenian), (Doni, keterampilan), (Doni, olahraga), (Vita, IPA), (Putri, matematika), (Putri, bahasa Inggris)}

2. FUNGSI
2.1 Pengertian Fungsi

Fungsi adalah bentuk khusus dari relasi. Sebuah relasi dikatakan fungsi jika xRy, untuk**setiap** x anggota A memiliki **tepat satu** pasangan, y, anggota himpunan B Kita dapat menuliskan $f(a) = b$, jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A. Ini berarti bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$ maka $b = c$. Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, kita dapat menuliskan dalam bentuk : $f : A \to B$



Gambar 5 fungsi dan bukan fungsi

Perhatikan contoh kasus diatas, gambar satu dan dua merupakan fungsi dan gambar tiga dan empat bukan merupakan fungsi. Sehingga dari penjelasan contoh diatas yang merupakan fungsi adalah jika setiap anggota A memiliki pasangan dengan anggota B, dan setiap anggota memiliki tepat satu kawan dengan anggota B. Maka dapat kita simpulkan bahwa relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Relasi seperti ini disebut sebagai fungsi atau pemetaan.

Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B merupakan relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Dimana syarat suatu relasi adalah fungsi atau pemetaan sebagai berikut.

1. Setiap anggota A memiliki pasangan di B
2. Setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota di B

2.2 Domain, Kodomain, Dan Range

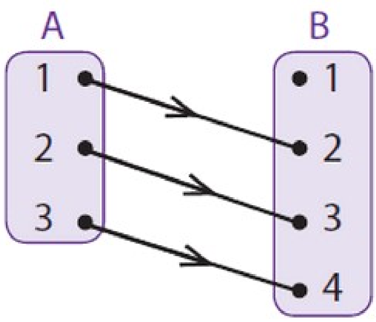
? $f : A \to B$

? A dinamakan daerah asal (*domain*) dari f dan B dinamakan daerah hasil (*codomain*) dari f.

? Misalkan $f(a) = b$, maka b dinamakan bayangan (*image*) dari a,dan a dinamakan pra-bayangan (*pre-image*) dari b.

? Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f dinamakan jelajah (*range*) dari f.

Dalam materi fungsi dikenal istilah Domain, Kodomain, dan juga Range Fungsi. Coba perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 6 Domain dan kodomain

Dari diagram panah tersebut himpunan A atau himpunan daerah asal disebut dengan **Domain**. Himpunan B yang merupakan daerah kawan disebut dengan **Kodomain** sedangkan anggota daerah kawan yang merupakan hasil dari pemetaan disebut dengan daerah hasil atau **range fungsi**. Jadi dari diagram panah di atas dapat disimpulkan

Domain (D_f) adalah A = {1,2,3}Kodomain adalah B = {1,2,3,4}Range Hasil (R_f) adalah = {2,3,4}

2.3 Jenis-jenis Fungsi

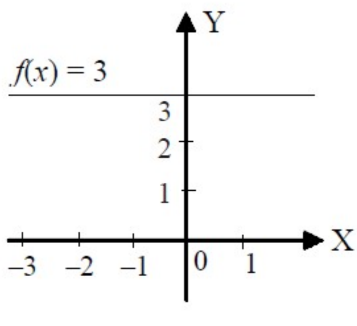
1 Fungsi konstan (fungsi tetap)

Suatu fungsi f : A → B ditentukan dengan rumus f(x) disebut fungsi konstan apabila untuk setiap anggota domain fungsi selalu berlaku f(x) = C, di mana C bilangan konstan. Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut ini.

Diketahui f : R → R dengan rumus f(x) = 3 dengan daerah domain: $\{x \mid -3 \leq x < 2\}$. Sehingga, gambar grafiknya.

x	–3	–2	–1	0	1
$f(x)$	3	3	3	3	3

Grafik:



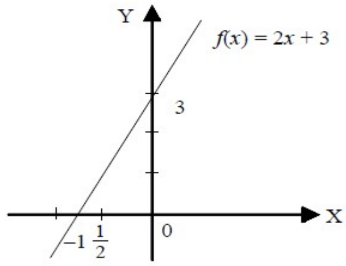
Gambar 7 grafik fungsi konstan

1. **Fungsi linear**

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh f(x) = ax + b, di mana a ≠ 0, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus. Perhatikan contoh berikut.Diketahui f(x) = 2x + 3, gambar grafiknya

$2x + 3$		
x	0	$-1\frac{1}{2}$
$f(x)$	3	0

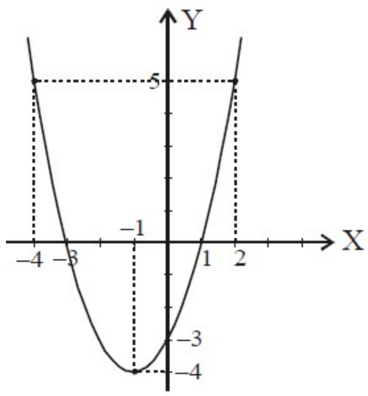
Grafik:



Gambar 8 grafik fungsi Linier

1. **Fungsi Kuadrat**

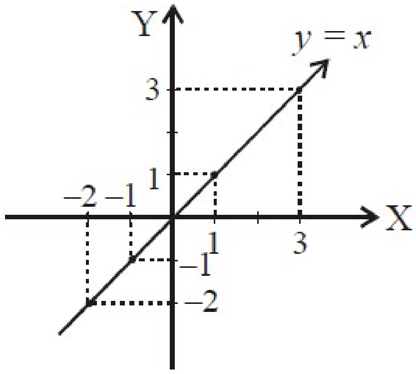
Suatu fungsi f(x) disebut fungsi kuadrat apabila fungsi itu ditentukan oleh f(x) = ax^2 + bx + c, di mana a $\neq$ 0 dan a, b, dan c bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.Perhatikan contoh fungsi kuadrat berikut.
Fungsi f ditentukan oleh f(x) = x2 + 2x – 3, gambar grafiknya



Gambar 8 grafik fungsi kuadrat

1. **Fungsi identitas**

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku f(x) = x atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama. Fungsi identitas ditentukan oleh f(x) = x. Agar lebih memahami tentang fungsi identitas, pelajarilah contoh berikut ini.
Fungsi pada R didefinisikan sebagai f(x) = x untuk setiap x.a. Carilah f(–2), f(0), f(**??**), f(**??**).b. Gambarlah grafiknya.
Penyelesaian:a. Nilai f(–2), f(0), f(**??**), dan f(**??**).f(x) = xf(–2) = –2f(0) = 0f(**??**) = – 1f(**??**) = 3
b. Gambar grafik.



Gambar 9 grafik fungsi identitas

1. (a) **Sifat-sifat Fungsi**

Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal tiga sifat fungsi yakni sebagai berikut :

1. **Injektif (Satu-satu)**

Misalkan fungsi f menyatakan A ke B maka fungsi f disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B. Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa f:A$\rightarrow$B adalah fungsi injektif apabila a $\neq$ a' berakibat f(a) $\neq$ f(a') atau ekuivalen, jika f(a) = f(a') maka akibatnya a = a'.

? Fungsi satu-satu

? Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk sembarang a_1 dan a_2 dengan a_1 tidak sama dengan a_2 berlaku $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$. Dengan kata lain, bila $a_1 = a_2$ maka $f(a_1)$ sama dengan $f(a_2)$.

2. Surjektif (Onto)

Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil f(A) dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B. Apabila f(A) = B, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau "f memetakan A Onto B".

? Fungsi kepada

? Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut fungsi kepada jika dan hanya jika untuk sembarang *b* dalam kodomain *B* terdapat paling tidak satu *a* dalam domain *A* sehingga berlaku $f(a) = b$.

? Suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan *range*-nya (semua kodomain adalah peta dari domain).

3. Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan f: A$\rightarrow$B sedemikian rupa sehingga f merupaka n fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu

? Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika untuk sembarang*b* dalam kodomain *B* terdapat tepat satu *a* dalam domain *A* sehingga $f(a) = b$, dan tidak ada anggota *A* yang tidak terpetakan dalam *B*.

? Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah **fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif.**

1. (a) **Menghitung Nilai dari Sebuah Fungsi**
2. **Penulisan Fungsi**

1. **Himpunan pasangan terurut.**

? Misalkan fungsi kuadrat pada himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10} maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :
f = {(2, 4), (3, 9)}

1. **Formula pengisian nilai (assignment)**

? $f(x) = x^2 + 10$,
? $f(x) = 5x$

1. **Notasi Fungsi**

Sebuah fungsi dinotasikan dengan huruf kecil seperti f, g, h, i, dan sebagainya. Pada fungsi g yang memetakan himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan g(x). Misal ada fungsi f yang memetakan A ke B dengan aturan f : x → 2x + 2. Dari notasi fungsi tersebut, x merupakan anggota domain. fungsi x → 2x + 2 berarit fungsi f memetakan x ke 2x+2. Jadi daerah bayangan x oleh fungsi f adalah 2x + 2. Dapat di notasikan dengan f(x) = 2x +2. Kesimpulan
Jika fungsi f : x → ax + b dengan x anggota domain f maka rumus fungsi f adalah f(x) = ax +b

1. **Menghitung nilai dari Sebuah Fungsi**

Menghitung nilai dari sebuah fungsi cukup sederhana. Kita hanya perlu mengikuti *rules* dari fungsi tersebut. Semakin susah fungsi yang memetakannya maka akan semakin susah menghitung nilai fungsinya. Terkadang soal-soal membalik fungsi tersebut, diketahui daerah hasil kemudian diminta mencari daerah asal. Yuk mari dismak contoh berikut:
Diketahui fungsi f : x → 2x – 2 dengan x anggota bilangan bulat. Coba tentukan nilai dari

1. f(**??**)
2. f(**??**)
3. bayangan (-3) oleh f
4. nilai f untuk x = -10
5. nilai a jika f(a) = 14

Jawaban :
fungsi fungsi f : x → 2x – 2 dapat dinyatakan dengan f(x) = 2x – 2

1. f(x) = 2x – 2f(**??**) = 2(**??**) – 2 = 4
1. f(x) = 2x – 2f (**??**) = 2(**??**) – 2 = 6
1. f(x) = 2x – 2f(-3) = 2(-3) – 2 = -8
1. f(x) = 2x – 2f(**??**) = 2(**??**) -2 = 18
1. f(a) = 2a – 214 = 2a -22a = 16a = 8

1. **Menentukan Rumus sebuah fungsi**

Sebuah fungsi dapat ditemukan rumusnya apabila ada nilai atau data yang diketehui. Kemudian dengan menggunakan aljabar kita bisa dengan mudah menemukan rumus dari fungsi tersebut. Untuk lebih jelasnya bisa simak contoh berikut:
Fungsi g yang berlaku pada himpunan bilangan riil ditentukan oleh rumus g(x) = ax + b dengan a dan b adalah bilangan bulat. Jika g(-2) = -4 dan g(**??**) = 5. Coba tentukan nalai dari:

1. nilai dari a dan b
2. rumus fungsi
3. g (-3)

Jawaban :

Untuk mencari nila a dan b kita buat persamaan dulu dari himpunan pasangan berurutan yang diketahui.

g(-2) = -4 → -4 = -2a + b → b = 2a – 4 ...(??)g(??) = 5 → 5 = a + b ...(??)
kita substitusikan persamaan 1 ke persamaan 2

5	= a + b
5	= a + 2a – 4
5	= 3a – 4
9	= 3a
a	= 3

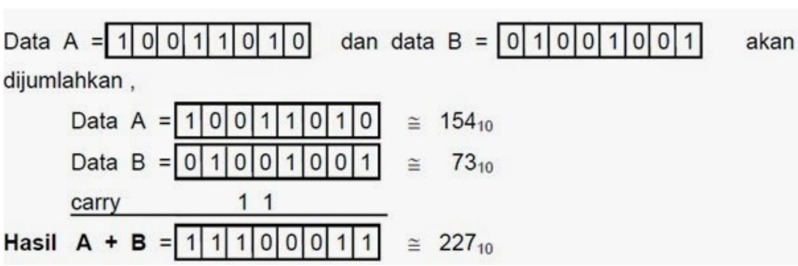
1. (a) i. b = 2a – 4b = 2(??) -4b = 2jadi nilai a = 3 dan b = 4
1. (a) i. rumus fungsinya g(x) = 3a + 2
1. (a) i. g(x) = 3a + 2g(-3) = 3 (-3) + 2g (-3) = -7

3.2 Operasi Aritmatika

3.1 Operasi Aritmatik
Dasar operasi aritmatik adalah **PENJUMLAHAN** dan **PENGURANGAN,** sedangkan operasi selanjutnya yang dikembangkan dari kedua operasi dasar tersebut adalah operasi **PERKALIAN** dan operasi **PEMBAGIAN.**
3.1.1 Penjumlahan Bilangan
3.1.1.1 Penjumlahan Bilangan Biner
Pada penjumlahan berlaku aturan seperti di bawah ini ,

0 + 0	**= 0**
0 + 1	**= 1**
1 + 0	**= 1**
1 + 1	**= 0 / + 1 sebagai carry**
1 + 1 + 1	**= 1 / + 1 sebagai carry**

Sebagai cara penjumlahan bilangan desimal yang Anda kenal sehari-hari, penjumlahan bilangan biner juga harus selalu memperhatikan *carry* (sisa) dari hasil penjumlahan pada tempat yang lebih rendah.
Contoh :


Data A = 1 0 0 1 1 0 1 0 dan data B = 0 1 0 0 1 0 0 1 akan dijumlahkan ,

Data A = 1 0 0 1 1 0 1 0 ≅ 154_{10}
Data B = 0 1 0 0 1 0 0 1 ≅ 73_{10}
carry 1 1
Hasil A + B = 1 1 1 0 0 0 1 1 ≅ 227_{10}

Dalam contoh diatas, telah dilakukan penjumlahan 8 bit tanpa *carry*, sehingga hasil penjumlahnya masih berupa 8 bit data. Untuk contoh berikutnya akan dilakukan penjumlahan 8 bityang menghasilkan *carry*.
Contoh :

Data A = 1 0 0 1 1 0 1 0 dan data B = 1 1 1 0 0 0 1 1 akan dijumlahkan ,

Data A =	1 0 0 1 1 0 1 0	= 154_{10}
Data B =	1 1 1 0 0 0 1 1	= 227_{10}
carry	1 1	
Hasil A + B =	1 0 1 1 1 1 1 0 1	= 381_{10}

Hasil penjumlahan diatas menjadi 9 bit data, sehingga untuk 8 bit data, hasil penjumlahannya bukan merupakan jumlah 8 bit data A dan B tetapi bit yang e-8 (dihitung mulai dari 0) atau yang disebut *carry* juga harus diperhatikan sebagai hasil penjumlahan.

3.1.1.2 Penjumlahan Bilangan Oktal

Proses penjumlahan bilangan oktal sama seperti proses penjumlahan bilangan desimal. Sisa akan timbul / terjadi jika jumlahnya telah melebihi 7 pada setiap tempat.

Contoh :

a. Bilangan Oktal A = 232_8 dan bilangan Oktal B = 111_8 akan dijumlahkan ,

Bilangan Oktal A	= $2\ 3\ 2_8$	= 154_{10}
Bilangan Oktal B	= $1\ 1\ 1_8$	= 73_{10}
carry		
Hasil A + B	= $3\ 4\ 3_8$	= 227_{10}

b. Bilangan Oktal A = 232_8 dan bilangan Oktal B = 667_8 akan dijumlahkan ,

Bilangan Oktal A	= $2\ 3\ 2_8$	= 154_{10}
Bilangan Oktal B	= $6\ 6\ 7_8$	= 439_{10}
carry	1 1 1	
Hasil A + B	= $1\ 1\ 2\ 1_8$	= 593_{10}

3.1.1.3 Penjumlahan Bilangan Heksadesimal

Dalam penjumlahan bilangan heksadesimal, sisa akan terjadi jika jumlah dari setiap tempat melebihi 15.

Contoh

a. Bilangan Heksadesimal A = $9A_{16}$ dan bilangan Heksadesimal B = 43_{16} akan dijumlahkan ,

Bilangan Heksadesimal A	= $9\ A_{16}$	= 154_{10}
Bilangan Heksadesimal B	= $4\ 3_{16}$	= 67_{10}
carry		
Hasil A + B	= $D\ D_{16}$	= 221_{10}

b. Bilangan Heksadesimal A = $E8_{16}$ dan bilangan Heksadesimal B = $9A_{16}$ akan dijumlahkan ,

Bilangan Heksadesimal A	= $E\ 8_{16}$	= 232_{10}
Bilangan Heksadesimal B	= $9\ A_{16}$	= 154_{10}
carry	1 1	
Hasil A + B	= $1\ 8\ 2_{16}$	= 386_{10}

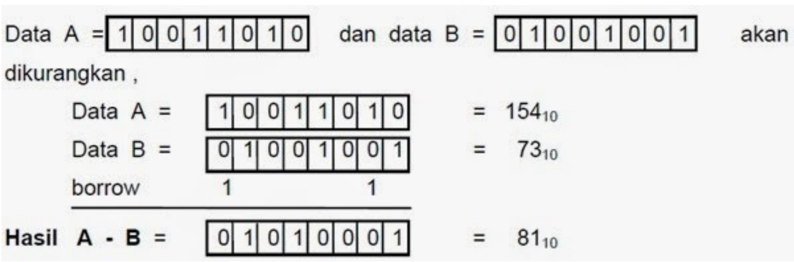
3.1.2 Pengurangan Bilangan

3.1.2.1 Pengurangan Bilangan Biner

Pada pengurangan bilangan biner berlaku aturan seperti di bawah ini,

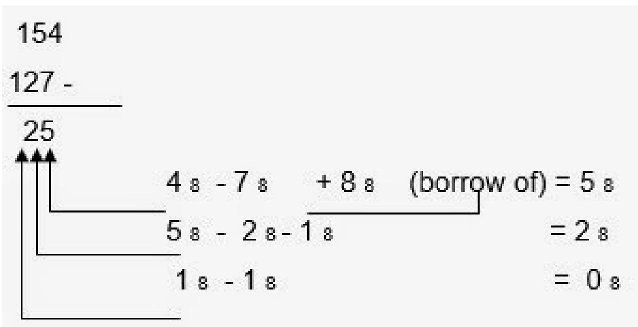
0 - 0	**= 0**
0 - 1	**= 1 / -1 sebagai *borrow***
1 - 0	**= 1**
1 - 1	**= 0**
0 - 1 - 1	**= 0 / - 1 sebagai *borrow***
1 - 1 - 1	**= 1 / -1 sebagai *borrow***

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi.
Contoh :



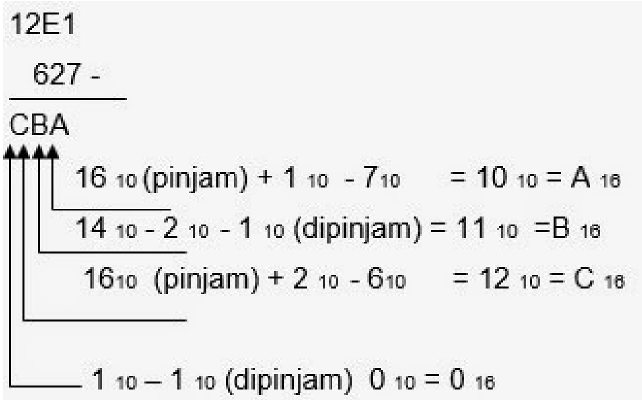
3.1.2.2 Pengurangan Bilangan Oktal

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi (dengan nilai 8).
Contoh :



3.1.2.2 Pengurangan Bilangan Heksadesimal

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi (dengan nilai 16).
Contoh :



3.1.3 *Increment* dan *Decrement*

Increment (bertambah) dan *Decrement* (berkurang) adalah dua pengertian yang sering sekali digunakan dalam teknik miroprosessor. Dalam matematik pengertian *increment* adalah **Bertambah Satu** dan *decrement* artinya **Berkurang Satu.**

3.1.3.1 *Increment* Sistem Bilangan

Seperti penjelasan diatas bahwa *increment* artinya bilangan sebelumnya ditambah dengan 1.

Contoh :

Bilangan Biner	A =	1	0	0	1	1	0	1	1
									+1
Increment A	**=**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**

Bilangan Heksadesimal B = 7 F

+1

Increment B = 8 0

3.1.3.2 *Decrement* Sistem Bilangan

Decrement diperoleh dengan cara mengurangi bilangan sebelumnya dengan 1.

Contoh :

Bilangan Biner	A =	1	0	0	1	1	0	1	1
									-1
Decrement A	**=**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Bilangan Heksadesimal B = 7 F

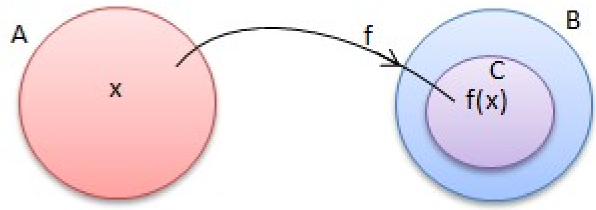
-1

Decrement B = 7 E

3.3 Komposisi Fungsi

Fungsi

Fungsi adalah relasi antara 2 himpunan yang berbeda A dan B yang memasangkan setiap anggota di Himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.



Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah penggbungan operasi 2 fungsi secara terurut yang nantinya akan meghasilkan sebuah fungsi baru.

1. $(f\circ g)(x)=f(g(x))$
2. $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

Sifat Komposisi Fungsi

$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ $(f\circ (g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$

Contoh :

diberikan fungsi :

1. ${\color{Red} f(x)=2x+1}$
2. ${\color{Blue} g(x)=3x^2}$
3. ${\color{DarkGreen} h(x)=\frac{1}{x+4}}$

1. $(f\circ g)(x)$ = ...?

fungsi $g(x)$ disubtitusikan ke fungsi $f(x)$

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= {\color{red}f(}{\color{blue}g(x)}{\color{red})}\\ &= {\color{red}f(}{\color{blue}3x^2}{\color{red})}\\ &= {\color{red}2(}{\color{blue}3x^2}{\color{red})}+1\\ (f\circ g)(x) &= 6x^2+1\end{aligned}$$

1. $(g\circ h)(x)$ = ...?

fungsi h(x) disubtitusikan ke fungsi g(x)

1. $(h\circ g\circ f)(x)$ =. . . ?

fungsi $f(x)$ harus disubtitusikan terlebih dahulu ke fungsi $g(x)$, hasilnya nanti akan baru disubtitusikan ke fungsi $h(x)$, perhatikan warna mewakili subtitusi

$$
\begin{aligned}
(h \circ g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) \\
&= h(g(2x+1)) \\
&= h(3(2x+1)^2) \\
&= h(3(4x^2+4x+1)) \\
&= h(12x^2+12x+3) \\
&= \frac{1}{(12x^2+12x+3)+4} \\
&= \frac{1}{12x^2+12x+7}
\end{aligned}
$$

3.4 Fungsi Linear

1. **Pengertian Fungsi Linier**

Fungsi adalah hubungan matematis antara suatu variabel dengan variabel lainnya. Unsur-unsurpembentuk fungsi adalah ***variabel***, ***koefisien***, dan ***konstanta***.
Variabel adalah unsur yang sifatnya berubah-ubah dari satu keadaan ke keadaan lainnya. Variabel dapat dibedakan menjadi ***variabel bebas*** dan ***variabel terikat.*** **Variabel bebas** :variabel yang menjelaskan variabel lainnya. Adapun **Variabel terikat** adalah variabel yang diterangkan oleh **variabel bebas**

Contoh 1 :

Jika y adalah fungsi x maka ditulis y = f(x) dimana :
x adalah variabel bebas dan y adalah variabel terikat

Jika x adalah fungsi dari y maka ditulis x = f(y) dimana :
y adalah variable bebas dan x adalah variable terikat

Gambar 1 contoh fungsi linier

Koefisien adalah bilangan atau angka yang diletakkan tepat di depan suatu variabel, terkait dengan variabel yang bersangkutan.

Contoh 2 :

2y = 3x - 5,	y adalah variable terikat x adalah variable bebas 2 adalah koefisien (terletak di depan variable y) 3 adalah koefisien (terletak di depan variable x) 5 adalah konstanta
x = y - 5	y adalah variabel bebas x adalah variable terikat - 5 adalah konstanta

Gambar 2 contoh fungsi linier

Konstanta sifatnya tetap dan tidak terkait dengan suatu variabel apapun.

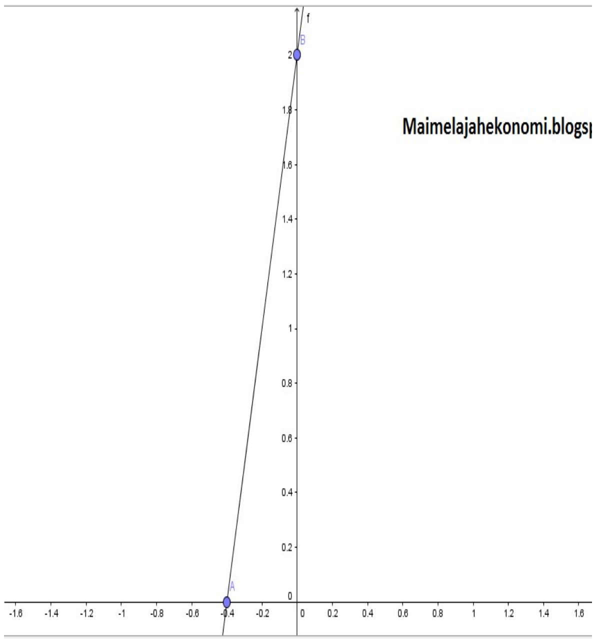
Fungsi linier adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus. Oleh karena itu fungsi linier sering disebutdengan persamaan garis lurus (pgl) dengan bentuk umumnya sbb.:

f : x $\rightarrow$ mx + c atau **f(x) = mx + c atau y = mx + c**

m adalah gradien / kemiringan / kecondongan dan c adalah konstanta

Contoh : Gambarlah grafik y = 5x + 2**Pertama** tentukanlah nilai x jika y = 00 = 5x + 2x = -2/5Jadi kordinat yang didapatkan adalah (x,y)yaitu (-2/5 , 0)**Kedua** tentukannlah nilai y jika x = 0y = 5x + 2y= 5(0) + 2y +2Jadi kordinat yang didapatkan adalah (x,y) yaitu (0,2)

Setelah titik potong tercipta teman-teman hanya perlu menarik garis antara kordinat satu dengan kordinat lainnya maka akan jadi seperti ini :



Gambar 3 grafik fungsi linier

Dari grafik diatas dapat tarik kesimpulan kalau **gradien** itu merupakah **arah** dari garis lurus. Gradien dapat memiliki **nilai positif** jika membentuk garis lurus yang memiliki sudut dengan sumbu x diatas 0 derajat dan kurang dari 90 derajat sebab nilai Tg-nya sudah pasti positive . Gradien dapat memiliki **nilai negatif** jika membentuk garis lurus yang memiliki sudut dengan sumbu x lebih dari 90 derajat dan kurang dari 180derajat sebab nilai Tgnya sudah pasti negatif.Gradien dapat memiliki **nilai 0** jika membentuk garis tegak terhadap sumbu y sehingga membentuk sudut tepat 0 derajat terhadap sumbu x , ini terjadi karena nilai Tg dari 0derajat itu sendiri adalah 0. Gradien dapat memiliki **nilai tak berhingga** jika membentuk garis tegak terhadap sumbu x yang nantinya garis tersebut akan membentuk sudut sebesar 90derajat terhadap sumbu x. Ini terjadi karena nilai Tg 90 derajat adalah tak berhingga.

