

The Search for a Title

A Profound Subtitle

Dr. John Smith

Copyright © 2013 John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the "License"). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an "AS IS" BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, March 2013

Contents

I

Part One

1	Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak	7
1.1	Persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel yang memuat nilai mutlak	7
1.1.1	Pendahuluan	7
1.1.2	Uraian Materi	8
1.2	Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel	14
2	Linear Tiga Variabel	23
2.1	SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL	23
2.2	Penerapan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel	26

II

Part Two

3	Fungsi	39
3.1	Relasi dan Fungsi	39
3.2	Operasi Aritmatika	50
3.3	Komposisi Fungsi	53
3.4	Fungsi Linear	55
3.5	Fungsi Kuadrat	63
3.6	Fungsi Inversi	75

3.7	Fungsi Rasional	82
4	Trigonometri	87
4.1	Pengukuran Sudut	87
4.2	Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku	94
4.3	Sudut-sudut Berelasi	102
4.4	Nilai Perbandingan Trigonometri untuk 0°, 30°, 45°, 60° dan 90°	102
4.5	Identitas Trigonometri	111
4.6	Aturan Sinus dan Cosinus	118
4.7	Fungsi Trigonometri	118
	Bibliography	123
	Books	123
	Articles	123



Part One

- 1 Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak**
7
1.1 Persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel yang memuat nilai mutlak
1.2 Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel
- 2 Linear Tiga Variabel 23**
2.1 SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL
2.2 Penerapan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel



1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

1.1 Persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel yang memuat nilai mutlak

1.1.1 Pendahuluan

Kompetensi Dasar

Menginterpretasi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dengan persamaan dan pertidaksamaan linear Aljabar lainnya.

Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variable.

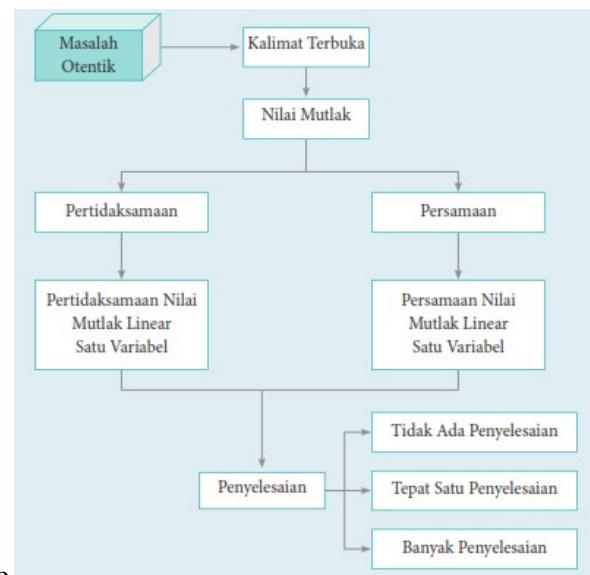
Indikator

1. Menjelaskan konsep nilai mutlak
2. Menyelesaikan persamaan nilai mutlak
3. Menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak satu variable
4. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan satu variable yang memuat nilai mutlak

Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak

8

Materi Pokok



Persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel

1.1.2 Uraian Materi

Kalimat Terbuka, Variabel, dan Konstanta

Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum dapat diketahui nilai kebenarannya.

Variable (peubah) adalah lambang (symbol) pada kalimat terbuka yang dapat diganti oleh sembarang anggota himpunan yang telah ditentukan

Konstanta adalah lambang yang menyatakan suatu bilangan tertentu

Pada kalimat berikut

$$x + 5 = 12$$

Belum dapat mengatakan kalimat itu benar atau salah, sebab nilai (x) belum diketahui. Bila lambang (x) diganti dengan lambang bilangan cacah, barulah itu dapat dikatakan kalimat itu benar atau salah. Jika (x) diganti dengan "3", kalimat itu bernilai salah ; tetapi bila (x) diganti dengan 7 , kalimat itu bernilai benar. Lambang (x) dapat pula diganti menggunakan huruf-huruf kecil dalam abjad lainnya, yaitu ; a, b,c,... x,y,z dari bentuk diatas

$$x+5+12 \quad (\text{kalimat terbuka})$$

$$3+5=12 \quad (\text{kalimat Salah})$$

$$7+5=12 \quad (\text{kalimat benar})$$

Huruf x pada $x + 5 = 12$ disebut variable (peubah), sedangkan 5 dan 12 disebut konstanta

Contoh :

Kalimat Terbuka	Peubah	Konstanta
$x + 13 + 17$	x	13 dan 17
$7 - y = 12$	y	7 dan 12
$4z - 1 = 11$	z	-1 dan 11

Catatan :

Kalimat terbuka adalah kalimat yang mengandung satu atau lebih variabel dan belum diketahui nilai kebenarannya, contoh :

$$x + 2 = 5$$

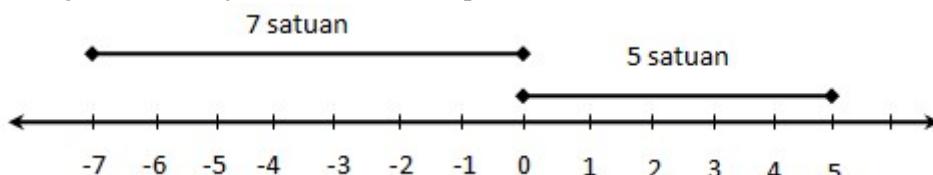
Konsep Nilai Mutlak



Nilai mutlak suatu bilangan dapat diartikan

jarak antara bilangan tersebut dari titik nol(0).

Dengan demikian jarak selalu bernilai positif.



Jarak angka 6 dari titik 0 adalah 6

Jarak angka -6 dari titik 0 adalah 6

Jarak angka -7 dari titik 0 adalah 7

Jarak angka 5 dari titik 0 adalah 5.

Dari penjelasan di atas memang tampak bahwa nilai mutlak suatu bilangan selalu bernilai positif.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Nilai mutlak dapat didefinisikan dengan Misalkan x bilangan real, didefinisikan

Nilai mutlak juga dapat didefinisikan dengan

"Apabila x adalah sebuah bentuk aljabar, sedangkan n merupakan bilangan real positif, maka $|x| = n$ dapat diimplikasikan menjadi $x = n$ atau $x = -n$ ".

$$|-7| = 7 \quad |-11| = 11 \quad |-15| = 15$$

$$|9| = 9 \quad |-23| = 23 \quad |-10| = 10$$

Berkaitan dengan menentukan nilai mutlak suatu bilangan, maka muncullah tanda mutlak. Tanda mutlak disimbolkan dengan garis 2 ditepi suatu bilangan atau bentuk aljabar.

Definisi di atas dapat diungkapkan dengan kalimat sehari-hari seperti berikut ini. Nilai mutlak suatu bilangan positif atau nol adalah bilangan itu sendiri, sedangkan nilai mutlak dari suatu bilangan negatif adalah lawan dari bilangan negatif itu. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa:

- $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, karena $\frac{1}{2} > 0$ ($\frac{1}{2}$ adalah bilangan positif)
- $|5| = 5$, karena $5 > 0$ (5 adalah bilangan positif)
- $|-3| = -(-3) = 3$, karena $-3 < 0$ (-3 adalah bilangan negatif)

Tabel 1.1 Nilai Mutlak

Bilangan Non Negatif	Nilai Mutlak	Bilangan Negatif	Nilai Mutlak
0	0	-2	2
2	2	-3	3
3	3	-4	4
5	5	-5	5

Berdasarkan kedua cerita dan tabel di atas, dapatkah kamu menarik suatu kesimpulan tentang pengertian nilai mutlak? Jika x adalah variabel pengganti sebarang bilangan real, dapatkah kamu

Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak

10

menentukan nilai mutlak dari x tersebut?

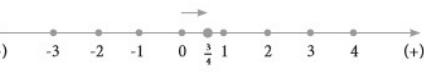
Perhatikan bahwa x anggota himpunan bilangan real (ditulis $x \in \mathbb{R}$). Berdasarkan tabel, kita melihat bahwa nilai mutlak dari x akan bernilai positif atau nol (non negatif). Secara geometris, nilai mutlak suatu bilangan adalah jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan real. Dengan demikian, tidak mungkin nilai mutlak suatu bilangan bernilai negatif, tetapi mungkin saja bernilai nol.

Ada beberapa contoh percobaan perpindahan posisi pada garis bilangan, yaitu sebagai berikut:

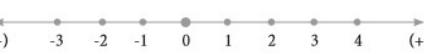
1. $|3| = 3$



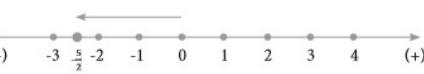
2. $\left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$



3. $|0| = 0$



4. $\left|\frac{-5}{2}\right| = \frac{5}{2}$



5. $|-3| = 3$



Catatan:

Garis bilangan digunakan sebagai media untuk menunjukkan nilai mutlak.

Tanda panah digunakan untuk menentukan besar nilai mutlak, dimana arah ke kiri menandakan nilai mutlak dari bilangan negatif, dan begitu juga sebaliknya. Arah ke kanan menandakan nilai mutlak dari bilangan positif.

Besar nilai mutlak dilihat dari panjang tanda panah dan dihitung dari bilangan nol.

Penjelasan

Garis bilangan 1: Tanda panah bergerak ke arah kanan berawal dari bilangan 0 menuju bilangan 3, dan besar langkah yang dilalui tanda panah adalah 3. Hal ini berarti nilai $|3| = 3$ atau berjarak 3 satuan dari bilangan 0.

Garis bilangan 5: Tanda panah bergerak ke arah kiri berawal dari bilangan 0 menuju bilangan -3, dan besar langkah yang dilalui tanda panah adalah 3. Hal ini berarti bahwa nilai $|-3| = 3$ atau berjarak 3 satuan dari bilangan 0.

Dari kedua penjelasan di atas, dapat dituliskan konsep nilai mutlak, sebagai berikut.

Misalkan x bilangan real, $|x|$ dibaca nilai mutlak x , dan didefinisikan

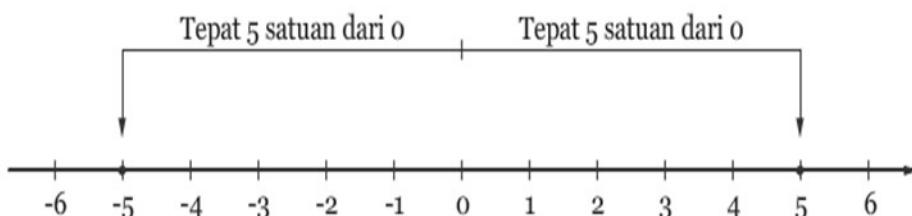
$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Definisi di atas dapat diungkapkan dengan kalimat sehari-hari seperti berikut ini. Nilai mutlak suatu bilangan positif atau nol adalah bilangan itu sendiri, sedangkan nilai mutlak dari suatu bilangan negatif adalah lawan dari bilangan negatif itu. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa:

- $|1| = 1$, karena $1 > 0$ (1 adalah bilangan positif).
- $|5| = 5$, karena $5 > 0$ (5 adalah bilangan positif).
- $|-3| = -(-3) = 3$, karena $-3 < 0$ (-3 adalah bilangan negatif).

Persamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

Nilai mutlak dari suatu bilangan x dapat diartikan sebagai jarak bilangan tersebut terhadap titik 0 pada garis bilangan, dengan tidak memperhatikan arahnya. Ini berarti $|x| = 5$ memiliki dua solusi, karena terdapat dua bilangan yang jaraknya terhadap 0 adalah 5: $x = -5$ dan $x = 5$ (perhatikan gambar berikut).



Himpunan Penyelesaian (HP) adalah himpunan dari penyelesaian-penyelesaian suatu persamaan

Ada dua cara untuk menentukan penyelesaian dan himpunan penyelesaian dari suatu persamaan linier satu variabel, yaitu :

1. Subtitusi

Selesaikan persamaan $3x-1=14$; jika x merupakan anggota himpunan $P = \{3, 4, 5, 6\}$!

Jawab :

$$3x-1+14 \in P = \{3, 4, 5, 6\}$$

Cara substitusi :

$$3x-1=14; \text{ jika } x=3 \Rightarrow 3(?) - 1 = 8 \text{ (salah)}$$

$$3x-1=14; \text{ jika } x=4 \Rightarrow 3(?) - 1 = 11 \text{ (salah)}$$

$$3x-1=14; \text{ jika } x=5 \Rightarrow 3(?) - 1 = 14 \text{ (benar)}$$

$$3x-1=14; \text{ jika } x=6 \Rightarrow 3(?) - 1 = 17 \text{ (salah)}$$

Jadi, penyelesaian dari $3x-1=14$ adalah 5

1. Mencari persamaan-persamaan yang ekuivalen

Mencari persamaan-persamaan yang ekuivalen

	Persamaan	Operasi Hitung	Hasil
A	$3x-1=14$ (i)	Kedua ruas ditambah 1	$3x-1+1=14+1$ $3x=15$ (ii)
b.			
c.			
	$3x=15$	Kedua ruas dikalikan $1/3$	$3x=15$ $x=5$ (iii)
	$X=5$		

Dari tabel diatas, bila $x = 5$, disubstitusikan pada (a), (b) dan (c) maka persamaan tersebut menjadi suatu kesamaan .

$$1. \quad 3x-1=14$$

$$3(?) - 1 = 14$$

$$14 = 14 \quad (\text{ekuivalen})$$

$$1. \quad 3x=15$$

$$15 = 15 \quad (\text{ekuivalen})$$

$$1. \quad x=5$$

$$5 = 5 \quad (\text{ekuivalen})$$

Berarti $3x - 1 = 14$ dan $3x = 15$ merupakan persamaan yang ekuivalen.

Suatu persamaan dapat dinyatakan ke dalam persamaan yang ekuivalen, dengan cara :

- Menambah atau mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama

Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat 12 Nilai Mutlak

2. Mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan bukan nol yang sama.

Persamaan yang ekuivalen adalah persamaan-persamaan yang memiliki himpunan penyelesaian sama jika pada persamaan tersebut dilakukan operasi tertentu

Contoh Soal :

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan nilai Mutlak di bawah ini.

$$1. |x + 5| = 3$$

$$2. |2x - 3| = 5$$

$$3. |x + 1| + 2x = 7$$

$$3. |3x + 4| = x - 8$$

Jawaban: Bentuk-bentuk persamaan nilai mutlak di atas dapat diselesaikan sebagai berikut. Pada prinsipnya, langkah-langkah penyelesaian nilai mutlak diusahakan bentuk mutlak berada di ruas kiri. 1. Pada bentuk ini ada dua penyelesaian. (*) $x + 5 = 3$, maka $x = 3 - 5 = -2$ (***) $x + 5 = -3$, maka $x = -3 - 5 = -8$. Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-2, -8\}$. 2. Pada bentuk ini ada dua penyelesaian. (*) $2x + 3 = 5$, maka $2x = 5 - 3$ $2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (***) $2x + 3 = -5$, maka $2x = -5 - 3$ $2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$. Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-4, 1\}$. Perhatikan bentuk aljabar di dalam tanda mutlak, yaitu $x+1$. Penyelesaian persamaan nilai mutlak ini juga dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama untuk batasan $x+1 \geq 0$ atau $x \geq -1$. Bagian kedua untuk batasan $x+1 < 0$ atau $x < -1$. Mari kita selesaikan. (*) untuk $x \geq -1$. Persamaan mutlak dapat dituliskan: $(x + 1) + 2x = 7$ $3x = 7 - 1$ $3x = 6$ $x = 2$ (terpenuhi, karena batasan ≥ -1). (***) Untuk $x < -1$. Persamaan mutlak dapat dituliskan: $-(x + 1) + 2x = 7$ $-x - 1 + 2x = 7$ $x = 7 + 1$ $x = 8$ (tidak terpenuhi, karena batasan < -1). Jadi, Himpunan penyelesaiannya adalah $\{2\}$.

4. Perhatikan bentuk aljabar di dalam tanda mutlak, yaitu $3x + 4$. Penyelesaian persamaan nilai mutlak ini juga dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama untuk batasan $3x + 4 \geq 0$ atau $x \geq -4/3$. Bagian kedua untuk batasan $3x + 4 < 0$ atau $x < -4/3$. Mari kita selesaikan. (*) Untuk $x \geq -4/3$. Persamaan mutlak dapat dituliskan: $(3x + 4) = x - 8$ $3x - x = -8 - 4$ $2x = -12$ $x = -6$ (tidak terpenuhi, karena batasan $\geq -4/3$). (***) Untuk $x < -4/3$. Persamaan mutlak dapat dituliskan: $-(3x + 4) = x - 8$ $-3x - 4 = x - 8$ $-3x - x = -8 + 4$ $-4x = -4$ $x = 1$ (tidak terpenuhi, karena batasan $< -4/3$). Jadi, Tidak ada Himpunan penyelesaiannya.

Rangkuman

1. Untuk setiap bilangan x ($x \in \mathbb{R}$), harga mutlak dari x ditulis x dan

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

2. Persamaan adalah kalimat matematika terbuka yang memuat tanda sama dengan ("="), sedangkan kesamaan adalah kalimat matematika tertutup yang memuat tanda sama dengan ("=").

3. Jika $P(x)$, $Q(x)$, dan $R(x)$ bentuk-bentuk akar dalam x , maka kalimat terbuka $P(x) = R(x)$

A. $P(x) + R(x) = Q(x) + R(x)$

B. $P(x) \cdot R(x) = Q(x) \cdot R(x)$

C. $\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{R(x)}$

adalah ekivalen dengan tiap-tiap dari yang berikut :

1. $\sqrt{x^2} = |x|$ Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

(a). $|x| = |-x|$

(b). $|x| = |-x^2| = x^2$

1. (c). $|xy| = |x||y|$ “Jika $U(x)$ dan $V(x)$ ungkapan-ungkapan dalam x , maka himpunan penyelesaian dari $U(x) = V(x)$ adalah himpunan bagian dari himpunan penyelesaian $\{u(x)\}^n = \{V(x)\}^n$ untuk tiap-tiap $x \in \mathbb{N}$ (himpunan bilangan asli)”.

(d). $\left| \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{|x|}{|y|} \right|$

(e). $|x - y| = |y - x|$

2. (f). $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $y \in \mathbb{R}$ berlaku

1. $|2 - \sqrt{3}| =$

A. $2 - \sqrt{3}$

B. $-2 + \sqrt{3}$

B. $2 + \sqrt{3}$

D. $-2 - \sqrt{3}$

2. Jika $x < 1$, maka $|x - 1| =$

A. $x - 1$

B. $1 - x$

C. $x + 1$

D. $-x - 1$

3. $|-3| \cdot |2(3-5)| =$

A. 7

B. 4

C. 3

D. 1

4. $13 + |-1-4| - 3 - |-8| =$

A. 13

B. 11

C. 7

D. 5

5. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku $|-x| =$

TES FORMATIF 1

Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak

6. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $|a - b| =$

- A. $|a+b| =$ B. $|b-a| =$
 C. $|-a-b| =$ D. A, B dan C salah

7. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|5x+1| = 3$

- A. $\left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right\}$ B. $\left\{ -\frac{2}{5}, \frac{4}{5} \right\}$
 C. $\left\{ \frac{2}{5}, -\frac{4}{5} \right\}$ D. $\left\{ -\frac{2}{5}, -\frac{4}{5} \right\}$

8. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|3x + 4| = -5$

- A. $\left\{\frac{1}{3}, -3\right\}$ B. $\left\{-\frac{1}{3}, -3\right\}$
 C. $\left\{-\frac{1}{3}, 3\right\}$ D. \emptyset

9. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|1+2(x-1)| = |3x+7|$

- A. $\{ 6 \}$ B. $\{ 6, \frac{8}{6} \}$
 C. $\{ \frac{8}{6} \}$ D. \emptyset

10. Himpunan penyelesaian dari persamaan $|3x - 3| = |3x + 5|$

- A. $\{-\frac{1}{4}, 4\}$

B. $\{\frac{1}{4}, -4\}$

C. $\{-\frac{1}{4}, -4\}$

D. $\{\frac{1}{4}, 4\}$

1.2 Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

1. KOMPETENSI INTI (KI)

2. Memahami dan menerapkan pengetahuan faktual, konseptual, prosedural dalam ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah
 3. Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan

1. KOMPETENSI DASAR (KP)

- 1.1 Menginterpretasi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dengan persamaan dan pertidaksamaan linear Aljabar lainnya.

- 1.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel

1. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI

1. INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI
 2. Memahami dan menjelaskan konsep nilai mutlak.
 3. Menentukan penyelesaian persamaan nilai mutlak linear satu variabel.
 4. Menentukan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel.
 5. Menggunakan konsep nilai mutlak untuk menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan nilai mutlak.

6. Menggunakan konsep persamaan dan pertidaksamaan untuk menentukan penyelesaian permasalahan nilai mutlak.

1. TUJUAN PEMBELAJARAN

2. Setelah membaca, berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat memahami dan menjelaskan konsep nilai mutlak dengan baik dan percaya diri.
3. Setelah berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat menentukan penyelesaian persamaan nilai mutlak satu variable dengan percaya diri.
4. Setelah berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat pertidaksamaan nilai mutlak satu variable dengan percaya diri.
5. Disediakan permasalahan kontekstual dan LKS, peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan tersebut dengan konsep nilai mutlak secara mandiri.
6. Disediakan permasalahan nilai mutlak dan LKS, peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan nilai mutlak dengan menggunakan konsep persamaan dan pertidaksamaan secara mandiri.

MATERI PEMBELAJARAN

Pertidaksamaan adalah kalimat/pernyataan matematika yang menunjukkan perbandingan ukuran dua objek atau lebih dan dihubungkan oleh satu dari beberapa simbol berikut :

1. $<$ (kurang dari)
2. $>$ (lebih dari)
3. \leq (kurang dari atau sama dengan)
4. \geq (lebih dari atau sama dengan)

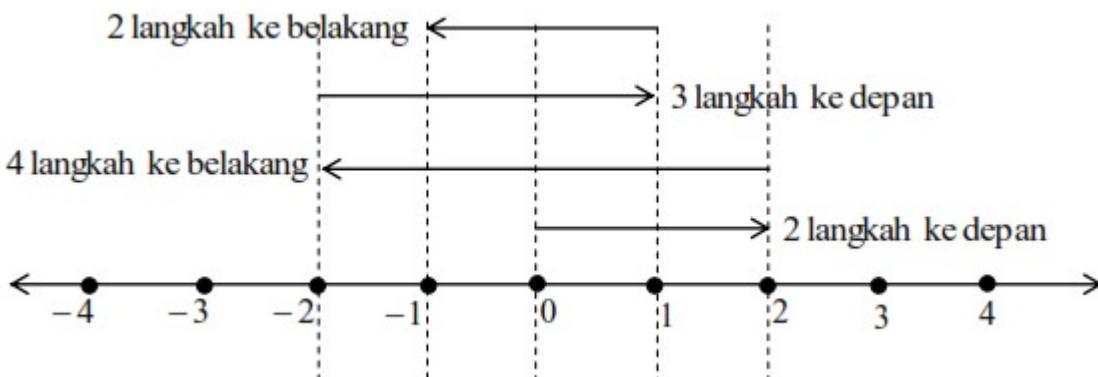
Nilai Mutlak adalah nilai suatu bilangan yang dihitung dari jarak bilangan itu dengan nol (0), sehingga bilangan yang dinilai mutlak selalu bernilai positif.