Jika membuat persamaan garis lurus yang melalui titik (0,0) dengan gradien sebesar m maka gunakanlah rumus : **y = mx** caranya tinggal masukin nilai m aja kok , nilai m biasanya diketahui di soal .Jika membuat persamaan garis lurus yang memotong sumbu y ditiik (0,n) dan gradiennya diketahui , pakai saja rumus **y = mx + n**Jika membuat persamaan garis lurus yang melalui titik A (x1, y1) dan gradiennya diketahui gunakanlah persamaan **y-y1 = m (x-x1)**Jika membuat persamaan garis lurus yang melalui dua titik misal titik A(x1,y1) dan B(x2,y2) maka gunakanlah persamaan :

$$\frac{y-y1}{y2-y1} = \frac{x-x1}{x2-x1}$$

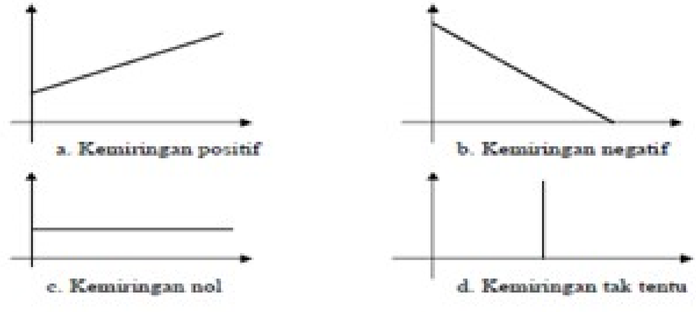
Jika membuat persamaan garis lurus yang memotong sumbu x pada x1 dan sumbu y pada y1 maka cobalah untuk menggunakan rumus :

$$\frac{x}{x1} = \frac{y}{y1} = 1$$

Untuk yang diatas tadi ini ,yang tetap dirumus hanyalah x dan y saja , sisanya adalah variabel yang ditentukan dalam soal .Nah kalau persamaan garis lurus **Ax + By + C = 0** , nah ini jujur saya benar-benar masih belum mengerti , mungkin kalau ada dari teman-teman yang ingin menjelaskan mohon komentar dibawah. Nah ini nih temen2 , bener2 sangat berguna dan gak kalah penting .Misalkan ini ada dua garis lurus :Garis lurus
L_1 : $y = m_1\ x + n_1$ L_2 : $y = m_2\ x + n_2$
1.) Dua garis lurus berimpit maka m1 = m2 dan n1 = n22.) Dua garis lurus sejajar maka m1 = m2 dan n1 tidak sama dengan n23.) Dua garis lurus saling tegak lurus m1 x m2 =-14.) Dua garis lurus saling berpotongan m1 tidak sama dengan m2

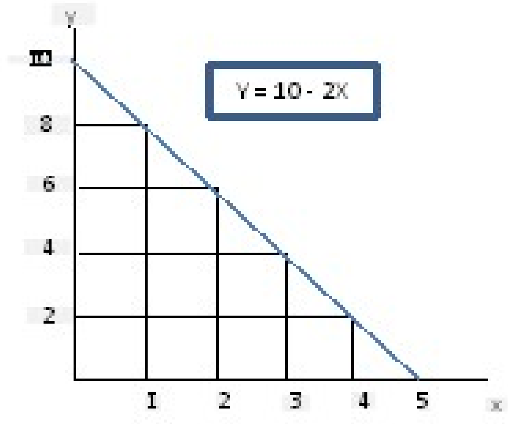
1. **Melukis grafik fungsi linier**

Langkah-langkah melukis grafik fungsi linier
a Tentukan titik potong dengan sumbu x, y = 0 diperoleh koordinat A(x1, 0)b Tentukan titik potong dengan sumbu y, x = 0 diperoleh koordinat B(0, y1)c hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurusPersamaan linier juga dapat ditulis ditulis dengan simbol y = ax + b (ini untuk memudahkan kita dalam memahami gambar)Jika b bernilai positif : fungsi linier digambarkan garis dari kiri bawah ke kanan atasJika b bernilai negatif : fungsi linier digambarkan garis dari kiri atas ke kanan bawahJika b bernilai nol : digambarkan garis yg sejajar dengan sumbu datar x

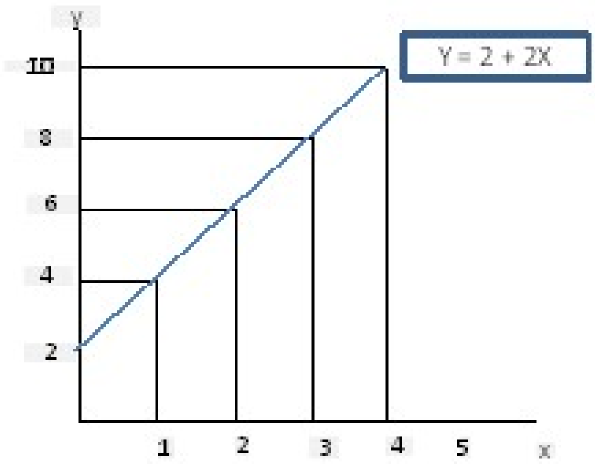


Gambar 4 Fungsi Linear

Apabila b bernilai negatif : Y = 10 - 2X maka kurva bergerak dari kiri atas ke kanan bawah



Apabila b bernilai positif : Y = 2 + 2X maka kurva bergerak dari kiri bawah ke kanan atas



1. **Gradien dan persamaan garis lurus**
   1. Garis lurus yang melalui titik A(x1, y1) dan B(x2, y2) memiliki gradien m:

m = y1-y2 atau m = y2-y1x1-x2 x2-x1

   1. Persamaan garis lurus yang melalui titik A(x1, y1) dan B(x2, y2) adalah:

y-y1 = x-x1y2-y1 x2-x1

   1. Persamaan garis lurus (pgl) yang bergradien m dan melalui titik A(x1, y1) adalah:

y = m (x – x1) + y1**4. Menentukan gradien dari persamaan garis lurus (pgl)**

1. Persamaan garis lurus : ax + by = c maka gradiennya m = - a/b
2. Persamaan garis lurus : y = ax + b maka m = a
3. Garis yang sejajar sumbu x memiliki persamaan y = c dan m = 0
4. Garis yang sejajar sumbu y memiliki persamaan x = c dan tidak memiliki gradient

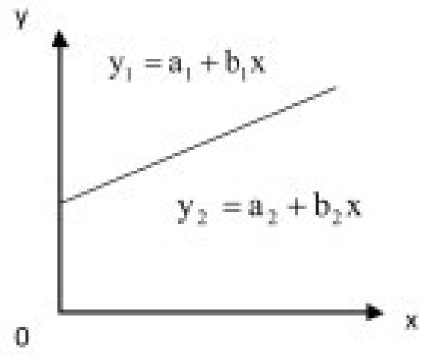
5. Titik potong dua buah garis

Menentukan titik potong dua buah garis lurus identik dengan menyelesaikanpenyelesaian sistem persamaan linier dua variabel baik dengan metode eleminiasi,metode substitusi maupun metode grafik

6. Hubungan dua buah garis

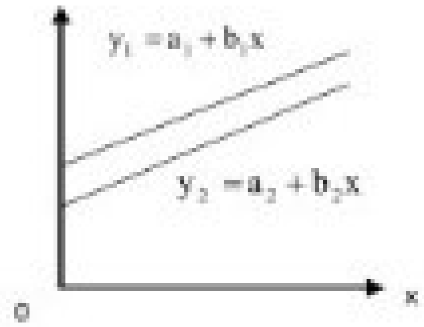
Dua garis yang bergradien m1 dan m2 dikatakan sejajar jika m1 = m2 dan tegak lurus jika m1 x m2 = -1**1. Berimpit**

Dua garis lurus akan berimpit apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berimpit dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika $y_1 = ny_2$ $a_1 = na_2$ $b_1 = nb_2$



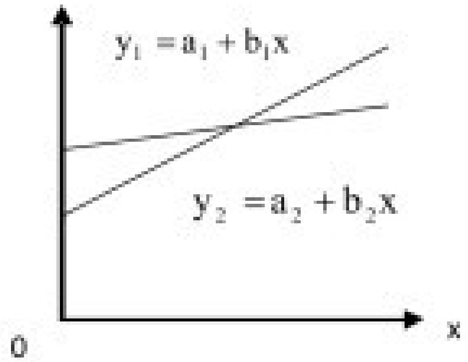
2. Sejajar

Dua garis lurus akan sejajar apabila lereng/gradien garis yang satu sama dengan lereng/gradien dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan sejajar dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika $b_1 = b_2$



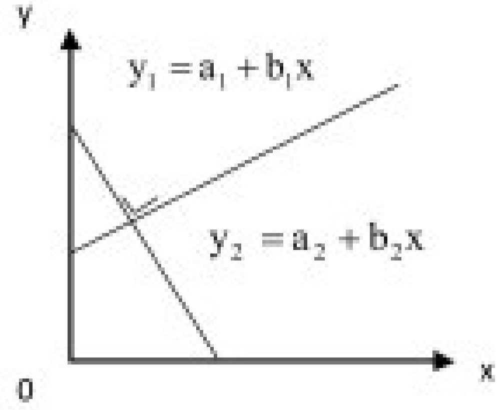
1. **Berpotongan**

Dua garis lurus akan berpotongan apabila lereng/gradien garis yang satu tidak sama dengan lereng/gradien dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berpotongan dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika $b_1 \neq b_2$



4. Tegak lurus

Dua garis lurus akan saling tegak lurus apabila lereng/gradien garis yang satu merupakan kebalikan dari lereng/gradien dari garis yang lain dengan tanda yang berlawanan. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1 x$ akan tegak lurus dengan garis $y_2 = a_2 + b_2 x$, jika atau $b_1 = -\,{}^{1}\!/\!_{b_2}$

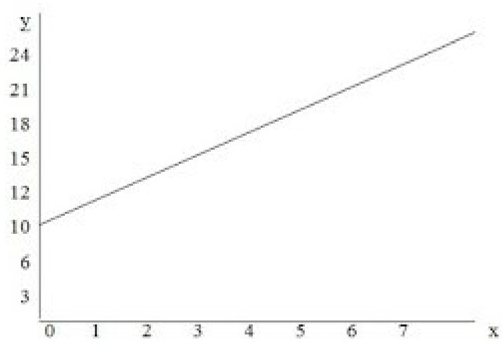


7. Penggambaran Fungsi Linear

1. Cara Daftar

Digunakan untuk melihat perubahan nilai angka dari peubah bebas dab peubah tergantungnya.
Contoh : y = 2x + 10

X	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	10	12	14	16	18	20	22	24

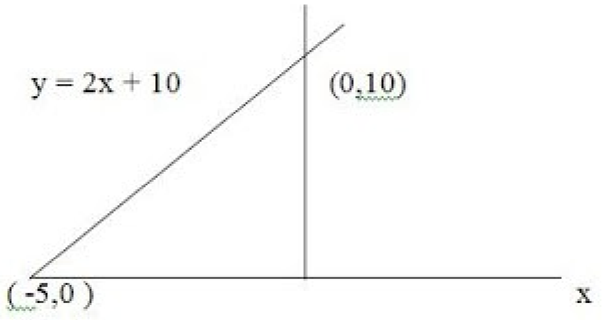


2. Cara Matematis

Dengan cara mencari ciri matematis dari persamaan yang bersangkutan.
Y = 2x + 10
Titik potong sumbu y apabila x = 0 maka y = 2 (0) + 10 = 10

Sehingga titik potong pada sumbu y = (0,10)
Titik potong sumbu x apabila y = 0 maka 0 = 2x + 10

$$-2x = 10$$
$$x = -5$$



sehingga titik potong pada sumbu x = (-5,0)

3. Mencari fungsi linear

a. Metode dua titik (dwi koordinat)

merupakan metode pembentukan persamaan linear (garis lurus) dari dua buah titik yang diketahui

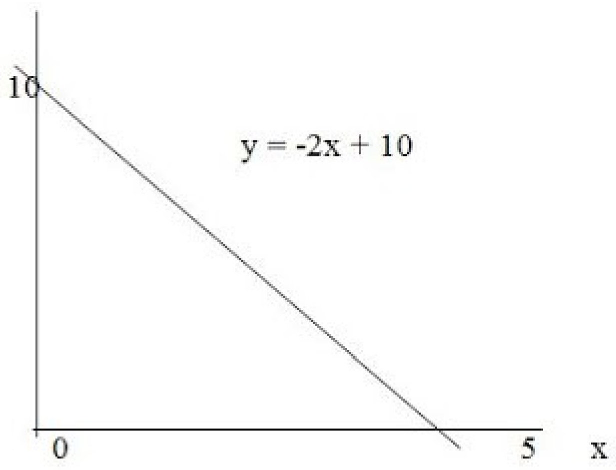
$$\frac{(Y - Y1)}{(Y2 - Y1)} = \frac{(X - X1)}{(X2 - X1)}$$

Contoh buatlah persamaan garis lurus yang melalui titik A (4,2) dan B (2,6)
Titik A (4,2) X1 = 4 Y1 = 2
Titik B (2,6) X2 = 2 Y2 = 6

$$\frac{(Y - 2)}{(6 - 2)} = \frac{(X - 4)}{(2 - 4)}$$

$$\frac{(Y - 2)}{(??)} = \frac{(X - 4)}{(-2)}$$

$$-2y + 4 = 4x - 16$$
$$-2y = 4x - 20$$
$$y = -2x + 10$$



b. Metode titik potong sumbu

digunakan untuk kasus tertentu, yaitu jika suatu titik A (x1,y1) merupakan titik potong sumbu Y, misalnya pada titik (0,b) dan titik B (x2,y2) merupakan titik potong sumbu x misalnya pada (a,0) maka persamaan garisnya dapat dibentuk sbb:

y / b – 1 = -x / a

y / b + x / a = 1

Contoh :

apabila diketahui suatu garis dengan titik potong sumbu y adalah (0,6) dan titik potong sumbu x adalah (4,0), carilah persamaan garisnya

y / b – 1 = x / a

y / b + x / a = 1

y / 6 + x / 4 = 1 x 12

12y / 6 + 12x / 4 = 12

2y + 3x = 12

2y = -3x + 12

y = -3/2 x + 6

c. Metode kemiringan garis dan titik

Apabila diketahui suatu titik A (x1,y1) dan dilalui oleh suatu garis lurus yang memiliki kemiringan m, maka persamaannya adalah :

y – y1 = m (x – x1) persamaan garis yang melalui titik (x1,y1) dengan kemiringan sebesar m.

Contoh:

carilah persamaan garis yang melalui suatu titik (4,2) dan kemiringan -3

y – y1 = m(x – x1)

y – 2 = -3(x – 4)

= -3x + 12

y = -3x + 14

d. Metode kemiringan garis dan titik potong sumbu

Apabila diketahui suatu titik yang berkoordinat (0,b) merupakan titik potong dengan sumbu y sebuah garis lurus yang memiliki kemiringan garis m, maka persamaan garis tersbut adalah y = mx + b, merupakan persamaan garis yang melalui titik potong sumbu y dengan kemiringan m,

Contoh :

Apabila suatu garis memiliki titik potong dengan sumbu y pada (0,-4) dan kemiringannya 5 maka bagaimana persamaan garisnya :

y = mx + b

y = 5x – 4

Contoh soal persamaan linier

1. Suatu fungsi linear ditentukan oleh y = 4x – 2 dengan daerah asal {x \-1 x 2, x R}.
2. Buat tabel titik-titik yangmemenuhi persamaan diatas .
3. Tentukan titik potong grafik dengan sumbu X dan sumbu Y.

Penyelesaian :

1. (a) **Ambil sembarang titik pada domain**

X -1 0 1 2W3956W5012W6151W7290W8429 Y= 4x-2 -6 -2 2 6W3956W5012W6151W7290W8429

1. **Titik potong dengan sumbu x (y= 0)**

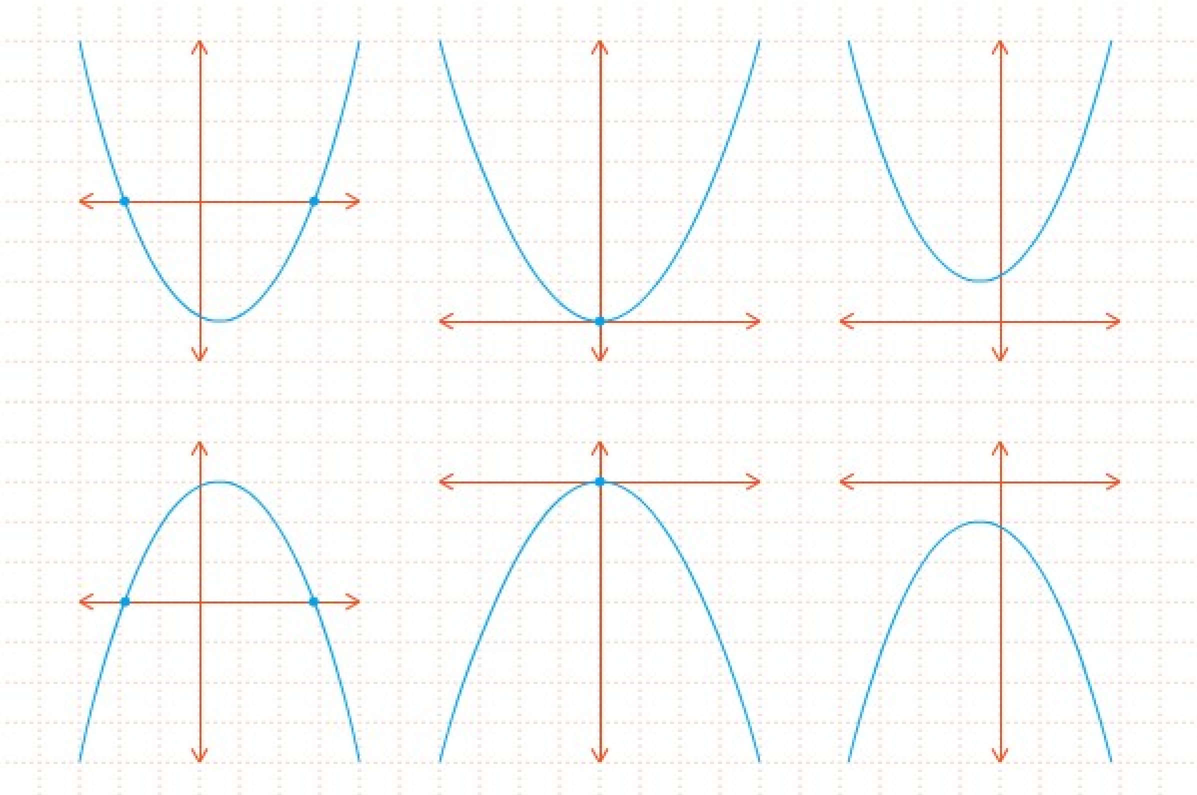
y = 4x – 2
0 = 4x - 2
2 = 4x
x = 1/2
Jadi titik potong dengan sumbu X adalah (,0)

1. **Titik potong dengan sumbu Y (x = 0)**

y = 4x – 2
y = 4(0) – 2
y = -2
Jadi titik potong dengan sumbu Y adalah (0,-2)

3.5 Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat (*quadratic function*) adalah fungsi polinomial yang berderajat dua. Bentuk umum dari fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Fungsi kuadrat dapat memotong sumbu-x 2 kali, 1 kali, atau tidak memotong sumbu-x sama sekali.



Pada buku ini akan dibahas fungsi kuadrat yang memotong sumbu-x minimal di satu titik, misalkan di titik-titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$. Sehingga didapatkan $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Apabila fungsi kuadrat yang memotong sumbu-x di dua titik tersebut melalui titik (x_3, y_3), maka fungsi kuadrat tersebut dapat ditentukan bentuknya, yaitu sebagai berikut:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

CONTOH SOAL
Susunlah fungsi kuadrat yang memotong sumbu-x di titik (2, 0) dan titik (–1, 0) serta melalui titik (3, 12)!
Jawab: Karena fungsi kuadrat yang dimaksud melalui titik (3, 12) serta memotong sumbu-x di titik (2, 0) dan titik (–1, 0), maka kita cukup mensubstitusikan 3 pada x, 12 pada $f(x)$, serta absis-absis titik potong sumbu-x pada x_1 dan x_2. Sehingga,

$$\begin{array}{lcrl}
 & & f(x) & = a(x - x_1)(x - x_2) \\
x = 3, f(x) = 12, x_1 = 2, x_2 = -1 & \Rightarrow & 12 & = a(3 - 2)\big(3 - (-1)\big) \\
 & \Leftrightarrow & 12 & = a \cdot 1 \cdot 4 \\
 & \Leftrightarrow & 12 & = 4a \\
 & \Leftrightarrow & a & = \dfrac{12}{4} = 3
\end{array}$$

Setelah diperoleh $a = 3$, substitusikan a tersebut pada rumus dengan membiarkan x dan $f(x)$.

$$\begin{array}{lcrl}
 & & f(x) & = a(x - x_1)(x - x_2) \\
a = 3, x_1 = 2, x_2 = -1 & \Rightarrow & f(x) & = 3(x - 2)\big(x - (-1)\big) \\
 & \Leftrightarrow & f(x) & = 3(x - 2)(x + 1) \\
 & \Leftrightarrow & f(x) & = 3(x^2 - x - 2) \\
 & \Leftrightarrow & f(x) & = 3x^2 - 3x - 6
\end{array}$$

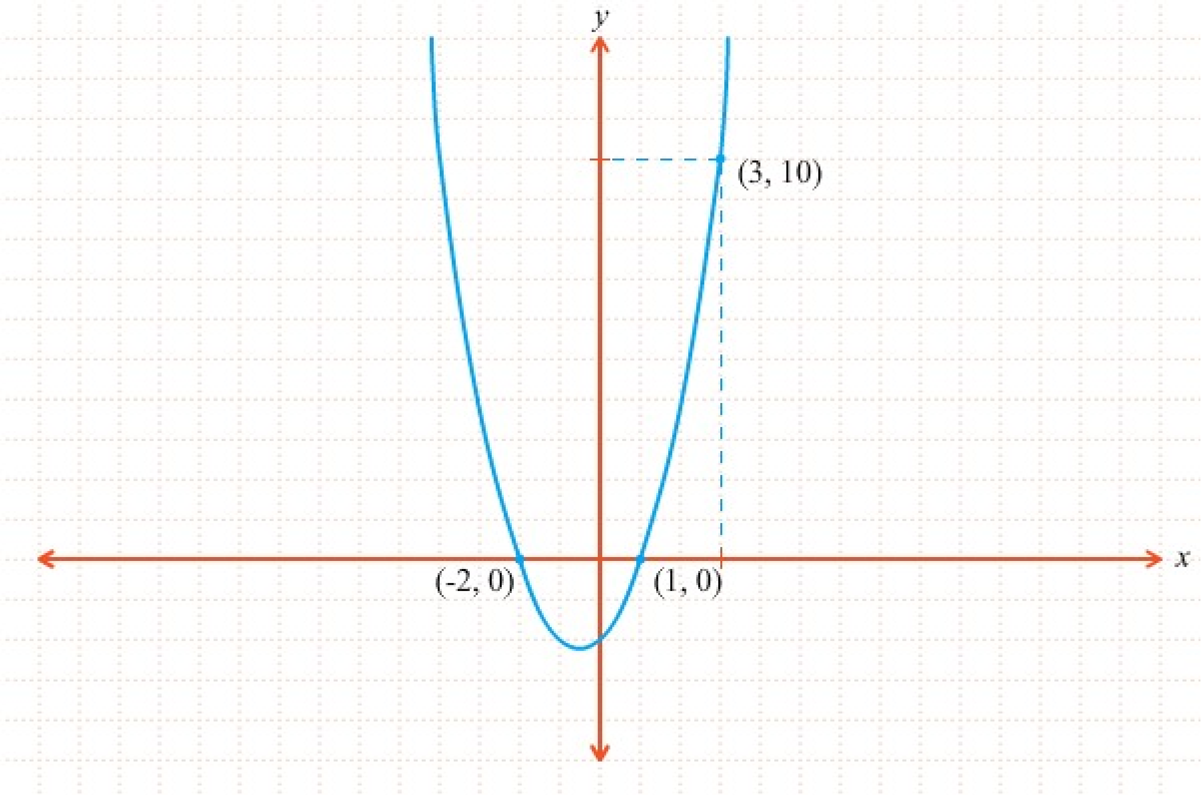
Sehingga diperoleh fungsi kuadrat yang dimaksud adalah $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Untuk menguji hasil yang diperoleh, mari kita uji fungsi tersebut apakah melalui titi-titik (2, 0), (–1, 0), dan (3, 12).

$$
\begin{aligned}
f(x) = 3x^2 - 3x - 6 \quad & \Longrightarrow \quad & f(2) &= 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 - 6 \\
& & &= 12 - 6 - 6 = 0 \\
& \Longrightarrow \quad & f(-1) &= 3\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) - 6 \\
& & &= 3 + 3 - 6 = 0 \\
& \Longrightarrow \quad & f(3) &= 3\cdot 3^2 - 3\cdot 3 - 6 \\
& & &= 27 - 9 - 6 = 12
\end{aligned}
$$

Sehingga fungsi kuadrat yang diperoleh memenuhi permintaan soal. Untuk menguji kompetensi mengenai materi ini silahkan kerjakan soal berikut.

SOAL LATIHAN

Perhatikan gambar di bawah!



Tentukanlah fungsi kuadrat yang grafiknya digambarkan seperti gambar di atas!

Fungsi kuadrat memiliki grafik yang berbentuk parabola yang terbuka ke atas atau ke bawah. Sehingga fungsi kuadrat dapat memiliki nilai minimum ataupun maksimum, tergantung dari koefisien x^2 (a) fungsi kuadrat tersebut. Apabila nilai a positif, maka fungsi kuadrat tersebut memiliki nilai minimum. Sedangkan apabila nilai a negatif, fungsi kuadrat tersebut memiliki nilai maksimum. Titik di mana nilai maksimum/minimum dari fungsi kuadrat tersebut disebut **titik ekstrim**, disimbolkan (x_p, y_p).

Fungsi kuadrat yang memiliki titik ekstrim (x_p, y_p) dan melalui satu titik lain dapat disusun dengan menggunakan rumus berikut:

$$y = a(x - x_p) + y_p$$

Untuk lebih memahami mengenai topik menyusun fungsi kuadrat apabila diketahui titik ekstrim dan satu titik lain yang dilaluinya, perhatikan contoh soal berikut.

CONTOH SOAL

Susunlah fungsi kuadrat yang memiliki titik ekstrim di (2, –5) dan melalui titik (1, 4)!

Jawab: Fungsi kuadrat yang memiliki titik ekstrim di (2, –5) dan melalui titik (1, 4) dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lcll} & & y & = a(x - x_p)^2 + y_p \\ x = 1, y = 4, x_p = 2, y_p = -5 & \Longrightarrow & 4 & = a(1-2)^2 + (-5) \\ & \Leftrightarrow & 4 & = a - 5 \\ & \Leftrightarrow & a & = 9 \end{array}$$

Untuk $a = 9$, diperoleh

$$\begin{array}{lcll} & & y & = a(x - x_p)^2 + y_p \\ a = 5, x_p = 2, y_p = -5 & \Longrightarrow & y & = 9(x-2)^2 + (-5) \\ & \Leftrightarrow & y & = 9(x^2 - 4x + 4) - 5 \\ & \Leftrightarrow & y & = 9x^2 - 36x + 31 \end{array}$$

Jadi, fungsi kuadrat yang memiliki titik ekstrim (2, –5) dan melalui titik (1, 4) adalah $y = 9x^2 - 36x + 31$

Pada umumnya, dalam menyusun fungsi kuadrat diperlukan minimal tiga titik yang dilaluinya. Hal ini tidak berlaku untuk titik ekstrim. Apabila diketahui titik ekstrim suatu fungsi kuadrat, maka diperlukan satu titik lagi (total dua titik) untuk menyusun fungsi fungsi kuadrat tersebut. Yang akan dibicarakan di sini adalah menyusun fungsi kuadrat jika diketahui ketiga titik yang dilaluinya, titik ekstrim tidak masuk dalam ketiga titik tersebut.
Untuk menyusun fungsi kuadrat jika diketahui ketiga titik yang dilaluinya digunakan bentuk umum dari fungsi kuadrat berikut:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Dengan a, b, dan c bilangan real, serta $a \neq 0$.
Untuk mengetahui bagaimana menyusun fungsi kuadrat jika diketahui ketiga titik yang dilaluinya, perhatikan contoh soal berikut.

CONTOH SOAL

Tentukan fungsi kuadrat yang melalui titik-titik (–1, 6) dan (2, 12) serta memotong sumbu-y pada $y = 2$!

JawabFungsi kuadrat yang akan dicari memotong sumbu-y pada $y = 2$, atau dengan kata lain memotong sumbu-y di titik (0, 2). Sehingga,

$$\begin{array}{rrrl} & & y & = ax^2 + bx + c \\ (x, y) = (0, 2) & \Longrightarrow & 2 & = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ & \Leftrightarrow & 2 & = 0 + 0 + c \\ & \Leftrightarrow & c & = 2 \end{array}$$

Setelah itu kita substitusikan titik (–1, 6) pada persamaan.

$$\begin{array}{rrrl} & & y & = ax^2 + bx + c \\ (x, y) = (-1, 6), c = 2 & \Longrightarrow & 6 & = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 \\ & \Leftrightarrow & 6 & = a - b + 2 \\ & \Leftrightarrow & 6 - 2 & = a - b \\ & \Leftrightarrow & 4 & = a - b \end{array}$$

Persamaan yang diperoleh ini dimisalkan dengan **persamaan 1**.
Lanjut ke titik (2, 12). Apabila titik (2, 12) disubstitusikan ke bentuk umum fungsi kuadrat, akan menjadi seperti berikut.

$$
\begin{array}{llrl}
 & & y & = ax^2 + bx + c \\
(x,y) = (2,12), c = 2 & \Rightarrow & 12 & = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + 2 \\
 & \Leftrightarrow & 12 & = 4a + 2b + 2 \\
 & \Leftrightarrow & 12 - 2 & = 4a + 2b \\
 & \Leftrightarrow & 10 & = 4a + 2b \\
 & \Leftrightarrow & 5 & = 2a + b
\end{array}
$$

Persamaan yang diperoleh ini dimisalkan dengan **persamaan 2**.
Selanjutnya, lakukan **metode eliminasi** persamaan 2 terhadap persamaan 1 dengan menghilangkan/mengeliminasi variabel b.

$$
\begin{array}{llll}
 & a & -b & = 4 \\
 & 2a & +b & = 5 \\
\hline
 & 3a & & = 9 \quad + \\
\Leftrightarrow & a & & = \frac{9}{3} = 3
\end{array}
$$

Sehingga diperoleh $a = 3$. Substitusikan hasil ini ke persamaan 1 atau 2. Apabila $a = 3$ disubstitusikan ke persamaan 1, maka $3 - b = 4$. Diperoleh $b = 3 - 4 = -1$. Jadi, fungsi kuadrat yang melalui titik-titik (–1, 6) dan (2, 12) serta memotong sumbu-y pada $y = 2$ adalah $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
Fungsi kuadrat yang melalui titik-titik (–1, 6) dan (2, 12) serta memotong sumbu-y pada y = 2 adalah $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
Untuk meyakinkan akan kebenaran jawaban ini, mari kita uji fungsi kuadrat ini dengan titik-titik (–1, 6), (2, 12), dan (0, 2).

$$
\begin{array}{lcll}
 & & y & = 3x^2 - x + 2 \\
x = -1 & \Rightarrow & y & = 3(-1)^2 - (-1) + 2 \\
 & \Leftrightarrow & y & = 3 \cdot 1 + 1 + 2 \\
 & \Leftrightarrow & y & = 6 \\
\hline
x = 2 & \Rightarrow & y & = 3(2)^2 - (2) + 2 \\
 & \Leftrightarrow & y & = 3 \cdot 4 - 2 + 2 \\
 & \Leftrightarrow & y & = 12 \\
\hline
x = 0 & \Rightarrow & y & = 3(0)^2 - (0) + 2 \\
 & \Leftrightarrow & y & = 3 \cdot 0 - 0 + 2 \\
 & \Leftrightarrow & y & = 2
\end{array}
$$

Pada perhitungan di atas dapat diperoleh bahwa untuk $x = -1$ diperoleh $y = 6$, untuk $x = 2$ diperoleh $y = 12$, dan untuk $x = 0$ diperoleh $y = 2$. Sehingga fungsi $f(x) = 3x^2 - x + 2$ memotong titik-titik (–1, 6), (2, 12), dan (0, 2). Sesuai yang diminta soal. Jadi, dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa pekerjaan kita dalam menyusun fungsi kuadrat di atas benar.