1. (a) Konsep Nilai Mutlak

Untuk memahami konsep nilai mutlak, akan diilustrasikan dengan cerita berikut ini: Seorang anak pramuka sedang latihan baris berbaris. Dari posisi diam, si anak diminta maju 2 langkah ke depan, kemudian 4 langkah ke belakang. Dilanjutkan dengan 3 langkah ke depan dan akhirnya 2 langkah ke belakang. Dari cerita di atas dapat diambil permasalahan :

1. (a) i. Berapakah banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir ?
- ii. Dimanakah posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam? (berapa langkah ke depan atau berapa langkah ke belakang)

Untuk menjawab permasalahan diatas, akan diberikan gambar garis bilangan berikut:



Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa $x = 0$ adalah posisi diam (awal) si anak. Anak panah ke kanan menunjukkan arah langkah ke depan (bernilai positif) dan anak panah ke kiri menunjukkan arah langkah ke belakang (bernilai negatif). Sehingga permasalahan di atas dapat dijawab sebagai

**Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat
Nilai Mutlak**

berikut :

1. Banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir adalah bentuk penjumlahan $2 + 4 + 3 + 2 = 11$ langkah. Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan tampa memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif)
2. Dari gambar diatas, dapat dilihat bahwa posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam adalah 1 langkah ke belakang ($x = -1$). Hasil ini didapat dari bentuk penjumlahan $2 + (-4) + 3 + (-1) = -1$. Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan dengan memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif).

Ilustrasi dari penyelesaian soal (a) di atas merupakan dasar dari konsep nilai mutlak. Dimana **Nilai mutlak suatu bilangan real x merupakan jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan**. Dan dilambangkan dengan x . Secara formal nilai mutlak didefinisikan :

Misalkan x bilangan real, maka : $|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$

1. (a) Pertidaksamaan Nilai Mutlak Satu Variabel

Pertidaksamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat berikut :

Bentuk 1

1. Jika $|f(x)| < a$, maka $-a < f(x) < a$
2. Jika $|f(x)| > a$, maka $f(x) < -a$ atau $f(x) > a$

Bentuk 2

1. Jika $|f(x)| < g(x)$, maka $f^2(x) < g^2(x)$, dengan syarat $g(x) > 0$
2. Jika $|f(x)| > g(x)$, maka $f^2(x) > g^2(x)$, dengan syarat $g(x) > 0$

Bentuk 3

1. Jika $|f(x)| < |g(x)|$, maka $f^2(x) < g^2(x)$
2. Jika $|f(x)| > |g(x)|$, maka $f^2(x) > g^2(x)$

Contoh :

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x + 3| < 5$

Jawab :

$$|2x + 3| < 5$$

$$-5 < 2x + 3 < 5$$

$$-5 - 3 < 2x + 3 - 3 < 5 - 3$$

$$-8 < 2x < 2$$

$$-4 < x < 1$$

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x - 9| < 4x - 3$

Jawab :

$$|2x - 9| < 4x - 3$$

$$(2x - 9)^2 < (4x - 3)^2$$

$$4x^2 - 36x + 81 < 16x^2 - 24x + 9$$

$$-12x^2 - 12x + 72 < 0$$

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x + 3)(x - 2) > 0$$

$$x < -3 \text{ atau } x > 2 \quad \dots \dots \quad (??)$$

$$\text{Syarat : } 4x - 3 > 0 \implies x > \frac{3}{4} \quad \dots \dots \quad (??)$$

Dari (??) dan (??) diperoleh interval : $x > 2$

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|x+4| \geq |3x-8|$

Jawab :

$$|x+4| \geq |3x-8|$$

$$(x+4)^2 \geq (3x-8)^2$$

$$x^2 + 8x + 16 \geq 9x^2 - 48x + 64$$

$$-8x^2 + 56x - 48 \geq 0$$

$$x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 6$$

1. (a) Menemukan konsep nilai mutlak

Nilai mutlak dari suatu bilangan adalah positif. Hal ini sama dengan akar dari sebuah bilangan selalu positif. Misal $a \in R$, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$. Dengan demikian grafik fungsi nilai mutlak selalu berada di atas sumbu X.

Konsep

Persamaan dan pertidaksamaan linier dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan.

Misalnya jika diketahui $|ax+b| = c$, untuk $a, b, c \in R$,

maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax+b = c$.

Demikian juga untuk pertidaksamaan linier.

Prinsip

1. Bentuk umum dari persamaan linier dinyatakan : $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linier satu variable dan apabila $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$ maka diperoleh persamaan linier dua variable.
2. Pertidaksamaan linier adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan tanda pertidaksamaan $<$, \leq , $>$, dan \geq . $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n > 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan linier satu variable dan apabila $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$ maka diperoleh pertidaksamaan linier dua variable. Bentuk umum dari persamaan linier dinyatakan : $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linier satu variable dan apabila $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$ maka diperoleh persamaan linier dua variable.

1. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linier adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variable yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaan dapat :

(??) tepat satu,

(??) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian, atau

(??) tidak punya penyelesaian.

4. Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan lambing $<$, $>$, \geq , dan \leq . Contohnya bentuk pertidaksamaan : $y + 7 < 7$ dan $2y + 1 > y + 4$. Pertidaksamaan linier dengan satu variable adalah suatu kalimat terbuka yang hanya memuat satu variable dengan derajad satu, yang dihubungkan oleh lambang $<$, $>$, \geq , dan \leq . Variablenya hanya satu yaitu y dan berderajad satu. Pertidaksamaan yang demikian disebut pertidaksamaan linier dengan satu variable (peubah).

Menentukan Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linier Satu variabel

Sifat-sifat pertidaksamaan adalah :

Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat Nilai Mutlak

18

1. Jika pada suatu pertidaksamaan kedua ruasnya ditambah atau dikurang dengan bilangan yang sama, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
2. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan positif , maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
3. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan negatif , maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula bila arah dari tanda ketidaksamaan dibalik
4. Jika pertidaksamaannya mengandung pecahan, cara menyelesaiannya adalah mengalikan kedua ruasnya dengan KPK penyebut-penyebutnya sehingga penyebutnya hilang .

Menyelesaikan Pertidaksamaan Nilai MutlakMenyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak caranya hampir sama dengan persamaan nilai mutlak. hanya saja berbeda sedikit pada tanda ketidaksamaannya. Langkah-langkah selanjutnya seperti menyelesaikan pertidaksamaan linear atau kuadrat satu variabel .Pertidaksamaan mutlak dapat digambarkan sebagai berikut.

Untuk $|x|$, $\begin{cases} |x| < a & \text{, maka penyelesaiannya } -a < x < a \\ |x| > a & \text{, maka penyelesaiannya } x < -a \text{ atau } x > a \end{cases}$

Dengan $a \geq 0, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

Apabila fungsi di dalam nilai mutlak berbentuk $ax + b$ maka pertidaksamaan nilai mutlak dapat diselesaikan seperti berikut.

Untuk $|ax + b|$, $\begin{cases} |ax + b| < p & \text{, maka penyelesaiannya } -p < ax + b < p \\ |ax + b| > p & \text{, maka penyelesaiannya } ax + b < -p \text{ atau } ax + b > p \end{cases}$

Dengan $p \geq 0, x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$

Lebih jelasnya per-

hatikan contoh berikut ini.

Contoh 1 :

Tentukan himpunan penyelesaian $3x - 7 > 2x + 2$ jika x merupakan anggota $\{1,2,3,4,\dots,15\}$

Jawab :

$$3x - 7 > 2x + 2; x \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$$

$$3x - 2x - 7 > 2x - 2x + 2 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 2x)$$

$$x - 7 > 2$$

$$x - 7 + 7 > 2 + 7 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 7)$$

$$x > 9$$

jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x | x > 9 ; x \text{ bilangan asli } \leq 15\}$

$$\text{HP} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Contoh 2 :

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $3x - 1 < x + 3$ dengan x variable pada himpunan bilangan cacah.

Jawab :

$$3x - 1 < x + 3$$

$$3x - 1 + 1 < x + 3 + 1 \quad (\text{kedua ruas ditambah } 1)$$

$$3x < x + 4$$

$$3x + (-x) < x + (-x) + 4 \quad (\text{kedua ruas ditambah } -x)$$

$$2x < 4$$

$$X < 2$$

Karena x anggota bilangan cacah maka yang memenuhi $x < 2$ adalah $x = 0$ atau $x = 1$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{0, 1\}$.

Contoh 3 :

Sebuah perahu angkut dapat menampung dengan berat tidak lebih dari 1 ton . jika sebuah kotak beratnya 15 kg, maka berapa paling banyak kotak yang dapat diangkut oleh perahu ?

Jawab :

Kalimat matematika : $15 \text{ kg } x \leq 1 \text{ ton}$

Penyelesaian : $15 \text{ kg } x \leq 1.500 \text{ kg}$

$$x \leq 1.500 \text{ kg}$$

$$15 \text{ kg}$$

$$x \leq 100$$

jadi perahu paling banyak mengangkut 100 kotak .

Contoh 4 :

Jarak terpendek yang diperlukan untuk menghentikan suatu mobil sejak penggereman dilakukan disebut jarak henti. Jarak henti ini merupakan faktor penting yang perlu diuji sebelum peluncuran produk mobil baru. Data mengenai jarak henti dapat digunakan untuk menghitung waktu reaksi pengemudi (selang waktu mulai pengemudi melihat kejadian sampai dia bereaksi menginjak pada rem) berdasarkan tingkat kelajuan mobil (dalam meter/jam).

Suatu penelitian menyatakan bahwa jarak henti dapat dinyatakan dengan formula : $d = |0,44v^2 + 1,1v|$, dimana v adalah kelajuan dan d dalam meter.

Pada batas kelajuan berapakah jarak henti mobil lebih dari 100 meter?

Penyelesaian :

Oleh karena kelajuan selalu bernilai positif, maka $|0,44v^2 + 1,1v| = 0,44v^2 + 1,1v$. Selanjutnya, agar jarak henti mobil lebih dari 100 meter, maka d haruslah lebih besar dari seratus.

$$\begin{aligned} |0,44v^2 + 1,1v| &> 100 \\ \Leftrightarrow 0,44v^2 + 1,1v - 100 &> 0 \\ \Leftrightarrow 22v^2 + 55v - 5000 &> 0 \end{aligned}$$

$$a = 22, b = 55, c = -5000$$

$$v = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$v = \frac{-55 \pm \sqrt{3025 + 440000}}{44}$$

$$v = \frac{-55 \pm \sqrt{443025}}{44}$$

$$v \approx \frac{-55 \pm 665,6}{44}$$

$$v_1 \approx \frac{-55 + 665,6}{44} \approx 13,9 \text{ meter/jam}$$

$$v_2 \approx \frac{-55 - 665,6}{44} \approx -16,4 \text{ meter/jam}$$

Jadi, batas kelajuannya jarak henti mobil lebih dari 100 meter adalah $-16,4 < v < 13,9$ meter/jam.

Contoh 5 :

Selisih antara panjang dan lebar suatu persegi panjang kurang dari 6 cm. Jika keliling persegi panjang adalah 32 cm, maka tentukan batas nilai lebar persegi panjang tersebut!

Penyelesaian :

Oleh karena keliling persegi panjang adalah 32 cm, maka $2(p + l) = 32 \Leftrightarrow p + l$

**Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat
Nilai Mutlak**

$$= 16 \Leftrightarrow p = 16 - l$$

Selanjutnya, karena selisih antara panjang dan lebar persegi kurang dari 6 cm, maka

$$\begin{aligned} |p - l| &< 6 \\ \Leftrightarrow -6 &< 16 - l - l < 6 \\ \Leftrightarrow -6 &< 16 - 2l < 6 \\ \Leftrightarrow -6 - 16 &< -2l < 6 - 16 \\ \Leftrightarrow -22 &< -2l < -10 \\ \Leftrightarrow -11 &< -l < -5 \\ \Leftrightarrow 11 &> l > 5 \\ \Leftrightarrow 5 &< l < 11 \end{aligned}$$

Dengan demikian, batas nilai lebar persegi panjang yang dimaksud adalah antara 5 cm sampai dengan 11 cm.

Contoh 6 :

Pergerakan suatu titik dalam koordinat kartesius ditentukan oleh nilai absis dan memenuhi pertidaksamaan $|x - 1| + 2|x - 1| < 15$. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan tersebut!

Penyelesaian :

Jika dimisalkan $|x - 1| = p$, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p^2 + 2p &< 15 \\ \Leftrightarrow p^2 + 2p - 15 &< 0 \\ \Leftrightarrow (p + 5)(p - 3) &< 0 \\ \Leftrightarrow -5 &< p < 3 \\ \Leftrightarrow p < 3 \text{ atau } p &> -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &< 3 \\ \Leftrightarrow |x - 1| &< 3 \\ \Leftrightarrow -3 &< x - 1 < 3 \\ \Leftrightarrow -3 + 1 &< x < 3 + 1 \\ \Leftrightarrow -2 &< x < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &> -5 \\ \Leftrightarrow |x - 1| &> -5 \text{ selalu terpenuhi untuk setiap } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

jadi, nilai x yang memenuhi adalah $\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4 \}$.

Mengubah soal cerita ke bentuk pertidaksamaan linear

Pertidaksamaan Linear adalah peridaksamaan yang memiliki variabel atau peubah yang berderajat satu. Pada kesempatan sebelumnya telah dibahas bagaimana penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel. Berdasarkan prinsip penyelesaian tersebut, pertidaksamaan linear ternyata dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu untuk menyelesaikan berbagai persoalan atau perhitungan yang melibatkan pertidaksamaan. Beberapa perhitungan matematika dapat diterjemahkan ke dalam model matematika berbentuk pertidaksamaan satu variabel. Soal tersebut dapat diubah ke pertidaksamaan nilai mutlak sesuai model soalnya. Pada kesempatan ini, bahan belajar sekolah akan membahas bagaimana cara mengubah soal cerita ke bentuk pertidaksamaan linear dan menentukan

penyelesaiannya.

Bentuk Pertidaksamaan Linear

Setiap masalah memiliki bentuknya masing-masing. Tidak sesuai soal dapat diselesaikan dengan model matematika berbentuk pertidaksamaan linear. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan suatu permasalahan kita harus mengidentifikasi bentuk pertidaksamaan yang paling relevan dengan masalah tersebut.

Karena kita berbicara tentang pertidaksamaan linear, maka kita harus terlebih dahulu memahami ciri dari pertidaksamaan linear dan mengenali ciri-ciri soal yang berkaitan dengan pertidaksamaan linear. Salah satu ciri utama yang dapat kita lihat adalah penggunaan kata-kata pertidaksamaan. Dalam Soal cerita, hubungan pertidaksamaan seringkali dihadirkan dengan penggunaan kata-kata seperti kurang dari, sebanyak-banyaknya, maksimal, dan sebagainya. Kata-kata tersebut merupakan indikasi bahwa soal tersebut berbentuk pertidaksamaan. Selanjutnya, kita harus mengidentifikasi kondisi yang diketahui dalam soal. Kita harus mengidentifikasi besaran yang digunakan dalam soal dan selanjutnya menyatakan besaran tersebut sebagai variabel. Setelah itu, kita susunlah pertidaksamaan yang sesuai dengan soal. Sebagai acuan, kita harus memahami bentuk umum atau bentuk baku dari pertidaksamaan yang ingin kita gunakan. Karena kita membahas pertidaksamaan linear satu variabel, maka kita harus memahami bentuk baku dari pertidaksamaan linear satu variabel.

Bentuk baku pertidaksamaan linear satu variabel dalam variabel x :

1. Pertidaksamaan kurang dari : $ax + b < 0$
2. Pertidaksamaan kurang dari sama dengan : $ax + b \leq 0$
3. Pertidaksamaan lebih dari : $ax + b > 0$
4. Pertidaksamaan lebih dari sama dengan : $ax + b \geq 0$

Pada bentuk di atas, x merupakan variabel atau peubah sedangkan a dan b merupakan bilangan-bilangan real. Nilai a dan b diperoleh dari soal cerita sehingga bentuk pertidaksamaannya akan bergantung pada soal ceritanya.

Suatu pertidaksamaan linear satu variabel dapat diselesaikan dengan metode manipulasi aljabar. Dalam memanipulasi aljabar pertidaksamaan linear, ada aturan atau sifat-sifat yang harus diperhatikan.

Menyelesaikan soal cerita berbentuk pertidaksamaan linear

Untuk menyelesaikan suatu soal cerita, kita harus memastikan bentuk pertidaksamaan yang sesuai. Jika soal cerita sudah dipastikan berbentuk pertidaksamaan linear satu variabel, maka soal tersebut dapat kita selesaikan dengan prinsip penyelesaian pertidaksamaan linear.

Langkah pertama yang harus kita lakukan adalah mengidentifikasi besaran yang tidak diketahui nilainya dalam soal. Besaran inilah yang nanti akan kita nyatakan sebagai variabel. Kemudian kita identifikasi nilai-nilai yang diketahui dalam soal dan hubungan pertidaksamaan yang digunakan. Selanjutnya kita lakukan pemisalan untuk menyatakan besaran sebagai variabel. Kita bisa menggunakan symbol huruf abjad yang paling relevan dengan besaran tersebut kemudian kita susun bentuk pertidaksamaannya berdasarkan nilai-nilai yang diketahui dalam soal.

Setelah dihasilkan bentuk pertidaksamaan linear satu variabel, selanjutnya kita selesaikan pertidaksamaan tersebut dengan prinsip manipulasi aljabar. Dalam manipulasi ini kita harus memperhatikan sifat-sifat perubahan tanda pertidaksamaan.

Berdasarkan uraian diatas, maka berikut langkah menyelesaikan soal cerita yang berbentuk pertidaksamaan linear satu variabel:

1. Identifikasi besaran yang tidak diketahui dalam soal
2. Nyatakan besaran tersebut sebagai variabel
3. Identifikasi hubungan pertidaksamaan yang digunakan
4. Susun pertidaksamaan linear satu variabel sesuai soal
5. Tentukan penyelesaian pertidaksamaannya.

Chapter 1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel yang Memuat 22 Nilai Mutlak

Contoh Soal Cerita

Jumlah dua bilangan tidak kurang dari 400. Jika bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan kedua, maka tentukanlah batas-batas nilai dari kedua bilangan tersebut.

Pembahasan :

Langkah pertama, kita identifikasi besaran yang belum diketahui. Besaran tersebut adalah bilangan pertama dan bilangan kedua. Selanjutnya kita misalkan bilangan pertama dan bilangan kedua sebagai variabel.

Misalkan :

Bilangan pertama = x

Bilangan kedua = y

Dari soal diketahui kalau bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan kedua, dengan demikian berlaku hubungan $x=4y$

Selanjutnya diketahui bahwa jumlah kedua bilangan tersebut tidak kurang dari 400. Kata "Tidak kurang" dalam soal merupakan indikasi hubungan pertidaksamaan lebih besar sama dengan (\geq). Itu artinya, model pertidaksamaannya adalah pertidaksamaan lebih dari sama dengan.

Berdasarkan kondisi yang diketahui dalam soal, maka bentuk pertidaksamaan yang sesuai dengan soal adalah sebagai berikut :

$$1. \ x + y \geq 400$$

Karena $x = 4y$, maka pertidaksamaannya menjadi:

$$1. \ 4y + y \geq 400$$

$$2. \ 5y \geq 400$$

Selanjutnya, kita selesaikan pertidaksamaan linear tersebut dengan manipulasi aljabar yaitu dengan membagi kedua ruas dengan 5 sehingga diperoleh :

$$1. \ 5y \geq 400$$

$$2. \ y \geq 80$$

Karena kedua ruas sama-sama dibagi 5 (bilangan positif), maka tanda pertidaksamaannya tetap.

Nilai y di atas merupakan batas nilai untuk bilangan kedua.

Selanjutnya kita tentukan batas nilai untuk bilangan pertama:

$$1. \ x + y \geq 400$$

$$2. \ x + 80 \geq 400$$

$$3. \ x + 80 - 80 \geq 400 - 80$$

$$4. \ x \geq 320$$

Jadi, batas nilai untuk bilangan pertama tidak kurang dari 80 dan batas nilai untuk bilangan kedua tidak kurang dari 320.

2. Linear Tiga Variabel

2.1 SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL

SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL (SPLTV)

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah sistem persamaan yang terdiri dari tiga persamaan di mana masing-masing persamaan memiliki tiga variabel. Contoh SPLTV dengan variabel x , y dan z :

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = d_1 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = d_2 \\ a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = d_3 \end{cases}$$

dimana a, b, c dan d adalah bilangan-bilangan real.

Pada SPLTV terdapat 2 cara penyelesaian, yaitu:

1. Metode Subtitusi

Langkah yang dilakukan pada metode ini yaitu:

1. Ubah salah satu persamaan yang ada pada sistem dan nyatakan x sebagai fungsi dari y dan z , atau y sebagai fungsi dari x dan z , atau z sebagai fungsi dari x dan y .
2. Subtitusikan fungsi x atau y atau z dari langkah pertama pada dua persamaan yang lain, sehingga diperoleh SPLDV.
3. Selesaikan SPLDV yang diperoleh dengan metode yang dibahas pada penyelesaian SPLDV di atas.

Contoh Soal: Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear tiga variabel berikut:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 6 \dots (I) \\ 3x + y - 2z = 4 \dots (II) \\ 7x - 6y - z = 10 \dots (III) \end{cases}$$

Jawab:

Langkah pertama, nyatakan persamaan (I) menjadi fungsi dari x , yaitu: $x - 2y + z = 6 \Rightarrow x = 6 + 2y - z$.

Kemudian substitusikan pada persamaan (II) dan (III), menjadi

Persamaan (II): $3(6 + 2y - z) + y - 2z = 4$

Selesaikan, didapat: $7y - 5z = -14 \dots (IV)$

Persamaan (III): $7(6 + 2y - z) - 6y - z = 10$

Selesaikan, didapat: $8y - 8z = -32$ atau $y - z = -4 \dots (V)$.

Persamaan (IV) dan (V) membentuk SPLDV

Dari persamaan (V), $y - z = -4 \Leftrightarrow y = z - 4$, kemudian disubtitusikan pada persamaan (IV), menjadi:

$$7(z - 4) - 5z = -14$$

$$7z - 28 - 5z = -14$$

$$2z = 14$$

$$z = 7$$

Kemudian subtitusikan $y = 7$ pada persamaan $y = z - 4$ diperoleh $y = 7 - 4$ atau $y = 3$.

Subtitusikan $z = 7$ dan $y = 3$ pada persamaan $x = 6 + 2y - z$, menjadi $x = 6 + 2(3) - 7$, diperoleh $x = 5$.

Sehingga himpunan penyelesaian adalah $\{3, 5, 7\}$

1. Metode Eliminasi

Langkah penyelesaian pada metode eliminasi yaitu:

1. Eliminasi salah satu variabel sehingga diperoleh SPLDV
2. Selesaikan SPLDV yang diperoleh dengan langkah seperti pada penyelesaian SPLDV yang telah dibahas
3. Subtitusikan variabel yang telah diperoleh pada persamaan yang ada.

Metoda meyelesaikan persamaan

1. Metoda Eliminasi
2. Metoda subtitusi
3. Metoda determinan
4. Metoda matriks
5. Metoda operasi baris elementer

Metoda Eliminasi

Supaya lebih mudah langsung saja kita masuk ke contoh-contoh

Contoh soal 1 :

$$2x + 3y - z = 20$$

$$3x + 2y + z = 20$$

$$x + 4y + 2z = 15$$

Jawab :

Ketiga persamaan bisa kita beri nama persamaan (??), (??), dan (??)

$$2x + 3y - z = 20 \dots (??)$$

$$3x + 2y + z = 20 \dots (??)$$

$$x + 4y + 2z = 15 \dots (??)$$

Sistem persamaan ini harus kita sederhanakan menjadi sistem persamaan linear 2 variabel. Untuk itu kita eliminasi variabel z

Sekarang persamaan (??) dan (??) kita jumlahkan

$$2x + 3y - z = 20$$

$$3x + 2y + z = 20 \quad +$$

$$5x + 5y = 40$$

$$x + y = 8 \dots (??)$$

Selanjutnya persamaan (??) dikali (??) dan persamaan (??) dikali (??) sehingga diperoleh

$$6x + 4y + 2z = 40$$

1. Penyelesaian:
2. Penyelesaian:

2.2 Penerapan Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel adalah sistem persamaan yang terdiri dari Tiga Variabel/Peubah.