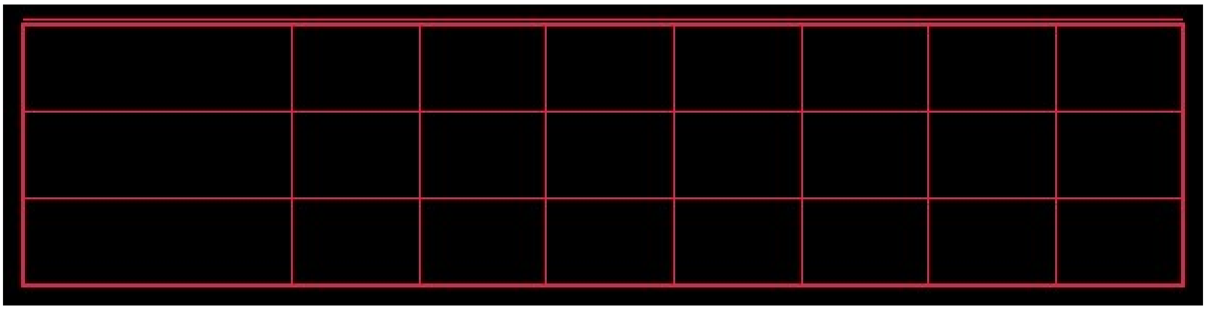
Grafik Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat merupakan suatu fungsi yang memiliki satu variabel yang pangkat tertingginya adalah 2. Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. Pada pembahasan ini akan ditunjukkan bagaimana cara melukis grafik fungsi kuadrat, khususnya grafik fungsi $f(x) = x^2$ dan $f(x) = -x^2$. Mengapa memilih fungsi-fungsi kuadrat tersebut? Karena fungsi-fungsi tersebut merupakan fungsi-fungsi kuadrat yang paling sederhana.

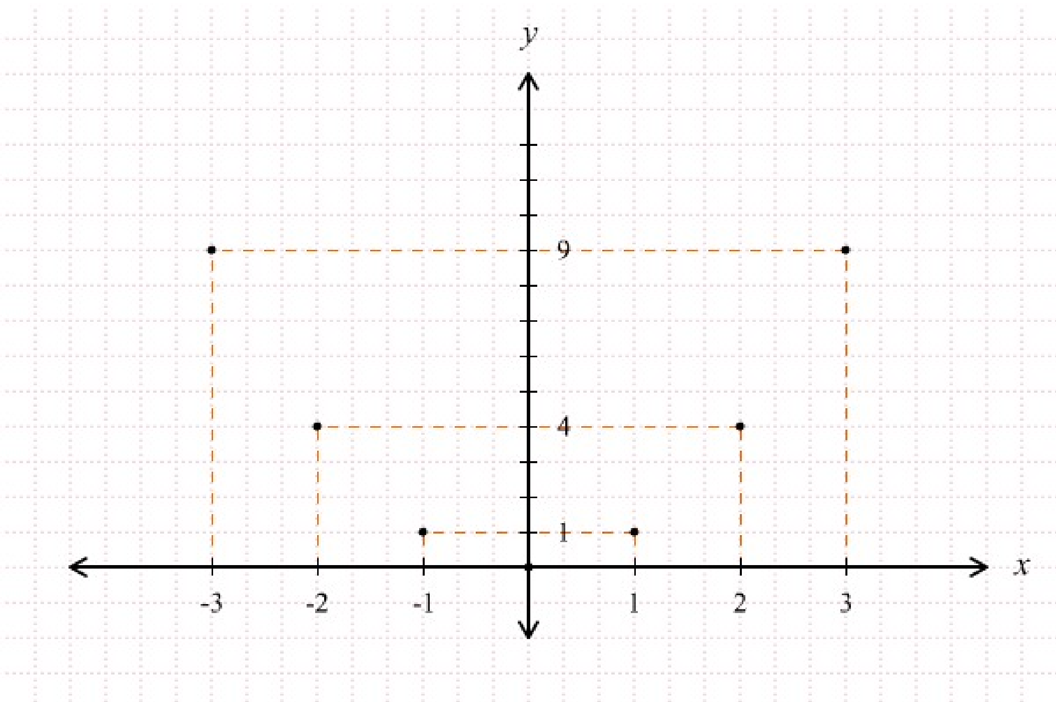
Melukis Grafik Fungsi $f(x) = x^2$

Sebelum melukis grafik fungsi $f(x) = x^2$, perlu diketahui bahwa semua fungsi kuadrat merupakan fungsi kontinu. Sehingga apabila dilukiskan grafik fungsinya, akan terbentuk grafik fungsi yang halus. Selain itu, fungsi $f(x) = x^2$ merupakan fungsi genap, yaitu fungsi yang nilai $f(x) = f(-x)$. Grafik dari fungsi genap memiliki sumbu simetri pada sumbu-y. Berikut ini langkah-langkah dalam melukis grafik fungsi $f(x) = x^2$.

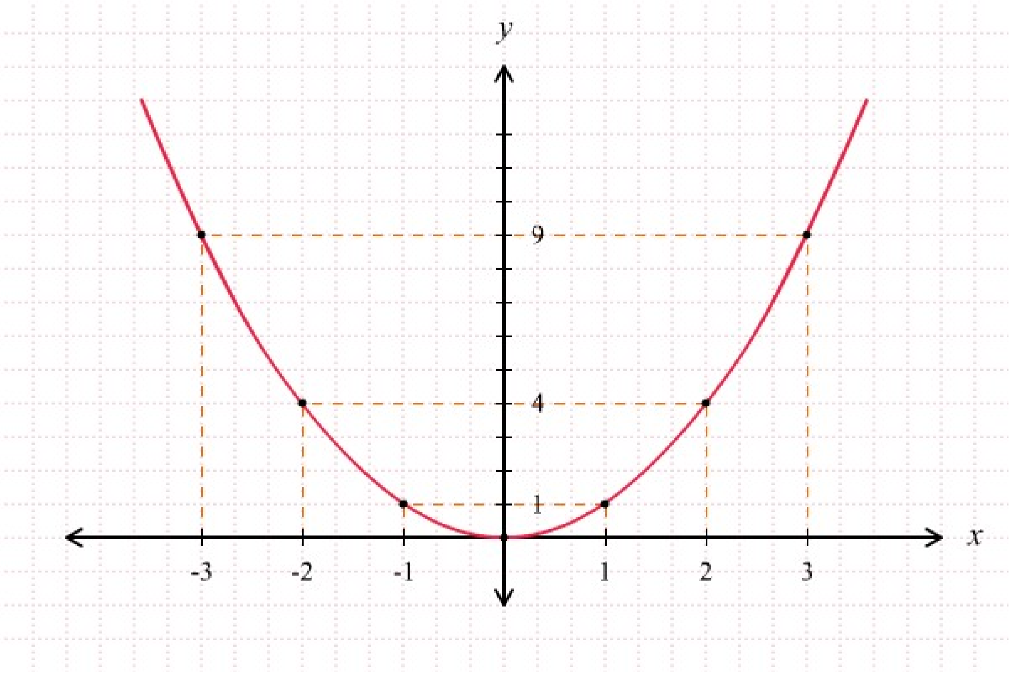
1. Cacahlah titik-titik yang dilalui oleh grafik fungsi $f(x) = x^2$. Karena grafik fungsi tersebut memiliki sumbu simetri pada sumbu-y, pilihlah $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.



1. Lukislah titik-titik dengan koordinat $(x, f(x))$ pada koordinat Cartesius.



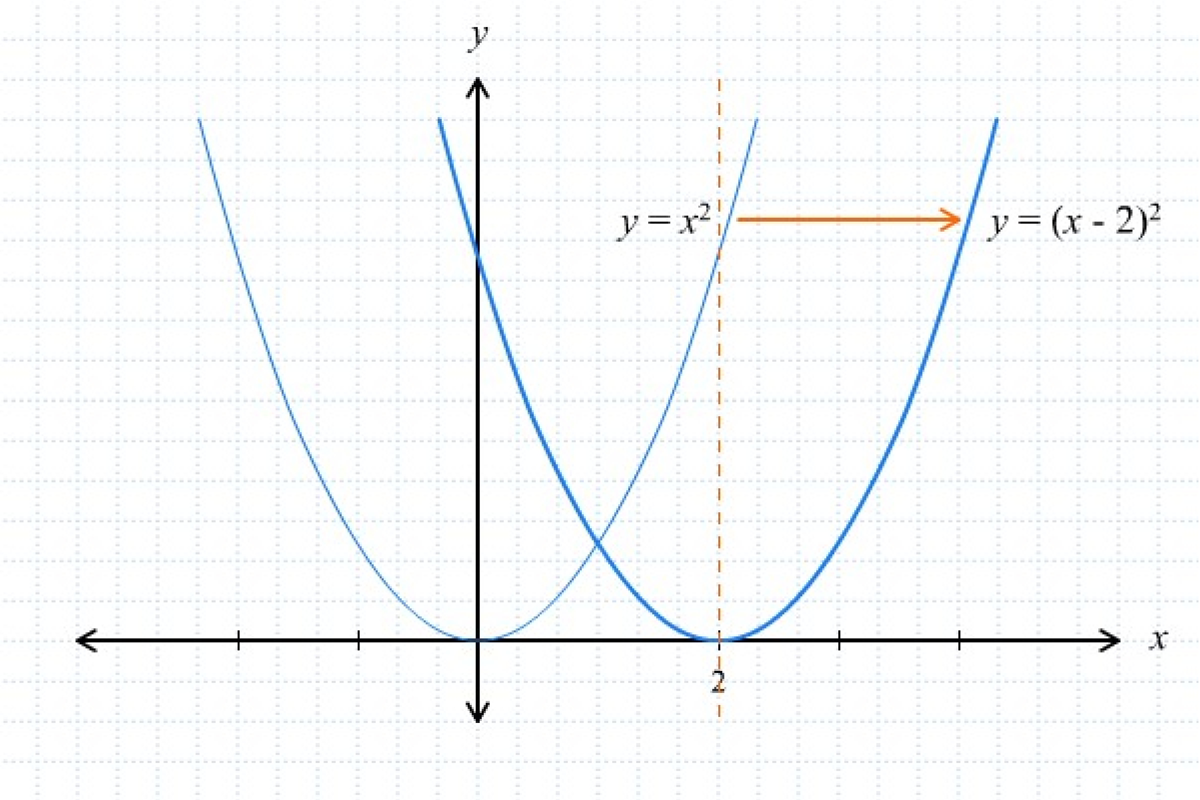
1. Hubungkan titik-titik tersebut dengan menggunakan kurva halus. Grafik yang terbentuk merupakan grafik fungsi $f(x) = x^2$.



Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas mengenai 2 grafik fungsi kuadrat yang paling sederhana, yaitu grafik $f(x) = x^2$ dan $f(x) = -\,x^2$. Bagaimana dengan grafik-grafik fungsi kuadrat lainnya? Seperti diketahui, bentuk umum dari fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$. **Pada pembahasan ini akan ditunjukkan cara melukis grafik fungsi kuadrat yang memiliki nilai $a = 1$ ($f(x) = x^2 + bx + c$).** Dalam melukis grafik fungsi kuadrat dengan $a = 1$ dapat digunakan proses transformasi grafik fungsi $f(x) = x^2$. Berikut ini beberapa jenis grafik fungsi kuadrat yang merupakan hasil transformasi dari grafik fungsi $f(x) = x^2$.

Grafik Fungsi $f(x) = (x - p)^2$

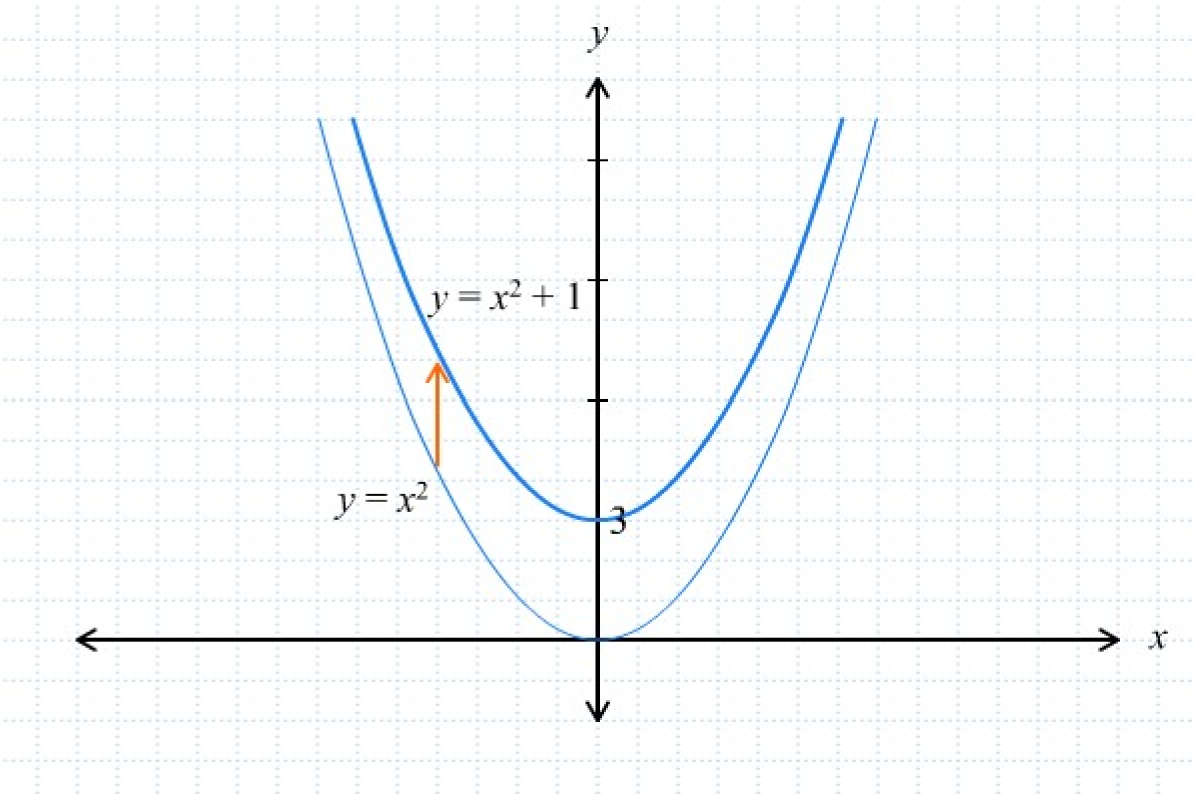
Grafik fungsi $f(x) = (x - p)^2$, p bilangan real positif, merupakan hasil pergeseran/translasi grafik $f(x) = x^2$ **ke kanan** sejauh a. Apabila fungsi $f(x) = x^2$ memiliki sumbu simetri pada sumbu-y, maka fungsi $f(x) = (x - a)^2$ memiliki sumbu simetri pada garis $x = a$. Misalkan untuk fungsi $f(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Grafik ini merupakan hasil translasi grafik $f(x) = x^2$ ke kanan sejauh 2 satuan sehingga sumbu simetrinya adalah $x = 2$. Perhatikan gambar berikut:



Sedangkan grafik fungsi $f(x) = (x + p)^2$ merupakan hasil pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ **ke kiri** sejauh p satuan.

Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + q$

Grafik fungsi $f(x) = x^2 + q$, q bilangan real positif, merupakan hasil translasi grafik $f(x) = x^2$ **ke atas** sejauh q satuan. Misalkan $f(x) = x^2 + 3$. Grafik dari fungsi tersebut merupakan hasil translasi dari grafik $f(x) = x^2$ ke atas sejauh 3 satuan. Perhatikan gambar berikut.



Sedangkan grafik fungsi $f(x) = x^2 - q$ merupakan hasil translasi grafik $f(x) = x^2$ **ke bawah** sejauh q satuan.

Pembahasan selanjutnya ini akan ditunjukkan bagaimana **melukis grafik fungsi kuadrat yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$**, dengan a bilangan real bukan nol ($a \neq 0$) dan bukan satu ($a \neq 1$).

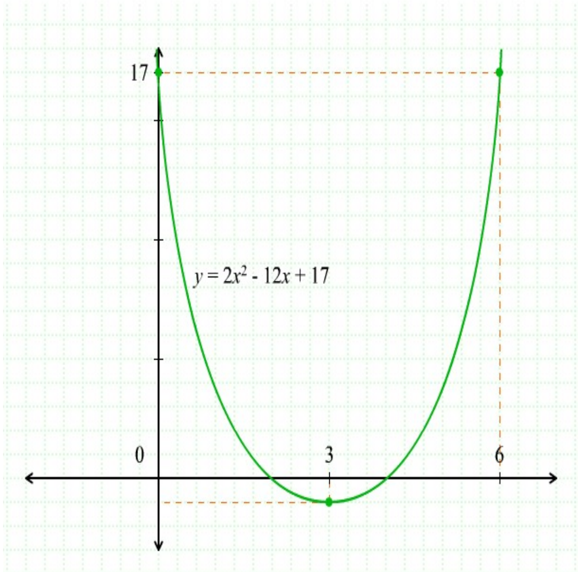
Sebelum membahas bagaimana melukis grafik fungsi kuadrat yang dimaksud, akan dibahas mengenai topik **melengkapkan kuadrat**. Bentuk fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat diubah bentuknya menjadi bentuk lain, dengan teknik melengkapkan kuadrat. Perhatikan gambar di bawah ini.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

Dari fungsi di atas dapat diketahui dengan mudah bahwa fungsi tersebut memiliki titik ekstrim, (x_p, y_p). Titik ekstrim dapat berupa nilai maksimum ataupun maksimum suatu fungsi kuadrat tersebut, tergantung nilai a. Apabila a positif maka titik tersebut adalah nilai minimum, apabila a negatif maka titik tersebut merupakan nilai maksimum. Titik ekstrim dapat ditentukan apabila yang dikuadratkan pada fungsi kuadrat di atas (setelah diubah dengan melengkapkan kuadrat) adalah nol. Mengapa? Karena bentuk kuadrat memiliki nilai minimum nol.

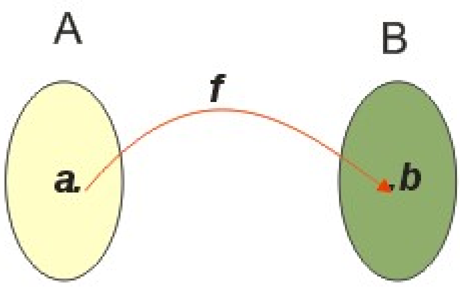
$$x + \frac{b}{2a} = 0 \Longrightarrow (x_p, y_p) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Grafik Fungsi Kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Untuk melukis grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, terlebih dahulu cari titik ekstrimnya kemudian cari 2 titik lainnya yang letaknya di kanan dan kiri titik ekstrim tersebut. Setelah itu, plot ketiga titik tersebut pada koordinat Cartesius dan hubungkan dengan kurva halus. Misalkan akan dilukis grafik fungsi $f(x) = 2x^2 - 12x + 17$. Grafik fungsi tersebut memiliki nilai $a = 2$, $b = -12$, dan $c = 17$. Sehingga titik ekstrimnya adalah $(3, -1)$. Dengan substitusi $x = 0$ dan $x = 6$ ke fungsi kuadrat tersebut diperoleh 2 titik lainnya adalah $(0, 17)$ dan $(6, 17)$. Berikut adalah grafik dari fungsi $f(x) = 2x^2 - 12x + 17$.

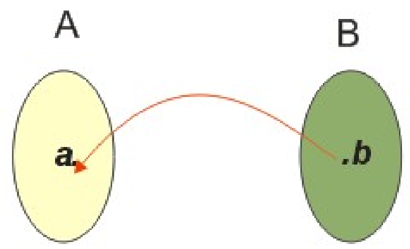


3.6 Fungsi Inversi

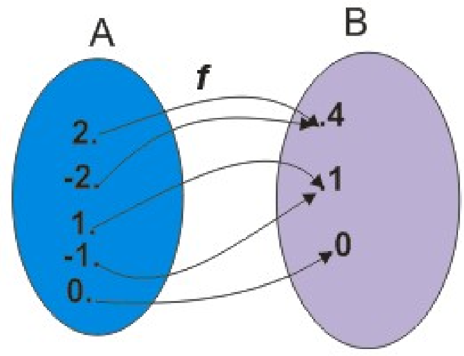
Pengertian Invers
Invers suatu fungsi tidak selalu merupakan fungsi. Jika invers suatu fungsi merupakan fungsi maka invers fungsi itu disebut fungsi invers. Misalkan f fungsi dari himpunan A ke B yang dinyatakan dengan diagram panah sbb:

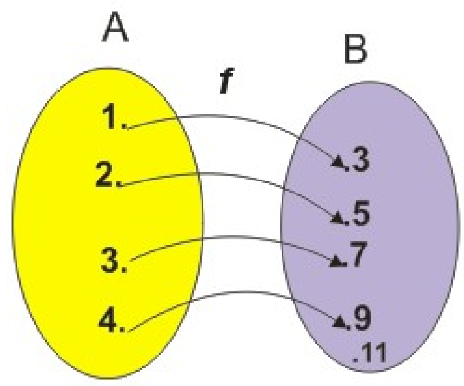


sehingga diperoleh himpunan pasangan berurutan:
$f : \{(a,b)|a \in A \text{ dan } b \in B\}$
Kalau diadakan pengubahan domain menjadi kodomain dan kodomain menjadi domaian, maka diagram panahnya menjadi

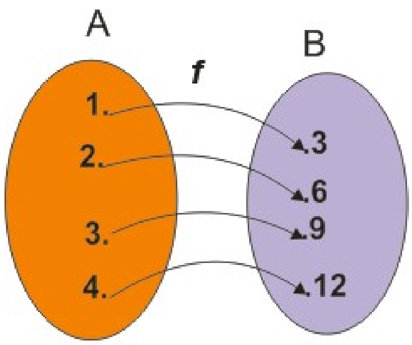


dan himpunan pasangan berurutannya menjadi $\{(b,a)|b \in B \text{ dan } a \in A\}$.
Relasi yang diperoleh dengan cara seperti di atas disebut invers fungsi f dan dilambangkan dengan f^{-1}
Definisi:
Jika fungsi $f : A \to B$dinyatakan dengan pasangan berurutan $f : \{(a,b)|a \in A \text{ dan } b \in B\}$maka invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \to A$ ditentukan oleh $f^{-1} = \{(b,a)|b \in B \text{ dan } a \in A\}$





1. (??)



(??)

Tampak bahwa yang inversnya juga merupakan fungsi hanya pada gambar (??). Jika invers suatu fungsi merupakan fungsi, maka invers fungsi itu disebut fungsi invers.

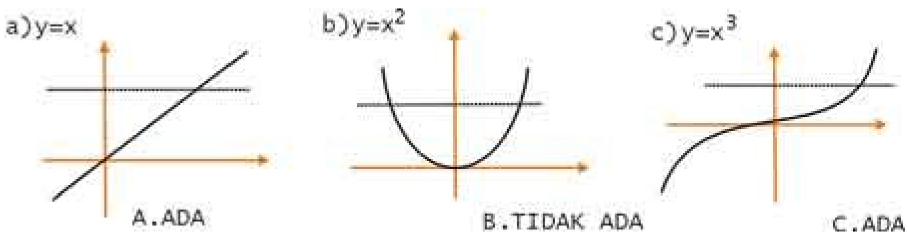
1. (a) **Syarat-syarat Invers**

Dalam fungsi ini invers mempunyai syarat-syarat khusus invers, diantaranya sebagai berikut :

FUNGSI INVERS
$f^{-1}(x)$ = (x-b)/a ; a ? 0
$f^{-1}(x)$ = (-dx+b)/(cx-a) ; x ? a/c
$f^{-1}(x)$ = (-b+?(b-4a(c-x))/2a ; a ? 0
$f^{-1}(x)$ = a^x/c ; c ? 0
$f^{-1}(x)$ =^{a}log $x^{1/c}$ = 1/c ^{a}log x ; c?0
$f^{-1}(x)$ =^{a}log $x^{1/c}$ = 1/c ^{a}log x ; c?0

Keterangan : *fungsi invers ini ada, jika syarat-syaratnya terpenuhi*

Fungsi kuadrat secara umum tidak mempunyai invers, tetapi dapat mempunyai invers jika daerah definisinya dibatasi.



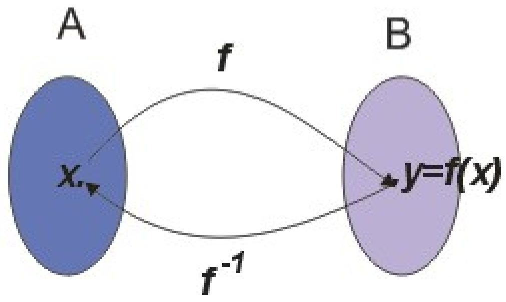
f(x) = x untuk X > 0 $f^{-1}(x)$ = x untuk X > 0

1. (a) **Menentukan Rumus Fungsi Invers**

Beberapa langkah untuk menentukan rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$ jika f (x) diketahui adalah sebagai berikut :

Ubah persamaan y = f (x) dalam bentuk f sebagai fungsi y.
Bentuk x sebagai fungsi y pada langkah 1 dinamai dengan $f^{-1}(y)$.
Ganti y pada $f^{-1}(y)$ dengan x untuk memperoleh $f^{-1}(x)$. Maka $f^{-1}(x)$ adalah rumus fungsi invers fungsi f (x).

Perhatikan diagram panah berikut :



y adalah peta dari x oleh fungsi f, sehingga pemetaan oleh fungsi f dapat dinayatakan dengan persamaan:

$$y = f(x)$$

Kalau f^{-1} adalah invers dari fungsi f maka x adalah peta dari y oleh fungsi f^{-1} sehingga diperoleh persamaan:

$$x = f^{-1}(y)$$

Selanjutnya peubah x diganti dengan y dan peubah y diganti dengan x.

1. **Penyelesaian Masalah**

Langkah ke-1

1. Melengkapi tabel fungsi y = f(x)

Misalkan fungsi *f* dari *x* ke *y* didefinisikan sebagai *y* = *f x*), seperti Tabel 62.1. Salin dan lengkapilah Tabel 2.1. Tabel 2.1 Fungsi *y* = *f x*)

Tabel 2.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
(masukan)										
y	0	2	4	6	8	..	..	.	.	
(keluaran)										

1. Menukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran

Tukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran tersebut seperti Tabel 2.2, kemudian salin dan lengkapilah Tabel 2.2

Tabel 2.2

y	0	2	4	6	8					
(masukan)										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
(keluaran)										

Langkah ke-2

1. Melengkapi tabel fungsi s = g(r)

Misalkan fungsi g dari r ke s didefinisikan sebagai $s = g(r)$, seperti Tabel 2.3. Salin dan lengkapilah Tabel 2.3. Tabel 2.3 Fungsi $s = g(r)$

Tabel 2.3

r	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
(masukan)										
s	.	9	4	1	0	1	4	9	.	
(keluaran)										

1. Menukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran

Tukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran tersebut seperti Tabel 2.2, lalu salin dan lengkapi Tabel 2.4.

Tabel 2.4

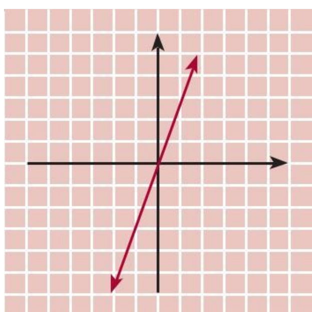
s		9	4	1	0	1	4	9		
(masukan)										
r	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	
(keluaran)										

1. Langkah ke-3

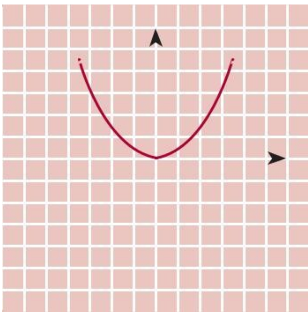
Jika fungsi f memetakan setiap x Œ D_f ke y Œ R_f maka balikan dari fungsi f *mengembalikan* unsur y tersebut ke unsur x semula. Proses pembalikan tersebut belum tentu meng-hasilkan fungsi baru. Jika f fungsi bijektif maka pembalikan tersebut menghasilkan fungsi baru. Akan tetapi, jika f bukan fungsi bijektif pembalikan itu hanya menghasilkan suatu relasi. Agar lebih jelas, pelajari uraian berikut.

Telah diketahui fungsi $y = 2x$ seperti Gambar 2.1 merupakan fungsi bijektif. Amati bahwa setiap dua unsur yang berbeda di dalam domain f dikawankan dengan dua unsur yang berbeda di dalam daerah kawan f. Sebagai contoh, $x_1 = 2$ dan $x_2 = –2$ dikawankan berturut turut dengan $y_1 = 4$ dan $y_2 = –4$. Balikan dari fungsi ini akan menghubungkan dua unsur yang berbeda tersebut dengan dua unsur semula yang berbeda, yaitu 4 dengan 2 dan –4 dengan –2. Balikan dari fungsi tersebut jelas sesuai dengan aturan fungsi, yang hanya membolehkan setiap unsur di dalam daerah asalnya dihubungkan dengan satu dan
hanya satu unsur di dalam daerah hasil. Jadi, balikan dari fungsi f $x) = 2x$ merupakan fungsi.
Lain halnya dengan fungsi $y = x^2$ seperti Gambar 6.13. Fungsi ini bukan merupakan *fungsi bijektif*

Amati bahwa setiap unsur x dan $–x$ di dalam domain f dikawankan dengan unsur y yang sama di dalam daerah kawan f. Contohnya, unsur 2 dan –2 keduanya dipetakan ke unsur yang sama, yaitu 4. Akibatnya, balikan dari fungsi ini menghubungkan 4 dengan dua unsur yang berbeda, yaitu 2 dan –2. Balikan dari fungsi ini jelas menyalahi aturan fungsi. Jadi, balikan dari fungsi f $x) = x^2$ bukan merupakan fungsi, tetapi hanya relasi saja.



Gambar 2.1



Gambar 2.2

Dari Definisi 2.4 tampak bahwa setiap x Œ D_f dipetakan oleh f ke f x) dan f x) oleh f^{--1} dikembalikan ke x. Demikian halnya untuk setiap x Œ R_f dipetakan oleh f^{--1} ke f^{--1} (x) dan f^{--1} (x) oleh f dikembalikan ke x. Dengan demikian, invers suatu fungsi invers menghasilkan fungsi asalnya, dituliskan f^{--1} $)^{--1}$ = f. Dari uraian tersebut, Anda dapat menentukan invers suatu fungsi dengan langkah-langkah
sebagai berikut :

1. (a) i. Diketahui, $y = f$ x).
   ii. Selesaikan persamaan sehingga diperoleh x sebagai fungsi y atau $x f^{--1}$ (y).
   iii. Ganti variabel y dengan x pada f^{--1} (y) sehingga diperoleh f^{--1} (x) = y sebagai fungsi invers dari $y = f\,x$).
1. (a) **Perhitungan Soal**
2. Tentukan invers dari fungsi berikut ini : $y\,f$ (x) = 5x – 7. Kemudian, gambarkan grafik f (x) dan f^{--1} (x).

Jawab

y = 5x – 7 5x = y + 7

x = y 7

5

$$x = f - -1(y) = y7$$

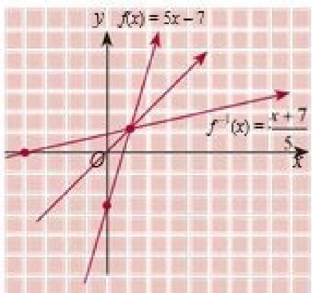
5

Jadi, fungsi invers dari $y = f$ (x) = 5x – 7 adalah f^{--1} (x) = $^{x\ 7}$

5

Gambar grafik f (x) = 5x – 7 dan f^{--1} (x) = $^{x\ 7}$

Jadi, fungsi invers dari $y = f$ (x) = 5x – 7 adalah f^{--1} (x) = $^{x\ 7}$



Gambar 2.3
Jika Anda amati grafik $f\ (x)$ dan $f^{\ -1}\ (x)$ dengan saksama, tampak bahwa grafik $f^{\ -1}\ (x)$ simetris terhadap grafik $f\ (x)$. Grafik $f^{\ -1}\ (x)$ diperoleh dari grafik $f\ (x)$ dengan mencerminkannya terhadap garis y = x. Oleh karena itu, untuk mencari $f^{\ -1}\ (x)$ jika diketahui $f\ (x)$ dapat pula dikerjakan dari persamaan $f\ {}^\circ f^{-1}\ (x) = x$.

1. Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi $f(x) = 2x+6$!

Jawab:

$$y = f(x) = 2x+6$$
$$\Leftrightarrow 2x = y-6$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y-3$$

Dengan demikian $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y-3$ atau $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x-3$

1. Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$

Jawab:

$$y = f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}$$
$$\Leftrightarrow y(3x+1) = 2x-5$$
$$\Leftrightarrow 3yx+y = 2x-5$$
$$\Leftrightarrow 3yx-2x = -y-5$$
$$\Leftrightarrow (3y-2)x = -y-5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-y-5}{3y-2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y+5}{2-3y}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+5}{2-3y}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2-3x}$$

Jadi fungsi invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2-3x}$

1. Fungsi berikut adalah pemetaan dari R ke R. tentukan rumus inversnya

f (x) = 2x + 2
f (x) = 3x – 6

Jawab :
f (x) = 2x + 2

y = f (x) = 2x + 2 x = $\frac{y-2}{2}$
x = f^{-1}(y) = $\frac{y-2}{2}$

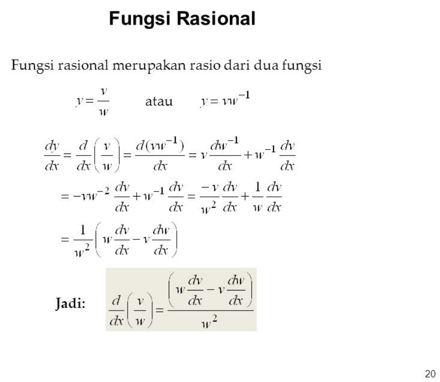
f^{-1}(x) = $\frac{x-2}{2}$
f (x) = 3x – 6

y = f (x) = 3x – 6 x = $\frac{y+6}{3}$

x = $f^{-1}(y) = \frac{y+6}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$

3.7 Fungsi Rasional

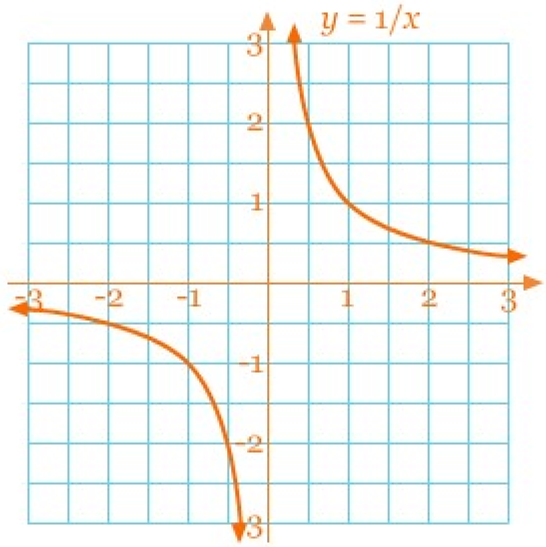


Fungsi rasional merupakan rasio dari 2 polynomial. Secara general,Fungsi rasional merupakan fungsi yang mempunyai bentuk $V(x)\frac{p(x)}{d(x)}$ Dengan *p* dan *d* adalah polinimial dan *d(x)* $\neq$ *0.* Domain dari *V(x)* merupakan semua bilangan real, kecuali pembuat nol dari *d.*
Fungsi rasional yang paling mudah adalah fungsi *y* = 1/*x* dan fungsi *y* = 1/*x*, yang keduanya mempunyai pembilang konstanta dan penyebut polinomial dengan 1 suku, serta kedua fungsi ini mempunyai domain semua bilangan real kecuali $x \neq 0$.

Fungsi *y* = 1/*x*

Fungsi tersebut disebut juga dengan fungsi kebalikan karena setiap kita memanggil sembarang *x* (kecuali nol) maka output yang akan di hasilkan adalah kebalikannya sebagai nilai dari fungsi tersebut. Hal ini berarti *x* yang besar akan menghasilkan nilai fungsi yang kecil, demikian juga sebaliknya. Tabel serta grafik dari fungsi tersebut dapat dilihat seperti di bawah ini.

x	*y*	*x*	*y*
-1.000	-1/1.000	1/1.000	1.000
-5	-1/5	1/3	3
-4	-1/4	1/2	2
-3	-1/3	1	1
-2	-1/2	2	1/2
-1	-1	3	1/3
-1/2	-2	4	1/4
-1/3	-3	5	1/5
-1/1.000	-1.000	1.000	1/1.000
1	Tidak Terdefnisi		



Dari tabel dan grafik di atas memunculkan beberapa hal yang menarik. Pertama, grafik ini lolos uji garis lurus, artinya bahwa, setiap garis lurus pada bidang koordinat Cartesius memotong grafik pada maksimal 1 titik. Sehingga, $y = 1/x$ adalah suatu fungsi. Kedua, karena pembagian tidak terdefinisi ketika pembaginya nol, maka nol tidak mempunyai pasangan, yang menghasilkan jeda pada $x = 0$. Hal ini sesuai dengan domain dari fungsi tersebut, yaitu semua x anggota bilangan real kecuali 0. Ketiga, fungsi ini adalah fungsi ganjil, dengan salah satu cabangnya terdapat di kuadran I sedangkan yang lainnya terdapat di kuadran III. Dan yang terakhir, pada kuadran I, ketika x menuju tak terhingga, nilai y menuju dan mendekati nilai nol. Secara simbolis dapat ditulis sebagai $x \to \infty$, $y \to 0$. Secara grafis, kurva dari grafik fungsi tersebut akan mendekati sumbu-$x$ketika x mendekati tak hingga.

Selain itu juga dapat mengamati bahwa ketika x mendekati nol dari kanan maka dari itu nilai y akan mendekati bilangan real positif yang sangat besar (positif tak terhingga): $x \to 0^+$, $y \to \infty$. Sebagai catatan, tanda + atau – yang terdapat di atas mengindikasikan *arah dari pendekatan*, yaitu *dari sisi positif* (+) atau *dari sisi negatif* (–).

Contoh : Mendeskripsikan Sifat dari Ujung Grafik Fungsi Rasional

Untuk $y = 1/x$ dalam kuadran III,

1. Deskripsikan sifat dari ujung grafik fungsi tersebut.
2. Deskripsikan apa yang terjadi ketika x mendekati nol.

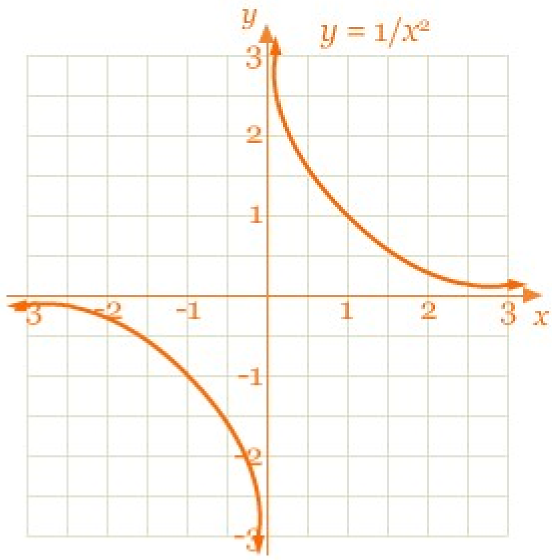
Pembahasan yang sama dengan sifat grafiknya pada kuadran I, kita mendapatkan

1. Ketika x mendekati negatif tak terhingga, nilai y akan mendekati nol. Apabila disimbolkan $x \to -\infty$, y $\to 0$.
2. Ketika x mendekati nol dari kiri, nilai y akan mendekati negatif tak terhingga. Pernyataan ini juga dapat dituliskan dengan $x \to 0^{--}$, $y \to -\infty$.

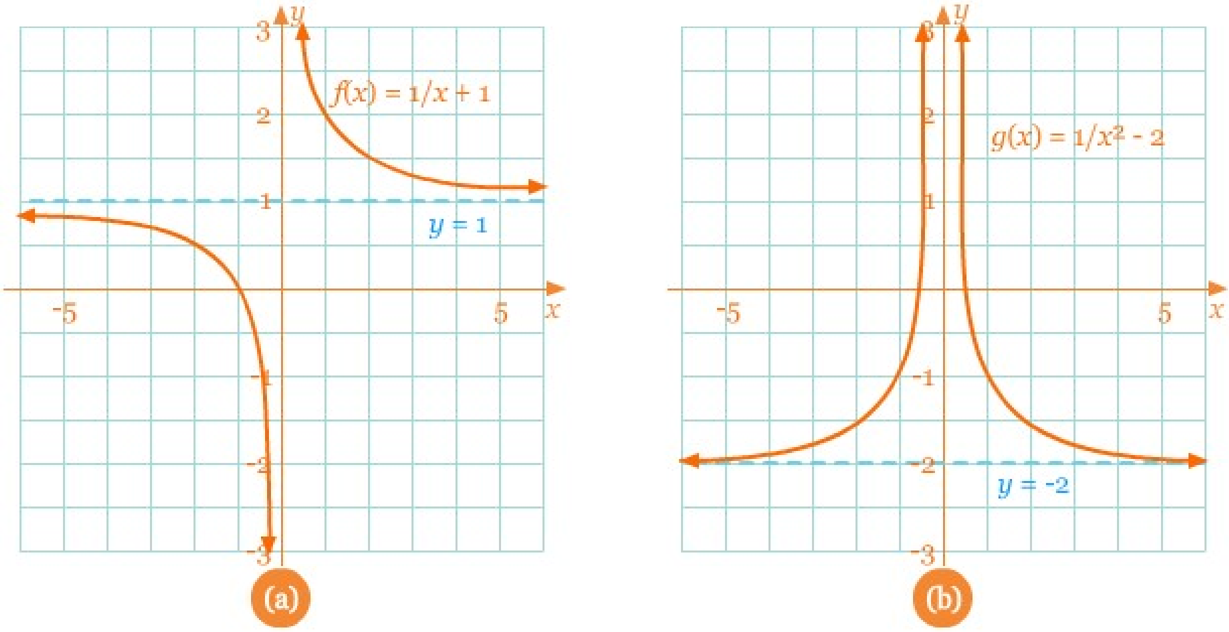
Fungsi $y = 1/x$

Dari pembahasan awal, kita dapat menduga bahwa grafik dari fungsi ini akan jeda ketika $x = 0$. Akan tetapi karena kuadrat dari sembarang bilangan negatif merupakan bilangan positif, cabang-cabang dari grafik fungsi ini akan berada di atas sumbu-x. Perhatikan bahwa fungsi $y = 1/x$ adalah fungsi genap.

x	y	x	Y
-1.000	1/1.000.000	1/3	9
-5	1/25	1/2	4
-4	1/16	1	1
-3	1/9	2	1/4
-2	1/4	3	1/9
-1/2	1	4	1/16
-1/3	4	5	1/25
-1/1.000	9	1.000	1/1.000.000
0	Tidak Terdefinisi		

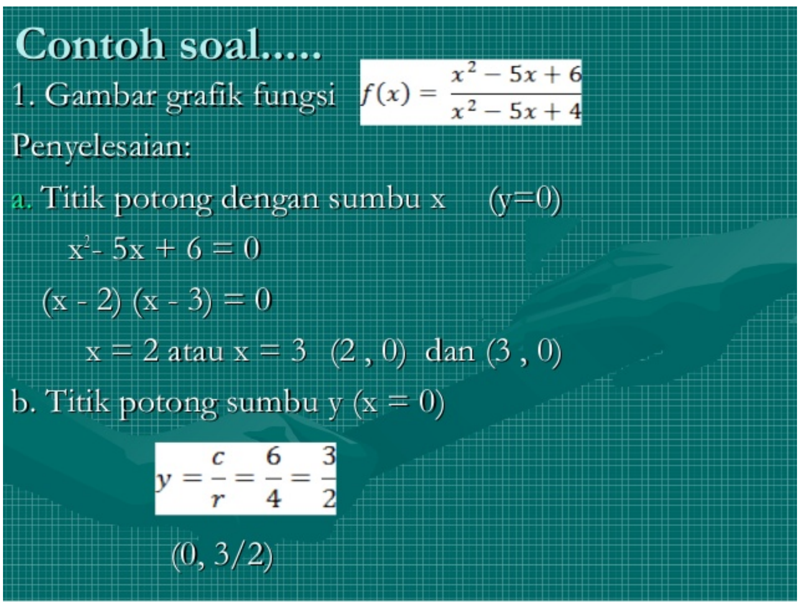


Seperti dengan $y = 1/x$, nilai x yang mendekati positif tak terhingga, menghasilkan y yang mendekati nol: $x \to \infty$, $y \to 0$.
Dalam gambar (a) di bawah ini menunjukkan bahwa garis asimtot horizontal pada $y = 1$, yang menunjukan grafik $f(x)$ sebagai translasi grafik $y = 1/x$ ke atas sejauh 1 satuan. Gambar (b) menggambarkan garis asimtot horizontal pada $y = -2$, yang menunjukan grafik $g(x)$ sebagai pergeseran grafik $y = 1/x$ ke bawah sejauh 2 satuan.



f(x) = 1/x + 1
y = 1
g(x) = 1/x² - 2
y = -2
(a)
(b)

Contoh :



Contoh soal.....
1. Gambar grafik fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}$
Penyelesaian:
a. Titik potong dengan sumbu x (y=0)
$x^2 - 5x + 6 = 0$
(x - 2) (x - 3) = 0
x = 2 atau x = 3 (2 , 0) dan (3 , 0)
b. Titik potong sumbu y (x = 0)
$y = \frac{c}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
(0, 3/2)

Contoh Soal

1. Gambarlah grafik fungsi $y = f(x) = \dfrac{2x - 4}{x - 1}$
   penyelesaian:

Titik potong dengan sumbu x dicapai untuk y = 0

$$0 = \frac{2x - 4}{x - 1}$$

$0 = 2x - 4$, maka $x = 2$ $\qquad x = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x yaitu (2 , 0)

Contoh Soal...

1. Lukislah grafik fungsi $y = \dfrac{x-1}{2x^2 + x - 1}$
   penyelesaian:

- Titik potong pada sumbu x

$$0 = \frac{x-1}{2x^2 + x - 1} \qquad x = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{1} = 1$$

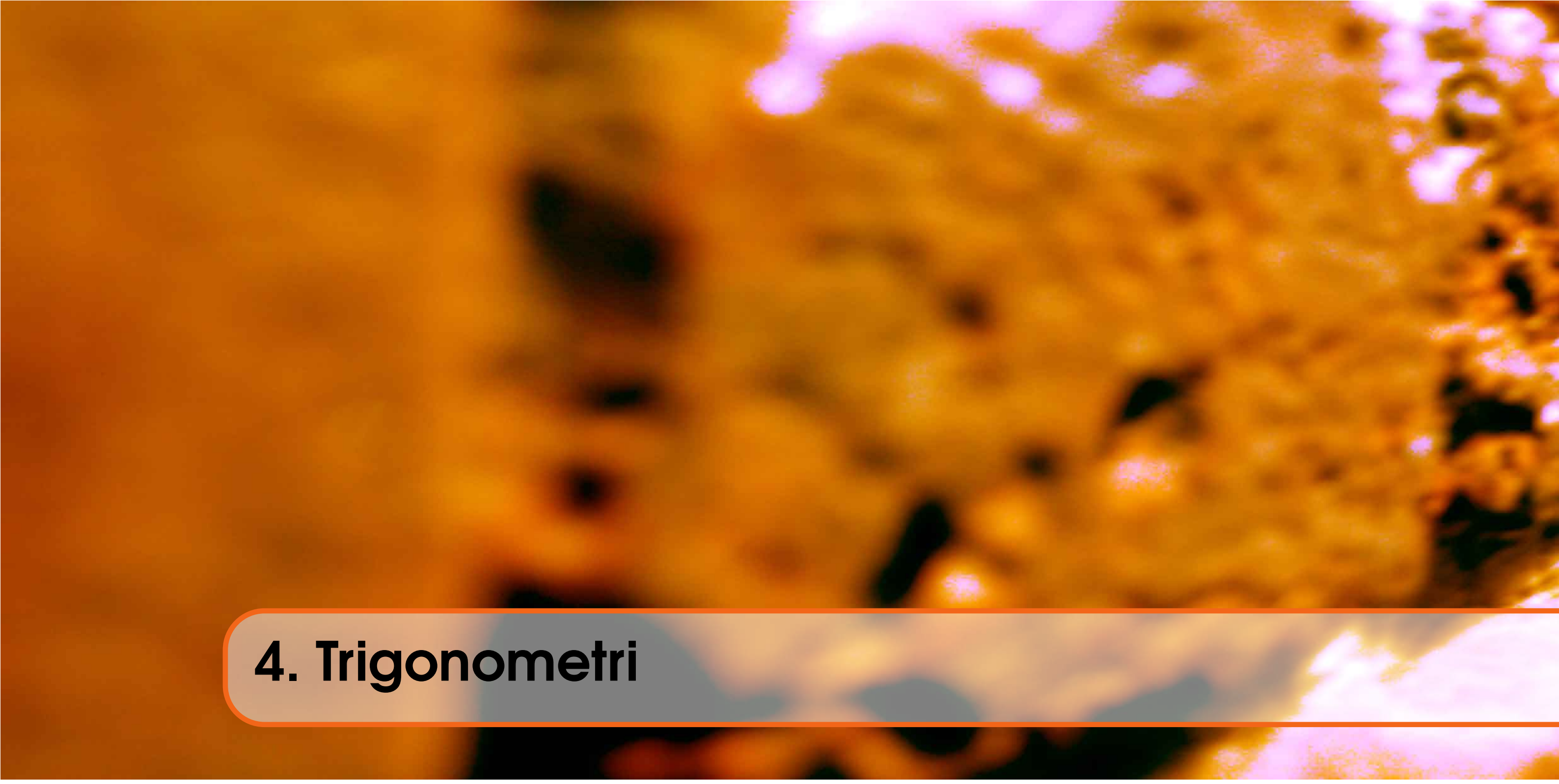
$$0 = x - 1$$

$$x = 1 \longrightarrow (1,0)$$

- Titik potong pada sumbu y

$$y = \frac{(0) - 1}{2(0)^2 + (0) - 1}$$

$$y = \frac{-1}{-1} = 1 \longrightarrow (0,1) \qquad y = \frac{b}{r} = \frac{-1}{-1} = 1$$

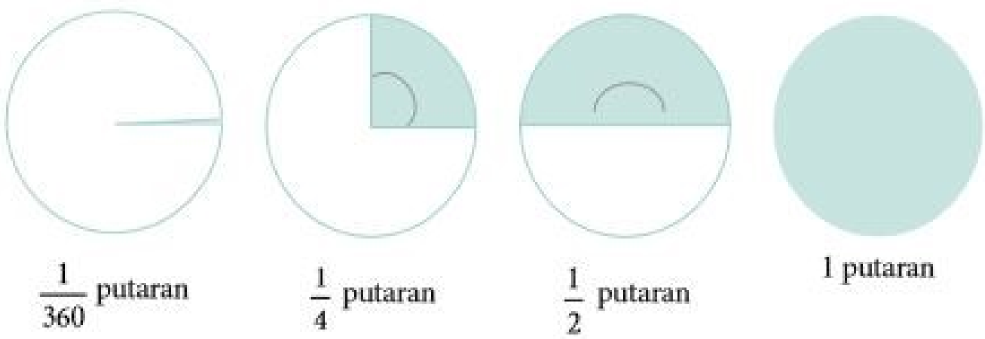


4. Trigonometri

4.1 Pengukuran Sudut

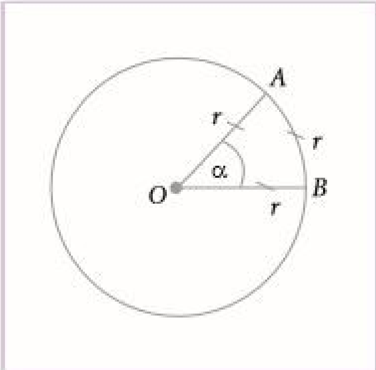
1. (a) **Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)**

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda "?" dan " *rad* " berturutturut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, satu putaran penuh = 360?, atau 1? didefenisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ kali putaran.



Gambar 4.1 Beberapa besar putaran/rotasi

Tentunya dari Gambar 4. 1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Misalnya, untuk $\frac{1}{3}$ putaran, $\frac{1}{6}$ putaran, $\frac{2}{3}$ putaran. Sebelum memahami hubungan derajat dengan radian,berikut ini merupakan teori mengenai radian.



Gambar 4.2 Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai besar ukuran sudut pusat α yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 4.2. Jika $\angle$AOB = α dan AB= OA = OB, maka α = $\frac{AB}{r}$ = 1 radian. Jika panjang busur tidak sama dengan r, maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian dapat dihitung menggunakan perbandingan:

Sifat 4.1

$$\angle AOB = \frac{\overline{AB}}{r}\ rad$$

Dapat dikatakan bahwa hubungan satuan derajat dengan satuan radian, adalah 1 putaran sama dengan 2π rad. Oleh karena itu, berlaku:

Sifat 4.2

$$360^o = 2\pi\ rad \textbf{ atau } 1^o = \frac{\pi}{180^o}\ rad \textbf{ atau } 1\ rad = \frac{180^o}{\pi} \cong 57{,}3^o$$

Dari Sifat 4.2, dapat disimpulkan sebagai berikut.
? Konversi x derajat ke radian dengan mengalikan x $\times \frac{\pi}{180^\circ}$.
Misalnya, 45?= 45?x$(\frac{\pi}{180}{}^\circ) rad = \ \frac{\pi}{4} rad$
? Konversi x radian ke derajat dengan mengalikan x $\times\ \frac{\pi}{180^\circ}$
Misalnya, $\frac{3}{2}\pi\ rad = \frac{3}{2}\pi \times\ \frac{180^\circ}{\pi}$ =270° .

Contoh 4.1

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini:

1. $\frac{1}{4}$ putaran = $\frac{1}{4}$x$360^\circ = 90^\circ$ *atau* $90^\circ = 90$x$\frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{2}\pi$ rad.
2. $\frac{1}{3}$ putaran = $\frac{1}{3}$x$360^\circ = 120^\circ$ *atau* $120^\circ = 120$x$\frac{\pi}{180} rad = \frac{2}{3}\pi$ rad.
3. - putaran = $\frac{1}{2}$x$360^\circ = 180^\circ$ *atau* $180^\circ = 180$x$\frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{2}\pi$ rad.
4. 4 putaran = 4 x $360^\circ = 1.440^\circ$ *atau* $1.440^\circ = 1.440$x$\frac{\pi}{180} rad = 8\pi$ rad.
5. 5 putaran = 5x$360^\circ = 1.800^\circ$ *atau* $1800^\circ = 1800$x$\frac{\pi}{180} rad = 10\pi$ rad.
6. 225° = 225° $x\ \frac{1}{360^\circ} putaran = \frac{5}{8} putaran\ atau\ 225^\circ = 225^\circ$ x $\frac{\pi}{180^\circ} rad = \frac{5}{4}\pi$ rad.
7. $1.200^\circ = 3\ x\ 360^\circ$ + 120° = $\left[(3\ x\ 360^\circ)\text{x}\ \frac{1}{360^\circ} + (120^\circ)\ \times\ \frac{1}{360^\circ}\right]\ putaran$
$\left[3+\frac{1}{3}\right] putaran = 31_{3}$ putaran

1. Pada saat pukul 11.00, berarti jarum panjang pada jam menunjuk ke angka 12 dan jarum pendek pada jam menunjuk ke angka 11. Artinya besar sudut yang terbentuk oleh setiap dua angka yang berdekatan adalah 30°.

30°=30° x $\frac{\pi}{180°} rad = \frac{1}{6}\pi\ rad$

1. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, maka setiap satu detik pemancar berputar sebanyak 3.600 putaran.
2. Ubahlah ukuran sudut berikut ke dalam ukuran derajat atau radian!

a.	30^0	f.	$\frac{4\pi}{3}$
b.	90^0	g.	$\frac{2\pi}{5}$
c.	-45^0	h.	$\frac{5\pi}{6}$
d.	100^0	i.	$\frac{\pi}{3}$
e.	-390^0	j.	$-\frac{3\pi}{4}$

1. Nyatakan sudut 50° dan 89° ke dalam radian!

Penyelesian:

50° = 50° x π/180°

50° = 0,277π

50° = 0,277 (3,14)

50° = 0,87 radian

89° = 89° x π/180°

89° = 0,494π

89° = 0,494 (3,14)

89° = 1,55 radian

1. Sebuah kipas angin berputar dengan kecepatan 36 putaran per menit. Nyatakan kecepatan putaran kipas angin tersebut ke dalam satuan radian per detik!

Penyelesaian:

36 putaran/menit = 36 x 2π/60 putaran/detik

36 putaran/menit = 1,2π putaran/detik

Jadi 36 putaran per menit sama dengan 1,2π putaran per detik.