Bentuk Umum SPLTV:

Bentuk umum SPLTV x , y , dan z dapat ditulis sebagai berikut:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$

Persamaan $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, dan $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ merupakan persamaan di \mathbb{R}^3 . Ketiga bidang tersebut dapat saling berpotongan di sebuah titik, sebuah garis, atau tidak berpotongan.

Jika tiga bidang berpotongan dan perpotongannya berupa titik, maka SPLTV tersebut mempunyai satu anggota dalam himpunan penyelesaiannya (mempunyai penyelesaian tunggal), yaitu titik potong tersebut.

Jika tiga bidang berpotongan dan perpotongannya berupa garis, maka SPLTV tersebut mempunyai tak hingga banyak penyelesaian, yaitu titik-titik pada garis potong ketiga bidang tersebut.

Jika ketiga bidang tidak berpotongan sama sekali, maka SPLTV tersebut dapat digambarkan ke dalam tiga kemungkinan berikut ini.

Dengan kata lain SPLTV ini tidak mempunyai anggota dalam himpunan Penyelesaiannya (himpunan Penyelesaiannya adalah himpunan kosong).

Secara aljabar, penyelesaian SPLTV dapat dicari dengan beberapa cara/metode antara lain:

Metode substitusi

Metode gabungan/kombinasi eliminasi dan substitusi

Metode determinan (dipelajari dalam materi matriks)

1. Menyelesaian SPLTV dengan Metode Substitusi

Untuk menentukan penyelesaian/himpunan penyelesaian SPLTV dengan metode substitusi, langkah-langkahnya sebagai berikut:

Pilihlah salah satu persamaan yang paling sederhana, kemudian nyatakan x sebagai fungsi y dan z , atau y sebagai fungsi x dan z , atau z sebagai fungsi x dan y .

Substitusikan x atau y atau z yang diperoleh pada langkah pertama (1) ke dalam dua persamaan yang lainnya sehingga diperoleh SPLDV.

Selesaikan SPLDV yang diperoleh pada langkah kedua (2)

Contoh:

Tentukan penyelesaian SPLTV berikut dengan substitusi

$$x + y + 2z = 9 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$2x + 4y - 3z = 1 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$3x + 6y - 5z = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Jawab:

- Dari persamaan (1), kita dapatkan $x = 9 - y - 2z \dots\dots\dots\dots\dots (4)$
- Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (2) dan (3)

Dan

Sehingga diperoleh SPLTV berikut ini.

Selanjutnya, kita dapat mencari nilai y dan z dengan cara substitusi seperti pada SPLDV.

Jadi SPLTV tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yaitu $(1,2,3)$ atau Himpunan Penyelesaiannya adalah $\{(1,2,3)\}$.

- Tentukan penyelesaian dari SPLTV dengan substitusi

$$x - 2y + 3z = 1 \dots\dots\dots (2)$$

$$3x - y + 2z = 3 \dots\dots\dots (3)$$

Jawab:

Misalkan substitusi dimulai pada variabel z terlebih dahulu (persamaan yang paling sederhana).

- Dari persamaan (1) diperoleh: $z = 2x + y - 2$ (4)
 - Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (2) dan (3) diperoleh:

- Persamaan (5) sama dengan persamaan (6), sehingga dari kedua persamaan ini dapat kita peroleh nilai satu peubah sebagai fungsi dari peubah yang lain, misalnya:

- Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (4), maka diperoleh:

$$z = 2x + (7 - 7x) - 2$$

$$z = -5x + 5$$

Jadi, penyelesaian dari SPLTV tersebut adalah:

X = X

$$y = 7 - 7x$$

$$z = 5 - 5x$$

Penyelesaian dari SPLTV ini banyak sekali, tergantung pada nilai x yang kita tentukan, misalnya.

- Jika $x = 1$, maka $y = 0$ dan $z = 0$ atau
 - Jika $x = 0$, maka $y = 7$ dan $z = 5$ atau
 - Jika $x = -1$, maka $y = 14$ dan $z = 10$ dan seterusnya

Eliminasi x pada persamaan (4) dan (5) diperoleh nilai y

$$\begin{array}{rcl} 7x + 11y = 29 & | \times 1 & 7x + 11y = 29 \\ x + 2y = 5 & | \times 7 & 7x + 14y = 35 \\ & & \hline & -3y & = -6 \\ & & y & = 2 \end{array}$$

Eliminasi y pada persamaan (4) dan (5) diperoleh nilai x

$$\begin{array}{rcl} 7x + 11y = 29 & | \times 2 & 14x + 22y = 58 \\ x + 2y = 5 & | \times 11 & 11x + 22y = 55 \\ & & \hline & 3x & = 3 \\ & & x & = 1 \end{array}$$

Substitusikan nilai $x = 1$ dan $y = 2$ ke persamaan yang paling sederhana (misal persamaan (1)) sehingga diperoleh nilai z

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 1 + 1 + 2z &= 9 \\ 2z &= 6 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Penyelesaian SPLTV tersebut adalah $x = 1, y = 2, z = 3$ atau $(1, 2, 3)$

Sedangkan himpunan penyelesaiannya $\{(1,2,3)\}$

- Tentukan penyelesaian dari SPLTV berikut dengan Eliminasi

$$2x + y - z = 2 \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$x - 2y + 3z = 1 \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$3x - y + 2z = 3 \dots \dots \dots \quad (3)$$

Jawab:

Eliminasi z dari persamaan (1) dan (2) diperoleh persamaan (4)

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - z = 2 & | \times 3 & 6x + 3y - 3z = 6 \\ x - 2y + 3z = 1 & | \times 1 & \underline{x - 2y + 3z = 1} + \\ & & \hline 7x + y & = 7 & \dots \dots \dots \quad (4) \end{array}$$

Eliminasi z dari persamaan (1) dan (3) diperoleh persamaan (5)

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - z = 2 & | \times 2 & 4x + 2y - 2z = 4 \\ 3x - y + 2z = 3 & | \times 1 & \underline{3x - y + 2z = 3} + \\ & & \hline 7x + y & = 7 & \dots \dots \dots \quad (5) \end{array}$$

Terlihat bahwa persamaan (4) sama dengan persamaan (5) sehingga kita peroleh nilai satu variabel yang merupakan fungsi dari variabel yang lain, yaitu $y = 7 - 7x$.

Substitusikan nilai $y = 7 - 7x$ ke persamaan (1), diperoleh:

$$\begin{aligned} 2x + (7 - 7x) - z &= 2 \\ z &= -5x + 5 \end{aligned}$$

Penyelesaian SPLTV tersebut adalah:

$$x = x$$

$$y = -7x + 7$$

$$z = -5x + 5$$

Dengan kata lain, SPLTV ini mempunyai banyak penyelesaian tergantung pada nilai variabel x yang kita tentukan.

Cara Lain

Persamaan (4) sama dengan persamaan (5), berarti persamaan yang satu merupakan kelipatan

dari persamaan yang lain, maka himpunan penyelesaiannya mempunyai tak hingga banyak anggota.

- Tentukan penyelesaian SPLTV berikut dengan Eliminasi

Jawab:

Eliminasi x dari persamaan (1) dan (2) diperoleh persamaan (4)

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z = -1 & | \times 3 & 3x + 6y - 9z = -3 \\ 3x - y + 2z = 7 & | \times 1 & 3x - y + 2z = 7 \\ & & \hline 7y - 11z = -10 \dots\dots\dots (4) \end{array}$$

Eliminasi x dari persamaan (1) dan (3) diperoleh persamaan (5)

Persamaan (4) dan persamaan (5) menyatakan bahwa persamaan tersebut tidak konsisten (sesuatu yang tak mungkin terjadi), sehingga dapat dikatakan bahwa SPLTV tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh 1

Asti dan Anton bekerja pada sebuah perusahaan sepatu. Asti dapat membuat tiga pasang sepatu setiap jam dan Anton dapat membuat empat pasang sepatu setiap jam. Jumlah jam bekerja Asti dan Anton 16 jam sehari, dengan banyak sepatu yang dapat dibuat 55 pasang. Jika banyaknya jam bekerja keduanya tidak sama, tentukan lama bekerja Asti dan Anton.

Penyelesaian:

Kita misalkan lama kerja Asti = x dan lama kerja Anton = y, maka:

$$x + y = 16$$

$$3x + 4y = 55$$

Selanjutnya, selesaikan dengan menggunakan salah satu metode penyelesaian, misalnya dengan metode cepat, maka:

$$\Rightarrow y = (1 \cdot 55 - 16 \cdot 3) / (1 \cdot 4 - 1 \cdot 3)$$

$$\Rightarrow y = (55 - 48)/(4 - 2)$$

$\Rightarrow v = 7$

Substitusi nilai $y = 7$ ke persamaan $x + y = 16$, maka:

$$\Rightarrow x + y = 16$$

$$\Rightarrow x + 7 = 16$$

$$\Rightarrow x = 16 - 7$$

$$\Rightarrow x = 9$$

Dengan demikian, lama bekerja Asti adalah 9 jam dan Anton adalah 7 jam

Contoh 3

Contoh 2
Sebuah toko kelontong menjual dua jenis beras sebanyak 50 kg. Harga 1 kg beras jenis I adalah Rp 6.000,00 dan jenis II adalah Rp 6.200,00/kg. Jika harga beras seluruhnya Rp 306.000,00 maka tentukan jumlah beras jenis I dan beras jenis II yang dijual.

Penyelesaian:

Kita misalkan jumlah beras jenis I = x dan jumlah beras jenis II = y , maka:

$$x + y = 50$$

$$6000x + 6200y = 306000$$

Selanjutnya, selesaikan dengan menggunakan salah satu metode penyelesaian, misalnya dengan **metode cepat**, maka:

$$\Rightarrow y = (1 \cdot 306000 - 50 \cdot 6000) / (1 \cdot 6200 - 1 \cdot 6000)$$

$$\Rightarrow y = (306000 - 300000) / (6200 - 6000)$$

$$\Rightarrow y = 6000 / 200$$

$$\Rightarrow y = 30$$

Substitusi nilai $y = 30$ ke persamaan $x + y = 50$, maka:

$$\Rightarrow x + y = 50$$

$$\Rightarrow x + 30 = 50$$

$$\Rightarrow x = 50 - 30$$

$$\Rightarrow x = 20$$

Dengan demikian, jumlah beras jenis I dan beras jenis II yang dijual adalah 20 kg dan 30 kg.

Contoh 3

Ahmad membeli di sebuah Toko peralatan sekolah berupa 4 buah penggaris, 6 buah buku tulis dan 2 buah pena dengan menghabiskan biaya sebesar Rp 19.000,00. Di Toko yang sama Sulaiman berbelanja 3 buah buku tulis dan sebuah penggaris dengan menghabiskan uang Rp 7.000,00. Jika harga sebuah penggaris adalah Rp 1.000,00 maka berapakah harga sebuah pena? Untuk menyelesaikan kasus diatas, kita dapat menggunakan konsep sistem persamaan tiga variabel. **Pembahasan!** Dimisalkan bahwa; X = harga sebuah penggaris Y =

harga sebuah buku Z = harga sebuah pena

$$\text{Diketahui: } 4X + 6Y + 2Z = 19.000 \quad \text{persamaan (I)} \quad 3Y + X = 7.000 \quad \text{persamaan}$$

$$\begin{aligned} & \text{(II)} \\ & X = 1.000 \quad \text{persamaan (III)} \quad \text{ Ditanya: } Z = ? \end{aligned}$$

Dijawab: Kita selesaikan terlebih dahulu persamaan (II) dengan bantuan persamaan (III),

$$\text{untuk mengetahui nilai } Y \text{ (harga sebuah buku). } 3Y + X = 7.000 \quad (X = 1.000)$$

$$\Rightarrow 3Y + 1.000 = 7.000 \quad 3Y = 7.000 - 1.000 \quad 3Y = 6.000$$

$$Y = 6.000 / 3 \quad Y = 2.000 \quad \text{persamaan (IV) Kita lanjutkan}$$

untuk menyelesaikan persamaan (I) dengan bantuan persamaan (III) dan persamaan (IV) yang dihasilkan dari penghitungan di atas untuk mencari nilai Z (harga sebuah pena). Kita

sudah memiliki nilai; $Y = 2.000$ dan, $X = 1.000$. Maka, $4X + 6Y + 2Z =$

$$19.000 \quad 4(1.000) + 6(2.000) + 2Z = 19.000 \quad 4.000 + 12.000 + 2Z = 19.000 \quad 16.000$$

$$+ 2Z = 19.000 \quad 2Z = 19.000 - 16.000 \quad 2Z$$

$$= 3.000 \quad Z = 3.000/2 \quad Z = 1.500$$

Sudah terjawab masing – masing nilai X, Y dan Z sebagai berikut; $X = 1.000 \quad Y = 2.000$

$Z = 1.500$ Jadi, harga sebuah pena adalah Rp 1.500,00

CONTOH SOAL PERSAMAAN LINEAR 3 VARIABEL

Contoh 1: Memodelkan Permasalahan Keuangan

Suatu perusahaan rumahan meminjam Rp 2.250.000.000,00 dari tiga bank yang berbeda untuk memperluas jangkauan bisnisnya. Suku bunga dari ketiga bank tersebut adalah 5%, 6%, dan 7 %. Tentukan berapa pinjaman perusahaan tersebut terhadap masing-masing bank jika bunga tahunan yang harus dibayar perusahaan tersebut adalah Rp 130.000.000,00 dan banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%?

Pembahasan Misalkan x , y , dan z secara berturut-turut adalah banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5%, 6%, dan 7%. Ini berarti yang menjadi persamaan pertama kita adalah $x + y + z = 2.250$ (dalam jutaan). Persamaan kedua diperoleh dari total bunga pertahunnya, yaitu Rp 130.000.000,00: $0,05x + 0,06y + 0,07z = 130$. Sedangkan persamaan ketiga dapat diperoleh dari kalimat, “banyaknya uang yang dipinjam dengan bunga 5% sama dengan dua kali uang yang dipinjam dengan bunga 7%”, sehingga persamaannya adalah $x = 2z$. Ketiga persamaan tersebut membentuk sistem seperti berikut.

Suku- x pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi

Gunakan $-5P1 + P2$ untuk mengeliminasi suku- x di $P2$, dan $-P1 + P3$ untuk mengeliminasi suku- x di $P3$.

Sehingga, $P2$ yang baru adalah $y + 2z = 1.750$ dan $P3$ yang baru adalah $y + 3z = 2.250$ (setelah dikalian dengan -1), yang menghasilkan sistem berikut.

Dengan menyelesaikan subsistem 2×2 (dua persamaan terakhir) menggunakan $-P_2 + P_3$ menghasilkan $z = 500$. Selanjutnya dengan menerapkan substitusi balik akan menghasilkan $x = 1.000$ dan $y = 750$. Diperoleh selesaian SPLTV tersebut adalah $(1.000, 750, 500)$. Ini berarti bahwa perusahaan tersebut meminjam 1 miliar rupiah pada bunga 5%, 750 juta rupiah pada bunga 6%, dan 500 juta rupiah pada bunga 7%.

Sumber :<https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

Contoh 2: Permasalahan Masa Kehamilan Hewan

Masa kehamilan rata-rata (dalam hari) dari gajah, badak, dan unta apabila dijumlahkan adalah 1.520 hari. Masa kehamilan badak adalah 58 hari lebih lama daripada unta. Dua kali masa kehamilan unta kemudian dikurangi 162 merupakan masa kehamilan gajah. Berapa hari masa kehamilan dari masing-masing hewan tersebut?

Pembahasan Misalkan x , y , dan z secara berturut-turut adalah masa kehamilan gajah, badak, dan unta. Sehingga, persamaan pertama kita adalah $x + y + z = 1.520$. Karena masa kehamilan badak 58 hari lebih lama daripada unta, maka persamaan keduanya adalah $y = z + 58$. Sedangkan dari kalimat, “Dua kali masa kehamilan unta kemudian dikurangi 162 merupakan masa kehamilan gajah”, diperoleh persamaan ketiganya adalah $x = 2z - 162$. Ketiga persamaan tersebut membentuk sistem sebagai berikut.

Suku- x pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi

Eliminasi suku- x pada P_3 dengan $P_1 + (-P_3)$ (P_2 tidak memiliki suku- x) akan diperoleh persamaan $y + 3z = 1.682$. Sehingga SPLTV di atas ekuivalen dengan SPLTV,

Selanjutnya kita dapat menyelesaikan subsistem 2×2 dan diperoleh $z = 406$. Dengan menerapkan substitusi balik akan menghasilkan $x = 650$ dan $y = 464$, sehingga selesaian dari SPLTV di atas adalah $(650, 464, 406)$. Jadi, masa kehamilan rata-rata dari gajah, badak, dan unta secara berturut-turut adalah 650 hari, 464 hari, dan 406 hari.

Sumber :<https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

Contoh 3: Teka-teki Sejarah Indonesia

Sampai saat ini, bangsa Indonesia telah mengalami peristiwa-peristiwa sejarah yang patut diketahui, tiga diantaranya adalah kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Surat Perintah Sebelas Maret (Supersemar). Jika kita menjumlahkan tahun terjadinya ketiga peristiwa tersebut maka kita akan mendapatkan 5.441. Supersemar lahir 87 tahun setelah lahirnya tokoh emansipasi wanita Indonesia, R. A. Kartini, dan 370 tahun setelah kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman. Pada tahun berapa masing-masing peristiwa sejarah tersebut terjadi?

Pembahasan Misalkan a , b , dan c secara berturut-turut adalah tahun terjadinya peristiwa kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Supersemar. Maka kita akan mendapatkan SPLTV sebagai berikut.

SPLTV di atas memiliki bentuk standar seperti berikut.

Dengan menggunakan $P_1 + P_3$ kita akan mengeliminasi suku- a pada P_3 dan menghasilkan persamaan P_3 yang baru: $b + 2c = 5.811$.

Selanjutnya kita dapat menyelesaikan subsistem persamaan linear dua variabel (dua persamaan terbawah) dan mendapatkan $c = 1.966$. Dengan substitusi balik, kita juga akan memperoleh $a = 1.596$ dan $b = 1.879$. Sehingga, selesaian dari SPLTV di atas adalah $(1.596, 1.879, 1.966)$. Atau dengan kata lain, kedatangan Belanda di bawah pimpinan Cornelis De Houtman, lahirnya R.A. Kartini, dan lahirnya Supersemar secara berturut-turut terjadi pada

tahun 1596, 1879, dan 1966.

Sumber :<https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

Contoh 4: Permasalahan Campuran Kimia

Seorang ahli kimia mencampur tiga larutan glukosa yang memiliki konsentrasi 20%, 30%, dan 45% untuk menghasilkan 10 L larutan glukosa dengan konsentrasi 38%. Jika volume larutan 30% yang digunakan adalah 1 L lebih besar daripada dua kali larutan 20% yang digunakan, tentukan volume masing-masing larutan yang digunakan.

Pembahasan Misalkan p , q , dan r secara berturut-turut merupakan volume dari larutan glukosa yang memiliki konsentrasi 20%, 30%, dan 45%. Maka kita akan mendapatkan persamaan pertamanya adalah $p + q + r = 10$ dan persamaan keduanya adalah $0,2p + 0,3q + 0,45r = 3,8$ (3,8 diperoleh dari $0,38 \bullet 10$). Dari kalimat, “volume larutan 30% yang digunakan adalah 1 L lebih besar daripada dua kali larutan 20% yang digunakan”, kita mendapatkan persamaan ketiga, yaitu $q = 2p + 1$. Sehingga, ketiga persamaan tersebut akan membentuk sistem,

Suku- p pada persamaan pertama adalah 1. Apabila dituliskan kembali ke dalam bentuk standar, sistem tersebut akan menjadi

Gunakan $-4P1 + P2$ dan $2P1 + P3$ untuk mengeliminasi suku- p pada $P2$ dan $P3$.

Sehingga, $P2$ yang baru adalah $2q + 5r = 36$ dan $P3$ yang baru adalah $3q + 2r = 21$ yang membentuk sistem,

Selanjutnya gunakan $3P2 + (-2P3)$ untuk mengeliminasi suku- q pada $P3$.

Dengan membagi persamaan di atas dengan 11, maka akan dihasilkan persamaan $r = 6$ yang akan menjadi $P3$ baru pada sistem berikut.

Selanjutnya kita gunakan substitusi balik untuk mendapatkan nilai p dan q , yaitu $p = 1$ dan $q = 3$. Sehingga solusi dari SPLTV tersebut adalah $(1, 3, 6)$. Atau dengan kata lain, volume larutan glukosa dengan konsentrasi 20%, 30%, dan 45% secara berturut-turut adalah 1 L, 3 L, dan 6 L.

Sumber :<https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

Contoh 5: Menulis Kembali Fungsi Rasional

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi rasional,

dapat dituliskan dalam bentuk penjumlahan dua suku

di mana koefisien-koefisien A , B , dan C adalah solusi-solusi untuk SPLTV

Tentukan koefisien-koefisien tersebut dan ujilah jawabanmu dengan menjumlahkan dua suku tersebut.

Pembahasan Dengan menggunakan $P1 + (-P3)$ kita dapat mengeliminasi suku- A pada $P3$ untuk dijadikan $P3$ yang baru.

Dengan menyelesaikan subsistem 2×2 diperoleh $C = -3$. Kemudian dengan substitusi balik, diperoleh $A = 2$ dan $B = -2$. Sehingga solusi dari SPLTV tersebut adalah $(2, -2, -3)$. Selanjutnya kita uji penjumlahan dua sukunya.

Setelah diuji, ternyata penjumlahan dua suku tersebut sama dengan fungsi rasional di awal. Semoga bermanfaat, yos3prens.

Sumber :<https://yos3prens.wordpress.com/2013/11/10/5-soal-dan-pembahasan-penerapan-spltv/>

Contoh 6

Ahmad membeli di sebuah Toko peralatan sekolah berupa 4 buah penggaris, 6 buah buku tulis dan 2 buah pena biaya sebesar Rp 19.000,00. Di Toko yang sama Sulaiman berbelanja 3 buah buku tulis dan sebuah penggaris dengan menghabiskan uang Rp 7.000,00. Jika harga sebuah penggaris adalah Rp 1.000,00 maka berapakah harga sebuah dengan menghabiskan

pena? Untuk menyelesaikan kasus diatas, kita dapat menggunakan konsep sistem persamaan tiga variabel. **Pembahasan!** Dimisalkan bahwa; X = harga sebuah penggaris Y = harga sebuah buku Z = harga sebuah pena **Diketahui:** $4X + 6Y + 2Z = 19.000$ persamaan (I)
 $3Y + X = 7.000$ persamaan (II)

X=1.000 persamaan (III) **Ditanya:** Z = ? **Dijawab:** Kita selesaikan terlebih dahulu persamaan (II) dengan bantuan persamaan (III), untuk mengetahui nilai Y (harga sebuah buku). $3Y + X = 7.000$ ($X = 1.000$) $3Y + 1.000 = 7.000$ $3Y = 7.000 - 1.000$ $3Y = 6.000$ $Y = 6.000 / 3$ $Y = 2.000$ persamaan (IV) Kita lanjutkan untuk menyelesaikan persamaan (I) dengan bantuan persamaan (III) dan persamaan (IV) yang dihasilkan dari penghitungan di atas untuk mencari nilai Z (harga sebuah pena). Kita sudah memiliki nilai; Y = 2.000 dan, X = 1.000. Maka, $4X + 6Y + 2Z = 19.000$ $4(1.000) + 6(2.000) + 2Z = 19.000$ $4.000 + 12.000 + 2Z = 19.000$ $16.000 + 2Z = 19.000$ $2Z = 19.000 - 16.000$ $2Z = 3.000$ $Z = 3.000 / 2$ $Z = 1.500$ Sudah terjawab masing – masing nilai X, Y dan Z sebagai berikut; X = 1.000 Y = 2.000 Z = 1.500

Jadi, harga sebuah pena adalah Rp 1.500,00

Sumber : <http://www.berpendidikan.com/2015/05/sistem-persamaan-linera-tiga-variabel-dan-contohnya.html>

Contoh 7

3 orang siswi sd yang bernama nazsa, chindy dan euis akan membeli penghapus, pensil, dan buku. :

1. Nazsa membeli 3 penghapus, 4 pensil, dan 5 buku dengan harga Rp.26.000,00
2. Chindy membeli 5 penghapus, 2 pensil, dan 1 buku dengan harga Rp.12.000,00
3. Euis membeli 1 penghapus, 1 pensil, dan 2 buku dengan harga Rp.9.000,00

Tentukan berapa harga penghapus, pensil, dan buku !!!! Jawab :untuk mengerjakan soal matematika cerita kita rubah dulu kalimat soal di atas menjadi kalimat matematika : Penghapus : xPensil : yBuku : z maka :persamaan 1 Nazsa : $3x+4y+5z = \text{Rp.}26.000,00$ persamaan 2 Chindy : $5x+2y+z = \text{Rp.}12.000,00$ persamaan 3 Euis : $x+y+2z = \text{Rp.}9.000,00$ ada 3 langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel

Langkah ke-1 :

Kita lakukan metode eliminasi. Kita ambil persamaan ke-2 dan persamaan ke-3 $5x+2y+z = 12.000$ $x+ y+2z = 9.000$ dikarenakan tidak ada variabel yang sama maka persamaan dua kita kalikan dua dan persamaan tiga kita kalikan satu, tujuannya untuk menghilangkan variabel z supaya semua variabel menjadi variabel x maka : $10x+4y+2z = 24.000$ $x+ y+2z = 9.000$ $-9x+3y = 15.000$ $3(3x+y) = 15.000$, supaya lebih sederhana maka persamaan kita bagi dengan 3, maka : $3(3x+y)/3 = 15.000/3$ $3x+y = 5.000$, supaya lebih sederhana maka persamaan kita kurangi $3x$, maka : $3x+y-3x = 5.000 - 3x = 5.000 - 3x = 5.000 - 3x$ kemudian karena y sudah menjadi nilai x maka kita lakukan metode substitusi tujuannya untuk mengganti variabel z menjadi bernilai x, kita ambil persamaan 3 untuk melakukan substitusi : $x+ y+2z = 9.000$ $x+ y+2z - y - 2z = 9.000 - y - 2z$, supaya lebih sederhana persamaan kita kurangi $-y$ dan $-2z$ kita substitusikan y ke persamaan 3, maka : $x = 9.000 - y - 2z$, dikarenakan $y = 5.000 - 3x$, maka : $x = 9.000 - (5.000 - 3x) - 2z = 9.000 - 5.000 + 3x - 2z$, $x = 4.000 - 3x - 2z$, supaya lebih sederhana maka persamaan kita kurangi $3x$: $x - 3x = 4.000 - 3x - 2z - 3x = 4.000 - 2z$, untuk lebih menyederhanakan lagi persamaan kita kurangi $4.000 - 2z - 4.000 = 4.000 - 2z - 4.000 - 2x - 4.000 = -2z$, supaya $-2z$ menjadi z maka persamaan kita bagi dengan $-2(-2x - 4.000) / -2 = -2z / -2$

$$x + 2.000 = z$$

Langkah ke-2

Untuk langkah ke-2 kita cari berapakah nilai yang sesungguhnya dari variabel x, dengan cara mensubstitusikan variabel y dan variabel z yang sudah kita rubah nilainya menjadi x untuk

melakukan substitusi menemukan variabel x kita gunakan persamaan ke-1 karena persamaan ke-2 dan ke-3 sudah kita gunakan pada langkah yang pertama. Maka :

$$3x + 4y + 5z = 26.000$$

$$3x + 4y + 5z - 4y - 5z = 26.000 - 4y - 5z \quad | \quad 3x = 26.000 - 4y - 5z$$
 kita substitusikan variabel y dan z yang sudah saya tandi warna hijau, maka :

$$3x = 26.000 - 4(5.000 - 3x) - 5(x + 2.000)$$

$$3x = 26.000 - 20.000 + 12x - 5x - 10.000$$

$$3x = -4.000 + 7x$$
 supaya persamaan menjadi lebih sederhana kita kurangi $-7x$

$$3x - 7x = -4.000 + 7x - 7x - 4x = -4.000$$
 supaya $-4x$ menjadi x maka persamaan kira bagi dengan $-4x/-4 = -4.000/-4x = 1.000$

Langkah ke-3

Untuk langkah ke-3, dikarenakan nilai variabel x sudah di temukan maka masalah yang belum kita temukan kita harus mencari berapa nilai variabel y dan z. perhatikan persamaan yang sudah saya tandai warna hijau di atas! gunakan kedua persamaan yang sudah saya tandai warna hijau untuk mencari nilai dari variabel y dan z. Kita cari nilai y terlebih dahulu $y = 5.000 - 3x$, di karenakan $x = 1.000$ maka $y = 5.000 - 3(1.000) = 2.000$. Kemudian kita cari nilai z $z = 2.000 + x$, dikarenakan $x = 1.000$ maka $z = 2.000 + 1.000 = 3.000$. Persamaan yang saya tandai warna kuning ialah hasil dari pencarian kita :) alhamdulillah kita sudah memecahkan masalahnya yaitu : harga penghapus : Rp.1.000 harga pensil : Rp.2.000 harga buku : Rp.3.000

Sumber : <https://matematikaakuntansi.blogspot.co.id/2015/10/cara-menyelesaikan-sistem-persamaan.html>

Contoh 8

langkah2.eleminasi pers1 dan pers 3eleminasi var z (eleminasilah yg menurut anda lebih mudah dihilangkan seperti variabel x ,lebih mudah dieleminasi) $x - 2y + z = 0$ |x2| $2x - 4y + 2z = 0$ $x - 3y - 2z = -15$ |x1| $x - 3y - 2z = -15$

+

$3x - 7y = -15$ (pers5) langkah 3. eleminasi pers4 dan pers5 (ingat : "selalu pilih yg paling mudah dieleminasi karna dapat mempersingkat waktu pengerjaan") eleminasi var y

$$\begin{array}{l} 4x - y = 5 \\ 3x - 7y = -15 \end{array}$$

$$x = 50 / 25$$

$$25x =$$

2 langkah 4. substitusi nilai var yang didapat ke pers 4 atau pers 5 (karna hanya 2 variabel == lebih cepat)

$$3x - 7y = -15 \quad \dots \text{pers5}$$

$$3(??) - 7y =$$

$$-7y = -15 - 6$$

$$y = -21 / -7 \quad y = 3$$

$$\text{langkah 5. substitusi nilai var yang didapat ke pers 1 atau pers 2} \quad x - 2y + z = 0 \quad 2$$

$$-2(?) + z = 0 \quad 2 - 6 + z = 0 \quad -4 + z = 0 \quad z =$$

Sumber : <https://itsystemresearch.blogspot.co.id/2016/06/soal-dan-pembahasan-sistem->

Sumber : <https://rsy.stmresearch.blogspot.co.id/2018/06/sejarah-dan-pembangunan-sistem>

[persamaan.html](#)

Part Two

3	Fungsi	39
3.1	Relasi dan Fungsi	
3.2	Operasi Aritmatika	
3.3	Komposisi Fungsi	
3.4	Fungsi Linear	
3.5	Fungsi Kuadrat	
3.6	Fungsi Inversi	
3.7	Fungsi Rasional	
4	Trigonometri	87
4.1	Pengukuran Sudut	
4.2	Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku	
4.3	Sudut-sudut Berelasi	
4.4	Nilai Perbandingan Trigonometri untuk 0° , 30° , 45° , 60° dan 90°	
4.5	Identitas Trigonometri	
4.6	Aturan Sinus dan Cosinus	
	Fungsi Trigonometri	
	Bibliography	123
	Books	
	Articles	

3. Fungsi

3.1 Relasi dan Fungsi

1. RELASI

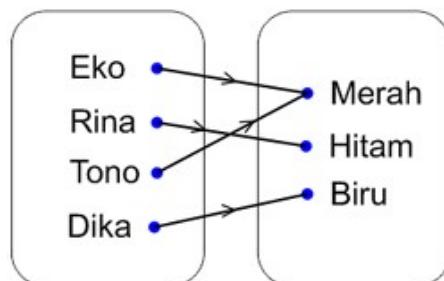
(a) Pengertian Relasi

Relasi adalah hubungan antara 2 elemen dua himpunan. Relasi dikatakan sebagai suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan yang lain. Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan korespondensi dari anggota-anggota himpunan A ke anggota-anggota himpunan B. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B dengan aturan tertentu.

Contoh 1.1

Ada 4 orang anak Eko, Rina, Tono, dan Dika. Mereka diminta untuk menyebutkan warna favorit mereka. Hasilnya adalah sebagai berikut:

Dari hasil uraian di atas terdapat dua buah himpunan. Pertama adalah himpunan anak, kita sebut dengan A dan himpunan warna yang kita sebut dengan B. Hubungan antara A dan B digambarkan seperti ilustrasi di bawah ini:



Gambar 1 contoh relasi himpunan

Kesimpulannya, relasi antara himpunan A dan himpunan B adalah “suka dengan warna”. Eko dipasangkan dengan merah karena eko suka dengan warna merah. Rina dipasangkan dengan warna hitam karena rina menyukai warna hitam, dan seterusnya. Dari uraian di atas

kita dapat mengambil kesimpulan bahwa definisi relasi adalah

“Relasi antara dua himpunan, contoh himpunan A dengan himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B.”

Contoh 1.2

Ada 3 anak mengatakan makanan kesukaannya yaitu : Anis menyukasi Bakso, Rina menyukasi Sate dan Diko menyukasi Nasi Padang.

Dari pernyataan diatas terdapat dua himpunan yaitu :

A = Himpunan anak {Anis, Rina, Diko}

B = Himpunan makanan {Bakso, Sare, Nasi Padang}

Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah menyukasi atau menyenangi.

Dari contoh di atas, himpunan A tersebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut daerah tujuan (ko-domain) . Sementara itu menyukasi disebut relasi. Himpunan semua anggota ko-domain di sebut range (daerah hasil).

1. (a) Menyatakan Relasi

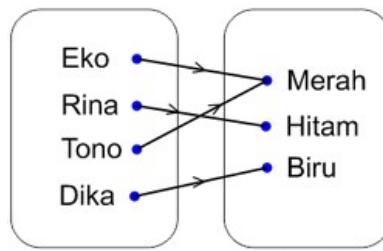
Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu menggunakan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram Cartesius.

1. Diagram Panah

Perhatikan gambar di bawah ini. Relasi antara himpunan A dengan himpunan B dinyatakan dengan panah-panah yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B. Karena penggambarannya menggunakan bentuk panah (arrow) maka disebut dengan diagram panah.

Langkah-langkah menyatakan relasi dengan diagram panah :

- Membuat dua lingkaran atau elips
- Untuk meletakkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B $x=A$ diletakkan pada lingkaran A dan $y=B$ diletakkan pada lingkaran B
- X dan Y dihubungkan dengan anak panah
- Arah anak panah menunjukkan arah relasi
- Anak panah tersebut mewakili aturan relasi



Gambar 2 diagram panah

1. Himpunan Pasangan Berurutan

Sebuah relasi juga dapat dinyatakan dengan menggunakan pasangan berurutan. Artinya kita memasangkan himpunan A dengan himpunan B secara berurutan.

menyatakan relasinya dengan pasangan berurutan sebagai berikut:(eko, merah), (rina, hitam),(tono, merah),(dika, biru).

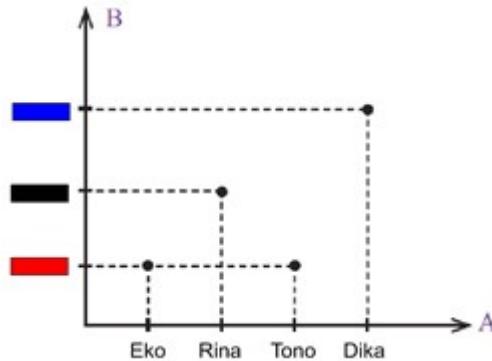
Jadi relasi antara himpunan A dengan himpunan B dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan (x,y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$.

1. Diagram Cartesius

Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan ke dalam pasangan berurutan yang kemudian dituangkan dalam dot (titik-titik) dalam diagram cartesius. Contoh dari relasi suka dengan warna di atas dapat digambarkan dalam bentuk diagram cartesius sebagai berikut:

Pada diagram Cartesius diperlukan dua salip sumbu yaitu : sumbu mendatar (horizontal) dan sumbu tegak (vertical) yang berpotongan tegak lurus.

- $X = A$ diletakkan pada sumbu mendatar
- $Y = B$ diletakkan pada sumbu tegak
- Pemasangan (x,y) ditandai dengan sebuah Noktah (titik) yang koordinatnya ditulis sebagai pasangan berurutan x,y .



Gambar 3 Diagram Cartesius

1.3 Sifat-Sifat Relasi

a. Relasi Refleksif (Bercermin)

Relasi disebut *refleksif* jika dan hanya jika untuk setiap $x \in A$, x berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi R refleksif jika dan hanya jika xRx .

Contoh:

Jika diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$. Pada A , maka $R \subseteq A$ adalah refleksif, karena untuk setiap $x \in A$ terdapat (x,x) pada R . Perhatikan relasi pada himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ berikut:

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

Relasi-relasi tersebut merupakan relasi refleksif karena memiliki elemen $(1,1), (2,2), (3,3)$, dan $(4,4)$.

b. Relasi Irrefleksif

Relasi R pada A disebut *Irrefleksif* (anti refleksif) jika dan hanya jika setiap elemen di dalam tidak berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi, irrefleksif jika dan hanya jika $x \notin R$.

Contoh :

Diketahui himpunan $B = \{a, b, c\}$ dan relasi $R = \{(a,c), (b,c), (b,a)\}$. Relasi R adalah irrefleksif, karena (a,a) , (b,b) , dan (c,c) bukan elemen.

Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi $R = \{(2,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$. Relasi R merupakan relasi irrefleksif, karena tidak terdapat elemen (x,x) , dimana $x \in A$.

1. Relasi Nonrefleksif

Relasi R pada A disebut *nonrefleksif* jika dan hanya jika ada sekurang-kurangnya satu elemen di dalam A yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh :

Perhatikan relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)\}$$

Relasi tersebut merupakan relasi non refleksif, karena ada $(1,2)$ dan $(2,3)$.

1. Relasi Simetri

Relasi R disebut *simetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku jika a berelasi R dengan b maka b juga berelasi dengan a.

Secara simbolik: $aRb \rightarrow bRa$.

Contoh:

1. Relasi R = { (a,b), (b,a), (a,c), (c,a) } dalam himpunan {a, b, c}.
2. Ani menyukai Budi, Budi menyukai Ani { (Ani,Budi), (Budi,Ani) }

1. Relasi Asimetri

Relasi R disebut *asimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b maka b tidak berelasi R dengan a.

Secara simbolik: R asimetri pada S jnj ($\forall a, b \in S$) $aRb \rightarrow bRa$.

Contoh:

1. Relasi R = { (a,b), (b,c), (c,a) } dalam himpunan { a,b,c }.

1. Relasi Nonsimetri

Relasi R disebut *nonsimetri* pada S jika dan hanya jika ada dua anggota a dan b dari S sedemikian hingga berlaku: a berelasi R dengan b tetapi b tidak berelasi R dengan a. Perhatikan bahwa nonsimetri adalah negasi/ingkaran dari simetri.

Contoh:

1. Relasi R = { (a,b), (a,c), (c,a) } dalam himpunan {a, b, c}

1. Relasi Antisimetri

Relasi R disebut *antisimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b dan b berelasi R dengan a maka $a=b$.

Contoh:

1. A = keluarga himpunan.

Relasi "himpunan bagian" adalah relasi yang antisimetris pada A, karena untuk setiap dua himpunan x dan y, jika $x \subset y$ dan $y \subset x$, maka $x = y$.

1. Relasi "kurang dari atau sama dengan (\leq)" dalam himpunan bilangan real. Jadi, relasi "kurang dari atau sama dengan (\leq)" bersifat anti simetri, karena jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = b$.
1. Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat asli N merupakan contoh relasi yang tidak simetri karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika $a = b$. Sementara itu, relasi "habis membagi" merupakan relasi yang anti simetri karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka $a = b$.

1. Relasi Transitif

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *Transitif* pada A jika dan hanya jika setiap 3 anggota himpunan A, $(a,b,c \in A)$ jika $(a,b) \in R$, dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \in R$ (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a berelasi dengan c).

Contoh:

1. Relasi R = { (a,b), (b,c), (a,c), (c,c) } dalam himpunan { a,b,c }.

1. Relasi Nontransitif

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *nontransitif* pada A jika dan hanya jika ada tiga anggota himpunan A, $(a,b,c \in A)$ sedemikian hingga $(a,b) \in R$, dan $(b,c) \in R$ dan $(a,c) \notin R$ (ada tiga anggota a,b,c dari A sedemikian hingga a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c dan a tidak berelasi dengan c).

Contoh:

$R = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ dalam himpunan $\{1,2,3,4\}$

1. Relasi Intransitif

R adalah relasi pada himpunan A . R disebut relasi intransitif pada A jika dan hanya jika setiap tiga anggota himpunan A , $(a,b,c \in A)$ jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$ maka $(a,c) \notin R$ (setiap tiga anggota a,b,c dari A , jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a tidak berelasi dengan c).

Misal $E = \{1,2,3\}$, $R = \{(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(5,7)\}$

Relasi di atas intransitif karena :

- $(1,2) \in R$ dan $(2,3) \in R$, tetapi $(1,3) \notin R$
- $(1,2) \in R$ dan $(2,5) \in R$, tetapi $(1,5) \notin R$
- $(2,3) \in R$ dan $(3,4) \in R$, tetapi $(2,4) \notin R$
- $(2,5) \in R$ dan $(5,7) \in R$, tetapi $(2,7) \notin R$

1.4 Komposisi Relasi

R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B

T adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C .

Komposisi R dan S , dinotasikan dengan $T \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh :

$$T \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ dan untuk suatu } b \in B \text{ sehingga } (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$$

Contoh komposisi relasi

Ø Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$

Ø Relasi dari A ke B didefinisikan oleh :

$$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$$

Ø Relasi dari B ke C didefinisikan oleh :

$$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

Ø Maka komposisi relasi R dan T adalah

$$T \circ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$$

contoh soal relasi dan jawabannya Dikelas 8 SMP belajar matematika terdapat 4 orang siswa yang lebih menyukai pelajaran tertentu. berikut ke-4 anak tersebut :

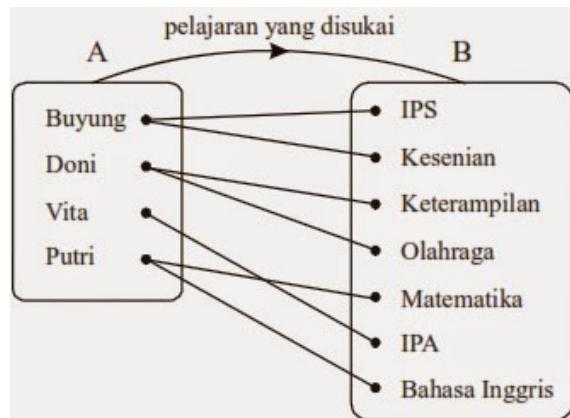
1. Buyung menyukai pelajaran IPS dan Kesenian
2. Doni menyukai pelajaran ketrampilan dan olah raga
3. Vita menyukai pelajaran IPA, dan
4. Putri lebih menyukai pelajaran matematika dan bahasa inggris

Buatlah relasi dari soal diatas dan disajikan menggunakan diagram panah, diagram cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.Jawab:Untuk mempermudah menjawab persoalan diatas gunakanlah permisalan seperti :

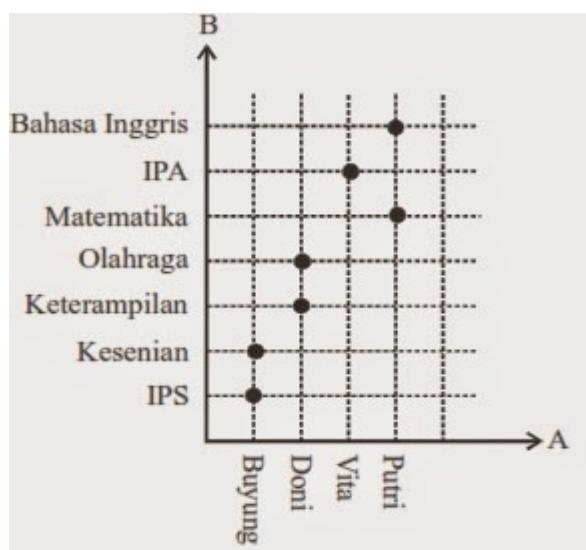
Himpunan $A = \{\text{Buyung, Doni, Vita, Putri}\}$

Himpunan $B = \{\text{IPS, kesenian, keterampilan, olahraga, matematika, IPA, bahasa Inggris}\}$
“pelajaran yang disukai” adalah relasi yang menghubungkan himpunan A ke B .

1. Diagram panah



Gambar 4 Diagram Panah

b. Diagram Cartesius

Gambar 5 Diagram Cartecius

1. Himpunan pasangan berurutan

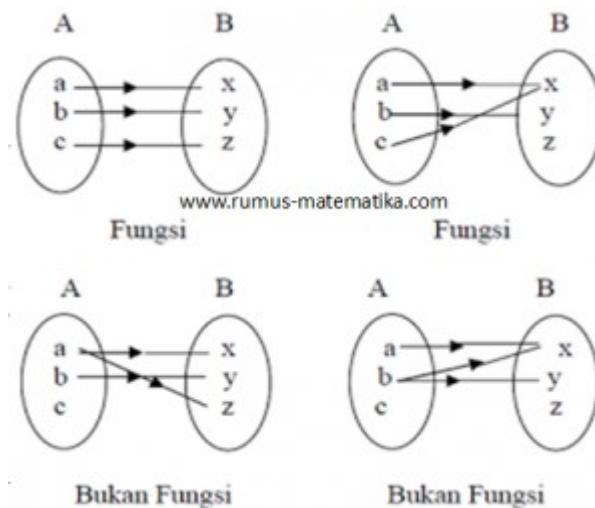
Himpunan pasangan berurutan dari soal diatas adalah :

$\{(Buyung, IPS), (Buyung, kesenian), (Doni, keterampilan), (Doni, olahraga), (Vita, IPA), (Putri, matematika), (Putri, bahasa Inggris)\}$

2. FUNGSI

2.1 Pengertian Fungsi

Fungsi adalah bentuk khusus dari relasi. Sebuah relasi dikatakan fungsi jika xRy , untuk setiap x anggota A memiliki **tepat satu** pasangan, y , anggota himpunan B . Kita dapat menuliskan $f(a) = b$, jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A . Ini berarti bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$ maka $b = c$. Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B , kita dapat menuliskan dalam bentuk : $f : A \rightarrow B$



Gambar 5 fungsi dan bukan fungsi

Perhatikan contoh kasus diatas, gambar satu dan dua merupakan fungsi dan gambar tiga dan empat bukan merupakan fungsi. Sehingga dari penjelasan contoh diatas yang merupakan fungsi adalah jika setiap anggota A memiliki pasangan dengan anggota B , dan setiap anggota memiliki tepat satu kawan dengan anggota B . Maka dapat kita simpulkan bahwa relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B . Relasi seperti ini disebut sebagai fungsi atau pemetaan.

Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B merupakan relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B .

Dimana syarat suatu relasi adalah fungsi atau pemetaan sebagai berikut.

1. Setiap anggota A memiliki pasangan di B
2. Setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota di B

2.2 Domain, Kodomain, Dan Range

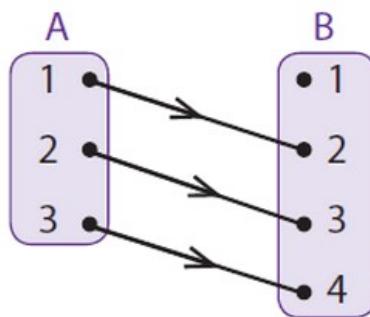
? $f : A \rightarrow B$

? A dinamakan daerah asal (*domain*) dari f dan B dinamakan daerah hasil (*codomain*) dari f .

? Misalkan $f(a) = b$, maka b dinamakan bayangan (*image*) dari a , dan a dinamakan pra-bayangan (*pre-image*) dari b .

? Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f dinamakan jelajah (*range*) dari f .

Dalam materi fungsi dikenal istilah Domain, Kodomain, dan juga Range Fungsi. Coba perhatikan gambar di bawah ini.

*Gambar 6 Domain dan kodomain*

Dari diagram panah tersebut himpunan A atau himpunan daerah asal disebut dengan **Domain**. Himpunan B yang merupakan daerah kawan disebut dengan **Kodomain** sedangkan anggota daerah kawan yang merupakan hasil dari pemetaan disebut dengan daerah hasil atau **range fungsi**. Jadi dari diagram panah di atas dapat disimpulkan

Domain (D_f) adalah $A = \{1,2,3\}$ **Kodomain adalah $B = \{1,2,3,4\}$** **Range Hasil (R_f) adalah $= \{2,3,4\}$**

2.3 Jenis-jenis Fungsi

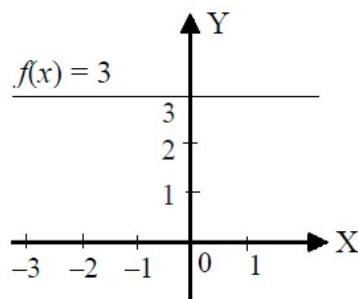
1 Fungsi konstan (fungsi tetap)

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ ditentukan dengan rumus $f(x)$ disebut fungsi konstan apabila untuk setiap anggota domain fungsi selalu berlaku $f(x) = C$, di mana C bilangan konstan. Untuk lebih jelasnya, pelajari contoh soal berikut ini.

Diketahui $f : R \rightarrow R$ dengan rumus $f(x) = 3$ dengan daerah domain: $\{x | -3 \leq x < 2\}$. Sehingga, gambar grafiknya.

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	3	3	3	3

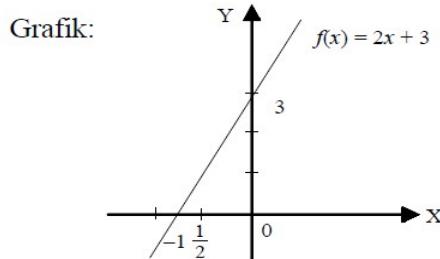
Grafik:

*Gambar 7 grafik fungsi konstan*

1. Fungsi linear

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, di mana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus. Perhatikan contoh berikut. Diketahui $f(x) = 2x + 3$, gambar grafiknya

$2x + 3$		
x	0	$-1\frac{1}{2}$
$f(x)$	3	0

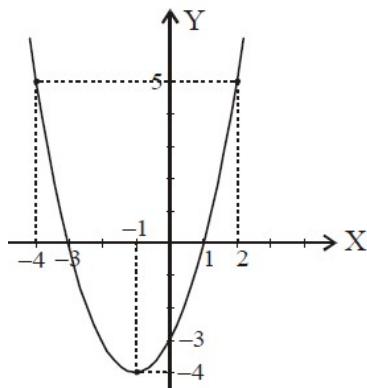


Gambar 8 grafik fungsi Linier

1. Fungsi Kuadrat

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi kuadrat apabila fungsi itu ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, di mana $a \neq 0$ dan a , b , dan c bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola. Perhatikan contoh fungsi kuadrat berikut.

Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2x - 3$, gambar grafiknya



Gambar 8 grafik fungsi kuadrat

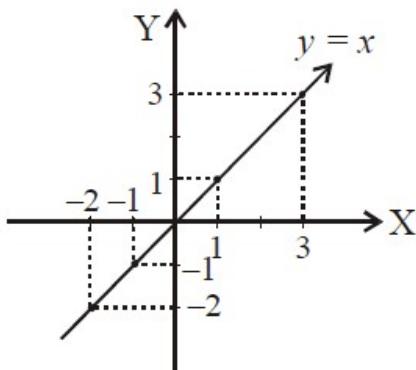
1. Fungsi identitas

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$ atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama. Fungsi identitas ditentukan oleh $f(x) = x$. Agar lebih memahami tentang fungsi identitas, pelajarilah contoh berikut ini.

Fungsi pada \mathbb{R} didefinisikan sebagai $f(x) = x$ untuk setiap x .a. Carilah $f(-2)$, $f(0)$, $f(\text{??})$, $f(\text{??})$.b. Gambarlah grafiknya.

Penyelesaian:a. Nilai $f(-2)$, $f(0)$, $f(\text{??})$, dan $f(\text{??})$. $f(x) = xf(-2) = -2f(0) = 0f(\text{??}) = -1f(\text{??}) = 3$

b. Gambar grafik.



Gambar 9 grafik fungsi identitas

1. (a) Sifat-sifat Fungsi

Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal tiga sifat fungsi yakni sebagai berikut :

1. Injektif (Satu-satu)

Misalkan fungsi f menyatakan A ke B maka fungsi f disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B . Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa $f: A \rightarrow B$ adalah fungsi injektif apabila $a \neq a'$ berakibat $f(a) \neq f(a')$ atau ekuivalen, jika $f(a) = f(a')$ maka akibatnya $a = a'$.

? Fungsi satu-satu

? Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk sembarang a_1 dan a_2 dengan a_1 tidak sama dengan a_2 berlaku $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$. Dengan kata lain, bila $a_1 = a_2$ maka $f(a_1)$ sama dengan $f(a_2)$.

2. Surjektif (Onto)

Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B . Apabila $f(A) = B$, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau “ f memetakan A Onto B ”.

? Fungsi kepada

? Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada jika dan hanya jika untuk sembarang b dalam kodomain B terdapat paling tidak satu a dalam domain A sehingga berlaku $f(a) = b$.

? Suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan *range*-nya (semua kodomain adalah peta dari domain).

3. Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan $f: A \rightarrow B$ sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan “ f adalah fungsi yang bijektif” atau “ A dan B berada dalam korespondensi satu-satu

? Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika untuk sembarang b dalam kodomain B terdapat tepat satu a dalam domain A sehingga $f(a) = b$, dan tidak ada anggota A yang tidak terpetakan dalam B .

? Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah **fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif**.

1. (a) Menghitung Nilai dari Sebuah Fungsi

2. Penulisan Fungsi

1. Himpunan pasangan terurut.

? Misalkan fungsi kuadrat pada himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :

$$f = \{(2, 4), (3, 9)\}$$

1. Formula pengisian nilai (assignment)

$$? f(x) = x^2 + 10,$$

$$? f(x) = 5x$$

1. Notasi Fungsi

Sebuah fungsi dinotasikan dengan huruf kecil seperti f , g , h , i , dan sebagainya. Pada fungsi g yang memetakan himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan $g(x)$. Misal ada fungsi f yang memetakan A ke B dengan aturan $f : x \rightarrow 2x + 2$. Dari notasi fungsi tersebut, x merupakan anggota domain. fungsi $x \rightarrow 2x + 2$ berarit fungsi f memetakan x ke $2x+2$. Jadi daerah bayangan x oleh fungsi f adalah $2x + 2$. Dapat di notasikan dengan $f(x) = 2x + 2$. Kesimpulan

Jika fungsi $f : x \rightarrow ax + b$ dengan x anggota domain f maka rumus fungsi f adalah $f(x) = ax + b$

1. Menghitung nilai dari sebuah fungsi

Menghitung nilai dari sebuah fungsi cukup sederhana. Kita hanya perlu mengikuti *rules* dari fungsi tersebut. Semakin susah fungsi yang memetakannya maka akan semakin susah menghitung nilai fungsinya. Terkadang soal-soal membalik fungsi tersebut, diketahui daerah hasil kemudian diminta mencari daerah asal. Yuk mari disimak contoh berikut:

Diketahui fungsi $f : x \rightarrow 2x - 2$ dengan x anggota bilangan bulat. Coba tentukan nilai dari

1. $f(??)$
2. $f(??)$
3. bayangan (-3) oleh f
4. nilai f untuk $x = -10$
5. nilai a jika $f(a) = 14$

Jawaban :

fungsi fungsi $f : x \rightarrow 2x - 2$ dapat dinyatakan dengan $f(x) = 2x - 2$

1. $f(x) = 2x - 2f(??) = 2(??) - 2 = 4$
1. $f(x) = 2x - 2f(??) = 2(??) - 2 = 6$
1. $f(x) = 2x - 2f(-3) = 2(-3) - 2 = -8$
1. $f(x) = 2x - 2f(??) = 2(??) - 2 = 18$
1. $f(a) = 2a - 214 = 2a - 22a = 16a = 8$

1. Menentukan Rumus sebuah fungsi

Sebuah fungsi dapat ditemukan rumusnya apabila ada nilai atau data yang diketahui. Kemudian dengan menggunakan aljabar kita bisa dengan mudah menemukan rumus dari fungsi tersebut. Untuk lebih jelasnya bisa simak contoh berikut:

Fungsi g yang berlaku pada himpunan bilangan riil ditentukan oleh rumus $g(x) = ax + b$ dengan a dan b adalah bilangan bulat. Jika $g(-2) = -4$ dan $g(??) = 5$. Coba tentukan nilai dari:

1. nilai dari a dan b
2. rumus fungsi
3. $g(-3)$

Jawaban :

Untuk mencari nilai a dan b kita buat persamaan dulu dari himpunan pasangan berurutan yang diketahui.

$$g(-2) = -4 \rightarrow -4 = -2a + b \rightarrow b = 2a - 4 \dots(??) g(?) = 5 \rightarrow 5 = a + b \dots(??)$$

kita substitusikan persamaan 1 ke persamaan 2

5	= a + b
5	= a + 2a - 4
5	= 3a - 4
9	= 3a
a	= 3

$$1. (a) i. b = 2a - 4b = 2(?) - 4 = 2 \text{ jadi nilai } a = 3 \text{ dan } b = 4$$

$$1. (a) i. \text{ rumus fungsinya } g(x) = 3a + 2$$

$$1. (a) i. g(x) = 3a + 2g(-3) = 3(-3) + 2g(-3) = -7$$

3.2 Operasi Aritmatika

3.1 Operasi Aritmatik

Dasar operasi aritmatik adalah **PENJUMLAHAN** dan **PENGURANGAN**, sedangkan operasi selanjutnya yang dikembangkan dari kedua operasi dasar tersebut adalah operasi **PERKALIAN** dan operasi **PEMBAGIAN**.

3.1.1 Penjumlahan Bilangan

3.1.1.1 Penjumlahan Bilangan Biner

Pada penjumlahan berlaku aturan seperti di bawah ini ,

0 + 0	= 0
0 + 1	= 1
1 + 0	= 1
1 + 1	= 0 / + 1 sebagai carry
1 + 1 + 1	= 1 / + 1 sebagai carry

Sebagai cara penjumlahan bilangan desimal yang Anda kenal sehari-hari, penjumlahan bilangan biner juga harus selalu memperhatikan *carry* (sisa) dari hasil penjumlahan pada tempat yang lebih rendah.

Contoh :

Data A = <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> dan data B = <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> akan	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0									
0	1	0	0	1	0	0	1									
dijumlahkan ,																
Data A = <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> $\cong 154_{10}$	1	0	0	1	1	0	1	0								
1	0	0	1	1	0	1	0									
Data B = <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> $\cong 73_{10}$	0	1	0	0	1	0	0	1								
0	1	0	0	1	0	0	1									
carry 1 1																
Hasil A + B = <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> $\cong 227_{10}$	1	1	1	0	0	0	1	1								
1	1	1	0	0	0	1	1									

Dalam contoh diatas, telah dilakukan penjumlahan 8 bit tanpa *carry*, sehingga hasil penjumlahannya masih berupa 8 bit data. Untuk contoh berikutnya akan dilakukan penjumlahan 8 bit yang menghasilkan *carry*.

Contoh :

Data A =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	1	0	dan data B =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	0	0	0	1	1	akan dijumlahkan ,
1	0	0	1	1	0	1	0													
1	1	1	0	0	0	1	1													
Data A =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	1	0	=	154_{10}									
1	0	0	1	1	0	1	0													
Data B =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	0	0	0	1	1	=	227_{10}									
1	1	1	0	0	0	1	1													
carry	1	1																		

$$\text{Hasil } A + B = \begin{array}{l} (1) \\ \hline 0 \end{array} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{0} \boxed{1} \quad = 381_{10}$$

Hasil penjumlahan diatas menjadi 9 bit data, sehingga untuk 8 bit data, hasil penjumlahannya bukan merupakan jumlah 8 bit data A dan B tetapi bit yang e-8 (dihitung mulai dari 0) atau yang disebut *carry* juga harus diperhatikan sebagai hasil penjumlahan.

3.1.1.2 Penjumlahan Bilangan Oktal

Proses penjumlahan bilangan oktal sama seperti proses penjumlahan bilangan desimal. Sisa akan timbul / terjadi jika jumlahnya telah melebihi 7 pada setiap tempat.

Contoh :

- a. Bilangan Oktal A = 232_8 dan bilangan Oktal B = 111_8 akan dijumlahkan ,

$$\text{Bilangan Oktal } A = 232_8 = 154_{10}$$

$$\text{Bilangan Oktal } B = 111_8 = 73_{10}$$

carry

$$\text{Hasil } A + B = 343_8 = 227_{10}$$

- b. Bilangan Oktal A = 232_8 dan bilangan Oktal B = 667_8 akan dijumlahkan ,

$$\text{Bilangan Oktal } A = 232_8 = 154_{10}$$

$$\text{Bilangan Oktal } B = 667_8 = 439_{10}$$

carry

$$\text{Hasil } A + B = 1121_8 = 593_{10}$$

3.1.1.3 Penjumlahan Bilangan Heksadesimal

Dalam penjumlahan bilangan heksadesimal, sisa akan terjadi jika jumlah dari setiap tempat melebihi 15.

Contoh

- a. Bilangan Heksadesimal A = $9A_{16}$ dan bilangan Heksadesimal B = 43_{16} akan dijumlahkan ,

$$\text{Bilangan Heksadesimal } A = 9A_{16} = 154_{10}$$

$$\text{Bilangan Heksadesimal } B = 43_{16} = 67_{10}$$

carry

$$\text{Hasil } A + B = DD_{16} = 221_{10}$$

- b. Bilangan Heksadesimal A = $E8_{16}$ dan bilangan Heksadesimal B = $9A_{16}$ akan dijumlahkan ,

$$\text{Bilangan Heksadesimal } A = E8_{16} = 232_{10}$$

$$\text{Bilangan Heksadesimal } B = 9A_{16} = 154_{10}$$

carry

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$$

$$\text{Hasil } A + B = 182_{16} = 386_{10}$$

3.1.2 Pengurangan Bilangan

3.1.2.1 Pengurangan Bilangan Biner

Pada pengurangan bilangan biner berlaku aturan seperti di bawah ini,

0 - 0	= 0
0 - 1	= 1 / -1 sebagai borrow
1 - 0	= 1
1 - 1	= 0
0 - 1 - 1	= 0 / -1 sebagai borrow
1 - 1 - 1	= 1 / -1 sebagai borrow

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi.

Contoh :

Data A =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	1	0	dan data B =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	0	0	1	0	0	1	akan
1	0	0	1	1	0	1	0													
0	1	0	0	1	0	0	1													
dikurangkan ,																				
Data A =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	1	0	=	154_{10}									
1	0	0	1	1	0	1	0													
Data B =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	0	0	1	0	0	1	=	73_{10}									
0	1	0	0	1	0	0	1													
borrow	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1				1														
1				1																
Hasil A - B =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	0	1	0	0	0	1	=	81_{10}									
0	1	0	1	0	0	0	1													

3.1.2.2 Pengurangan Bilangan Oktal

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi (dengan nilai 8).

Contoh :

$$\begin{array}{r}
 154 \\
 127 - \\
 \hline
 25
 \end{array}$$

↑↑↑ 4 s - 7 s + 8 s (borrow of) = 5 s
 5 s - 2 s - 1 s = 2 s
 1 s - 1 s = 0 s

3.1.2.2 Pengurangan Bilangan Heksadesimal

Pada pengurangan jika bilangan yang dikurangi lebih kecil dari pada bilangan pengurangnya maka dilakukan peminjaman (*borrow*) pada tempat yang lebih tinggi (dengan nilai 16).

Contoh :

12E1

$$\begin{array}{r}
 627 - \\
 \hline
 CBA
 \end{array}$$

16_{10} (pinjam) + 1_{10} - 7_{10} = 10_{10} = A $_{16}$
 14_{10} - 2_{10} - 1_{10} (dipinjam) = 11_{10} = B $_{16}$
 16_{10} (pinjam) + 2_{10} - 6_{10} = 12_{10} = C $_{16}$

1_{10} - 1_{10} (dipinjam) 0 $_{10}$ = 0 $_{16}$

3.1.3 Increment dan Decrement

Increment (bertambah) dan *Decrement* (berkurang) adalah dua pengertian yang sering sekali digunakan dalam teknik mikroprosesor. Dalam matematik pengertian *increment* adalah **Bertambah Satu** dan *decrement* artinya **Berkurang Satu**.

3.1.3.1 Increment Sistem Bilangan

Seperti penjelasan diatas bahwa *increment* artinya bilangan sebelumnya ditambah dengan 1.

Contoh :

Bilangan Biner	A =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1			
		+1								
Increment A	=	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0			
Bilangan Heksadesimal		B = 7 F								
		+1								
Increment B	=	8 0								

3.1.3.2 Decrement Sistem Bilangan

Decrement diperoleh dengan cara mengurangi bilangan sebelumnya dengan 1.

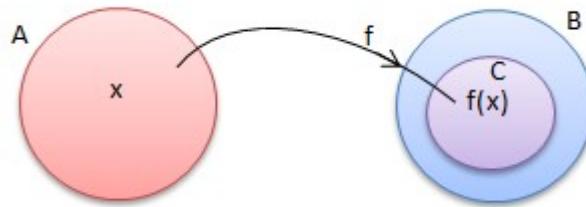
Contoh :

Bilangan Biner	A =	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1			
		-1								
Decrement A	=	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0			
Bilangan Heksadesimal		B = 7 F								
		-1								
Decrement B	=	7 E								

3.3 Komposisi Fungsi

Fungsi

Fungsi adalah relasi antara 2 himpunan yang berbeda A dan B yang memasangkan setiap anggota di Himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.



Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah penggabungan operasi 2 fungsi secara terurut yang nantinya akan menghasilkan sebuah fungsi baru.

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
2. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Sifat Komposisi Fungsi

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x) \quad (f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$$

Contoh :

diberikan fungsi :

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $g(x) = 3x^2$
3. $h(x) = \frac{1}{x+4}$

$$(f \circ g)(x) = \dots ?$$

fungsi $g(x)$ disubtitusikan ke fungsi $f(x)$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x^2) \\ &= 2(3x^2) + 1 \\ (f \circ g)(x) &= 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$1. \quad (g \circ h)(x) = \dots ?$$

fungsi $h(x)$ disubtitusikan ke fungsi $g(x)$

$$1. \quad (h \circ g \circ f)(x) = \dots ?$$

fungsi $f(x)$ harus disubtitusikan terlebih dahulu ke fungsi $g(x)$, hasilnya nanti akan baru disubtitusikan ke fungsi $h(x)$, perhatikan warna mewakili substitusi

$$\begin{aligned}
 (h \circ g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) \\
 &= h(g(2x + 1)) \\
 &= h(3(2x + 1)^2) \\
 &= h(3(4x^2 + 4x + 1)) \\
 &= h(12x^2 + 12x + 3) \\
 &= \frac{1}{(12x^2 + 12x + 3) + 4} \\
 &= \frac{1}{12x^2 + 12x + 7}
 \end{aligned}$$

3.4 Fungsi Linear

1. Pengertian Fungsi Linier

Fungsi adalah hubungan matematis antara suatu variabel dengan variabel lainnya. Unsur-unsur pembentuk fungsi adalah **variabel**, **koeffisien**, dan **konstanta**.

Variabel adalah unsur yang sifatnya berubah-ubah dari satu keadaan ke keadaan lainnya. Variabel dapat dibedakan menjadi **variabel bebas** dan **variabel terikat**. **Variabel bebas** : variabel yang menjelaskan variabel lainnya. Adapun **Variabel terikat** adalah variabel yang diterangkan oleh **variabel bebas**

Contoh 1 :

Jika y adalah fungsi x maka ditulis $y = f(x)$ dimana :
 x adalah variabel bebas dan y adalah variabel terikat

Jika x adalah fungsi dari y maka ditulis $x = f(y)$ dimana :
 y adalah variable bebas dan x adalah variable terikat

Gambar 1 contoh fungsi linier

Koeffisien adalah bilangan atau angka yang diletakkan tepat di depan suatu variabel, terkait dengan variabel yang bersangkutan.

Contoh 2 :

$2y = 3x - 5$, y adalah variable terikat
 x adalah variable bebas
 2 adalah koeffisien (terletak di depan variable y)
 3 adalah koeffisien (terletak di depan variable x)
 5 adalah konstanta

$x = y - 5$ y adalah variabel bebas
 x adalah variable terikat
 - 5 adalah konstanta

Gambar 2 contoh fungsi linier

Konstanta sifatnya tetap dan tidak terkait dengan suatu variabel apapun.

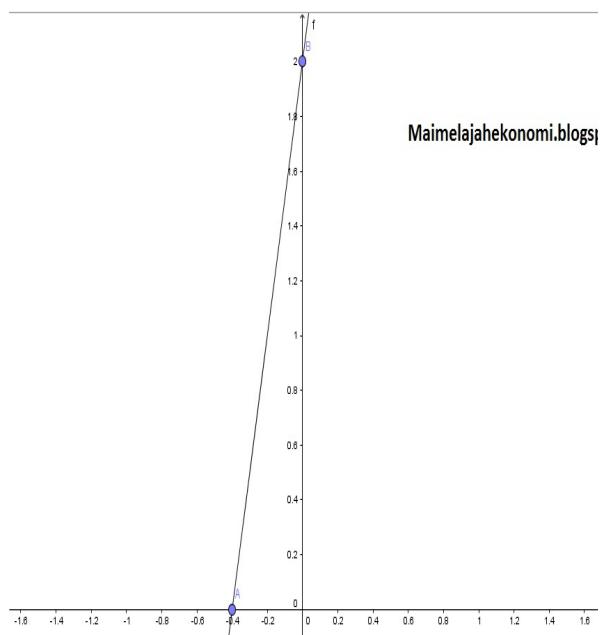
Fungsi linier adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus. Oleh karena itu fungsi linier sering disebut dengan persamaan garis lurus (pgl) dengan bentuk umumnya sbb.:

$$f : x \rightarrow mx + c \text{ atau } f(x) = mx + c \text{ atau } y = mx + c$$

m adalah gradien / kemiringan / kecondongan dan c adalah konstanta

Contoh : Gambarlah grafik $y = 5x + 2$. **Pertama** tentukanlah nilai x jika $y = 0$: $0 = 5x + 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$. Jadi kordinat yang didapatkan adalah (x,y) yaitu $(-\frac{2}{5}, 0)$. **Kedua** tentukanlah nilai y jika $x = 0$: $y = 5x + 2 \Rightarrow y = 2$. Jadi kordinat yang didapatkan adalah (x,y) yaitu $(0, 2)$.