1. Nyatakan besar sudut berikut ke dalam satuan radian!a. 30°20’15”b. 106° 20’

Penyelesaian:

a. kita ketahui bahwa:1”=(1/3600)° 1’=(1/60)° 1°=0,0174radian,maka:30°20’ = 30° +20.(1/60)° +15.(1/3600)° = (108000/3600)° +(1200/3600)° +(15/3600)°=(109215/3600)°= (109215/3600) dian=0,53radb. kita ketahui bahwa:1’=(1/60)° 1°=0,0174radian,maka:106°20’= 106°+20.(1/60)° 106°20’= (318/3) 20’ = 1,85 rad

1. Hitunglah jari-jari suatu lingkaran jika panjang busurnya 10 cm dan sudut pusatnya 36°!

Penyelesaian:

θ = 36°, maka:

36° = 36°xπ/180°

36° = 0,2π

Kita ketahui bahwa :

r = s/θ

r = 10 cm/0,2π
r = 10 cm/0,628
r = 15,9 cm
Selanjutnya, dalam pembahasan topik selanjutnya terdapat beberapa sudut (sudut istimewa) yang sering digunakan.
Berikut merupakan sudut istimewa yang sering digunakan :

Derajat	Radian	Derajat	Radian
0^o	$0\ rad$	90^o	$\frac{\pi}{2}\ rad$
30^o	$\frac{\pi}{6}\ rad$	120^o	$\frac{2\pi}{3}\ rad$
45^o	$\frac{\pi}{4}\ rad$	135^o	$\frac{3\pi}{4}\ rad$
60^o	$\frac{\pi}{3}\ rad$	150^o	$\frac{5\pi}{6}\ rad$

Derajat	Radian	Derajat	Radian
180^o	πrad	270^o	$\frac{3\pi}{2}\ rad$
210^o	$\frac{7\pi}{6}\ rad$	300^o	$\frac{5\pi}{3}\ rad$
225^o	$\frac{5\pi}{4}\ rad$	315^o	$\frac{7\pi}{4}\ rad$
240^o	$\frac{4\pi}{3}\ rad$	330^o	$\frac{11\pi}{6}\ rad$

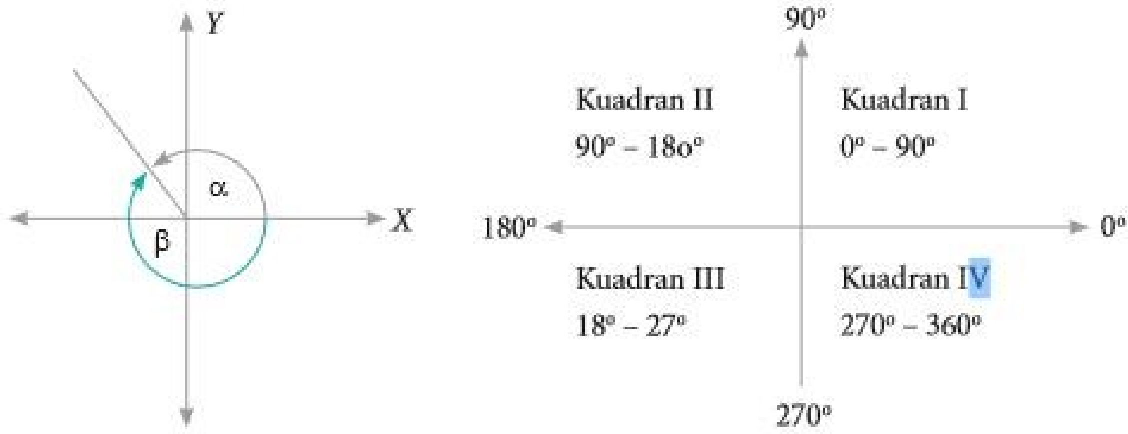
Tanda-tanda Perbandingan Trigonometri

Perbandingan Trigonometri	Kuadran			
	I	II	III	IV
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	-	+
Cosec	+	+	-	-

Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (initial side) ke sisi akhir (terminal side). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda "positif" jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda "negatif" jika arah putarannya searah dengan arah putaran jarum jam. Arah putaran sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.

a. Sudut bertanda positif   b. Sudut bertanda negatif

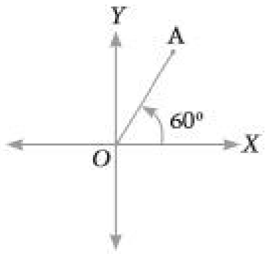
Gambar sudut berdasarkan arah putaran
Dalam koordinat kartesius, jika sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius, disebut sudut standar (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0°, 90°, 180°, 180°, 270°, dan 360°.
Sebagai catatan bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya menggunakan huruf-huruf Yunani, seperti, α(alpha), β (betha), γ(gamma) dan θ(tetha) juga menggunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D. Selain itu, jika sudut yang dihasilkan sebesar α, maka sudut b disebut sudut koterminal, seperti yang dideskripsikan pada gambar di bawah ini.



a. Sudut baku dan sudut koterminal   b. Besar sudut pada setiap kuadran

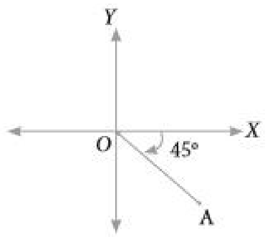
Contoh soal :
1. Gambarkan sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.
a. 60°
b. -45°
c. 120°
d. 600°
Penyelesaian:

1. 60°



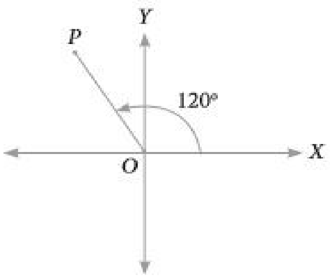
Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OA* terletak di kuadran I.

1. -45°



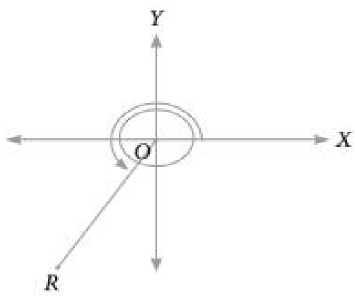
Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OA* terletak di kuadran IV.

1. 120°



Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OP* terletak di kuadran II.

1. 600°



Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OR* terletak di kuadran III.

2. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam satuan radian (rad):a) 270°b) 330°PembahasanKonversi:1 π radian = 180°Jadi:a) 270°

$$270^\circ = 270^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3}{2}\pi\, rad$$

b) 330°

$$330^\circ = 330^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11}{6}\pi\, rad$$

3. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam satuan derajad:a) 1/2 π radb) 3/4 π radc) 5/6 π rad

PembahasanKonversi:1 π radian = 180°Jadi:a) 1/2 π rad $\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2} \times 180^o = 90^o$ b) 3/4 π rad $\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \times 180^o = 135^o$ c) 5/6 π rad $\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6} \times 180^o = 150^o$

Sudut-sudut Khusus

Kuadran	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
Cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
Sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-
Cosec	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Kuadran II Sin & Csc +	Kuadran I Semua +
Kuadran III Tan & Cotg +	Kuadran IV Cos & Csc +

Contoh :

1. Diketahui Sin α = , 5 3 α dikuadran II (sudut tumpul).

Tentukan nilai Sec α,Csc α,Cotg α

Jawab : Sin $\alpha = \frac{3}{5}$, $y = 3$, r = 5, $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

Karena dikuadran II, nilai x = -4

Sehingga : Sec $\alpha = \frac{5}{-4}$, Csc $\alpha = \frac{5}{3}$, Cotg $\alpha = \frac{-4}{3}$

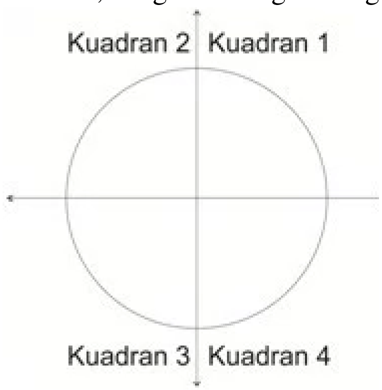
1. Tentukan nilai dari :

1. Sin 0^0 + Csc $45^0 = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

2. $\dfrac{\sec\frac{\pi}{6} + \cot g\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$

Dalam Kuadran

Sudut dalam suatu lingkaran, memiliki rentang 0° – 360°, sudut tersebut dibagi menjadi 4 kuadran, dengan masing-masing kuadran memiliki rentang sebesar 90°.



Kuadran 1 memiliki rentang sudut dari 0° – 90° dengan nilai sinus, cosinus dan tangent positif.
Kuadran 2 memiliki rentang sudut dari 90° – 180° dengan nilai cosinus dan tangen negatif, sinus positif.
Kuadran 3 memiliki rentang sudut dari 180° – 270° dengan nilai sinus dan cosinus negatif, tangen positif.
Kuadran 4 memiliki rentang sudut dari 270° – 360° dengan nilai sinus dan tangent negatif, cosinus positif.

4.2 Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

4.2 Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

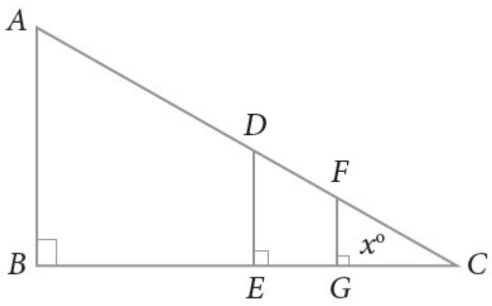
Trigonometri berasal dari bahasa Yunani, *trigonon* artinya tiga sudut, dan *metro* artinya mengukur. Ilmuwan Yunani di masa Helenistik, **Hipparchus** (190 B.C – 120 B.C) diyakini adalah orang yang pertama kali menemukan teori tentang trigonometri dari keingintahuannya akan dunia. Matematikawan Yunani lainnya, **Ptolemy** sekitar tahun 100 mengembangkan penghitungan trigonometri lebih lanjut. Matematikawan Silesia **Bartholemaeus Pitiskus** menerbitkan sebuah karya yang berpengaruh tentang trigonometri pada 1595 dan memperkenalkan kata ini ke dalam bahasa Inggris dan Perancis. Adapun rumusan sinus, cosinus juga tangen diformulasikan oleh **Surya Siddhanta**, ilmuwan India yang dipercaya hidup sekitar abad 3 SM. Selebihnya teori tentang Trigonometri disempurnakan oleh ilmuwanilmuwan lain di jaman berikutnya.

Pada subbab ini, akan dipahami konsep perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku.

Masalah 4.1

Pak Yahya adalah seorang penjaga sekolah. Tinggi pak Yahya adalah 1,6 m. Dia mempunyai seorang anak, namanya Dani. Dani masih kelas II Sekolah Dasar. Tinggi badannya 1,2 m. Dani adalah anak yang baik dan suka bertanya. Dia pernah bertanya kepada ayahnya tentang tinggi tiang bendera di lapangan itu. Dengan senyum, Ayahnya menjawab 8 m. Suatu sore, disaat dia menemani ayahnya membersihkan rumput liar di lapangan, Dani melihat bayangan setiap benda di tanah. Dia mengambil tali meteran dan mengukur panjang bayangan ayahnya dan panjang bayangan tiang bendera, yaitu 3 m dan 15 m.Tetapi dia tidak dapat mengukur panjang bayangannya sendiri karena bayangannya mengikuti pergerakannya. *Jika kamu sebagai Dani, dapatkah kamu mengukur bayangan kamu sendiri*?

Konsep kesebangunan pada segitiga terdapat pada cerita tersebut. Mari kita gambarkan segitiga sesuai cerita di atas.



Dimana:

AB = tinggi tiang bendera (8 m)

BG = panjang bayangan tiang (15 m)

DC = tinggi pak Yahya (1,6 m)

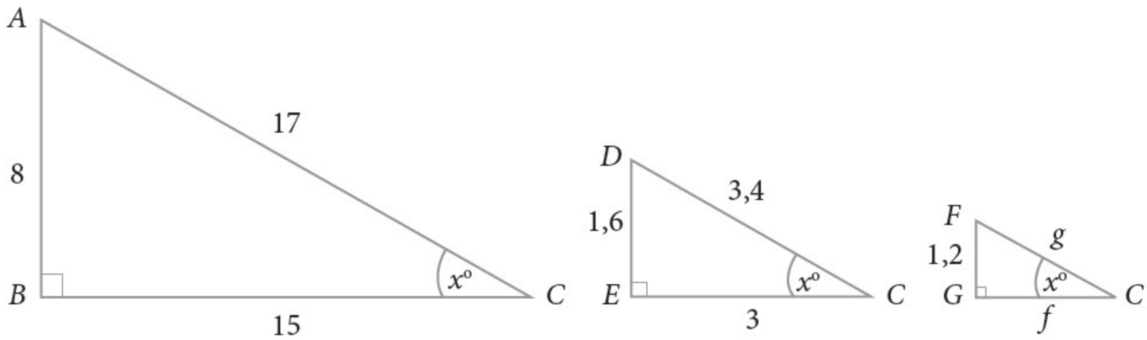
CG = panjang bayangan pak Yahya (3 m)

EF = tinggi Dani (1,2 m)

FG = panjang bayangan Dani (4,8 m)

Gambar 4.7 Segitiga sebangun

Berdasarkan gambar segitiga di atas terdapat tiga segitiga, yaitu ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC sebagai berikut.



Gambar 4.8 Kesebangunan

Karena ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC adalah sebangun, maka berlaku

$$\frac{FG}{DE}=\frac{GC}{EC}=\frac{1,2}{1,6}=\frac{f}{3}\Rightarrow f=2{,}25.$$

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh nilai dari

$FC=g=\sqrt{6,5025}=2,55$.

Berdasarkan ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC diperoleh perbandingan sebagai berikut.

a. $\frac{FG}{FC}=\frac{DE}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1,2}{2,55}=\frac{1,6}{3,4}=\frac{8}{17}=\frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}=0{,}47.$

Perbandingan ini disebut dengan sinus sudut C, ditulis $\sin x^0=\frac{8}{17}$.

b. $\frac{GC}{FC}=\frac{EC}{DC}=\frac{BC}{AC}=\frac{2,25}{2,55}=\frac{3}{3,4}=\frac{15}{17}=\frac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}=0{,}88.$

Perbandingan ini disebut dengan cosinus sudut C, ditulis $\cos x^0=\frac{15}{17}$.

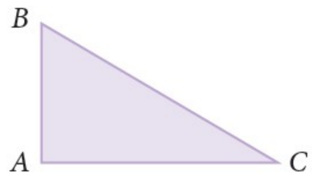
c. $\frac{FG}{GC}=\frac{DE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1,2}{2,25}=\frac{1,6}{3}=\frac{8}{15}=\frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}}=0{,}53.$

Perbandingan ini disebut dengan tangen sudut C, ditulis $\tan x^0=\frac{8}{15}$.

Hubungan perbandingan sudut (lancip) dengan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 4.1

1. Sinus C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi miring segitiga, ditulis $\sin C=\frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$



2. *Cosinus* C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di samping sudut dengan sisi miring segitiga, $\cos C=\frac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$
3. *Tangen* C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi di samping sudut, ditulis $\tan C=\frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}}$
4. *Cosecan* C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring segitiga dengan sisi di depan sudut, ditulis $\csc C=\frac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di depan sudut}}$ atau $\csc C=\frac{1}{\sin C}$

5. *Secan C* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring segitiga dengan sisi di samping sudut, ditulis $\sec C = \dfrac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di samping sudut}}$ atau $\sec C = \dfrac{1}{\cos C}$

6. *Cotangen C* didefinisikan sebagai perbandingan sisi di samping sudut dengan sisi di depan sudut, ditulis $\text{cotan } C = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi di depan sudut}}$ atau $\cot C = \dfrac{1}{\tan C}$

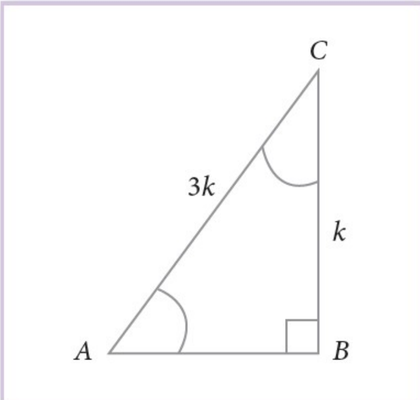
Jika diperhatikan aturan perbandingan di atas, prinsip matematika lain yang perlu diingat kembali adalah Teorema Phytagoras. Selain itu, pengenalan akan sisi miring segitiga, sisi di samping sudut, dan sisi di depan sudut tentunya dapat mudah diperhatikan. Oleh karena yang telah didefinisikan perbandingan sudut untuk sudut lancip *C*, sekarang giliranmu untuk merumuskan keenam jenis perbandingan sudut lancip A.

Contoh 4.3

Diberikan segitiga siku-siku *ABC*, $\sin A = \frac{1}{3}$. Tentukan $\cos A$, $\tan A$, $\sin C$, $\cos C$, dan $\cot C$.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $\sin A = \dfrac{1}{3}$, artinya $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{3}$. Lebih tepatnya, panjang sisi (BC) di depan sudut A dan panjang sisi miring (AC) segitiga ABC memiliki perbandingan 1 : 3, lihat Gambar 4.9.



Untuk menentukan nilai $\cos A$, $\tan A$, $\sin C$, $\cos C$, dan $\cot C$, kita memerlukan panjang sisi AB. Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(3k)^2 - (k)^2}$$

$$= \sqrt{9k^2 - k^2} = \sqrt{8k^2}$$

$$= \pm 2\sqrt{2}k$$

Jadi, kita memperoleh panjang sisi $AB = 2\sqrt{2}k$. (Mengapa bukan $-2\sqrt{2}k$?)

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita peroleh

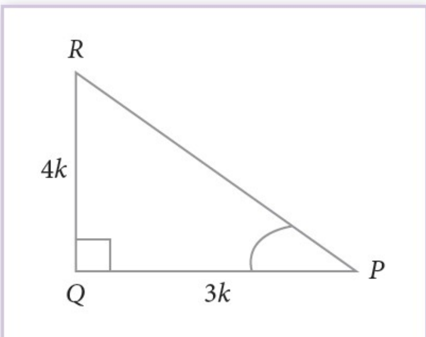
- $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}k}{3k} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{k}{2\sqrt{2}k} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}$
- $\sin C = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}k}{3k} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\cos C = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{k}{3k} = \dfrac{1}{3}$
- $\cot C = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{k}{2\sqrt{2}k} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}$

Perlu Diingat!

Panjang sisi miring adalah sisi terpanjang pada suatu segitiga siku-siku. Akibatnya nilai sinus dan cosinus selalu kurang dari 1 (pada kondisi khusus akan bernilai 1).

Contoh 4.4

Pada suatu segitiga siku-siku *PQR*, dengan siku-siku di *Q*, $\tan P = \frac{4}{3}$. Hitung nilai perbandingan trigonometri yang lain untuk sudut *P*.
Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.10 Segitiga siku-siku *PQR*

Kita ketahui $\tan P = \dfrac{4}{3}$, artinya $\tan P = \dfrac{QR}{PQ} = \dfrac{4}{3}$.

Akibatnya, jika $QR = 4k$ dan $PQ = 3k$, dengan k adalah bilangan positif.

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$\Rightarrow \quad PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2}$$

$$= \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2}$$

$$= \sqrt{25k^2}$$

$$PR = 5k$$

Sekarang gunakan Definisi 4.1 untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri yang lain, yaitu

a. $\sin P = \dfrac{QR}{PR} = \dfrac{4k}{5k} = \dfrac{4}{5} = 0{,}2$

b. $\cos P = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{3k}{5k} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

c. $\csc P = \dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{5k}{4k} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

d. $\sec P = \dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{5k}{3k} = \dfrac{5}{3} = 1{,}66$

e. $\cot P = \dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{3k}{4k} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

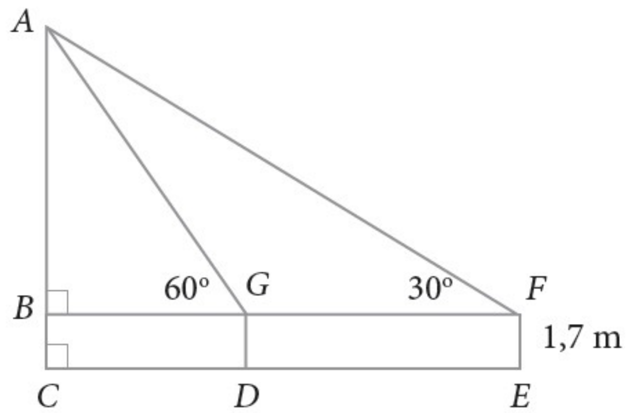
Selanjutnya kamu akan mengkaji bagaimana penerapan konsep perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah kontekstual. Mari kita cermati dan pahami masalah berikut.

Masalah 4.2

Dua orang guru dengan tinggi badan yang sama yaitu 170 cm sedang berdiri memandang puncak tiang bendera di sekolahnya. Guru pertama berdiri tepat 10 m di depan guru kedua. Jika sudut elevasi guru pertama 60o dan guru kedua 30o dapatkah kamu menghitung tinggi tiang bendera tersebut?

Memahami dan Merencanakan Pemecahan Masalah

Misalkan tempat berdiri tegak tiang bendera, dan kedua guru tersebut adalah suatu titik. Ujung puncak tiang bendera dan kepala kedua guru juga diwakili oleh suatu titik, maka dapat diperoleh Gambar 4.12 sebagai berikut.



Dimana:
AC = tinggi tiang bendera
DG = tinggi guru pertama
EF = tinggi guru kedua
DE = jarak kedua guru

Gambar 4.12 Model masalah tiang bendera

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan pengalaman kita di awal pembicaraan di atas, maka kita memiliki perbandingan sebagai berikut.

$$\tan 60^o = \frac{AB}{BG} \quad \Leftrightarrow BG = \frac{AB}{\tan 60^o}$$

$$\tan 60^o = \frac{AB}{BG} = \frac{AB}{10 + BG} \quad \Leftrightarrow AB = (10 + BG) \times \tan 30^o$$

$$\Leftrightarrow AB = \left(10 + \frac{AB}{\tan 60^0}\right) \times \tan 30^o$$

$$\Leftrightarrow AB \times \tan 60^o = (10 \times \tan 60^o + AB) \times \tan 30^o$$

$$\Leftrightarrow AB \times \tan 60^o = 10 \times \tan 60^o \times \tan 30^o + AB \times \tan 30^o$$

$$\Leftrightarrow AB \times \tan 60^o - AB \times \tan 30^o = 10 \times \tan 60^o \times \tan 30^o$$

$$\Leftrightarrow AB \times (\tan 60^o - \tan 30^o) = 10 \times \tan 60^o \times \tan 30^o$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{10 \times \tan 60^o \times \tan 30^o}{\tan 60^o - \tan 30^o}$$

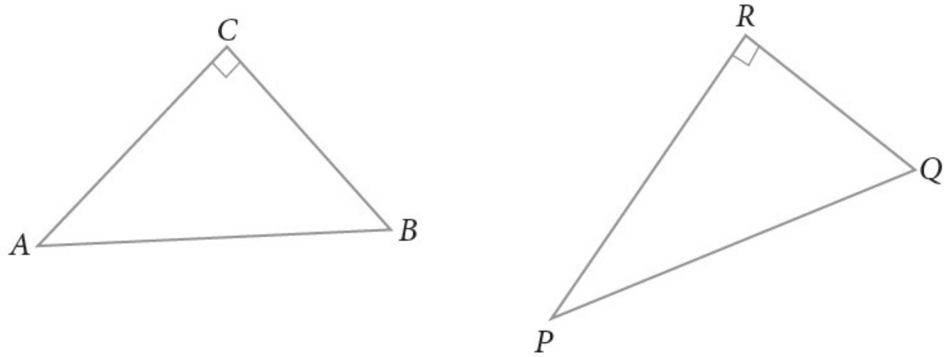
Jadi, tinggi tiang bendera adalah

$$AC = AB + BC \text{ atau } AC = \left(\frac{10 \times \tan 60^o \times \tan 30^o}{\tan 60^o - \tan 30^o} + 1{,}7\right)\text{m}$$

Untuk menentukan nilai tan 60o dan tan 30o akan dibahas pada subbab selanjutnya. Dengan demikian, tinggi tiang bendera dapat ditemukan.

Contoh 4.5

Diketahui segitiga siku-siku *ABC* dan *PQR*, seperti gambar berikut ini.



Jika sin *B* = sin *Q*, maka buktikan bahwa $\angle B = \angle Q$.

Alternatif Penyelesaian

Dari Gambar 4.13, diperoleh

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \text{ dan } \sin Q = \frac{PR}{PQ}$$

Akibatnya, $\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$ atau $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$, dengan k bilangan positif.

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh bahwa

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(k.PQ)^2 - (k.PR)^2}$$
$$= \sqrt{k^2.\left[(PQ)^2 - (PR)^2\right]} = k.\sqrt{(PQ)^2 - (PR)^2}$$

$$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

Dengan demikian,

$$\frac{BC}{QR} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$$

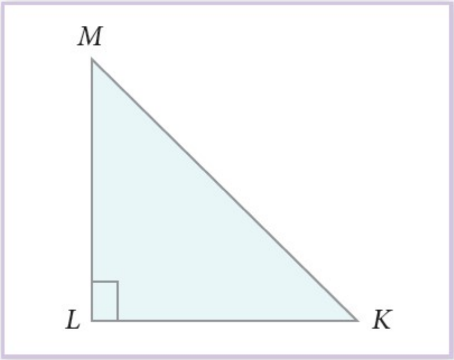
Akibatnya diperoleh

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = k$$

Karena perbandingan sisi-sisi kedua segitiga sama, maka $<B = <Q$. Perhatikan contoh berikut. Temukan pola dalam menentukan setiap pernyataan terkait perbandingan trigonometri.

Contoh 4.6

Diketahui suatu segitiga siku-siku KLM, $\angle L$ = 90o, dan tan M = 1.
Hitung nilai dari (sin M)2 + (cos M)2 dan 2 . sin M . cos M.
Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.14 Segitiga siku-siku *KLM*

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, coba cermati gambar berikut ini.

Diketahui tan $M = 1$, artinya;

$\tan M = 1 \Rightarrow \dfrac{KL}{LM} = 1$ atau $KL = LM = k$,

dengan k bilangan positif.

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh

$$KM = \sqrt{LM^2 + LM^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2}$$
$$= k\sqrt{2}$$

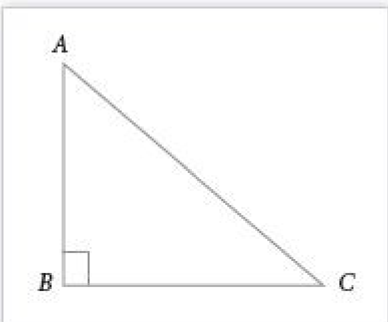
Akibatnya, $\sin M = \dfrac{KL}{KM} = \dfrac{k}{k\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ atau $(\sin M)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\cos M = \dfrac{LM}{KM} = \dfrac{k}{k\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ atau $(\cos M)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Jadi, $(\sin M)^2 + (\cos M)^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ dan $2 \,.\, \sin M \,.\, \cos M = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

4.3 Sudut-sudut Berelasi

mempelajari hubungan nilai perbandingan
trigonometri antardua sudut. Definisi ukuran sudut
dan perbandingan trigonometri sudut-sudut yang berlau akan digunakan untuk merumuskan relasi antardua sudut.
Contoh Permasalahan
Diketahui suatu segitiga *ABC*, siku-siku di *B* dengan $\angle A + \angle C = 90o$



Selidiki hubungan nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk $\angle A$ dan $\angle C$.
Untuk memudahkan kita menyelidiki

relasi nilai perbandingan trigonometri
tersebut, perhatikan gambar di samping.
Karena $\angle A$ + $\angle C$ = 90o, maka $\angle C$ = 90o – $\angle A$
Dengan menggunakan Definisi ukuran sudut,
Kita Peroleh

$$sin\ \angle A\ =\ \frac{AB}{AC}\ ,\ cos\ \angle A\ =\ \frac{BC}{AC}\ ,tan\ \angle A\ =\ \frac{AB}{BC}$$

Selain itu, dapat juga dituliskan

$$sin\ (90o\ --\ \angle A)\ =\frac{BC}{AC}=\ cos\ \angle A$$

$cos\ (90o\ --\ \angle A)\ =\frac{AB}{AC}\ =\ sin\ \angle A,\ dantan\ (90o\ --\ \angle A)\ =\ \frac{BC}{AB}=\ cot\ \angle A$Jadi, relasi dua sudut yang lancip dapat dituliskan sebagai berikut.
Jika 0o $\leq a \leq$ 90o, maka berlaku.
a. sin (90o – a) = cos a d. csc (90o – a) = sec a
b. cos (90o – a) = sin a e. sec (90o – a) = csc a
c. tan (90o – a) = cot a f. cot (90o – a) = tan a

Contoh Soal

a. Sederhanakan bentuk $\frac{tan\ 65^\circ}{cot\ 25^\circ}$
b. $sin\ 3A\ =\ cos\ (A\ --\ 26^\circ)$, dengan 3$A$ adalah sudut lancip. Hitung A.
c. Nyatakan bentuk $cot\ 85^\circ +\ cos\ 75^\circ$ menjadi bentuk yang menggunakan perbandingan sudut di antara 0° dan 45°.
Penyelesaian

1. Diketahui bahwa cot A = tan (90o – A).

Akibatnya, cot 25o = tan (90o – 25o) = tan 65o. Jadi ,

$$\frac{tan\ 65^\circ}{cot\ 25^\circ}=\frac{tan\ 65^\circ}{cot\ 65^\circ}=1$$

b. Diketahui $sin\ 3A\ =\ cos\ (A\ --\ 26^\circ)$, Karena 3$A$ adalah sudut lancip, maka $sin\ 3A\ =\ cos\ (90^\circ --\ 3A)$,
Akibatnya, $cos\ (90^\circ --\ 3A)\ =\ cos\ (A\ --\ 26^\circ)$

$$(90^\circ\ --\ 3A)\ =\ cos\ (A\ --\ 26^\circ)A\ =\ 26^\circ$$

c. Dengan demikian, diperoleh
$cot\ 85^\circ\ =\ cot\ (90^\circ\ --\ 5^\circ)\ =\ tan\ 5^\circ$, dan
$cot\ 75^\circ\ =\ cos\ (90^\circ\ --\ 15^\circ)\ =\ sin\ 15^\circ$Jadi, $cot\ 85^\circ +\ cos\ 75^\circ\ =\ tan\ 5^\circ\ +\ sin\ 15^\circ$

PERBANDINGAN TRIGONOMETRI SUDUT BERELASI

Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut (90○ $\pm$ α), (180○ $\pm$ α), (360○ $\pm$ α), dan -α○. Dua buah sudut yang berelasi ada yang diberi nama khusus, misalnya **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut α○ dengan (90○ - α) dan **pelurus** (suplemen) untuk sudut α○ dengan (180○ - α). Contoh: penyiku sudut 50○ adalah 40○, pelurus sudut 110○ adalah 70○.