Setelah titik potong tercipta teman-teman hanya perlu menarik garis antara kordinat satu dengan kordinat lainnya maka akan jadi seperti ini :



Gambar 3 grafik fungsi linier

Dari grafik diatas dapat tarik kesimpulan kalau **gradien** itu merupakan **arah** dari garis lurus. Gradien dapat memiliki **nilai positif** jika membentuk garis lurus yang memiliki sudut dengan sumbu x diatas 0 derajat dan kurang dari 90 derajat sebab nilai Tg-nya sudah pasti positive . Gradien dapat memiliki **nilai negatif** jika membentuk garis lurus yang memiliki sudut dengan sumbu x lebih dari 90 derajat dan kurang dari 180derajat sebab nilai Tg-nya sudah pasti negatif. Gradien dapat memiliki **nilai 0** jika membentuk garis tegak terhadap sumbu y sehingga membentuk sudut tepat 0 derajat terhadap sumbu x , ini terjadi karena nilai Tg dari 0derajat itu sendiri adalah 0. Gradien dapat memiliki **nilai tak berhingga** jika membentuk garis tegak terhadap sumbu x yang nantinya garis tersebut akan membentuk sudut sebesar 90derajat terhadap sumbu x. Ini terjadi karena nilai Tg 90 derajat adalah tak berhingga.

Jika membuat persamaan garis lurus yang melalui titik $(0,0)$ dengan gradien sebesar m maka gunakanlah rumus : $y = mx$ caranya tinggal masukan nilai m aja kok , nilai m biasanya diketahui di soal . Jika membuat persamaan garis lurus yang memotong sumbu y di titik $(0,n)$ dan gradiennya diketahui , pakai saja rumus $y = mx + n$. Jika membuat persamaan garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan gradiennya diketahui gunakanlah persamaan $y - y_1 = m(x - x_1)$. Jika membuat persamaan garis lurus yang melalui dua titik misal titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ maka gunakanlah persamaan :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Jika membuat persamaan garis lurus yang memotong sumbu x pada x_1 dan sumbu y pada y_1 maka cobalah untuk menggunakan rumus :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = 1$$

Untuk yang diatas tadi ini ,yang tetap dirumus hanyalah x dan y saja , sisanya adalah variabel yang ditentukan dalam soal .Nah kalau persamaan garis lurus $Ax + By + C = 0$, nah ini jujur saya benar-benar masih belum mengerti , mungkin kalau ada dari teman-teman yang ingin menjelaskan mohon komentar dibawah. Nah ini nih temen2 , bener2 sangat berguna dan gak kalah penting .Misalkan ini ada dua garis lurus :Garis lurus

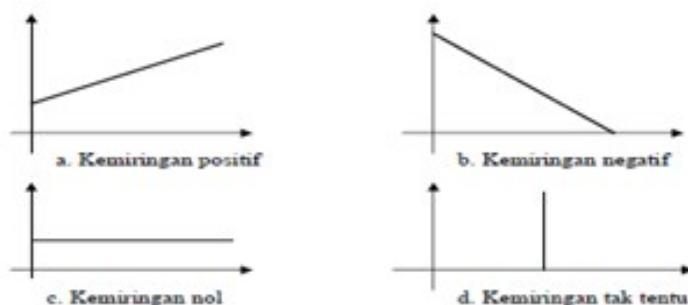
$$L_1 : y = m_1 x + n_1 \quad L_2 : y = m_2 x + n_2$$

1.) Dua garis lurus berimpit maka $m_1 = m_2$ dan $n_1 = n_2$.) Dua garis lurus sejajar maka $m_1 = m_2$ dan n_1 tidak sama dengan n_2 .) Dua garis lurus saling tegak lurus $m_1 \times m_2 = -1$.) Dua garis lurus saling berpotongan m_1 tidak sama dengan m_2

1. Melukis grafik fungsi linier

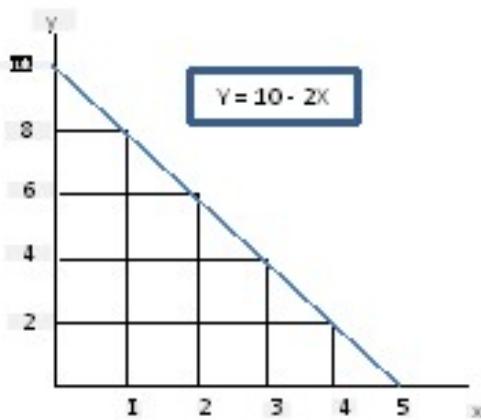
Langkah-langkah melukis grafik fungsi linier

a Tentukan titik potong dengan sumbu x, $y = 0$ diperoleh koordinat A($x_1, 0$)b Tentukan titik potong dengan sumbu y, $x = 0$ diperoleh koordinat B($0, y_1$)c hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurusPersamaan linier juga dapat ditulis ditulis dengan simbol $y = ax + b$ (ini untuk memudahkan kita dalam memahami gambar)Jika b bernilai positif : fungsi linier digambarkan garis dari kiri bawah ke kanan atasJika b bernilai negatif : fungsi linier digambarkan garis dari kiri atas ke kanan bawahJika b bernilai nol : digambarkan garis yg sejajar dengan sumbu datar x

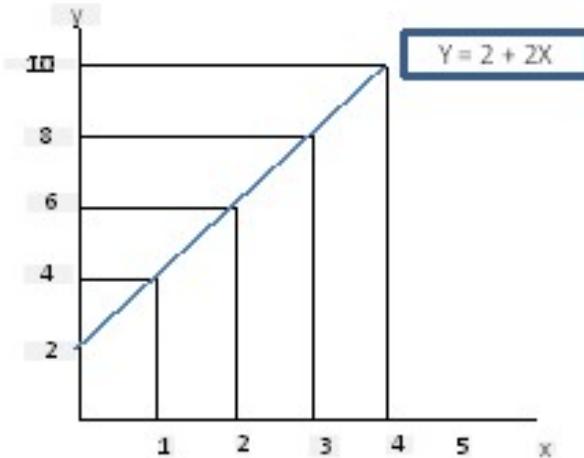


Gambar 4 Fungsi Linear

Apabila b bernilai negatif : $Y = 10 - 2X$ maka kurva bergerak dari kiri atas ke kanan bawah



Apabila b bernilai positif : $Y = 2 + 2X$ maka kurva bergerak dari kiri bawah ke kanan atas



1. Gradien dan persamaan garis lurus

1. Garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ memiliki gradien m :
 $m = y_1 - y_2$ atau $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

1. Persamaan garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah:
 $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

1. Persamaan garis lurus (pgl) yang bergradien m dan melalui titik $A(x_1, y_1)$ adalah:
 $y = m(x - x_1) + y_1$

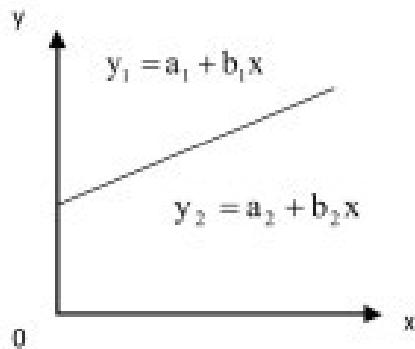
- 4. Menentukan gradien dari persamaan garis lurus (pgl)**
1. Persamaan garis lurus : $ax + by = c$ maka gradiennya $m = -\frac{a}{b}$
 2. Persamaan garis lurus : $y = ax + b$ maka $m = a$
 3. Garis yang sejajar sumbu x memiliki persamaan $y = c$ dan $m = 0$
 4. Garis yang sejajar sumbu y memiliki persamaan $x = c$ dan tidak memiliki gradient
- 5. Titik potong dua buah garis**

Menentukan titik potong dua buah garis lurus identik dengan menyelesaikan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel baik dengan metode eliminasi, metode substitusi maupun metode grafik

6. Hubungan dua buah garis

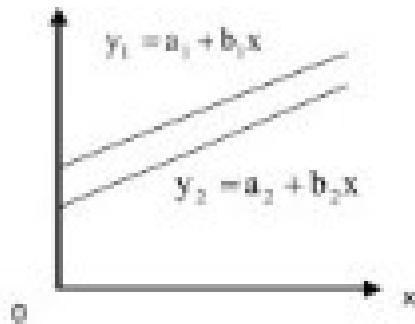
Dua garis yang bergradien m_1 dan m_2 dikatakan sejajar jika $m_1 = m_2$ dan tegak lurus jika $m_1 \times m_2 = -1$. **Berimpit**

Dua garis lurus akan berimpit apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berimpit dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika $y_1 = ny_2 \quad a_1 = na_2 \quad b_1 = nb_2$



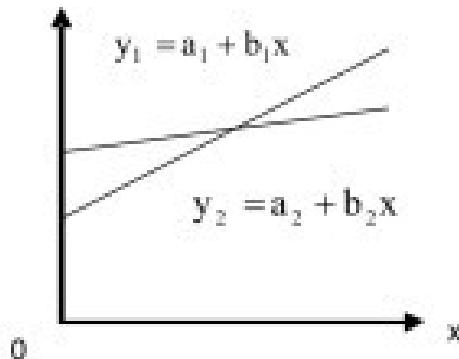
2. Sejajar

Dua garis lurus akan sejajar apabila lereng/gradien garis yang satu sama dengan lereng/gradien dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan sejajar dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika $b_1 = b_2$



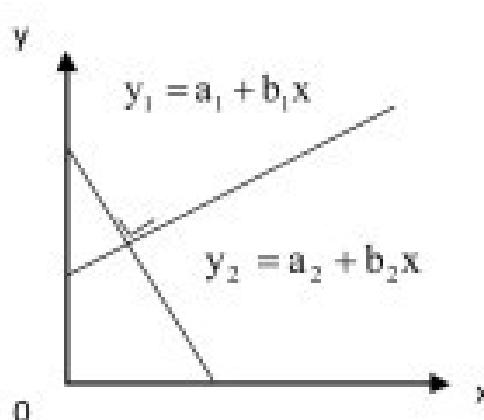
1. Berpotongan

Dua garis lurus akan berpotongan apabila lereng/gradien garis yang satu tidak sama dengan lereng/gradien dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berpotongan dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika $b_1 \neq b_2$



4. Tegak lurus

Dua garis lurus akan saling tegak lurus apabila lereng/gradien garis yang satu merupakan kebalikan dari lereng/gradien dari garis yang lain dengan tanda yang berlawanan. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan tegak lurus dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika atau $b_1 = -\frac{1}{b_2}$



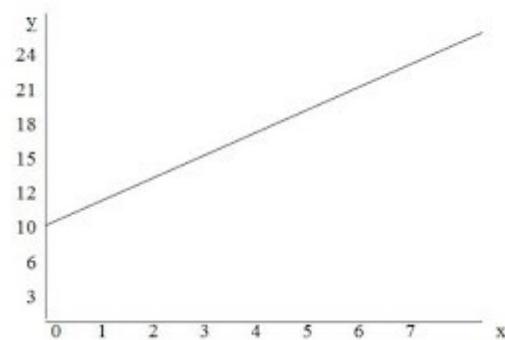
7. Penggambaran Fungsi Linear

1. Cara Daftar

Digunakan untuk melihat perubahan nilai angka dari peubah bebas dan peubah tergantungnya.

Contoh : $y = 2x + 10$

X	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	10	12	14	16	18	20	22	24



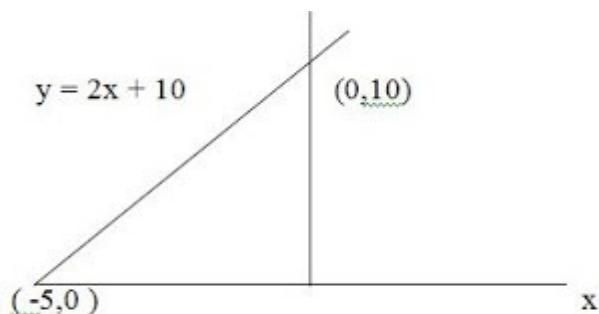
2. Cara Matematis

Dengan cara mencari ciri matematis dari persamaan yang bersangkutan.

$$Y = 2x + 10$$

Titik potong sumbu y apabila $x = 0$ maka $y = 2(0) + 10 = 10$

Sehingga titik potong pada sumbu y = (0,10)
 Titik potong sumbu x apabila y = 0 maka $0 = 2x + 10$
 $-2x = 10$
 $x = -5$



sehingga titik potong pada sumbu x = (-5,0)

3. Mencari fungsi linear

a. Metode dua titik (dwi koordinat)

merupakan metode pembentukan persamaan linear (garis lurus) dari dua buah titik yang diketahui

$$\frac{(Y - Y_1)}{(Y_2 - Y_1)} = \frac{(X - X_1)}{(X_2 - X_1)}$$

Contoh buatlah persamaan garis lurus yang melalui titik A (4,2) dan B (2,6)

Titik A (4,2) $X_1 = 4$ $Y_1 = 2$

Titik B (2,6) $X_2 = 2$ $Y_2 = 6$

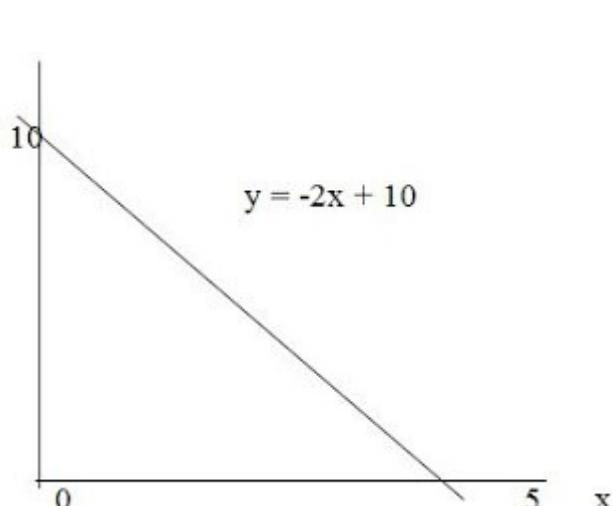
$$\frac{(Y - 2)}{(6 - 2)} = \frac{(X - 4)}{(2 - 4)}$$

$$\frac{(Y - 2)}{4} = \frac{(X - 4)}{-2}$$

$$-2y + 4 = 4x - 16$$

$$-2y = 4x - 20$$

$$y = -2x + 10$$



b. Metode titik potong sumbu

digunakan untuk kasus tertentu, yaitu jika suatu titik A (x_1, y_1) merupakan titik potong sumbu Y, misalnya pada titik (0,b) dan titik B (x_2, y_2) merupakan titik potong sumbu x misalnya pada (a,0) maka persamaan garisnya dapat dibentuk sbb:

$$\frac{y}{b} - 1 = \frac{-x}{a}$$

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

Contoh :

Apabila diketahui suatu garis dengan titik potong sumbu y adalah (0,6) dan titik potong sumbu x adalah (4,0), carilah persamaan garisnya

$$\frac{y}{b} - 1 = \frac{-x}{a}$$

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

$$\frac{y}{6} + \frac{x}{4} = 1 \quad \times 12$$

$$12y/6 + 12x/4 = 12$$

$$2y + 3x = 12$$

$$2y = -3x + 12$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 6$$

c. Metode kemiringan garis dan titik

Apabila diketahui suatu titik A (x_1, y_1) dan dilalui oleh suatu garis lurus yang memiliki kemiringan m, maka persamaannya adalah :

$y - y_1 = m(x - x_1)$ persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dengan kemiringan sebesar m.

Contoh:

Carilah persamaan garis yang melalui suatu titik (4,2) dan kemiringan -3

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -3(x - 4)$$

$$= -3x + 12$$

$$y = -3x + 14$$

d. Metode kemiringan garis dan titik potong sumbu

Apabila diketahui suatu titik yang berkoordinat (0,b) merupakan titik potong dengan sumbu y sebuah garis lurus yang memiliki kemiringan garis m, maka persamaan garis tersebut adalah $y = mx + b$, merupakan persamaan garis yang melalui titik potong sumbu y dengan kemiringan m,

Contoh :

Apabila suatu garis memiliki titik potong dengan sumbu y pada (0,-4) dan kemiringannya 5 maka bagaimana persamaan garisnya :

$$y = mx + b$$

$$y = 5x - 4$$

Contoh soal persamaan linier

1. Suatu fungsi linear ditentukan oleh $y = 4x - 2$ dengan daerah asal $\{x | -1 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$.
2. Buat tabel titik-titik yang memenuhi persamaan diatas .
3. Tentukan titik potong grafik dengan sumbu X dan sumbu Y.

Penyelesaian :

1. (a) Ambil sembarang titik pada domain

X	-1	0	1	2	W3956W5012W6151W7290W8429	Y=	4x-2	-6	-2	2
	6W3956W5012W6151W7290W8429									

1. Titik potong dengan sumbu x ($y = 0$)

$$y = 4x - 2$$

$$0 = 4x - 2$$

$$2 = 4x$$

$$x = 1/2$$

Jadi titik potong dengan sumbu X adalah (,0)

1. Titik potong dengan sumbu Y ($x = 0$)

$$y = 4x - 2$$

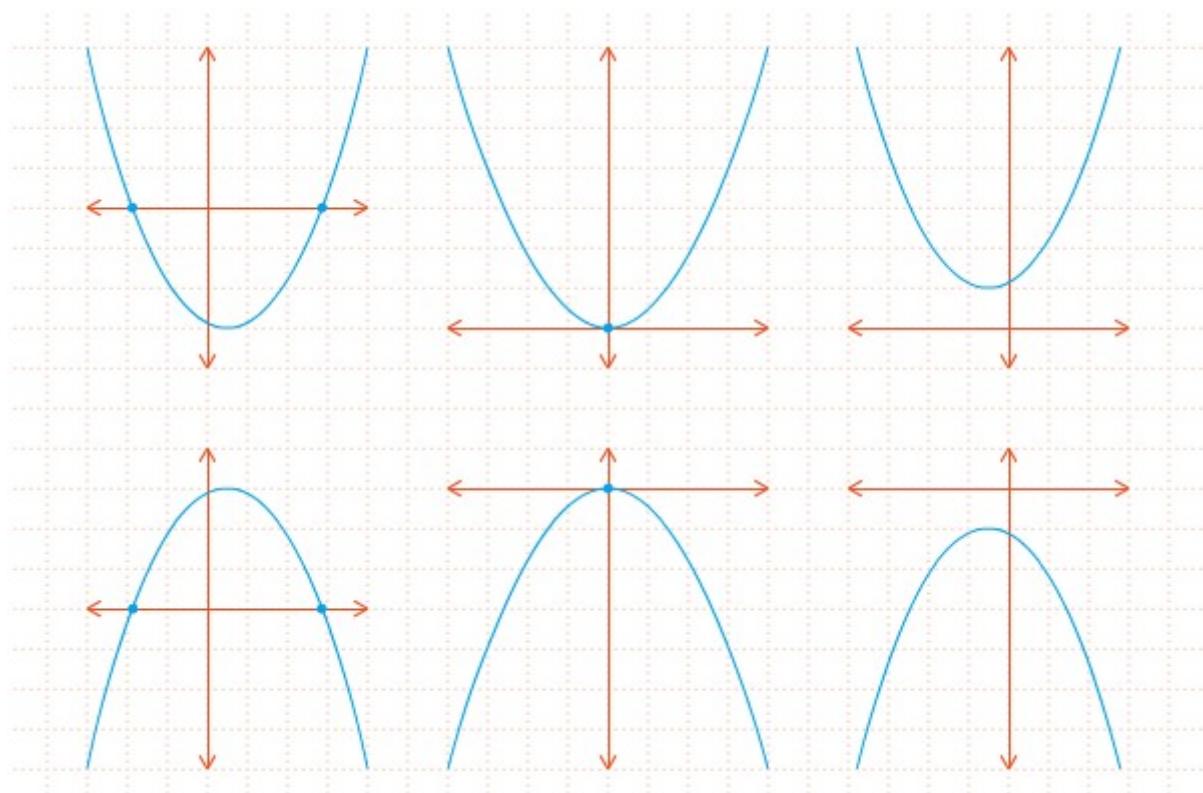
$$y = 4(0) - 2$$

$$y = -2$$

Jadi titik potong dengan sumbu Y adalah (0,-2)

3.5 Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat (*quadratic function*) adalah fungsi polinomial yang berderajat dua. Bentuk umum dari fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Fungsi kuadrat dapat memotong sumbu-x 2 kali, 1 kali, atau tidak memotong sumbu-x sama sekali.



Pada buku ini akan dibahas fungsi kuadrat yang memotong sumbu- x minimal di satu titik, misalkan di titik-titik $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$. Sehingga didapatkan $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Apabila fungsi kuadrat yang memotong sumbu- x di dua titik tersebut melalui titik (x_3, y_3) , maka fungsi kuadrat tersebut dapat ditentukan bentuknya, yaitu sebagai berikut:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

CONTOH SOAL

Susunlah fungsi kuadrat yang memotong sumbu- x di titik $(2, 0)$ dan titik $(-1, 0)$ serta melalui titik $(3, 12)$!

Jawab: Karena fungsi kuadrat yang dimaksud melalui titik $(3, 12)$ serta memotong sumbu- x di titik $(2, 0)$ dan titik $(-1, 0)$, maka kita cukup mensubstitusikan 3 pada x , 12 pada $f(x)$, serta absis-absis titik potong sumbu- x pada x_1 dan x_2 . Sehingga,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ x = 3, f(x) = 12, x_1 = 2, x_2 = -1 &\Rightarrow 12 = a(3 - 2)(3 - (-1)) \\ &\Leftrightarrow 12 = a \cdot 1 \cdot 4 \\ &\Leftrightarrow 12 = 4a \\ &\Leftrightarrow a = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

Setelah diperoleh $a = 3$, substitusikan a tersebut pada rumus dengan membiarkan x dan $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ a = 3, x_1 = 2, x_2 = -1 &\Rightarrow f(x) = 3(x - 2)(x - (-1)) \\ &\Leftrightarrow f(x) = 3(x - 2)(x + 1) \\ &\Leftrightarrow f(x) = 3(x^2 - x - 2) \\ &\Leftrightarrow f(x) = 3x^2 - 3x - 6 \end{aligned}$$

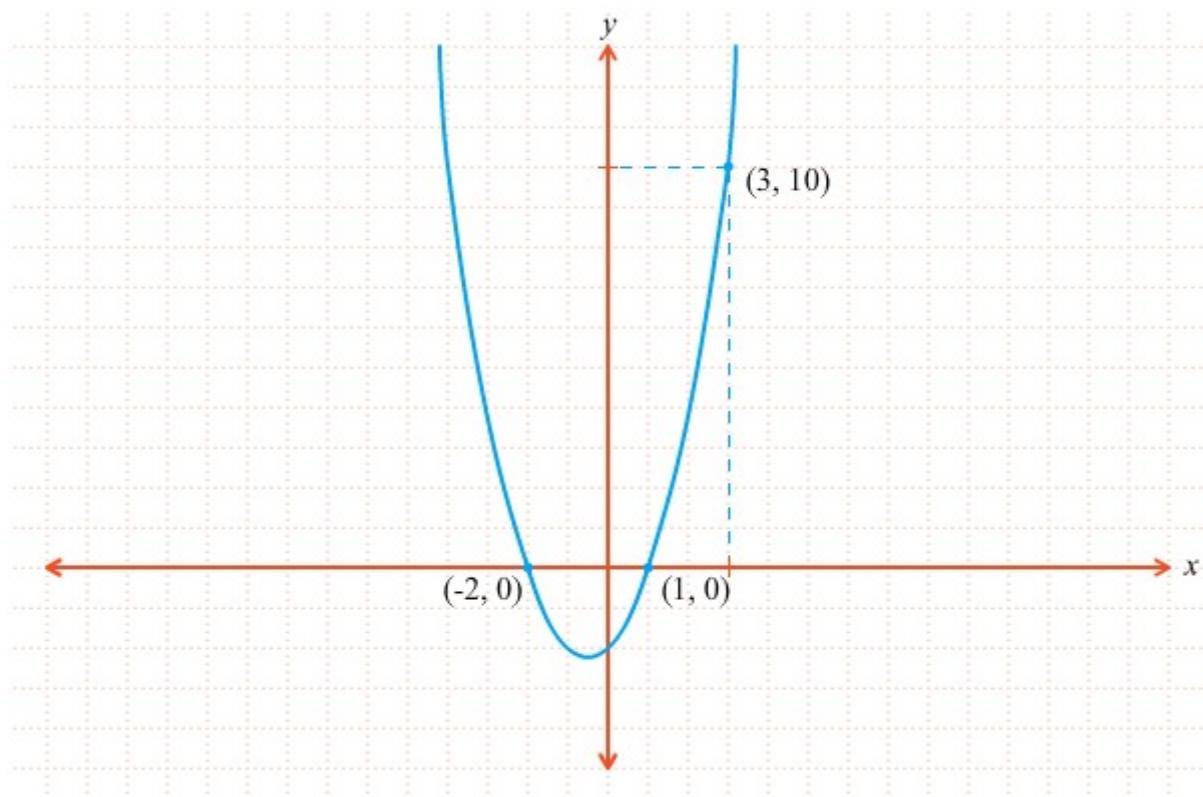
Sehingga diperoleh fungsi kuadrat yang dimaksud adalah $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Untuk menguji hasil yang diperoleh, mari kita uji fungsi tersebut apakah melalui titik-titik $(2, 0)$, $(-1, 0)$, dan $(3, 12)$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 3x^2 - 3x - 6 &\Rightarrow f(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 6 \\
 &= 12 - 6 - 6 = 0 \\
 \Rightarrow f(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 6 \\
 &= 3 + 3 - 6 = 0 \\
 \Rightarrow f(3) &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 6 \\
 &= 27 - 9 - 6 = 12
 \end{aligned}$$

Sehingga fungsi kuadrat yang diperoleh memenuhi permintaan soal. Untuk menguji kompetensi mengenai materi ini silahkan kerjakan soal berikut.

SOAL LATIHAN

Perhatikan gambar di bawah!



Tentukanlah fungsi kuadrat yang grafiknya digambarkan seperti gambar di atas!

Fungsi kuadrat memiliki grafik yang berbentuk parabola yang terbuka ke atas atau ke bawah. Sehingga fungsi kuadrat dapat memiliki nilai minimum ataupun maksimum, tergantung dari koefisien x^2 (a) fungsi kuadrat tersebut. Apabila nilai a positif, maka fungsi kuadrat tersebut memiliki nilai minimum. Sedangkan apabila nilai a negatif, fungsi kuadrat tersebut memiliki nilai maksimum. Titik di mana nilai maksimum/minimum dari fungsi kuadrat tersebut disebut **titik ekstrim**, disimbolkan (x_p, y_p) .

Fungsi kuadrat yang memiliki titik ekstrim (x_p, y_p) dan melalui satu titik lain dapat disusun dengan menggunakan rumus berikut:

$$y = a(x - x_p)^2 + y_p$$

Untuk lebih memahami mengenai topik menyusun fungsi kuadrat apabila diketahui titik ekstrim dan satu titik lain yang dilaluinya, perhatikan contoh soal berikut.

CONTOH SOAL

Susunlah fungsi kuadrat yang memiliki titik ekstrim di $(2, -5)$ dan melalui titik $(1, 4)$!

Jawab: Fungsi kuadrat yang memiliki titik ekstrim di $(2, -5)$ dan melalui titik $(1, 4)$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_p)^2 + y_p \\ x = 1, y = 4, x_p = 2, y_p = -5 &\Rightarrow 4 = a(1 - 2)^2 + (-5) \\ &\Leftrightarrow 4 = a - 5 \\ &\Leftrightarrow a = 9 \end{aligned}$$

Untuk $a = 9$, diperoleh

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_p)^2 + y_p \\ a = 5, x_p = 2, y_p = -5 &\Rightarrow y = 9(x - 2)^2 + (-5) \\ &\Leftrightarrow y = 9(x^2 - 4x + 4) - 5 \\ &\Leftrightarrow y = 9x^2 - 36x + 31 \end{aligned}$$

Jadi, fungsi kuadrat yang memiliki titik ekstrim $(2, -5)$ dan melalui titik $(1, 4)$ adalah $y = 9x^2 - 36x + 31$

Pada umumnya, dalam menyusun fungsi kuadrat diperlukan minimal tiga titik yang dilaluinya. Hal ini tidak berlaku untuk titik ekstrim. Apabila diketahui titik ekstrim suatu fungsi kuadrat, maka diperlukan satu titik lagi (total dua titik) untuk menyusun fungsi fungsi kuadrat tersebut. Yang akan dibicarakan di sini adalah menyusun fungsi kuadrat jika diketahui ketiga titik yang dilaluinya, titik ekstrim tidak masuk dalam ketiga titik tersebut.

Untuk menyusun fungsi kuadrat jika diketahui ketiga titik yang dilaluinya digunakan bentuk umum dari fungsi kuadrat berikut:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Dengan a , b , dan c bilangan real, serta $a \neq 0$.

Untuk mengetahui bagaimana menyusun fungsi kuadrat jika diketahui ketiga titik yang dilaluinya, perhatikan contoh soal berikut.

CONTOH SOAL

Tentukan fungsi kuadrat yang melalui titik-titik $(-1, 6)$ dan $(2, 12)$ serta memotong sumbu- y pada $y = 2$!

Jawab Fungsi kuadrat yang akan dicari memotong sumbu- y pada $y = 2$, atau dengan kata lain memotong sumbu- y di titik $(0, 2)$. Sehingga,

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ (x, y) = (0, 2) &\Rightarrow 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ &\Leftrightarrow 2 = 0 + 0 + c \\ &\Leftrightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Setelah itu kita substitusikan titik $(-1, 6)$ pada persamaan.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ (x, y) = (-1, 6), c = 2 &\Rightarrow 6 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 \\ &\Leftrightarrow 6 = a - b + 2 \\ &\Leftrightarrow 6 - 2 = a - b \\ &\Leftrightarrow 4 = a - b \end{aligned}$$

Persamaan yang diperoleh ini dimisalkan dengan **persamaan 1**.

Lanjut ke titik $(2, 12)$. Apabila titik $(2, 12)$ disubstitusikan ke bentuk umum fungsi kuadrat, akan menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned}
 y &= ax^2 + bx + c \\
 (x, y) = (2, 12), c = 2 &\Rightarrow 12 = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + 2 \\
 &\Leftrightarrow 12 = 4a + 2b + 2 \\
 &\Leftrightarrow 12 - 2 = 4a + 2b \\
 &\Leftrightarrow 10 = 4a + 2b \\
 &\Leftrightarrow 5 = 2a + b
 \end{aligned}$$

Persamaan yang diperoleh ini dimisalkan dengan **persamaan 2**.

Selanjutnya, lakukan **metode eliminasi** persamaan 2 terhadap persamaan 1 dengan menghilangkan/mengeliminasi variabel b .

$$\begin{array}{rcl}
 a & -b & = 4 \\
 2a & +b & = 5 \\
 \hline
 3a & & = 9
 \end{array} +$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{9}{3} = 3$$

Sehingga diperoleh $a = 3$. Substitusikan hasil ini ke persamaan 1 atau 2. Apabila $a = 3$ disubstitusikan ke persamaan 1, maka $3 - b = 4$. Diperoleh $b = 3 - 4 = -1$. Jadi, fungsi kuadrat yang melalui titik-titik $(-1, 6)$ dan $(2, 12)$ serta memotong sumbu-y pada $y = 2$ adalah $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

Fungsi kuadrat yang melalui titik-titik $(-1, 6)$ dan $(2, 12)$ serta memotong sumbu-y pada $y = 2$ adalah $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

Untuk meyakinkan akan kebenaran jawaban ini, mari kita uji fungsi kuadrat ini dengan titik-titik $(-1, 6)$, $(2, 12)$, dan $(0, 2)$.

$y = 3x^2 - x + 2$	
$x = -1 \Rightarrow y = 3(-1)^2 - (-1) + 2$	
$\Leftrightarrow y = 3 \cdot 1 + 1 + 2$	
$\Leftrightarrow y = 6$	
<hr/>	
$x = 2 \Rightarrow y = 3(2)^2 - (2) + 2$	
$\Leftrightarrow y = 3 \cdot 4 - 2 + 2$	
$\Leftrightarrow y = 12$	
<hr/>	
$x = 0 \Rightarrow y = 3(0)^2 - (0) + 2$	
$\Leftrightarrow y = 3 \cdot 0 - 0 + 2$	
$\Leftrightarrow y = 2$	

Pada perhitungan di atas dapat diperoleh bahwa untuk $x = -1$ diperoleh $y = 6$, untuk $x = 2$ diperoleh $y = 12$, dan untuk $x = 0$ diperoleh $y = 2$. Sehingga fungsi $f(x) = 3x^2 - x + 2$ memotong titik-titik $(-1, 6)$, $(2, 12)$, dan $(0, 2)$. Sesuai yang diminta soal. Jadi, dari hasil ini dapat disimpulkan bahwa pekerjaan kita dalam menyusun fungsi kuadrat di atas benar.

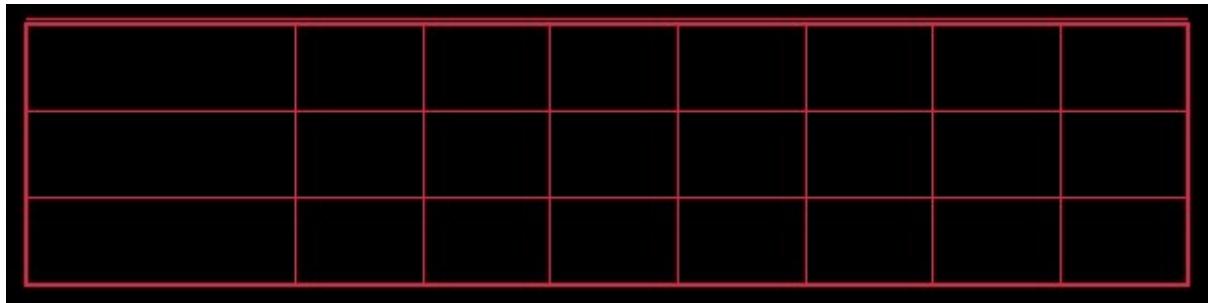
Grafik Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat merupakan suatu fungsi yang memiliki satu variabel yang pangkat tertingginya adalah 2. Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$. Pada pembahasan ini akan ditunjukkan bagaimana cara melukis grafik fungsi kuadrat, khususnya grafik fungsi $f(x) = x^2$ dan $f(x) = -x^2$. Mengapa memilih fungsi-fungsi kuadrat tersebut? Karena fungsi-fungsi tersebut merupakan fungsi-fungsi kuadrat yang paling sederhana.

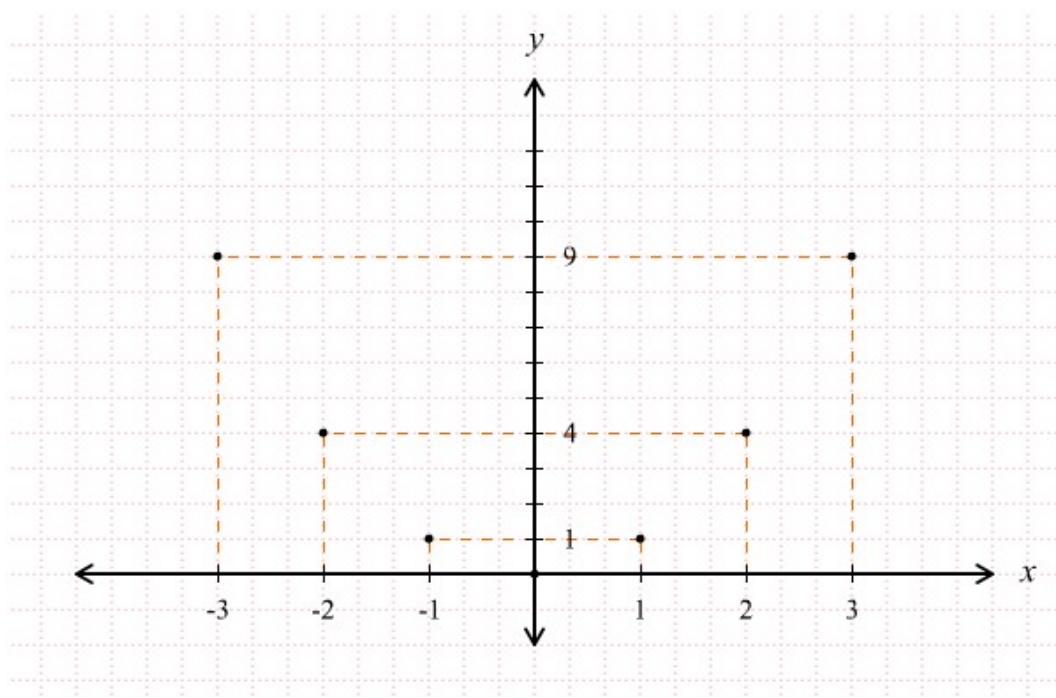
Melukis Grafik Fungsi $f(x) = x^2$

Sebelum melukis grafik fungsi $f(x) = x^2$, perlu diketahui bahwa semua fungsi kuadrat merupakan fungsi kontinu. Sehingga apabila dilukiskan grafik fungsinya, akan terbentuk grafik fungsi yang halus. Selain itu, fungsi $f(x) = x^2$ merupakan fungsi genap, yaitu fungsi yang nilai $f(x) = f(-x)$. Grafik dari fungsi genap memiliki sumbu simetri pada sumbu-y. Berikut ini langkah-langkah dalam melukis grafik fungsi $f(x) = x^2$.

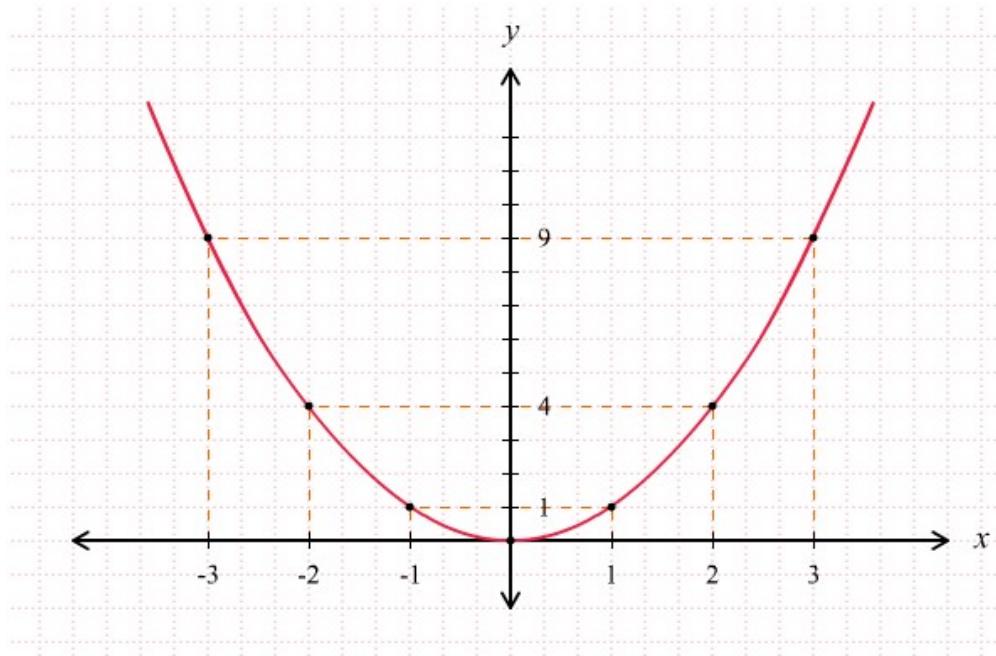
1. Cacahlah titik-titik yang dilalui oleh grafik fungsi $f(x) = x^2$. Karena grafik fungsi tersebut memiliki sumbu simetri pada sumbu-y, pilihlah $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.



1. Lukislah titik-titik dengan koordinat $(x, f(x))$ pada koordinat Cartesius.



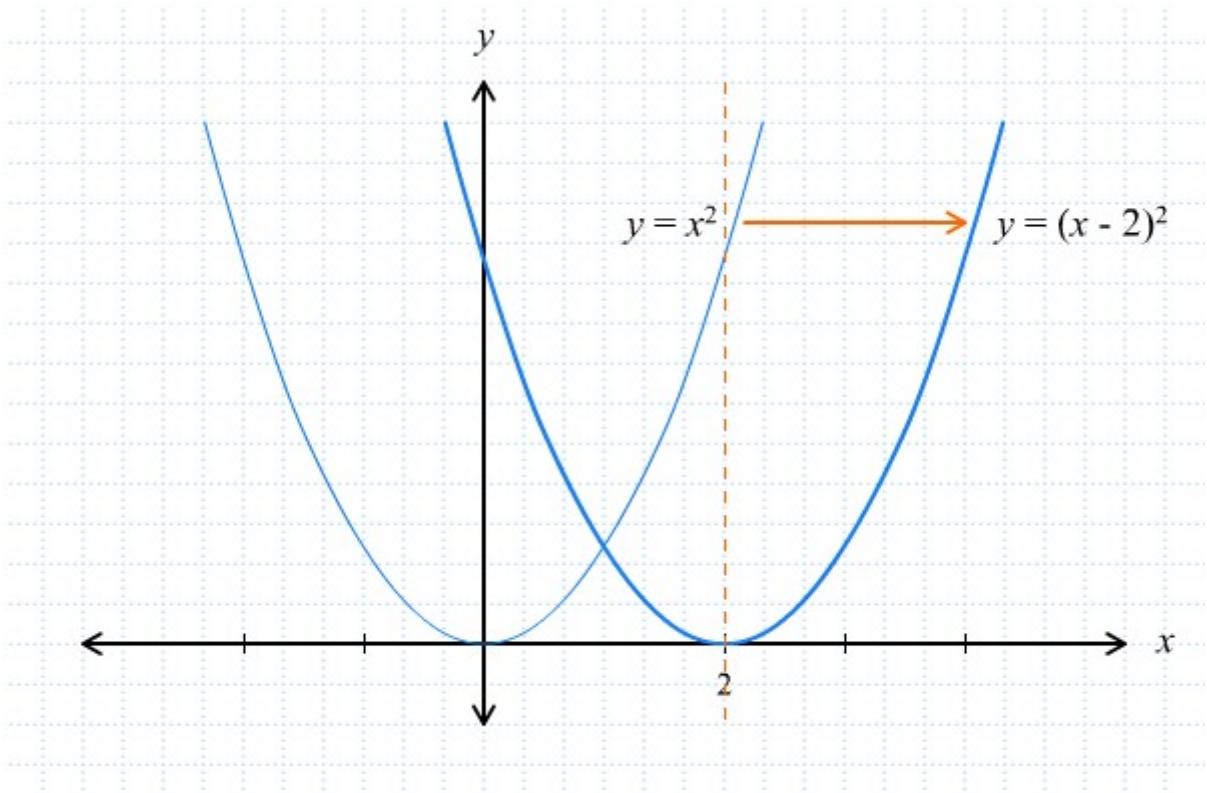
1. Hubungkan titik-titik tersebut dengan menggunakan kurva halus. Grafik yang terbentuk merupakan grafik fungsi $f(x) = x^2$.



Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas mengenai 2 grafik fungsi kuadrat yang paling sederhana, yaitu grafik $f(x) = x^2$ dan $f(x) = -x^2$. Bagaimana dengan grafik-grafik fungsi kuadrat lainnya? Seperti diketahui, bentuk umum dari fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$. **Pada pembahasan ini akan ditunjukkan cara melukis grafik fungsi kuadrat yang memiliki nilai $a = 1$ ($f(x) = x^2 + bx + c$).** Dalam melukis grafik fungsi kuadrat dengan $a = 1$ dapat digunakan proses transformasi grafik fungsi $f(x) = x^2$. Berikut ini beberapa jenis grafik fungsi kuadrat yang merupakan hasil transformasi dari grafik fungsi $f(x) = x^2$.

Grafik Fungsi $f(x) = (x - p)^2$

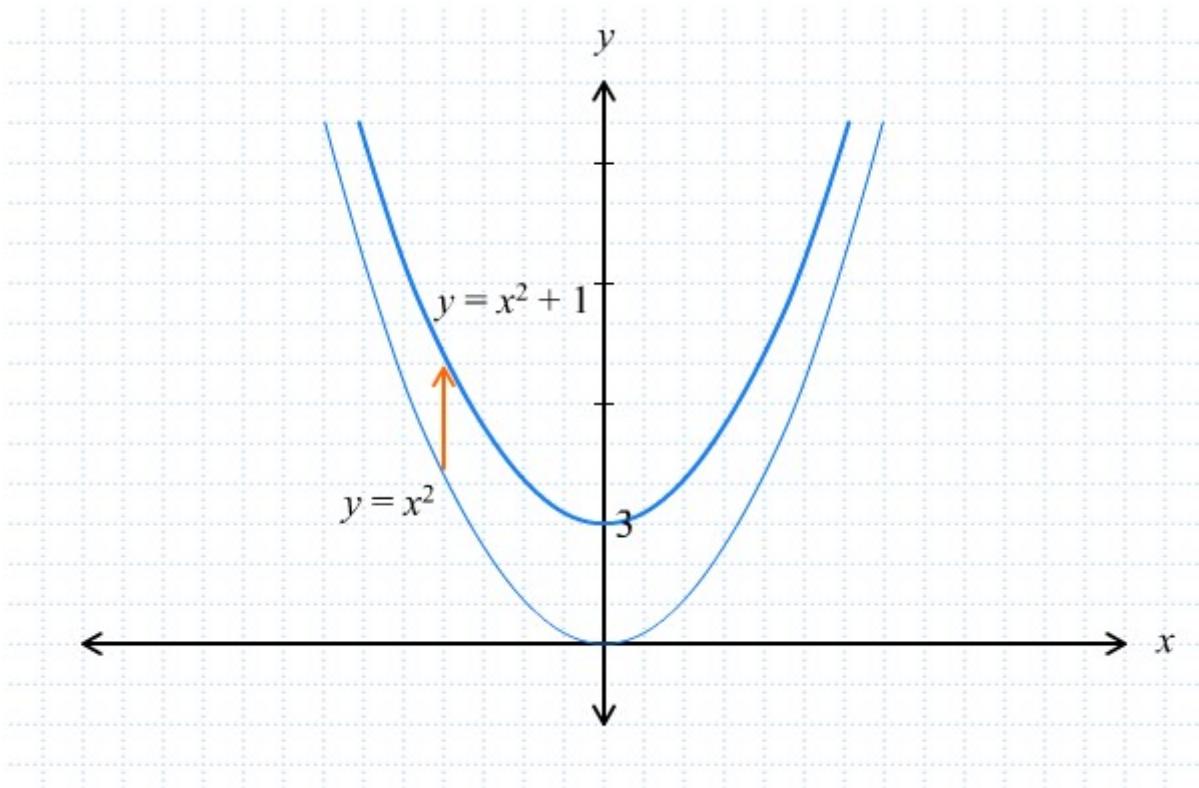
Grafik fungsi $f(x) = (x - p)^2$, p bilangan real positif, merupakan hasil pergeseran/translasi grafik $f(x) = x^2$ **ke kanan** sejauh a . Apabila fungsi $f(x) = x^2$ memiliki sumbu simetri pada sumbu- y , maka fungsi $f(x) = (x - a)^2$ memiliki sumbu simetri pada garis $x = a$. Misalkan untuk fungsi $f(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Grafik ini merupakan hasil translasi grafik $f(x) = x^2$ ke kanan sejauh 2 satuan sehingga sumbu simetrinya adalah $x = 2$. Perhatikan gambar berikut:



Sedangkan grafik fungsi $f(x) = (x + p)^2$ merupakan hasil pergeseran grafik fungsi $f(x) = x^2$ **ke kiri** sejauh p satuan.