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (90○ - α)

Dari gambar, Titik $P_1(x_1,y_1)$ bayangan dari P(x,y) akibat pencerminan garis $y = x$, sehingga diperoleh:
a. $\angle$XOP = α dan $\angle XOP_1$ = 90○ - α
b. $x_1 = x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$
Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh:

1. (a) sin $(90^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\ \alpha$

(b) $\cos\ (90^\circ - \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \sin\ \alpha$
(c) $\tan\ (90^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} = \cot \alpha$

Dari perhitungan tersebut maka rumus perbandingan trigonometri sudut α dengan (90○ - α) dapat dituliskan sebagai berikut:

$\sin\ (90^\circ - \alpha) = \cos\ \alpha \csc\ (90^\circ - \alpha) = \sec\ \alpha \cos\ (90^\circ - \alpha) = \sin\ \alpha \sec\ (90^\circ - \alpha) = \mathrm{cosec}\ \alpha \tan\ (90^\circ - \alpha) = \cot \alpha \mathrm{co}$

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α○ dengan (180○ - α)

Titik P$_1$(x_1,y_1) adalah bayangan dari titik P(x,y) akibat pencerminan terhadap sumbu y, sehingga

a. $\angle$XOP = α dan $\angle$XOP$_1$ = 180○ - α
b. $x_1 = -x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:

1. (a) i. $\sin\ (180^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \sin\ \alpha$

$$\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$$

ii.
iii. $\tan\ (180^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{-x} = -\tan \alpha$

$\sin\ (180 - \alpha)^\circ = \sin\ \alpha^\circ \quad \csc\ (180^\circ - \alpha) = \csc\ \alpha \cos\ (180^\circ - \alpha) = -\cos\ \alpha$ $\sec\ (180^\circ - \alpha) = -\sec\ \alpha \tan\ (180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha \quad \cot\ (180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \sin\ (180 - \alpha)^\circ = \sin\ \alpha^\circ \quad \csc\ (180^\circ - \alpha) = \csc\ \alpha \cos\ (180^\circ - \alpha) = -\cos\ \alpha$ $\sec\ (180^\circ - \alpha) = -\sec\ \alpha \tan\ (180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha\ \cot\ (180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α○ dengan (180○ + α)

Dari gambar di samping titik P$_1$(x_1,y_1) adalah bayangan dari titik P(x,y) akibat pencerminan terhadap garis $y = -x$, sehingga

a. $\angle$XOP = α dan $\angle$XOP$_1$ = 180○ + α
b. $x_1 = -x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:

1. (a) $\sin\ (180^\circ + \alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\sin\ \alpha$
(b) $\cos\ (180^\circ + \alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{-x}{r} = -\cos\ \alpha$
(c) $\tan\ (180^\circ + \alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \alpha$

$\sin\ (180^\circ + \alpha) = -\sin\ \alpha \csc\ (180^\circ + \alpha) = -\csc \alpha \cos\ (180^\circ + \alpha) = -\cos\ \alpha \sec\ (180^\circ + \alpha) = -\sec \alpha \tan\ (180^\circ + \alpha) = \tan \alpha \quad \cot\ (180^\circ + \alpha) = \cot \alpha \sin\ (180^\circ + \alpha) = -\sin\ \alpha \csc\ (180^\circ + \alpha) = -\csc \alpha \cos\ (180^\circ + \alpha) = -\cos\ \alpha \sec\ (180^\circ + \alpha) = -\sec \alpha \tan\ (180^\circ + \alpha) = \tan \alpha \quad \cot\ (180^\circ + \alpha) = \cot \alpha$Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (- α)

Dari gambar di samping diketahui titik P$_1$(x_1,y_1) bayangan dari P(x,y) akibat pencerminan terhadap sumbu x, sehingga

a. $\angle$XOP = α dan $\angle$XOP$_1$ = - α
b. $x_1 = x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan

1. (a) $\sin\ (-\alpha) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\sin\ \alpha$
(b) $\cos\ (-\alpha) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\ \alpha$
(c) $\tan\ (-\alpha) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\tan \alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

$\sin\ (-\alpha) = -\sin\ \alpha \csc\ (-\alpha) = -\csc \alpha \cos\ (-\alpha) = \cos\ \alpha \sec\ (-\alpha) = \sec \alpha \tan\ (-\alpha) = -\tan \alpha \cot\ (-\alpha) = -\cot \alpha\ \mathrm{s}$

Untuk relasi α dengan (- α) tersebut identik dengan relasi α dengan 360○ $-$ α, misalnya sin (360○ $-$ α) = $-$ sin α

nilai perbandingan trigonometri di berbagai kuadran.

1. Dikuadran I

Titik A(x,Y) dikuadran I

Absis positif

Ordinat positif

$$\alpha\alpha \begin{array}{l} Sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = positif \\ Cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{+}{+} = positif \\ Tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{+}{+} = positif \end{array}$$

1. Dikuadran II

Titik A(-x,y) dikuadran II

Absis negatif

Ordinat positif

$$\begin{array}{l} Sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = positif \\ Cos\alpha = \frac{-x}{r} = \frac{-}{+} = negatif \\ Tan\alpha = \frac{y}{-x} = \frac{+}{-} = negatif \end{array}$$

Diskusikan dengan teman anda, untuk tanda-tanda perbandingan trigonometri dikuadran yang lain yang ditulis dalam tabel berikut.

	I	II	III	IV
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Csc	+	+	-	-
Sec	+	-	-	+
Cotg	+	-	+	-

Contoh :

Diketahui Sin α = $\frac{3}{5}$, α dikuadran II (sudut tumpul). Tentukan nilai $Sec\alpha, Csc\alpha, Cotg\alpha$

Jawab : Sin $\alpha = \frac{3}{5}$, y = 3, r = 5, x = $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

Karena dikuadran II, nilai x = -4

Sehingga : Sec α= $\frac{5}{-4}$, Csc $\alpha = \frac{5}{3}$, Cotg $\alpha = \frac{-4}{3}$

Rumus perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut di semua kuadran

a. Rumus di kuadran I

$$\begin{array}{l} Sin(90-\alpha) = \cos\alpha \\ Cos(90-\alpha) = \sin\alpha \\ Tan(90-\alpha) = Cotg\alpha \end{array}$$

b. Rumus di kuadran II

$$\begin{array}{lcl} Sin(90+\alpha) = Cos\alpha & & Sin(180-\alpha) = Sin\alpha \\ Cos(90+\alpha) = -Sin\alpha & \text{atau} & Cos(180-\alpha) = -Cos\alpha \\ Tan(90+\alpha) = -Cotg\alpha & & Tan(180-\alpha) = -Tan\alpha \end{array}$$

c. Rumus di kuadran III

$$\begin{array}{lcl} Sin(270-\alpha) = -Cos\alpha & & Sin(180+\alpha) = -Sin\alpha \\ Cos(270-\alpha) = -Sin\alpha & \text{atau} & Cos(180+\alpha) = -Cos\alpha \\ Tan(270-\alpha) = Cotg\alpha & & Tan(180+\alpha) = Tan\alpha \end{array}$$

d. Rumus di kuadran IV

$Sin(270+\alpha) = -Cos\alpha$ $\quad$ $Sin(360-\alpha) = -Sin\alpha$
$Cos(270+\alpha) = Sin\alpha$ $\quad$ atau $\quad$ $Cos(360-\alpha) = Cos\alpha$
$Tan(270+\alpha) = -Cotg\alpha$ $\quad$ $Tan(360-\alpha) = -Tan\alpha$

e Rumus sudut negatif

$$Sin(-\alpha) = -Sin\alpha$$
$$Cos(-\alpha) = Cos\alpha$$
$$Tan(-\alpha) = -Tan\alpha$$

f.Rumus sudut lebih dari 360^0

$$Sin(k.360+\alpha) = Sin\alpha$$
$$Cos(k.360+\alpha) = Cos\alpha$$
$$Tan(k.360+\alpha) = Tan\alpha$$

Contoh :
Ubah ke sudut lancip, dan tentukan nilainya :

1. Sin 120^0 = Sin (90^0 + 30^0)

= Sin 30^0

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Atau
Sin 120^0 = Sin (180^0 – 60^0)
= Sin 60^0

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

1. Cos 225^0 = Cos (270^0 – 45^0)

= -Sin 45^0

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Atau
Cos 225^0 = Cos (180^0 + 45^0)
= -Cos 45^0

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

1. Sin 750^0 = Sin (2.360^0 + 30^0)

= Sin 30^0

$$= \frac{1}{2}$$

1. Sin (-225^0) = - Sin 225^0

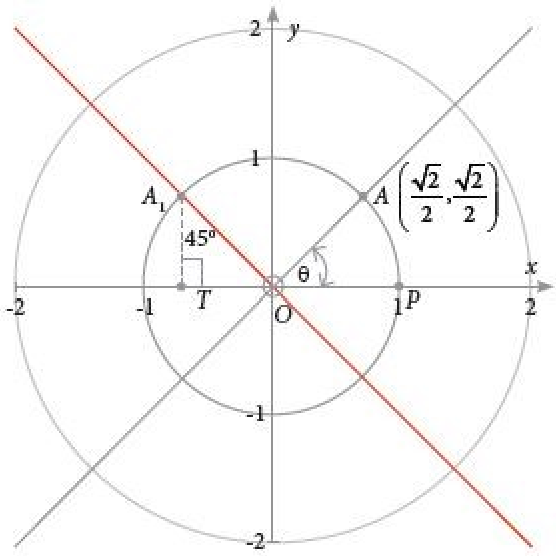
= - Sin(180^0 + 45^0)
= - (-sin 45^0)

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Untuk itu dengan mudah dapat kita pahami hal-hal berikut.

a. Jika titik *A* diputar pada *O* (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 90o, maka titik *A* berada di kuadran II.
b. Jika titik *A* diputar pada *O* (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 180o, maka titik *A* berada di kuadran III.
c. Jika titik *A* diputar pada *O* (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 270o, maka titik *A* berada di kuadran IV.

Sekarang kita akan mengkaji satu-satu kejadian a, b, dan c.
a. Jika titik *A* diputar pada *O* (berlawanan dengan arah putaran jarum jam) sejauh 90o, maka perubahan titik *A* disajikan pada gambar berikut ini.



Gambar 4.26 Rotasi titik *A* pada *O* sejauh 90°

b. Titik *A*3 = (0, -1) merupakan bayangan titik *A*2 (0, 1).
Dengan demikian, diperoleh bahwa

$$sin\,270^\circ = -1,\ cos\,270^\circ = 0,\ dantan\,270^\circ = \frac{\sin 270^\circ}{\cos 270} = \frac{-1}{0}$$

tak terdefinisi
c. Jika titik *A* diputar pada *O* sejauh 360°, maka akan kembali ke titik *A*.
Dengan demikian, diperoleh bahwa
$sin\,360^\circ = 0,\ cos\,360^\circ = 1$, dan

$$tan\,360^\circ = \frac{\sin 360^\circ}{\cos 360^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

Dengan demikian, nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa disajikan pada tabel berikut.
Nilai perbandingan nilai trigonometriuntuk sudut-sudut

	sin	cos	tan	csc	sec	cot
180°	0	-1	0	~	-1	~
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
270°	-1	0	~	-1	~	0
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
360°	0	1	0	~	1	~

istimewa

Keterangan: simbol $\sim$ diartikan tidak terdefinisi.
Dengan memperhatikan secara cermat nilai-nilai pada tabel dan letaknya pada kuadran, maka dapat disimpulkan seperti dalam sifat berikut.

Tanda positif dan negatif di setiap kuadran di atas diberikan untuk membantu kita mengingat nilai-nilai perbandingan trigonometri.
hal penting dan yang lain juga dapat disimpulkan, yaitu sifat relasi antarsudut, seperti disimpulkan pada sifat berikut

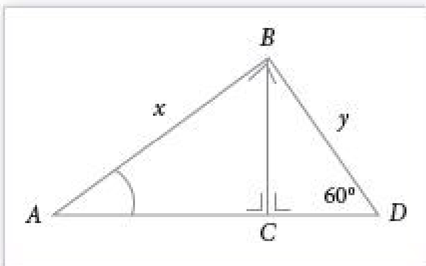
Untuk setiap $0^\circ < a < 90^\circ$

a.	$\sin(90^\circ + a) = \cos a$	g.	$\sin(180^\circ + a) = -\sin a$
b.	$\cos(90^\circ + a) = -\sin a$	h.	$\cos(180^\circ + a) = -\cos a$
c.	$\tan(90^\circ + a) = -\cot a$	i.	$\tan(180^\circ + a) = \tan a$
d.	$\sin(180^\circ - a) = \sin a$	j.	$\sin(360^\circ - a) = -\sin a$
e.	$\cos(180^\circ - a) = -\cos a$	k.	$\cos(360^\circ - a) = \cos a$
f.	$\tan(180^\circ - a) = -\tan a$	l.	$\tan(360^\circ - a) = -\tan a$

Misalnya, jika = 30o dan = 60o, maka
a. $cos\,(180^\circ\ --\ \theta) = cos\,(180^\circ -- 30^\circ) = cos\ 150^\circ = -cos\ 30^\circ = -\ \frac{1}{2}\sqrt{3}$
dan

$$cos\,(180^\circ\ --\ \theta) = cos\,(180^\circ\ --\ 60^\circ) = cos\ 120^\circ = -cos\ 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

(pada kuadran II, nilai cosinus bertanda negatif).
Contoh Soal
Diketahui segitiga siku-siku *ABD*, $\angle B$ = 90, $\angle A$ = 30o, dan *AD* = 8 cm.
BC adalah garis tinggi yang memotong *AD*. Hitung keliling dan luas segitiga *ABD*.
Memahami dan mencermati informasi tentang segitiga *ABD* merupakan langkah awal untuk menyelesaikannya. Salah satu buktinya kamu harus memahami, maka kamu harus mampu menuliskan dan menggambarkan kejadian tersebut.



Secara lengkap informasi tentang segitiga *ABD* seperti pada gambar di samping
Untuk dapat menentukan keliling segitiga, kita harus menemukan nilai *x* dan *y*.
Perhatikan ΔABD, kita mengetahui

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{x}{8} \Leftrightarrow x = 8 \times \sin 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{y}{8} = \Leftrightarrow y = 8 \times \cos 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow y = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

Jadi, keliling segitiga $ABD = AB + BD + AD$

$$= 4\sqrt{3} + 8 + 4 = (4\sqrt{3} + 12)\text{ cm}$$

Untuk menghitung luas segitiga ABD, kita harus mencari panjang *BC*.
Perhatikan Gambar 4.33, fokuskan pada segitiga siku-siku *BCD* atau *ABC*.
Penulis fokus pada segitiga *BCD*.
'

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{BD} \leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{4}$$

$$\Leftrightarrow BC = 2\sqrt{3}\text{ cm}$$

Jadi, luas segitiga ABD adalah $\frac{AD \times BC}{2} = \frac{8 \times 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\text{ cm}^2$

Untuk menemukan panjang *BC*, gunakan sin 60o.

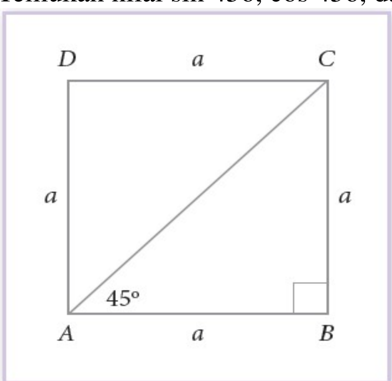
4.4 Nilai Perbandingan Trigonometri untuk 0o, 30o, 45o, 60o dan 90o

4.3 Perbandingan Trigonometri Untuk Sudut 0o, 30o, 45o, 60o dan 90o

Pada saat mempelajari teori trigonometri, secara tidak langsung kamu harus menggunakan beberapa teori geometri. Dalam geometri, khususnya dalam kajian konstruksi sudah tidak asing lagi dengan penggunaan besar sudut 30o, 45o, dan 60o. Pada subbab ini, kamu akan menyelidiki dan menghitung nilai perbandingan trigonometri untuk ukuran sudut 0o, 30o, 45o, 60o, dan 90o.

Masalah 4.3

Diketahui suatu persegi *ABCD* dengan ukuran *a* (*a* adalah bilangan positif). Dibentuk garis diagonal *AC* sedemikian sehingga membentuk sudut dengan *AB*, seperti Gambar 4. 15. Temukan nilai sin 45o, cos 45o, dan tan 45o.



Gambar 4.15 Persegi *ABCD*

Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut 45o, coba

cermati segitiga siku-siku *ABC*.
Untuk menentukan nilai sin 45o, cos 45o, dan tan 45o, perlu diingat kembali Definisi 4.1.
Untuk menentukan panjang *AC*, gunakan Teorema Phytagoras,
yaitu

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = a^2 + a^2 = 2a$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Dengan demikian, diperoleh:

- $\sin 45^\circ = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\cos 45^\circ = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\tan 45^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{a} = 1$

$$\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Mengingat kembali Definisi 4.1, terdapat cara lain untuk menentukan nilai tan 45o,Yaitu
tan 45o =
Dengan nilai di atas, bukanlah sesuatu hal yang sulit untuk menentukan nilai
sec 45o, csc 45o, dan cot 45o.

$$\sec 45^\circ = \sec 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \text{ atau}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \text{ atau}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

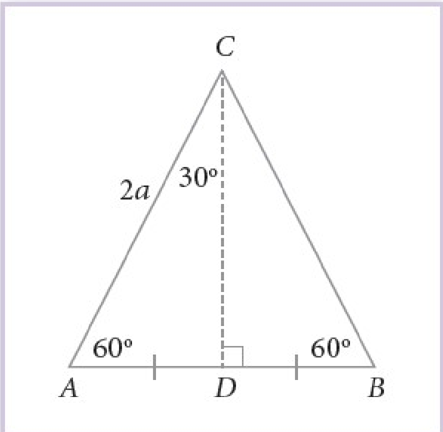
$$\cot 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1 \text{ atau } \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

Jadi, dapat disimpulkan

$\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cot 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^\circ = 1$
$\csc 45^\circ = \sqrt{2}$	$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$	$\cot 45^\circ = 1$

Masalah 4.4

Diberikan segitiga sama sisi ABC, dengan panjang sisi $2a$ satuan (a adalah bilangan positif). D adalah titik tengah sisi AB, seperti Gambar 4.16.
Hitung nilai:
sin 30o, cos 30o, tan 30o, sin 60o, cos 60o, dan tan 60o.



Gambar 4.16 Segitiga sama sisi *ABCD*

Penyelesaian

Mari cermati segitiga sama sisi ABC.
Karena D merupakan titik tengah sisi AB,

$$AD = \frac{1}{2}AB = a.$$

maka
Dengan demikian, kita peroleh
$\Delta ACD \cong \Delta BCD$, (simbol $\cong$ dibaca: kongruen)

$AD = BD = a$

$\angle ACD = \angle DBC = 30^\circ$

Dengan demikian, $\angle ACD$ dan ΔBCD adalah segitiga siku-siku.
Kita fokus pada ΔACD.
Diketahui bahwa $AC = 2a$, $AD = a$, dengan menggunakan Teorema Phytagoras, dapat ditentukan panjang sisi CD, yaitu

$$CD^2 = AC^2 - AD^2$$

$$\Rightarrow CD^2 = (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow CD^2 = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$$

dan $\angle ACD$ = 30o, $\angle CAD$ = 60o
a. Untuk $\angle ACD$ = 30o, maka nilai perbandingan trigonometri (menggunakan Definisi 4.1),

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \csc 30^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sec 30^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 30^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

b. Untuk $\angle CAD$ = 60o, maka nilai perbandingan trigonometri (menggunakan Definisi 4.1), yaitu

$$\sin 60^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \csc 60^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sec 60^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{2a}{a} = 2$$

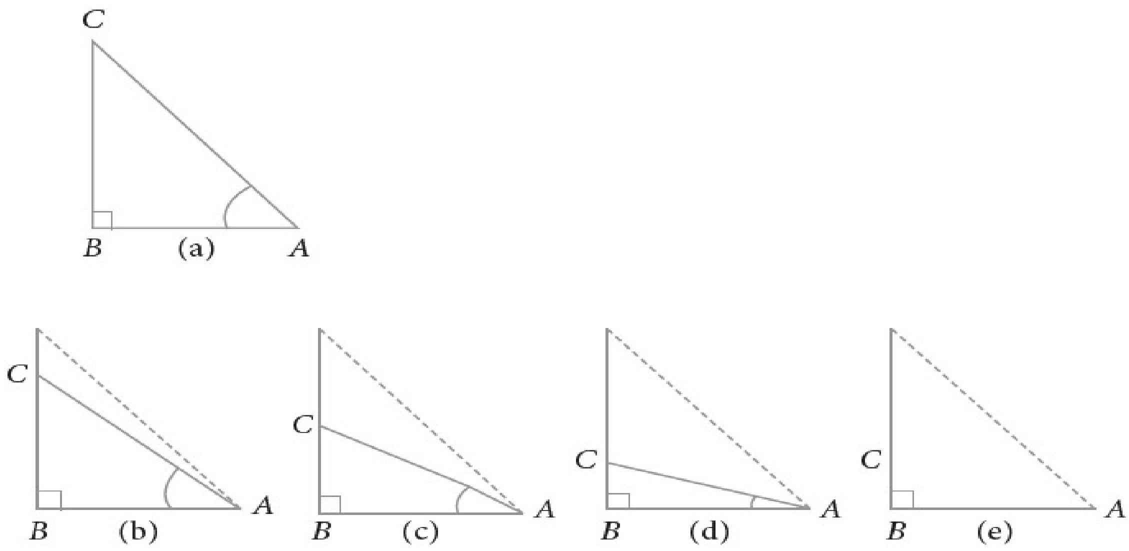
$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 60^\circ = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Masalah 4.5
Diberikan suatu ΔABC, siku-siku di B, misalkan $\angle BAC$ = a, dimana a merupakan sudut lancip.
Apa yang kamu peroleh jika a mendekati 0o? Apa pula yang terjadi jika a mendekati 90o?

Penyelesaian

Diketahui ΔABC, merupakan segitiga siku-siku, dengan $\angle B$ = 90o. Gambar 4.17 merupakan ilustrasi perubahan $\angle B$ = a hingga menjadi nol.



Gambar 4.17 Ilustrasi perubahan $\angle B$ segitiga siku-siku ABC menjadi 0°

Pada waktu memperkecil $\angle A$, mengakibatkan panjang sisi BC juga semakin kecil, sedemikian sehingga AC hampir berimpit dengan AB. Jika a = 0o, maka $BC = 0$, dan AC berimpit dengan AB. Dari ΔABC (Gambar 4.17 (a)), kita memiliki

a. $\sin \alpha = \dfrac{BC}{AC}$, jika α mendekati 0°, maka panjang BC mendekati 0. Akibatnya

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{AC} \text{ atau } \sin 0^\circ = 0$$

b. $\cos \alpha = \dfrac{BC}{AC}$, jika α mendekati 0°, maka sisi AC hampir berimpit dengan sisi AB. Akibatnya

$$\cos 0^\circ = \frac{AB}{AB} \text{ atau } \cos 0^\circ = 1$$

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri lainnya, yaitu

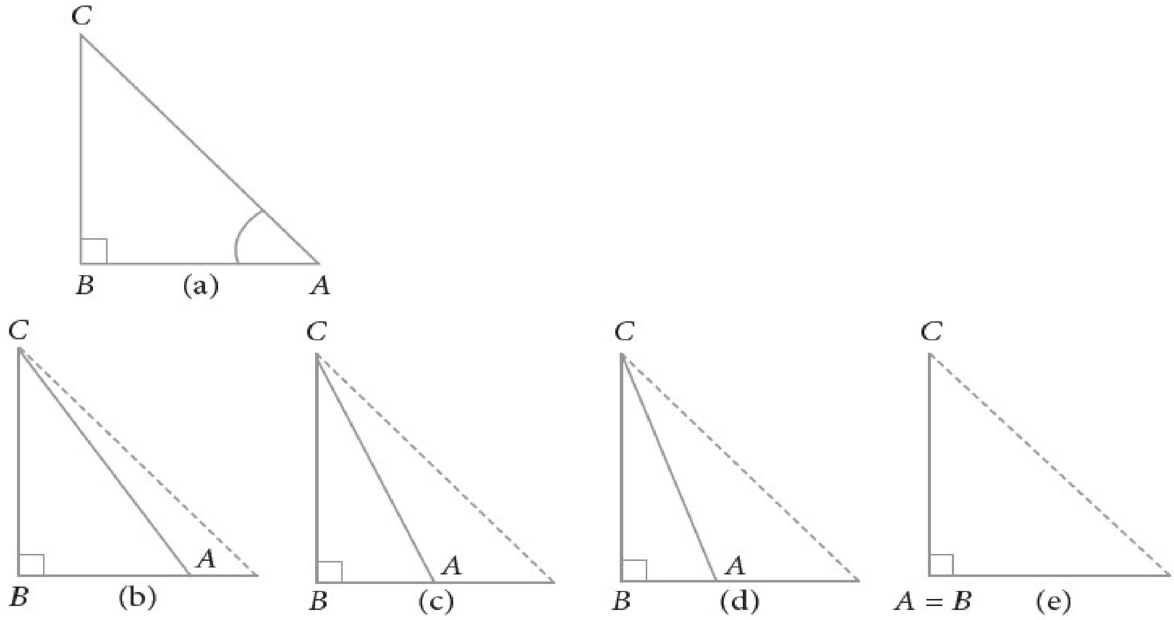
➢ $\tan 0^o = \dfrac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \dfrac{0}{1} = 0$

➢ $\csc 0^o = \dfrac{1}{\sin 0^{oo}} = \dfrac{1}{0}$ $(tak\ terdefinisi)$

➢ $\sec 0^o = \dfrac{1}{\cos 0^{oo}} = \dfrac{1}{1} = 1$

➢ $\cot 0^o = \dfrac{\cos 0^o}{\sin 0^o} = \dfrac{1}{0}$ $(tak\ terdefinisi)$

Selanjutnya, kita kembali mengkaji ΔABC. Kita akan cermati bagaimana perubahan segetiga tersebut jika a mendekati 90o. Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 4.18 Ilustrasi perubahan $\angle A$ segitiga siku-siku ABC menjadi 90^o

Jika $\angle A$ diperbesar mendekati 90o, maka $\angle C$ diperkecil mendekati 0o. Akibatnya, sisi AC hampir berimpit dengan sisi BC.
Dari ΔABC, Gambar 4.18 (a), dapat kita tuliskan

a) $\sin \angle A = \dfrac{BC}{AC}$, karena diperbesar mendekati 90^o, maka sisi AC hampir berimpit dengan BC. Akibatnya

$\sin 90^o =$ atau $\sin 90^o = 1$

b) $\cos \angle A = \dfrac{AB}{AC}$, karena $\angle A$ diperbesar mendekati 90^o, maka sisi AB hampir mendekati 0 atau titik A hampir berimpit dengan B. Akibatnya

$\cos 90^o = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{0}{BC}$ atau $\cos 90^o = 0$

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri yang lain, yaitu:

- $\tan 90^o = \dfrac{\sin 90^o}{\cos 90^o} = \dfrac{1}{0}$ $(tak\ terdefinisi)$
- $\csc 90^o = \dfrac{1}{\sin 90^{oo}} = \dfrac{1}{1} = 1$
- $\sec 90^o = \dfrac{1}{\cos 90^{oo}} = \dfrac{1}{0}$ $(tak\ terdefinisi)$
- $\cot 90^o = \dfrac{\cos 90^o}{\sin 90^o} = \dfrac{0}{1} = 0$

Dari pembahasan Masalah 4.2, 4.3, dan 4.4, maka hasilnya dapat disimpulkan pada tabel berikut.

Tabel 4.2 Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa

	sin	cos	tan	csc	sec	cot
0^o	0	1	0	$\sim$	1	$\sim$
30^o	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

Keterangan: Dalam buku ini, simbol $\sim$ diartikan tidak terdefinisi

Contoh 4.7

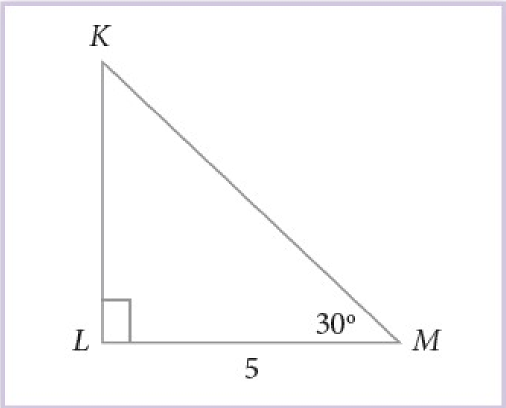
Diberikan suatu segitiga siku-siku *KLM*, siku-siku di *L*. Jika *LM* = 5 cm, dan $\angle M$ = 30o.

Hitung:

a. panjang *KL* dan *MK,*

b. cos $\angle K$,

c. untuk setiap a (a adalah sudut lancip), selidiki hubungan nilai sin a dengan sin (90 – a).



Gambar 4.19 Segitiga siku-siku *KLM*.

Penyelesaian
Untuk memudahkan dalam menyelesaikannya, tidak ada salahnya lagi perhatikan Gambar 4.19 berikut.

a. Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita mengartikan nilai perbandingan cos 30o, yaitu

Selanjutnya, untuk menentukan panjang KL dapat dihitung dengan mencari sin 30° atau menggunakan Teorema Phytagoras, sehingga diperoleh $KL = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

b. Ada dua cara untuk menentukan nilai cos $\angle K$. Pertama, karena $\angle K = 90°$ dan $\angle M = 30°$, maka $\angle K = 60°$. Akibatnya cos $60° = \frac{1}{2}$ (Lihat Tabel 4.2). Kedua, karena semua panjang sisi sudah dihitung dengan menggunakan Definisi 4.1, maka

$$\cos \angle K = \frac{KL}{MK} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\frac{10\sqrt{3}}{3}K} = \frac{1}{2}$$

c. Untuk setiap segitiga berlaku bahwa

$\angle L + \alpha + \angle K = 180^\circ$, maka $\angle K = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ) = (90^\circ - \alpha)$

Karena $\alpha = 30^\circ$, maka $(90^\circ - \alpha) = 60^\circ$. Oleh karena itu, dapat dituliskan bahwa

$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$, karena

$\sin 30^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ)$

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ (Lihat Tabel 4.2)

Sekarang, mari kita selidiki, jika $\alpha = 60^\circ$, maka

$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$, karena

$\sin 60^\circ = \cos (90^\circ - 60^\circ)$

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$

Ternyata, pola tersebut juga berlaku untuk $\alpha = 0^o$, $\alpha = 45^o$, dan $\alpha = 90^o$

Jadi, diperoleh hubungan sinus dan cosinus. Jika $0^o \le \alpha \le 90^o$, maka $\sin \alpha = \cos ((90^o - \alpha)$

Contoh 4.8

Diketahui $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$, $0^o < (A + B) < 90^o$, $A > B$

Hitung $\sin A$ dan $\tan B$.

Untuk memulai memecahkan masalah tersebut, harus dapat mengartikan $0^o < (A + B) < 90^o$, yaitu kita harus menentukan dua sudut A dan B, sedemikian sehingga $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ dan $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$

Lihat kembali Tabel 4.2, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ (α adalah sudut lancip), maka $\alpha = 60^o$

Jadi, diperoleh: $A + B = 60^o$ (1*)

Selanjutnya, dari Tabel 4.2, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ (α adalah sudut lancip), maka $\alpha = 30^o$

Jadi, kita peroleh: $A - B = 30^o$ (2*)

Dari (1*) dan (2*), dengan cara eliminasi maka diperoleh $A = 45^o$ dan $B = 15^o$

4.5 Identitas Trigonometri

IDENTITAS TRIGONOMETRI

1. **Identitas Trigonometri**

Dari nilai fungsi trigonometri tersebut kemudian diperoleh *identitas trigonometri*. Identitas trigonometri adalah suatu persamaan dari fungsi trigonometri yang bernilai benar untuk setiap sudutnya dengan kedua sisi ruasnya terdefinisi. Identitas trigonometri terbagi 3, yaitu *Identitas Kebalikan, Identitas Perbandingan* dan *Identitas Phytagoras* yang masing-masing memiliki fungsi dasar, yaitu:

Identitas Kebalikan	Identitas Perbandingan	Identitas Phytagoras
Cosec A = 1/ sin A Sec A = 1/cos A Cot A = 1/ tan A	Tan A = Sin A/ Cos A Cot A = Cos A / Sin A	Cos^2 A + Sin^2 A = 1 1 + $\tan^2$ A = Sec^2 A 1 + Cot^2 A = Cosec^2 A

1. (a) **Kuadran**

Kuadran adalah pembagian daerah pada sistem koordinat kartesius $\rightarrow$ dibagi dalam 4 daerah Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran memenuhi aturan seperti pada gambar: Untuk sudut b $> 360^\circ \rightarrow$ b = (k . 360 + a) $\rightarrow$ b = a(k = bilangan bulat > 0)

1. (a) **Mengubah fungsi trigonometri suatu sudut ke sudut lancip**
2. Jika menggunakan 90 $\pm$ a atau 270 $\pm$ a maka fungsi berubah:

sin $\leftrightarrow$ cos

tan ↔ cot
sec ↔ csc

1. Jika menggunakan 180 ± a atau 360 ± a maka fungsi tetap
   (a) **Sudut dengan nilai negatif**

Nilai negatif diperoleh karena sudut dibuat dari sumbu x, diputar searah jarum jamUntuk sudut dengan nilai negatif, sama artinya dengan sudut yang berada di kuadran IV

Contoh:

1. Cos 120^o = cos (180 – 60)^o = – cos 60^o = – 1/2 (120^o ada di kuadran II sehingga nilai cos-nya negatif)
2. Cos 120^o = cos (90 + 30)^o = – sin 30^o = – 1/2
3. Tan 1305^o = tan (3.360 + 225)^o = tan 225^o = tan (180 + 45)^o = tan 45^o = 1 (225^o ada di kuadran III sehingga nilai tan-nya positif)
4. Sin –315^o = – sin 315^o = – sin (360 – 45)^o = –(– sin 45)^o = sin 45^o = 1/2 $\sqrt{2}$
5.

Identitas Trigonometri

Dalam suatu segitiga siku-siku, selalu berlaku prinsip phytagoras, yaitu . Pada materi ini, prinsip phytagoras ini menjadi asal pembuktian identitas trigonometri sendiri.
bagi kedua ruas dengan , diperoleh persamaan baru . Sederhanakan dengan sifat eksponensial menjadi . Dari persamaan terakhir, subtitusi bagian yang sesuai dengan perbandingan trigonometri pada segitiga, yaitu dan , sehingga diperoleh atau bisa ditulis menjadi .
Dari identitas yang pertama, dapat diperoleh bentuk lainnya, yaitu:
bagi kedua ruas dengan , diperoleh dimana dan , sehingga diperoleh: $\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = d_1 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = d_2 \\ a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = d_3 \end{cases}$

Bentuk ketiga yaitu [illegible] dibagi dengan [illegible] menjadi [illegible], dimana [illegible] dan [illegible], sehingga diperoleh persamaan: [illegible].

Contoh Soal Trigonometri

Tentukanlah nilai dari [illegible] !

Jawab:

[illegible] berada pada kuadran 2, sehingga nilainya tetap positif dengan besar sama seperti [illegible]

[illegible] berada pada kuadran 3, sehingga nilainya negatif dengan besar sama seperti [illegible]

[illegible] berada pada kuadran 4, sehingga nilainya positif dengan besar sama seperti [illegible]

Sehingga, secara umum, berlaku:
$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$
$1 + \cot^2 a = \csc^2 a$

1. (a) **Grafik fungsi trigonometri**

y = sin xy = cos xy = tan xy = cot xy = sec xy = csc x 5. **Menggambar Grafik fungsi y = A sin/cos/tan/cot/sec/csc (kx ± b) ± c**

1. Periode fungsi untuk sin/cos/sec/csc = 2π/k → artinya: grafik akan berulang setiap kelipatan 2π/k

   Periode fungsi untuk tan/cot = π/k → artinya: grafik akan berulang setiap kelipatan π/k
1. Nilai maksimum = c + |A|, nilai minimum = c – |A|
2. Amplitudo = $(y_{max} - y_{min})$
3. Cara menggambar:

(a) Gambar grafik fungsi dasarnya seperti pada gambar di atas
(b) Hitung periode fungsi, dan gambarkan grafik sesuai dengan periode fungsinya
(c) Jika A $\neq$ 1, kalikan semua nilai y pada grafik fungsi dasar dengan A
(d) Untuk kx + b $\rightarrow$ grafik digeser ke kiri sejauh b/k

Untuk kx – b $\rightarrow$ grafik digeser ke kanan sejauh b/k

1. (a) Untuk + c $\rightarrow$ grafik digeser ke atas sejauh c

Untuk – c $\rightarrow$ grafik digeser ke bawah sejauh c

1. **Aturan-Aturan pada Segitiga ABC**
2. **Aturan Sinus**Dari segitiga ABC di atas:Sehingga, secara umum, dalam segitiga ABC berlaku rumus: **Aturan Cosinus**Dari segitiga ABC di atas: Sehingga, secara umum:
3. **Luas Segitiga**Dari segitiga ABC di atas diperoleh: Sehingga, secara umum:

B. RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SUDUT

Dari gambar segitiga ABC berikut:AD = b.sin αBD = a.sin CD = a.cos = b.cos α
Untuk mencari cos(α+) = sin (90 – (α+))°Untuk fungsi tangens:

Contoh Soal

1. sederhanakan bentuk trigonometri (1 + cot^2) / (cot . sec^2).

PembahasanDari pecahan (1 + cot^2) / (cot . sec^2), sederhanakan masing-masing penyebut dan pembilangnya.1 + cot^2 = cosec^2 $\Rightarrow$ 1 + cot^2 = 1/sin^2 cot . sec^2 = (cos / sin) . sec^2 $\Rightarrow$ cot . sec^2 = (cos / sin).(1/cos^2)$\Rightarrow$ cot . sec^2 = cos / sin .cos^2 Setelah digabung kembali diperoleh : (1 + cot^2) / (cot . sec^2) = (1/sin^2) / (cos / sin.cos^2)$\Rightarrow$ (1 + cot^2) / (cot . sec^2) = (1/sin^2) . (sin .cos^2 / cos)$\Rightarrow$ (1 + cot^2) / (cot . sec^2) = sin .cos^2 / sin^2 .cos $\Rightarrow$ (1 + cot^2) / (cot . sec^2) = cos / sin $\Rightarrow$ (1 + cot^2) / (cot . sec^2) = cot Jadi, (1 + cot^2) / (cot . sec^2) = cot .

1. Tentukan nilai dari (sin α - cos α)^2 + 2 sin α cos α.

PembahasanKarena keterbatasan ruang dan pengkodean, jadi soal di atas dikerjakan masing-masing agar tidak terlalu panjang.(sin α - cos α)^2 = sin^2 α - 2 sin α. cos α + cos^2 $\alpha$$\Rightarrow$ (sin α - cos α)^2 = sin^2 α + cos^2 α - 2 sin α. cos $\alpha$$\Rightarrow$ (sin α - cos α)^2 = 1 - 2 sin α. cos α Selanjutnya :(sin α - cos α)^2 + 2 sin α cos α = 1 - 2 sin α. cos α + 2 sin α cos $\alpha$$\Rightarrow$ (sin α - cos α)^2 + 2 sin α cos α = 1Jadi, (sin α - cos α)^2 + 2 sin α cos α = 1.

1. Buktikan bahwa sec^4 α - sec^2 α = tan^4 α + tan^2 α.

Pembahasansec^4 α - sec^2 α = tan^4 α + tan^2 $\alpha$$\Rightarrow$ sec^2 α (sec^2 α - 1) = tan^2 α (tan^2 α + 1)$\Rightarrow$ sec^2 α (tan^2 α) = tan^2 α (sec^2 α)$\Rightarrow$ sec^2 α . tan^2 α = sec^2 α . tan^2 αJadi, sec^4 α - sec^2 α = tan^4 α + tan^2 α = sec^2 α . tan^2 α.Terbukti.

1. Nyatakan setiap bentuk berikut ke dalam faktor-faktor yang paling sederhana.

a. 1 - cos^2 b. sin^2 α - cos^2 αc. tan^2 α - 1d. sin^2 α - 2 sin α cos α + cos^2 α**Pembahasan**

1. (a) 1 - cos^2

Dari identitas sin^2 + cos^2 = 1, maka diperoleh :$\Rightarrow$ 1 - cos^2 = sin^2 Jadi, 1 - cos^2 = sin^2 .

1. (a) sin^2 α - cos^2 α

Dari identitas sin^2 α + cos^2 α = 1, maka sin^2 α = 1 - cos^2 α.$\Rightarrow$ sin^2 α - cos^2 α = 1 - cos^2 α - cos^2 $\alpha$$\Rightarrow$ sin^2 α - cos^2 α = 1 - 2 cos^2 αKarena 2 cos^2 α - 1 = cos 2α, maka 1 - 2 cos^2 α = - cos 2α.$\Rightarrow$ sin^2 α - cos^2 α = -cos 2αJadi, sin^2 α - cos^2 α = -cos 2α.

1. (a) tan^2 α - 1

Dari identitas 1 + tan^2 α = sec^2 α, maka tan^2 α = sec^2 α - 1$\Rightarrow$ tan^2 α - 1 = sec^2 α - 1 - 1
$\Rightarrow$ tan^2 α - 1 = sec^2 α - 2
? sin^2 α - 2 sin α cos α + cos^2 α = sin^2 α + cos^2 α - 2 sin α cos α
$\Rightarrow$ sin^2 α - 2 sin α cos α + cos^2 α = 1 - 2 sin α cos α
$\Rightarrow$ sin^2 α - 2 sin α cos α + cos^2 α = 1 - sin 2αJadi, sin^2 α - 2 sin α cos α + cos^2 α = 1 - sin 2α .
? Buktikan tiap identitas trigonometri berikut.

a. 1/3 $\sin^2 \alpha$ + 1/3 $\cos^2 \alpha$ = 1/3b. 3 $\cos^2 \alpha$ - 2 = 1 - 3 $\sin^2 \alpha$c. 3 + 5 $\sin^2 \alpha$ = 8 - 5 $\cos^2 \alpha$**Pembahasan**

1. 1/3 $\sin^2 \alpha$ + 1/3 $\cos^2 \alpha$ = 1/3

$\Rightarrow$ 1/3 ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$) = 1/3$\Rightarrow$ 1/3 (**??**) = 1/3$\Rightarrow$ 1/3 = 1/3Terbukti.

1. 3 $\cos^2 \alpha$ - 2 = 1 - 3 $\sin^2 \alpha$

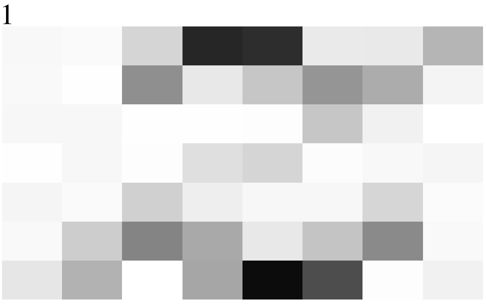
Ingat bahwa $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka 3 $\sin^2 \alpha$ + 3 $\cos^2 \alpha$ = 3.Dari 3 $\sin^2 \alpha$ + 3 $\cos^2 \alpha$ = 3, maka 3 $\cos^2 \alpha$ = 3 - 3 $\sin^2 \alpha$.

$\Rightarrow$ 3 $\cos^2 \alpha$ - 2 = 1 - 3 $\sin^2 \alpha\Rightarrow$ 3 - 3 $\sin^2 \alpha$ - 2 = 1 - 3 $\sin^2 \alpha\Rightarrow$ 1 - 3 $\sin^2 \alpha$ = 1 - 3 $\sin^2 \alpha$.Terbukti.

1. 3 + 5 $\sin^2 \alpha$ = 8 - 5 $\cos^2 \alpha$

Dari 5 $\sin^2 \alpha$ + 5 $\cos^2 \alpha$ = 5, maka 5 $\sin^2 \alpha$ = 5 - 5 $\cos^2 \alpha$.$\Rightarrow$ 3 + 5 $\sin^2 \alpha$ = 8 - 5 $\cos^2 \alpha\Rightarrow$ 3 + 5 - 5 $\cos^2 \alpha$ = 8 - 5 $\cos^2 \alpha\Rightarrow$ 8 - 5 $\cos^2 \alpha$ = 8 - 5 $\cos^2 \alpha$.Terbukti.

Bukti bahwa cos2x+sin2x=
1



Pada segitiga siku-siku berlaku perbandingan trigonometri
Pada gambar di samping berlaku rumus pitagoras
x2+y2=r2
Kemudian kita bagi masing-masing ruas dengan r2
x2+y2r2=r2r2
$\rightarrow$ (xr)2+(yr)2=1
Dengan mengganti sinα=yr
cosα=xr
didapat
cos2x+sin2x=1
(terbukti)

1. Buktikan bahwa cos2x1$-$sin$x$$-tanxcosx$=1

Bukti :
cos2x1$-$sin$x$$-tanxcosx$=1$-$sin2$x1-sinx$$-sinxcosxcosx$
cos2x=1$-$sin2x
=(1$-$sin$x$)(1+sin$x$)1$-$sin$x$$-sinx$
=1+sin$x$$-sinx$

$= 1$

1.

terbukti

1. Buktikan bahwa 1+cos$x$sin$x$=sin$x$1$-$cos

Bukti :
1+cos$x$sin$x$=1+cos$x$sin$x$
$\times$1$-$cos$x$1$-$cos$x$
=1$-$cos2$x$sin$x$(1$-$cos$x$)
sin2x=1$-$cos2x

$=\sin 2x \sin x(1-\cos x)$
$=\sin x 1-\cos x$
Terbukti

1. Jika $\sin x+\cos x=1{,}2$

maka tentukan

a. $\sin x \cos x$

b. $\sin 3x+\cos 3x$

Jawab :

1. $\sin x \cos x$

$\sin x+\cos x=1{,}2$
$(\sin x+\cos x)2=1{,}22$
kuadratkan kedua ruas
$\sin 2x+2\sin x\cos x+\cos 2x=1{,}44$
$\sin 2x+\cos 2x=1$
$1+2\sin x\cos x=1{,}44$
$2\sin x\cos x=0{,}44$
$\sin x\cos x=0{,}22$

1. $\sin 3x+\cos 3x$
2.

$a3+b3=(a+b)3-3ab(a+b)$
Substitusikan $a=\sin x$
dan $b=\cos x$
$\sin 3x+\cos 3x=(\sin x+\cos x)3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$
$=(1{,}2)3-3(0{,}22)(1{,}2)$
$=1{,}728-0{,}792$

$$= 0{,}936$$

1. Jika $\sec x+\tan x=11$

maka tentukan nilai dari

a. $\sec x$

b. $\tan x$

Jawab :

1. $\sec x$

$\sec x+\tan x=11$
$(\sec x+\tan x)2=($**??**$)2$
$\sec 2x+2\sec x\tan x+\tan 2x=121$
$\sec 2x+2\sec x\tan x+\sec 2x-1=121$
$\tan 2x=\sec 2x-1$
$2\sec 2x+2\sec x\tan x=122$
$2\sec x(\sec x+\tan x)=122$
$2\sec x($**??**$)=122$
$\sec x=12222$

$$= 6111$$

1. tan$x$

Dari sec$x$+tan$x$=11
Kita substitusikan sec$x$=6111
6111+tan$x$=11
tan$x$=11−6111

= 6011

Contoh Soal Identitas Trigonometri
1. Nilai dari cos15° + cos35° + cos55° + cos75° adalah...
Penyelesaian:

1. Soal dengan bentuk seperti ini dapat dikerjakan dengan rumus Kuadran I. Dimana:

sin α = cos (90-α) atau cos α = sin (90-α).

1. Penyelesaiannya juga bisa menggunakan identitas trigonometri. Dimana:

sinα + cosα = 1
Jadi,
cos15° + cos35° + cos55° + cos75°
= cos15° + cos75° + cos35° + cos55°
= cos(90-75)° + cos75° + cos(90-55)° + cos55°
= sin75° + cos75° + sin55° + cos55°
= 1 + 1 = 2 ——-> (identitas trigonometri sinα + cosα = 1)

2. Jika sin(x-600)° = cos(x-450)° maka nilai dari tanx adalah...
Penyelesaian:

1. Penyetaraan antara sisi kiri dan sisi kanan. Menggunakan aturan Kuadran I (seperti pada soal nomor 1).

sin(x + α) = cos (x + α)
sin(x + α) = sin (90 – (x + α))

1. Setelah sisi kiri dan kanan sama, *nah* bisa ditentukan nilai x nya.
2. Setelah nilai x di dapat, *baru deh* dihitung nilai tanx nya

Jadi,
sin(x-600)° = cos(x-450)°
sin(x-600)° = sin(90 – (x-450))°
sin(x-600)° = sin(540 – x)°
x – 600° = 540° – x
2x = 540° + 600°
x = 1140°/2 = 570°

tan x = tan 570°
= tan (360 + 210)° = tan 210°
= tan (180 + 30)° —–> Kuadran III
= tan 30° = 1/3 $\sqrt{3}$
(bernilai + karena tangen pada kuadran III bernilai positif).

3. Diketahui sinx + cosx = -1/5. Maka nilai dari sin2x adalah...
Penyelesaian:
Identitas Trigonometri yang berpengaruh pada soal ini yakni:
sinα + cosα = 1 dan aturan sudut rangkap.
Jadi,
sinx + cosx = -1/5

(sinx + cosx) = (-1/5) ——> (Kuadratkan kedua ruas.)
sinx + 2sinxcosx + cosx = 1/25
sinx + cosx + 2sinxcosx = 1/25
1 + 2sinxcosx = 1/25 ——> (Identitas trigonometri sinα + cosα = 1)
2sinxcosx = 1/25 – 1
2sinxcosx = 1/25 – 25/25
2sinxcosx = -24/25
sin2x = -24/25
(aturan sudut rangkap sin2x = 2sinxcosx).

4. Diketahui sinα.cosα = 8/25. Maka nilai dari 1/sinα – 1/cosα adalah. . .
Penyelesaian:

1. Karena berbentuk pecahan maka samakan dulu penyebutnya.
2. Identitas trigonometri yg berlaku pada soal ini adalah sinα + cosα = 1
3.

Perhatikan pembahasannya pada gambar di bawah ini.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \cdots (I) \\ 3x + y - 2z = 4 \cdots (II) \\ 7x - 6y - z = 10 \cdots (III) \end{cases}$$

Jadi, nilai dari 1/sinα – 1/cosα adalah 1 7/8.

5. Nilai tanx dari persamaan cos2x – 3sinx – 1 = 0 adalah. . .
Penyelesaian:

1. Karena berbentuk persamaan maka unsur trigonometrinya mesti disamakan/disetarakan.
2. Menggunakan aturan sudut rangkap cos2α. Dimana:

cos2α = $\cos^2\alpha$ -sinα atau
cos2α = $2\cos^2\alpha$ – 1 atau
cos2α = 1 – 2sinα

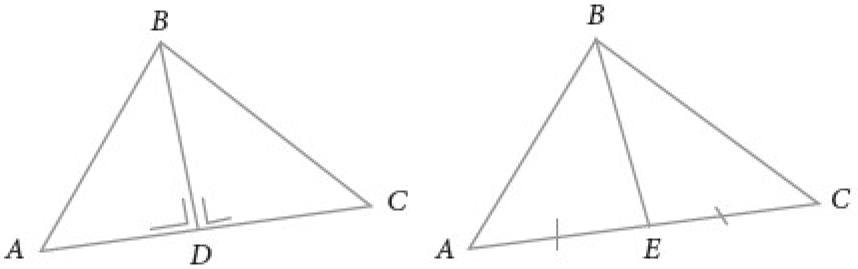
1. Setelah nilai x di dapat, kemudian dilanjutkan penentuan tanx nya.

Jadi,
cos2x – 3sinx – 1 = 0
cos2x – 3sinx = 1
(1 – 2sinx) – 3sinx = 1
(mengubah cos2x yang sesuai dengan -3sinx sehingga persamaan dapat dikerjakan karena bervariabel sama yakni sinx).
(1 – 2sinx) – 3sinx = 1
-2sinx – 3sinx = 1 – 1

-2sinx – 3sinx = 0
sinx(-2sinx – 3) = 0
sinx = 0 atau -2sinx – 3 = 0
sin x = 0 atau sinx = -3/2
x = 0°
(sinx = -3/2 tidak memenuhi)
maka nilai tan x = tan 0° = 0

4.6 Aturan Sinus dan Cosinus

Aturan Sinus dan Cosinus
Pada subbab 4.2 – 4.5 telah kita kaji dan temukan konsep perbandingan trigonometri untuk sembarang segitiga siku-siku. Kita dengan mudah menentukan nilai sinus, cosinus, dan perbandingan trigonometri lainnya meskipun segitiga siku-siku tersebut dikaji berdasarkan posisi kuadran. Pertanyaan akan muncul, bagaimana menggunakan konsep perbandingan trigonometri tersebut pada suatu segitiga sama kaki, segitiga sama sisi, atau bahkan pada suatu sembarang segitiga? Pertanyaan ini merupakan ide untuk mengkaji subbab 4.6 ini.
Sebagai pengetahuan tambahan selain konsep yang sudah kita miliki di atas, perlu kita kenalkan istilah garis tinggi dan garis berat pada sembarang segitiga. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.36 (i) BD merupakan salah satu garis tinggi dan (ii) BE merupakan garis berat ΔABC

Definisi

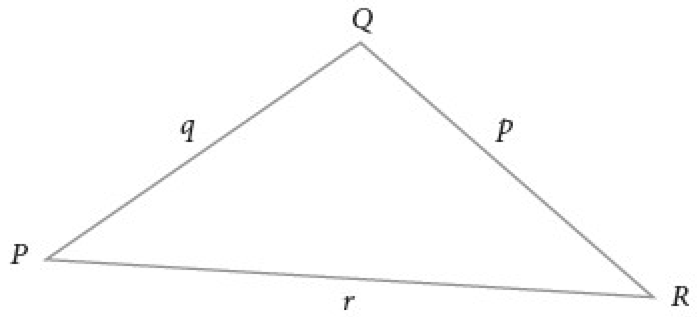
Untuk setiap segitiga sembarang,

Garis tinggi adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan berpotongan tegak lurus dengan sisi di hadapannya.

Garis berat adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan memotong sisi di hadapannya menjadi dua bagian yang sama panjang.

Dengan definisi tersebut, silakan tarik garis tinggi dan garis berat segitiga pada Gambar 4.36. Selanjutnya, untuk menemukan bagaimana menerapkan konsep perbandingan trigonometri untuk setiap segitiga sembarang, coba cermati masalah berikut ini. Diberikan suatu segitiga sembarang, seperti pada Gambar 4.37 di bawah ini.

Misalkan $PR = q$ satuan, $PQ = r$ satuan, dan $RQ = p$ satuan, dengan $p \neq q \neq r$ serta $\angle P$ atau $\angle Q$ atau $\angle$R tidak satupun 0^o dan 90^o.



Gambar 4.37 Segitiga sembarang PQR, dengan $\angle P \neq \angle Q \neq \angle R$

Bentukan garis tinggi dari setiap sudut segitiga PQR dan temukan hubungan antar garis berat tersebut.

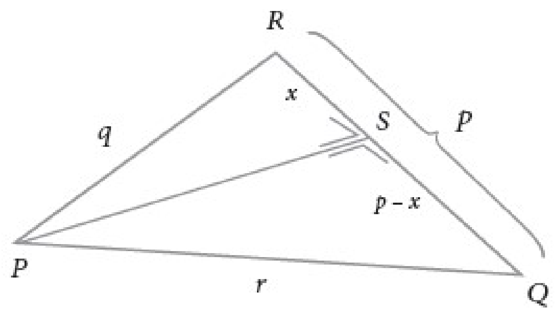
Alternatif Penyelesaian

Karena setiap segitiga sembarang memiliki tiga sudut, maka didapat membentuk tiga garis tinggi pada segitiga tersebut.

a. Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle P$

Garis tinggi yang dibentuk dari sudut $\angle P$ dideskripsikan pada Gambar 4.38.

Perhatikan ΔPRS dan ΔPQS .



Gambar 4.38 Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle P$

Kita dapat menuliskan bahwa

$\sin \angle R = \frac{PS}{PR}$ atau $PS = PR \times \sin \angle R = q \times \sin \angle R$. (**??**)

$\sin \angle Q = \frac{PS}{PQ}$ atau $PS = PQ \times \sin \angle Q = r \times \sin \angle Q$. (**??**)

Dari (**??**) dan (**??**), kita memperoleh

$r \times \sin \angle Q = q \times \sin \angle R \leftrightarrow \frac{r}{\sin\angle R} = \frac{r}{\sin\angle Q}$ (**??**)

Selain itu, kita juga dapat menuliskan bahwa

$\cos \angle R = \frac{PS}{PR} = \frac{x}{q}$ atau $x = q \times \cos \angle R$. (**??**)

Kita masih fokus pada ΔPRS dan ΔPQS dengan menggunakan Teorema Phytagoras, dapat dituliskan

$r2 = (p - x)2 + q2 - x2$ dan

$q2 = x2 + (PS)2$ atau $(PS)2 = q2 - x2$

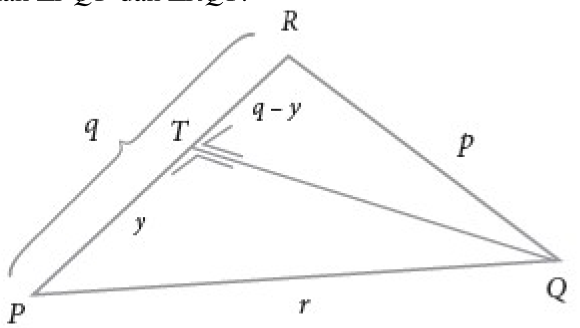
Akibatnya kita peroleh

$r2 = (p - x)2 + q2 - x2 \leftrightarrow r2 = p2 - 2px + x2 + q2 - x2 = p2 + q2 - 2px$ (**??**)
Dengan (**??**), maka (**??**) berubah menjadi

$r2 = p2 + q2 - 2.p.q.\cos \angle R.$ (**??**)

b. Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle Q$

Garis tinggi yang dibentuk dari sudut $\angle Q$ dideskripsikan pada Gambar 4.39.
Perhatikan ΔPQT dan ΔRQT.



Gambar 4.39 Garis tinggi ΔPQR yang dibentuk dari $\angle Q$

Dengan mudah kita menemukan bahwa
$\sin \angle P = \frac{PT}{PQ}$ atau $QT = PQ \times \sin \angle P = r \times \sin \angle P$ (**??**)
$\sin \angle R = \frac{QT}{RQ}$ atau $QT = RQ \times \sin \angle R = p \times \sin \angle R$ (**??**)
Dari (**??**) dan (**??**), diperoleh

$p \times \sin \angle R = r \times \sin \angle P \leftrightarrow \frac{r}{\sin\angle R} = \frac{p}{\sin\angle P}$ (**??**)
Selain itu, kita juga dapat menemukan bahwa
$\cos \angle P = \frac{PT}{PQ} = \frac{y}{r}$ atau $y = r \times \cos \angle P.$ (**??**)

Kita masih fokus pada ΔPQT dan ΔRQT, dengan Teorema Phytagoras, diperoleh bahwa

$p2 = (q - y)2 + (QT)2$ dan
$r2 = y2 + (QT)2$ atau $(QT)2 = r2 - y2$
Akibatnya, kita peroleh

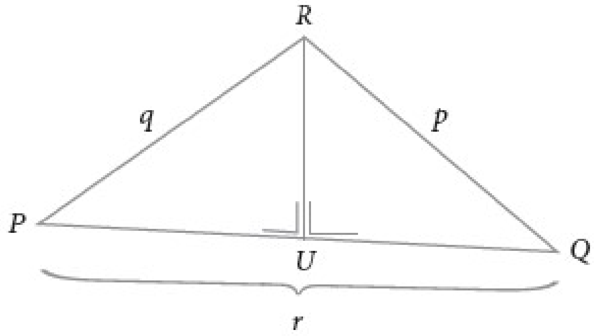
$p2 = (q - y)2 + r2 - y2 \leftrightarrow p2 = q2 - 2.q.y + y2 + r2 - y2 = q2 + r2 - 2.q.y$ (**??**)

Dengan (**??**), maka (**??**) menjadi

$p2 = q2 + r2 - 2.q.r.\cos \angle P$. (**??**)

c. Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle R$

Garis tinggi yang dibentuk dari $\angle R$ dideskripsikan pada Gambar 4.40.
Perhatikan ΔPRU dan ΔRQU.



Gambar 4.40 Garis tinggi ΔPQR yang dibentuk dari $\angle R$

Kita dapat menemukan bahwa
$\sin \angle P = \frac{RU}{PR}$ atau $RU = PR \times \sin \angle P = q \times \sin \angle P$ (**??**)
$\sin Q = \frac{PT}{PQ}$ atau $RU = RQ \times \sin \angle Q = p \times \sin \angle Q$ (**??**)
Dari (6e) dan (6f), diperoleh

$q \times \sin \angle P = p \times \sin \angle Q \leftrightarrow \frac{q}{\sin \angle Q} = \frac{p}{\sin \angle P}$ (**??**)
Selain itu, kita juga dapat menuliskan bahwa
$\cos \angle Q = \frac{UQ}{RQ} = \frac{z}{p}$ atau $z = p \times \cos \angle Q$ (**??**)

Kita masih fokus mencermati ΔPRU dan ΔRQU, dengan Teorema Phytagoras, kita dapat menuliskan

$q2 = (r - z)2 + (RU)2$, dan
$p2 = z2 + (RU)2$ atau $(RU)2 = p2 - z2$
Akibatnya, diperoleh

$q2 = (r - z)2 + p2 - z2 \leftrightarrow q2 = r2 - 2.r.z + z2 + p2 - z2 = r2 + p2 - 2.r.z$ (**??**)
Dengan (**??**), maka (**??**) menjadi

$q2 = r2 + p2 - 2.r.\ p.\cos\angle Q$ (**??**)
Jadi, dari (**??**), (**??**), dan (**??**), kita menemukan bahwa

$$\frac{p}{\sin\angle P} = \frac{q}{\sin\angle Q} = \frac{r}{\sin\angle r}$$

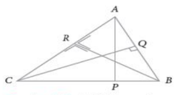
Hal tersebut di atas sering dikenal istilah ***ATURAN SINUS***.
Selain itu, dari (**??**), (**??**), dan (**??**) juga kita menemukan bahwa

1. $p2 = q2 + r2 - 2.q.r.\cos\angle P$ atau $\cos\angle P = \frac{q^2+r^2-v^2}{2.q.r}$
2. $q2 = p2 + r2 - 2.p.r.\cos\angle Q$ atau $\cos\angle Q = \frac{p^2+r^2-q^2}{2.p.q}$
3. $r2 = p2 + q2 - 2.p.q.\cos\angle R$ atau $\cos\angle R = \frac{p^2+q^2-r^2}{2.p.q}$

Hal tersebut yang sering dikenal istilah ***ATURAN COSINUS***
Untuk membantu mengingatnya, kita jadikan sebagai sifat, seperti berikut.

Sifat 4.7

Untuk setiap segitiga, dengan $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, dengan sudut-sudutnya $\angle C$, $\angle A$ dan $\angle B$, maka berlaku



Gambar 4.41 ΔABC dengan tiga garis tinggi

ATURAN SINUS

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

ATURAN COSINUS

i. $a_2 = b_2 + c_2 - 2.b.c.\cos \angle A$ atau $\cos \angle A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2.b.c}$

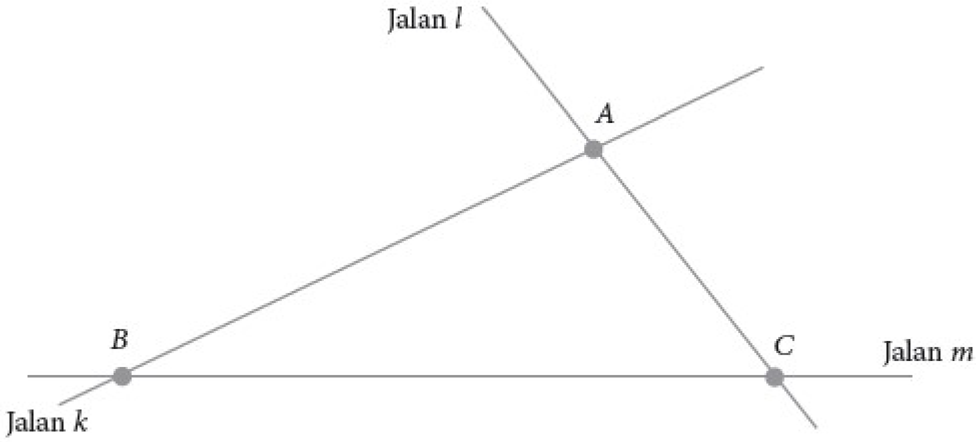
ii. $b_2 = a_2 + c_2 - 2.a.c.\cos \angle B$ atau $\cos \angle B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2.a.c}$

iii. $c_2 = a_2 + b_2 - 2.a.b.\cos \angle C$ atau $\cos \angle C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2.a.b}$

Kemudian, kamu harus mampu menggunakan dengan efektif aturan sinus dan aturan cosinus di atas dalam memecahkan masalah.
Coba uji pemahaman kamu dalam menggunakan Sifat 4.7.

Contoh 4.15

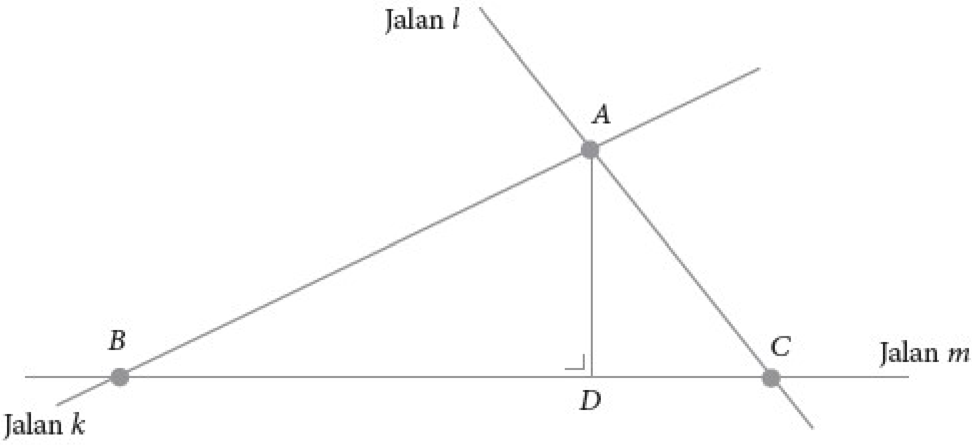
Jalan k dan jalan l berpotongan di kota A. Dinas tata ruang kota ingin menghubungkan kota B dengan kota C dengan membangun jalan m dan memotong kedua jalan yang ada, seperti yang ditunjukkan Gambar 4.42 di bawah. Jika jarak antara kota A dan kota C adalah 5 km, sudut yang dibentuk jalan m dengan jalan l adalah 75o dan sudut yang dibentuk jalan k dan jalan m adalah 30^o. Tentukan jarak kota A dengan kota B.



Gambar 4.42 Jalan k, l, dan m

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan perhitungan, kita bentuk garis tinggi AD, dimana garisAD tegak lurus dengan garis BC, seperti pada Gambar 4.43.



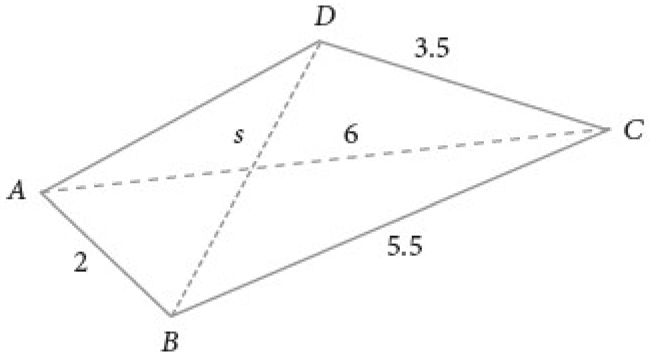
Gambar 4.43 Segitiga ABC dengan garis tinggi D

Dengan menggunakan konsep perbandingan trigonometri (Definisi 4.1), pada ΔABC, dapat kita tuliskan bahwa
$\sin B = \frac{AD}{AB}$ atau $AD = AB \times \sin B$ (**??**)

Sedangkan pada ΔACD, kita peroleh
$\sin C = \frac{AD}{AC}$ atau $AD = AC \times \sin C$ (**??**)
Dari persamaan (**??**) dan (**??**), kita peroleh bahwa

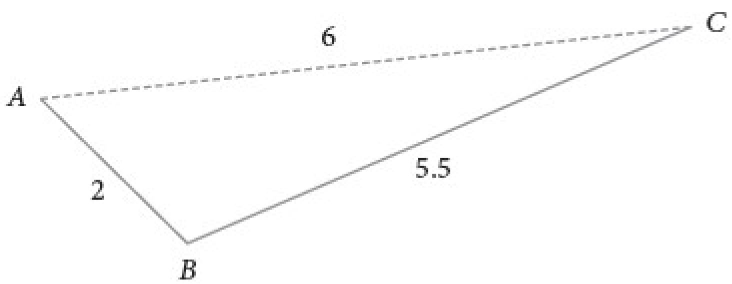
$AB \times \sin B = AC \times \sin C$ (**??**)
Karena diketahui bahwa $\angle C = 70^o$, $\angle B = 30^o$, dan jarak $AC = 5$, dengan persamaan (**??**) diperoleh

$AB \times \sin 30o = AC \times \sin 70o$,
AB = $\frac{5\times sin\ 70^\circ}{sin\ 30^\circ} = \frac{5\times(0{,}94)}{0{,}5}$ = 9,4 km.
Jadi, jarak kota A dengan kota B adalah 9, 4 km.
Contoh 4.16
Diberikan segiempat, seperti pada Gambar 4.44.



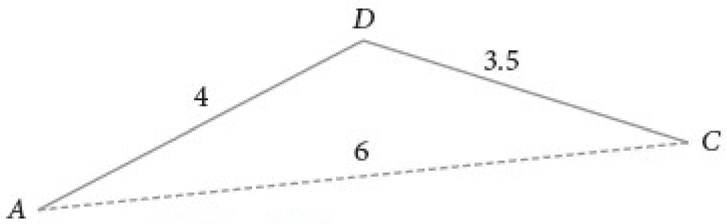
Gambar 4.44 Segiempat *ABCD*

Hitung nilai *s*.
Alternatif Penyelesaian
Dengan Gambar 4.44, kita melihat ΔADB, ΔADC, dan ΔABC Hal ini kita perlukan untuk menemukan nilai cos $\angle DAB$. Di sisi lain, $\angle DAB = \angle BAC + \angle DAC$.
Artinya, dengan menemukan besar sudut $\angle BAC$ dan $\angle DAC$, kita dapat menghitung nilai cos $\angle DAB$ (mengapa harus menentukan cos $\angle DAB$?)
Mari kita kaji ΔABC.



Gambar 4.45 Segitiga *ABC*

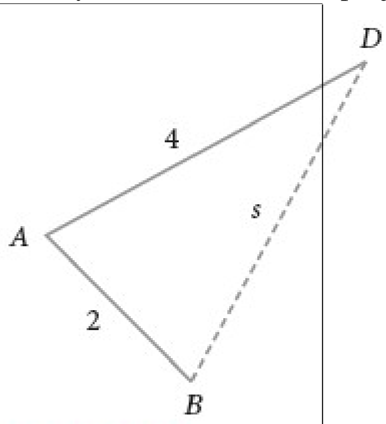
Dengan menggunakan Sifat 4.6 (Aturan Cosinus)
$\cos \angle BAC = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2.AC.AB} = \frac{6^2+2^2-(5{,}5)^2}{2.(\mathbf{??}).(\mathbf{??})} = \frac{9{,}75}{24} = 0{,}406$
Dengan bantuan kalkulator atau tabel trigonometri, karena cos $\angle BAC$ = 0,40625,maka besar $\angle BAC = 66{,}03^O$.
Sekarang, mari kita kaji ΔADC.



Gambar 4.46 Segitiga *ADC*.

Dengan menggunakan Sifat 4.6 (Aturan Cosinus), kita peroleh
$\cos \angle DAC = \frac{AC^2+AD^2-DC^2}{2.AC.AD} = \frac{4^2+6^2-(3,5)^2}{2.4.6} = 0,82813$

Melalui kalkulator atau tabel trigonometri, diperoleh besar $\angle DAC = 34{,}03^o$
Dengan demikian, besar $\angle DAB = 66{,}03^o + 34{,}03^o = 100{,}06^o$
Akibatnya, untuk menentukan panjang sisi s, kita perhatikan ΔABD.



Gambar 4.47 Segitiga *ABD*

$\cos \angle DAB = \frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2.AB.AD}$

$\cos \angle DAB = \frac{4^2+2^2-s^2}{2.4.2}$

Atau

16.(cos 100,06o) = 20 – *s*2

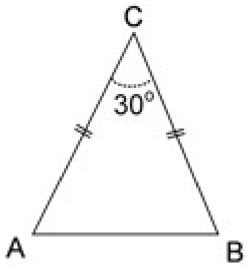
↔ 16(-0,174) = 20 – *s*2

↔ -2784 = 20 – *s*2

↔ *s*2 = 22,784

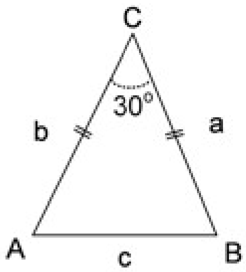
↔ *s* = 22,784 = 4,709

Contoh 4.17
Segitiga samakaki ABC dengan sudut C =30^o



Jika panjang BC = 12 cm, tentukan panjang AB?

Alternatif Penyelesaian
Dengan aturan kosinus



Di peroleh :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 30^\circ$$
$$c^2 = 12^2 + 12^2 - 2(12)(12)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$
$$c^2 = 2(12^2) - 12^2\sqrt{3}$$
$$c^2 = 12^2(2-\sqrt{3})$$
$$c = \sqrt{12^2(2-\sqrt{3})} = 12\sqrt{2-\sqrt{3}}\ cm$$

4.7 Fungsi Trigonometri

Pada subbab ini, kita akan mengkaji bagaimana konsep trigonometri jika dipandang sebagai suatu fungsi. Mengingat kembali konsep fungsi pada Bab 3, fungsi $f(x)$ harus terdefinisi pada daerah asalnya. Jika $y = f(x) = \sin x$, maka daerah asalnya adalah semua x bilangan real. Namun, mengingat satuan sudut (subbab 4.1) dan nilai-nilai perbandingan trigonometri (yang disajikan pada Tabel 4.3), pada kesempatan ini, kita hanya mengkaji untuk ukuran sudut dalam derajat. Mari kita sketsakan grafik fungsi $y = f(x) = \sin x$,untuk $0 \le x \le 2\pi$.

1. **Grafik Fungsi** $y = \sin x$**, dan** $y = \cos x$ **untuk** $0 \le x \le 2\pi$

   Problem 4.1 Dengan keterampilan kamu dalam menggambar suatu fungsi (Bab 3), gambarkan grafik fungsi $y = \sin x$, untuk $0 \le x \le 2\pi$.

   Alternatif Penyelesaian
   Dengan mencermati nilai-nilai sinus untuk semua sudut istimewa yang disajikan pada Tabel 4.3, kita dapat memasangkan ukuran sudut dengan nilai sinus untuk setiap sudut

tersebut, sebagai berikut.

$(0, 0)$; $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$;

$(\pi, 0)$; $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6},-\frac{\sqrt{1}}{2}\right)$; $\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$; $\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$\left(\frac{11\pi}{3},-\frac{1}{2}\right)$; dan $(2\pi, 0)$.

Selanjutnya pada koordinat kartesius, kita menempatkan pasangan titiktitik untuk menemukan suatu kurva yang melalui semua pasangan titik-titik tersebut. Selengkapnya disajikan pada Gambar berikut ini.

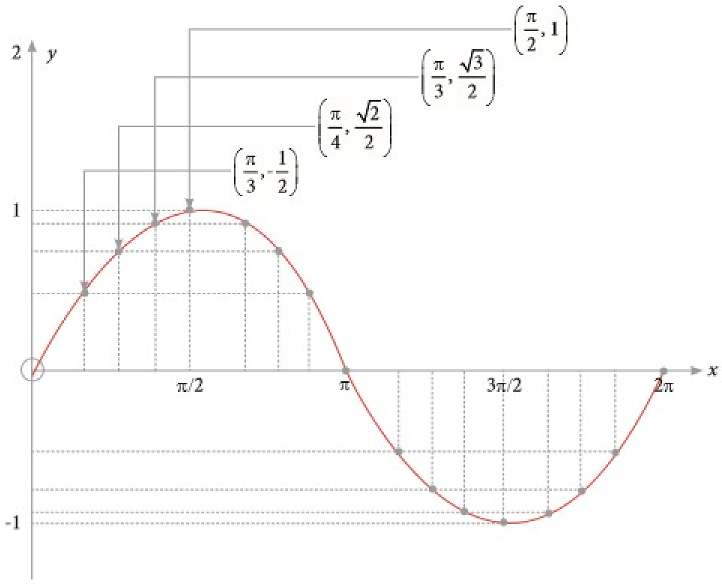


Figure 4.1: Grafik fungsi $y = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari grafik di atas, kita dapat merangkum beberapa data dan informasi seperti berikut.

- Untuk semua ukuran sudut x, nilai maksimum fungsi $y = \sin x$ adalah 1, dan nilai minimumnya adalah -1.
- Kurva fungsi $y = \sin x$, berupa gelombang.
- Untuk 1 periode (1 putaran penuh) kurva fungsi $y = \sin x$, memiliki 1 gunung dan 1 lembah.
- Nilai fungsi sinus berulang saat berada pada lembah atau gunung yang sama.
- Untuk semua ukuran sudut x, daerah hasil fungsi $y = \sin x$, adalah $1 \leq y \leq 1$. Dengan konsep grafik fungsi $y = \sin x$, dapat dibentuk kombinasi fungsi sinus.

Misalnya $y = 2.\sin x$, $y = \sin 2x$, dan $y = \sin(x + \pi/2)$. Selengkapnya dikaji pada contoh berikut.

■ **Example 4.1** Gambarkan grafik fungsi $y = \sin 2x$ dan $y = \sin(x + \pi/2)$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Kemudian tuliskanlah perbedaan kedua grafik tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan nilai-nilai perbandingan trigonometri yang disajikan pada Tabel 4.3, maka pasangan titik-titik untuk fungsi $y = \sin 2x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:
Untuk $x = 0$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.(0) = \sin 0 = 0 \Rightarrow (0,0)$
Untuk $x = (\pi/6)$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.(\pi/6) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 \Rightarrow (\pi/6, \sqrt{3}/2)$
Untuk $x = \pi/4$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.(\pi/4) = \sin \pi/2 = 1 \Rightarrow (\pi/4, 1)$.
Demikian seterusnya hingga
untuk $x = 2\pi$, maka niali fungsi adalah $y = \sin 2.(2\pi) = \sin 4\pi = \sin 0 = 0 \Rightarrow (2\pi, 0)$
Selengkapnya pasangan titik-titik untuk fungsi $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, yaitu

$(0, 0)$; $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(\pi, 0)$; $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ……; $(2\pi, 0)$.

Dengan pasangan titik-titik tersebut, maka grafik fungsi $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ disajikan pada Gambar.

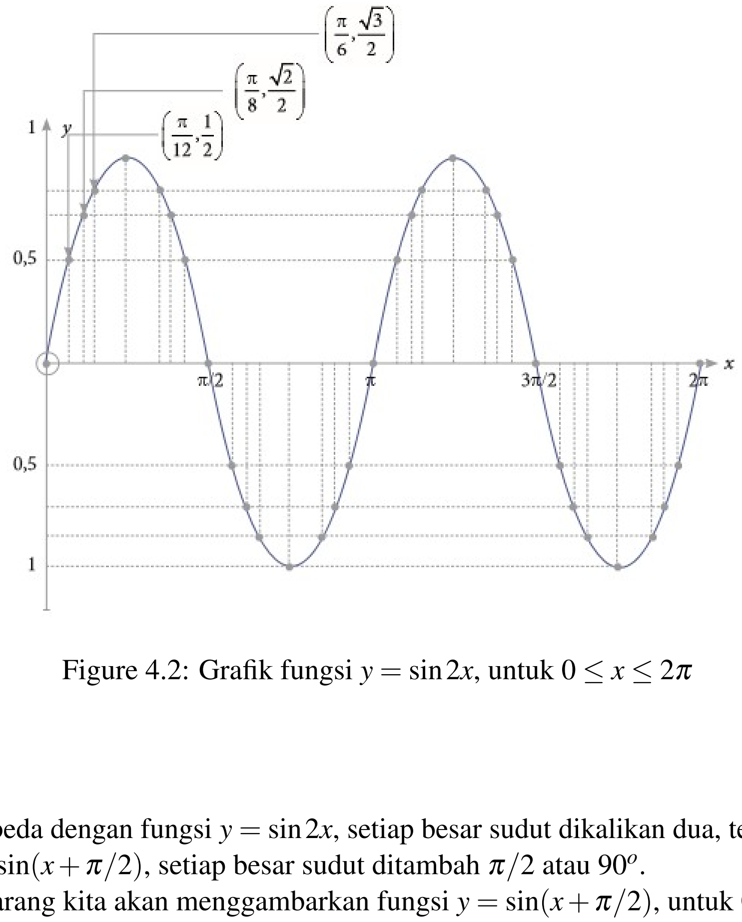


Figure 4.2: Grafik fungsi $y = \sin 2x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Berbeda dengan fungsi $y = \sin 2x$, setiap besar sudut dikalikan dua, tetapi untuk fungsi $y = \sin(x + \pi/2)$, setiap besar sudut ditambah $\pi/2$ atau 90^o.
Sekarang kita akan menggambarkan fungsi $y = \sin(x + \pi/2)$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.
Coba kita perhatikan kembali, bahwa $\sin(x + \pi/2) = \cos x$. Artinya, sekarang kita akan menggambarkan fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Dengan menggunakan nilai-nilai cosinus yang diberikan pada Tabel kita dapat merangkumkan pasangan titik-titik yang memenuhi fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, sebagai berikut.

$(0, 1)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(\pi, -1)$

$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(2, 1)$.

Dengan demikian, grafik fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, disajikan pada Gambar berikut.

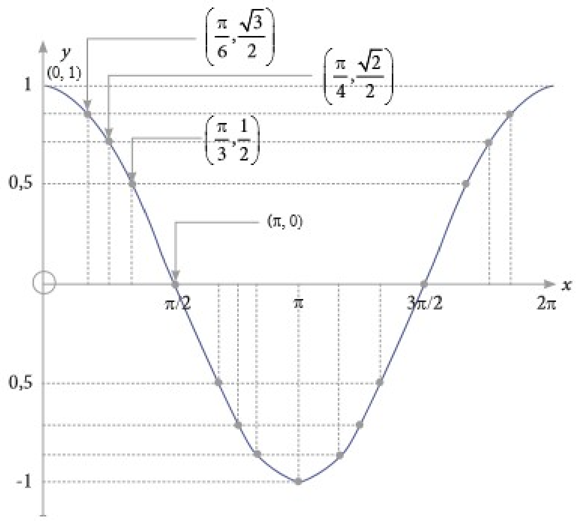


Figure 4.3: Grafik fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari kajian grafik, grafik fungsi $y = \sin 2x$ sangat berbeda dengan grafik fungsi $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$, meskipun untuk domain yang sama. Grafik $y = \sin 2x$, memiliki 2 gunung dan 2 lembah, sedangkan grafik fungsi $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$, hanya memiliki 1 lembah dan dua bagian setengah gunung. Nilai maksimum dan minimum fungsi $y = \sin 2x$ sama $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$ untuk domain yang sama. Selain itu, secara periodik, nilai fungsi $y = \sin 2x$ dan $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$, berulang, terkadang menaik dan terkadang menurun. ■

Exercise 4.1 Dengan pengetahuan dan keterampilan kamu akan tiga grafik di atas dan konsep yang sudah kamu miliki pada kajian fungsi, sekarang gambarkan dan gabungkan grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, untuk domain $0 \leq x \leq 2\pi$.
Rangkumkan hasil analisis yang kamu temukan atas grafik tersebut. ■

2. **Grafik Fungsi** $y = tanx$**, dan** $y = \cos x$ **untuk** $0 \leq x \leq 2\pi$
Kajian kita selanjutnya adalah untuk menggambarkan grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Mari kita kaji grafik fungsi $y = \tan x$, melalui masalah berikut

Problem 4.2 Untuk domain $0 \leq x \leq 2\pi$, gambarkan grafik fungsi $y = \tan x$.

Alternatif Penyelesaian
Dengan nilai-nilai tangen yang telah kita temukan pada Tabel 4.3 dan dengan pengetahuan serta keterampilan yang telah kamu pelajari tentang menggambarkan grafik suatu fungsi, kita dengan mudah memahami pasangan titik-titik berikut.

$(0,0)$; $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$; $\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2},\sim\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3},-\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4},-1\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$(\pi,\ 0)$; $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{4},1\right)$; $\left(\frac{4\pi}{3},\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2},\sim\right)$; $\left(\frac{5\pi}{3},-\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4},-1\right)$;

$\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $(2\pi, 0)$.

Dengan demikian, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, seperti pada Gambar berikut ini.

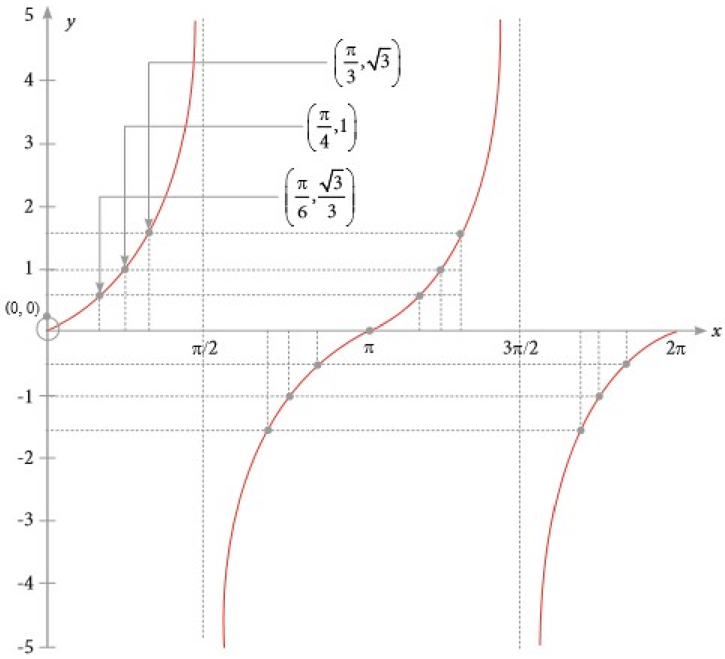
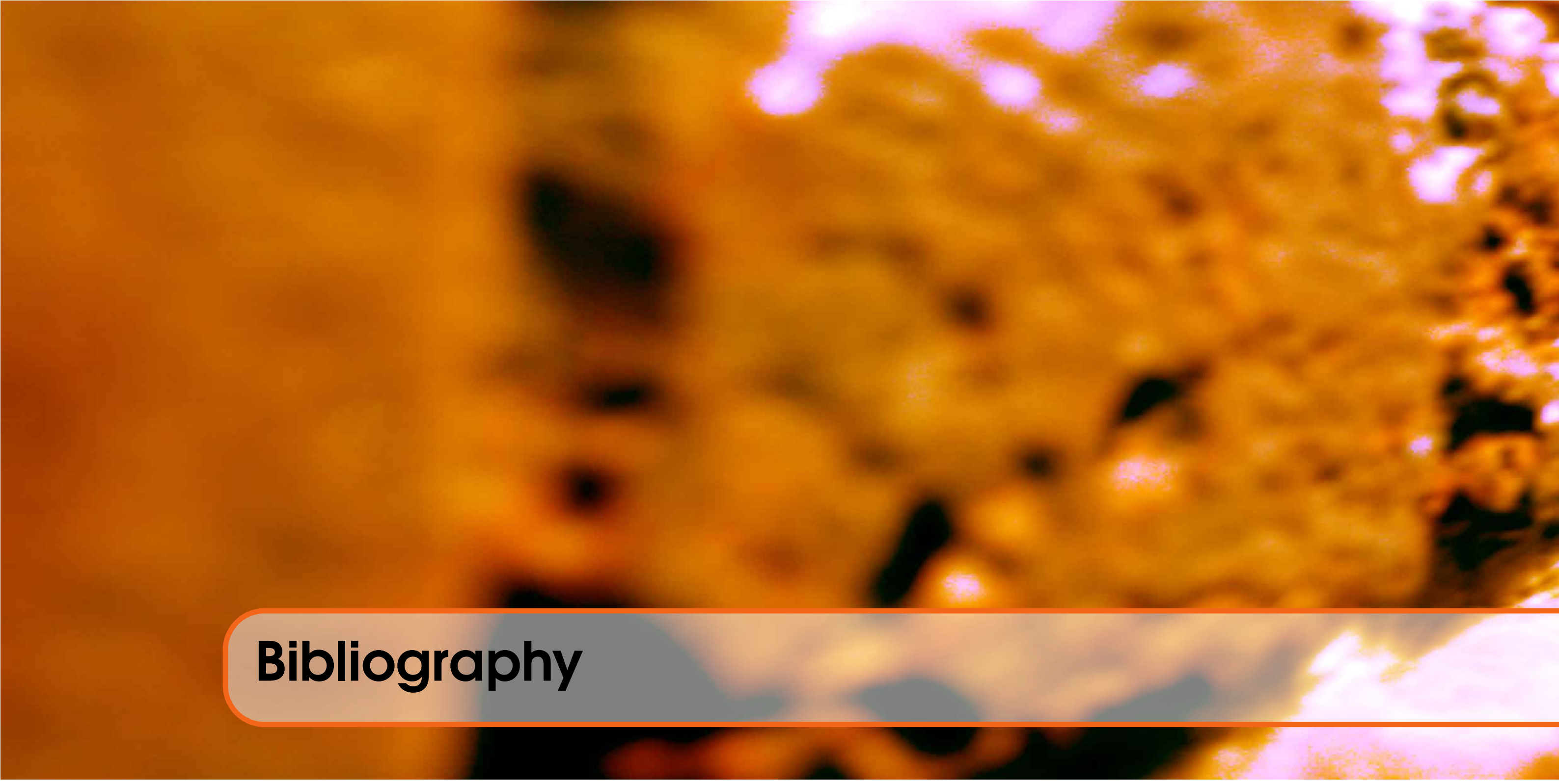


Figure 4.4: Grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari grafik di atas, jelas kita lihat bahwa jika x semakin mendekati $\pi/2$ (dari kiri), nilai fungsi semakin besar, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terbesarnya. Sebaliknya, jika x atau mendekati $\pi/2$ (dari kanan), maka nilai fungsi semakin kecil, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terkecilnya. Kondisi ini berulang pada saat x mendekati $3\pi/2$. Artinya, fungsi $y = \tan x$, tidak memiliki nilai maksimum dan minimum.



Bibliography