Grafik Fungsi $f(x) = x^2 + q$

Grafik fungsi $f(x) = x^2 + q$, q bilangan real positif, merupakan hasil translasi grafik $f(x) = x^2$ **ke atas** sejauh q satuan. Misalkan $f(x) = x^2 + 3$. Grafik dari fungsi tersebut merupakan hasil translasi dari grafik $f(x) = x^2$ ke atas sejauh 3 satuan. Perhatikan gambar berikut.



Sedangkan grafik fungsi $f(x) = x^2 - q$ merupakan hasil translasi grafik $f(x) = x^2$ **ke bawah** sejauh q satuan.

Pembahasan selanjutnya ini akan ditunjukkan bagaimana **melukis grafik fungsi kuadrat yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$** , dengan a bilangan real bukan nol ($a \neq 0$) dan bukan satu ($a \neq 1$).

Sebelum membahas bagaimana melukis grafik fungsi kuadrat yang dimaksud, akan dibahas mengenai topik **melengkapkan kuadrat**. Bentuk fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat diubah bentuknya menjadi bentuk lain, dengan teknik melengkapkan kuadrat. Perhatikan gambar di bawah ini.

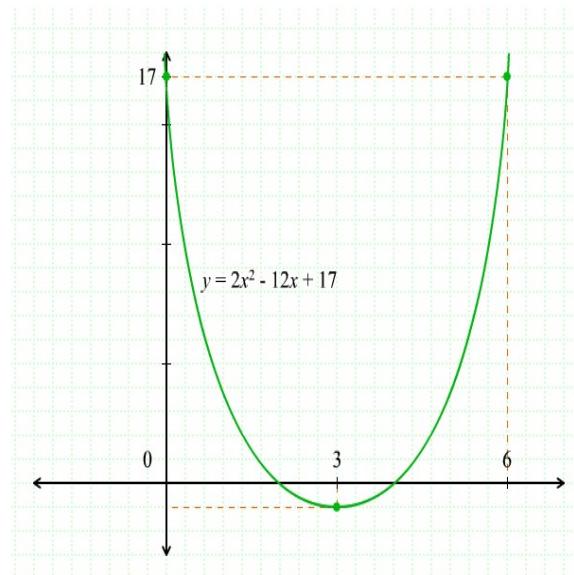
$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
 &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
 &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) \\
 &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right) \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
 \end{aligned}$$

Dari fungsi di atas dapat diketahui dengan mudah bahwa fungsi tersebut memiliki titik ekstrim, (x_p, y_p) . Titik ekstrim dapat berupa nilai maksimum ataupun maksimum suatu fungsi kuadrat tersebut, tergantung nilai a . Apabila a positif maka titik tersebut adalah nilai minimum, apabila a negatif maka titik tersebut merupakan nilai maksimum. Titik ekstrim dapat ditentukan apabila yang dikuadratkan pada fungsi kuadrat di atas (setelah diubah dengan melengkapkan kuadrat) adalah nol. Mengapa? Karena bentuk kuadrat memiliki nilai minimum nol.

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow (x_p, y_p) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

Grafik Fungsi Kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$.

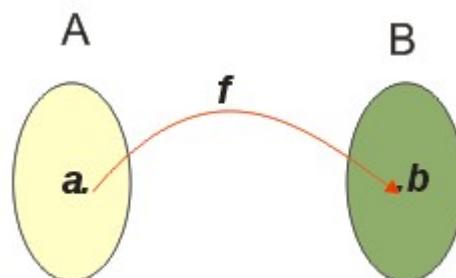
Untuk melukis grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, terlebih dahulu cari titik ekstrimnya kemudian cari 2 titik lainnya yang letaknya di kanan dan kiri titik ekstrim tersebut. Setelah itu, plot ketiga titik tersebut pada koordinat Cartesius dan hubungkan dengan kurva halus. Misalkan akan dilukis grafik fungsi $f(x) = 2x^2 - 12x + 17$. Grafik fungsi tersebut memiliki nilai $a = 2$, $b = -12$, dan $c = 17$. Sehingga titik ekstrimnya adalah $(3, -1)$. Dengan substitusi $x = 0$ dan $x = 6$ ke fungsi kuadrat tersebut diperoleh 2 titik lainnya adalah $(0, 17)$ dan $(6, 17)$. Berikut adalah grafik dari fungsi $f(x) = 2x^2 - 12x + 17$.



3.6 Fungsi Inversi

Pengertian Invers

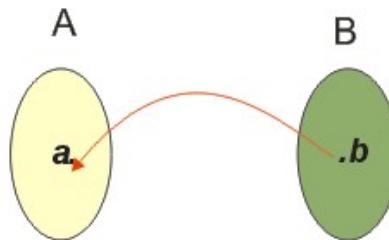
Invers suatu fungsi tidak selalu merupakan fungsi. Jika invers suatu fungsi merupakan fungsi maka invers fungsi itu disebut fungsi invers. Misalkan f fungsi dari himpunan A ke B yang dinyatakan dengan diagram panah sbb:



sehingga diperoleh himpunan pasangan berurutan:

$$f : \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Kalau diadakan pengubahan domain menjadi kodomain dan kodomain menjadi domaian, maka diagram panahnya menjadi

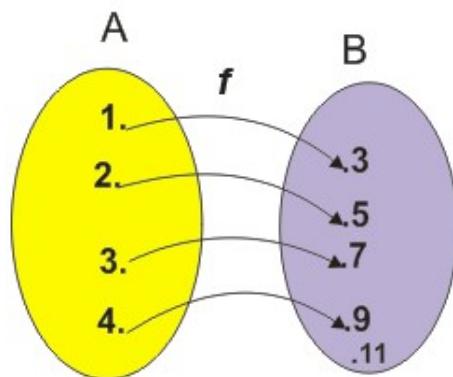
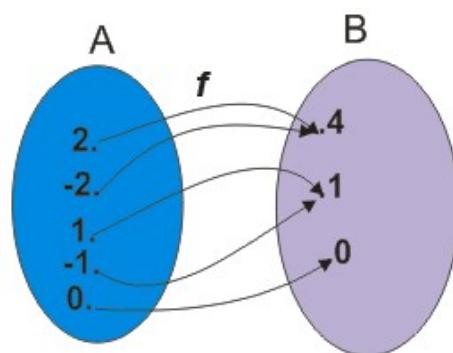


dan himpunan pasangan berurutannya menjadi $\{(b, a) | b \in B \text{ dan } a \in A\}$.

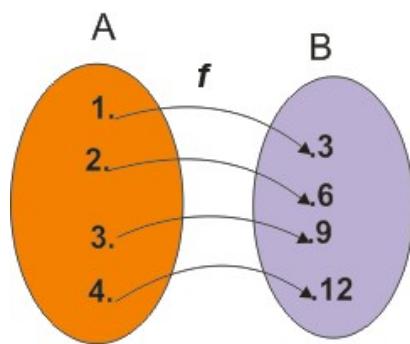
Relasi yang diperoleh dengan cara seperti di atas disebut invers fungsi f dan dilambangkan dengan f^{-1}

Definisi:

Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ dinatakan dengan pasangan berurutan $f : \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$ maka invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \rightarrow A$ ditentukan oleh $f^{-1} = \{(b, a) | b \in B \text{ dan } a \in A\}$



1. (??)



(??)

Tampak bahwa yang inversnya juga merupakan fungsi hanya pada gambar (??). Jika invers suatu fungsi merupakan fungsi, maka invers fungsi itu disebut fungsi invers.

1. (a) Syarat-syarat Invers

Dalam fungsi ini invers mempunyai syarat-syarat khusus invers, diantaranya sebagai berikut :

FUNGSI INVERS

$$f^{-1}(x) = (x-b)/a ; a \neq 0$$

$$f^{-1}(x) = (-dx+b)/(cx-a) ; x \neq a/c$$

$$f^{-1}(x) = (-b+?(b-4a(c-x))/2a ; a \neq 0$$

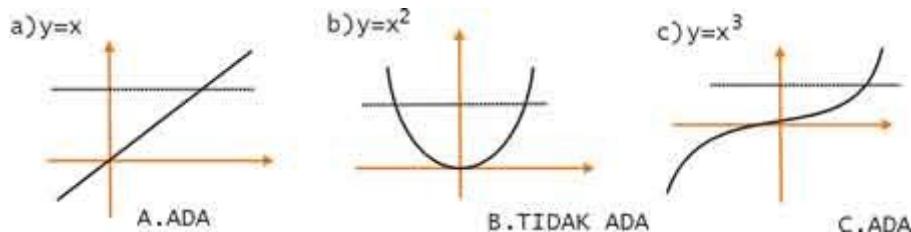
$$f^{-1}(x) = a^x/c ; c \neq 0$$

$$f^{-1}(x) = ^a\log x^{1/c} = 1/c ^a\log x ; c \neq 0$$

$$f^{-1}(x) = ^a\log x^{1/c} = 1/c ^a\log x ; c \neq 0$$

Keterangan : *fungsi invers ini ada, jika syarat-syaratnya terpenuhi*

Fungsi kuadrat secara umum tidak mempunyai invers, tetapi dapat mempunyai invers jika daerah definisinya dibatasi.



$$f(x) = x \text{ untuk } X > 0 \quad f^{-1}(x) = x \text{ untuk } X > 0$$

1. (a) Menentukan Rumus Fungsi Invers

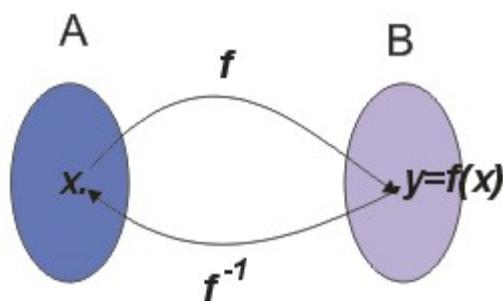
Beberapa langkah untuk menentukan rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$ jika $f(x)$ diketahui adalah sebagai berikut :

Ubah persamaan $y = f(x)$ dalam bentuk f sebagai fungsi y .

Bentuk x sebagai fungsi y pada langkah 1 dinamai dengan $f^{-1}(y)$.

Ganti y pada $f^{-1}(y)$ dengan x untuk memperoleh $f^{-1}(x)$. Maka $f^{-1}(x)$ adalah rumus fungsi invers fungsi $f(x)$.

Perhatikan diagram panah berikut :



y adalah peta dari x oleh fungsi f , sehingga pemetaan oleh fungsi f dapat dinayatakan dengan persamaan:

$$y = f(x)$$

Kalau f^{-1} adalah invers dari fungsi f maka x adalah peta dari y oleh fungsi f^{-1} sehingga diperoleh persamaan:

$$x = f^{-1}(y)$$

Selanjutnya peubah x diganti dengan y dan peubah y diganti dengan x .

1. Penyelesaian Masalah

Langkah ke-1

1. Melengkapi tabel fungsi $y = f(x)$

Misalkan fungsi f dari x ke y didefinisikan sebagai $y = f(x)$, seperti Tabel 62.1. Salin dan lengkapilah Tabel 2.1. Tabel 2.1 Fungsi $y = f(x)$

Tabel 2.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
(masukan)										
y	0	2	4	6	8	
(keluaran)										

1. Menukar nilai-nilai masukan dan keluaran

Tukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran tersebut seperti Tabel 2.2, kemudian salin dan lengkapilah Tabel 2.2

Tabel 2.2

y	0	2	4	6	8					
(masukan)										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
(keluaran)										

Langkah ke-2

1. Melengkapi tabel fungsi $s = g(r)$

Misalkan fungsi g dari r ke s didefinisikan sebagai $s = g(r)$, seperti Tabel 2.3. Salin dan lengkapilah Tabel 2.3. Tabel 2.3 Fungsi $s = g(r)$

Tabel 2.3

<i>r</i>	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
(masukan)										
<i>s</i>	.	9	4	1	0	1	4	9	.	
(keluaran)										

1. Menukar nilai-nilai masukan dan keluaran

Tukarkan nilai-nilai masukan dan keluaran tersebut seperti Tabel 2.2, lalu salin dan lengkapi Tabel 2.4.

Tabel 2.4

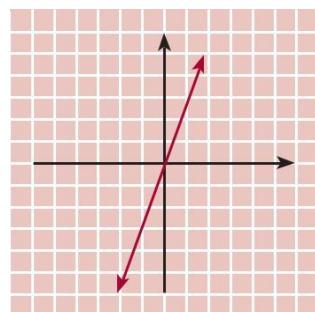
<i>s</i>		9	4	1	0	1	4	9		
(masukan)										
<i>r</i>	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
(keluaran)										

1. Langkah ke-3

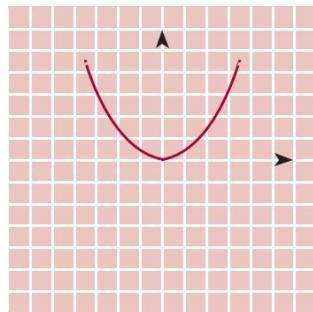
Jika fungsi f memetakan setiap $x \in D_f$ ke $y \in R_f$ maka balikan dari fungsi f mengembalikan unsur y tersebut ke unsur x semula. Proses pembalikan tersebut belum tentu menghasilkan fungsi baru. Jika f fungsi bijektif maka pembalikan tersebut menghasilkan fungsi baru. Akan tetapi, jika f bukan fungsi bijektif pembalikan itu hanya menghasilkan suatu relasi. Agar lebih jelas, pelajari uraian berikut.

Telah diketahui fungsi $y = 2x$ seperti Gambar 2.1 merupakan fungsi bijektif. Amati bahwa setiap dua unsur yang berbeda di dalam domain f dikawankan dengan dua unsur yang berbeda di dalam daerah kawan f . Sebagai contoh, $x_1 = 2$ dan $x_2 = -2$ dikawankan berturut-turut dengan $y_1 = 4$ dan $y_2 = -4$. Balikan dari fungsi ini akan menghubungkan dua unsur yang berbeda tersebut dengan dua unsur semula yang berbeda, yaitu 4 dengan 2 dan -4 dengan -2. Balikan dari fungsi tersebut jelas sesuai dengan aturan fungsi, yang hanya membolehkan setiap unsur di dalam daerah asalnya dihubungkan dengan satu dan hanya satu unsur di dalam daerah hasil. Jadi, balikan dari fungsi $f(x) = 2x$ merupakan fungsi. Lain halnya dengan fungsi $y = x^2$ seperti Gambar 6.13. Fungsi ini bukan merupakan fungsi bijektif

Amati bahwa setiap unsur x dan $-x$ di dalam domain f dikawankan dengan unsur y yang sama di dalam daerah kawan f . Contohnya, unsur 2 dan -2 keduanya dipetakan ke unsur yang sama, yaitu 4. Akibatnya, balikan dari fungsi ini menghubungkan 4 dengan dua unsur yang berbeda, yaitu 2 dan -2. Balikan dari fungsi ini jelas menyalahi aturan fungsi. Jadi, balikan dari fungsi $f(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi, tetapi hanya relasi saja.



Gambar 2.1



Gambar 2.2

Dari Definisi 2.4 tampak bahwa setiap $x \in D_f$ dipetakan oleh f ke $f(x)$ dan $f(x)$ oleh f^{-1} dikembalikan ke x . Demikian halnya untuk setiap $x \in R_f$ dipetakan oleh f^{-1} ke $f^{-1}(x)$ dan $f^{-1}(x)$ oleh f dikembalikan ke x . Dengan demikian, invers suatu fungsi invers menghasilkan fungsi asalnya, dituliskan $f^{-1})^{-1} = f$. Dari uraian tersebut, Anda dapat menentukan invers suatu fungsi dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. (a) i. Diketahui, $y = f(x)$.
 - ii. Selesaikan persamaan sehingga diperoleh x sebagai fungsi y atau $x = f^{-1}(y)$.
 - iii. Ganti variabel y dengan x pada $f^{-1}(y)$ sehingga diperoleh $f^{-1}(x) = y$ sebagai fungsi invers dari $y = f(x)$.
1. (a) **Perhitungan Soal**
2. Tentukan invers dari fungsi berikut ini : $y = f(x) = 5x - 7$. Kemudian, gambarkan grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$.

Jawab

$$y = 5x - 7 \quad 5x = y + 7$$

$$\begin{matrix} x = y \\ 5 \end{matrix}$$

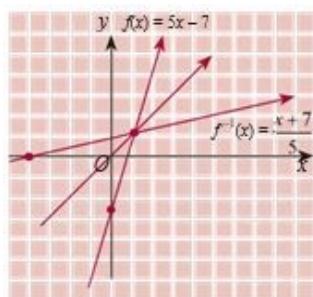
$$x = f^{-1}(y) = y/5$$

5

Jadi, fungsi invers dari $y = f(x) = 5x - 7$ adalah $f^{-1}(x) = x/5$

Gambar grafik $f(x) = 5x - 7$ dan $f^{-1}(x) = x/5$

Jadi, fungsi invers dari $y = f(x) = 5x - 7$ adalah $f^{-1}(x) = x/5$



Gambar 2.3

Jika Anda amati grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ dengan saksama, tampak bahwa grafik $f^{-1}(x)$ simetris terhadap grafik $f(x)$. Grafik $f^{-1}(x)$ diperoleh dari grafik $f(x)$ dengan mencerminkannya terhadap garis $y = x$. Oleh karena itu, untuk mencari $f^{-1}(x)$ jika diketahui $f(x)$ dapat pula dikerjakan dari persamaan $f \circ f^{-1}(x) = x$.

1. Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi $f(x) = 2x + 6$!

Jawab:

$$y = f(x) = 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x = y - 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - 3$$

Dengan demikian $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$ atau $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$

1. Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$

Jawab:

$$y = f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow y(3x+1) = 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow 3yx + y = 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow 3yx - 2x = -y - 5$$

$$\Leftrightarrow (3y - 2)x = -y - 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y - 5}{3y - 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y + 5}{2 - 3y}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{2 - 3y}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2 - 3x}$$

Jadi fungsi invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2-3x}$

1. Fungsi berikut adalah pemetaan dari R ke R. tentukan rumus inversnya

$$f(x) = 2x + 2$$

$$f(x) = 3x - 6$$

Jawab :

$$f(x) = 2x + 2$$

$$y = f(x) = 2x + 2 \quad x = \frac{y-2}{2}$$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-2}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$$

$$f(x) = 3x - 6$$

$$y = f(x) = 3x - 6 \quad x = \frac{y+6}{3}$$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y+6}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$$

3.7 Fungsi Rasional

Fungsi Rasional

Fungsi rasional merupakan rasio dari dua fungsi

$$y = \frac{v}{w} \quad \text{atau} \quad y = vw^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{w}\right) = \frac{d(vw^{-1})}{dx} = v \frac{dw^{-1}}{dx} + w^{-1} \frac{dv}{dx} \\ &= -vw^{-2} \frac{dv}{dx} + w^{-1} \frac{dv}{dx} = \frac{-v}{w^2} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{w} \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{1}{w^2} \left(w \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dx} \right) \end{aligned}$$

Jadi: $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{w}\right) = \frac{\left(w \frac{dv}{dx} - v \frac{dv}{dx}\right)}{w^2}$

20

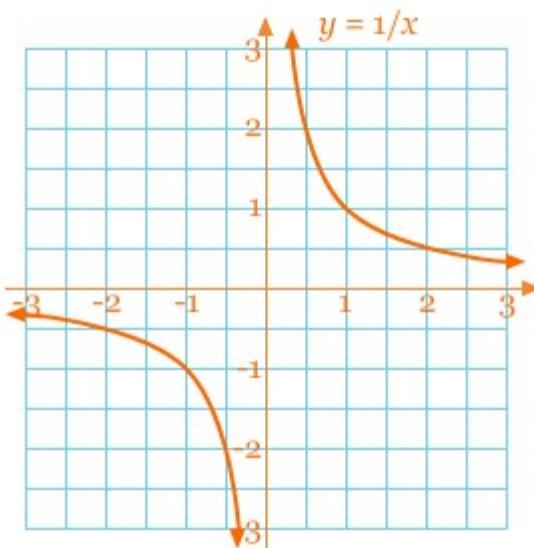
Fungsi rasional merupakan rasio dari 2 polynomial. Secara general,Fungsi rasional merupakan fungsi yang mempunyai bentuk $V(x) \frac{p(x)}{d(x)}$. Dengan p dan d adalah polinomial dan $d(x) \neq 0$. Domain dari $V(x)$ merupakan semua bilangan real, kecuali pembuat nol dari d .

Fungsi rasional yang paling mudah adalah fungsi $y = 1/x$ dan fungsi $y = 1/x$, yang keduanya mempunyai pembilang konstanta dan penyebut polinomial dengan 1 suku, serta kedua fungsi ini mempunyai domain semua bilangan real kecuali $x \neq 0$.

Fungsi $y = 1/x$

Fungsi tersebut disebut juga dengan fungsi kebalikan karena setiap kita memanggil sembarang x (kecuali nol) maka output yang akan dihasilkan adalah kebalikannya sebagai nilai dari fungsi tersebut. Hal ini berarti x yang besar akan menghasilkan nilai fungsi yang kecil, demikian juga sebaliknya. Tabel serta grafik dari fungsi tersebut dapat dilihat seperti di bawah ini.

x	y	x	y
-1.000	-1/1.000	1/1.000	1.000
-5	-1/5	1/3	3
-4	-1/4	1/2	2
-3	-1/3	1	1
-2	-1/2	2	1/2
-1	-1	3	1/3
-1/2	-2	4	1/4
-1/3	-3	5	1/5
-1/1.000	-1.000	1.000	1/1.000
1	Tidak Terdefnisi		



Dari tabel dan grafik di atas memunculkan beberapa hal yang menarik. Pertama, grafik ini lolos uji garis lurus, artinya bahwa, setiap garis lurus pada bidang koordinat Cartesius memotong grafik pada maksimal 1 titik. Sehingga, $y = 1/x$ adalah suatu fungsi. Kedua, karena pembagian tidak terdefinisi ketika pembaginya nol, maka nol tidak mempunyai pasangan, yang menghasilkan jeda pada $x = 0$. Hal ini sesuai dengan domain dari fungsi tersebut, yaitu semua x anggota bilangan real kecuali 0. Ketiga, fungsi ini adalah fungsi ganjil, dengan salah satu cabangnya terdapat di kuadran I sedangkan yang lainnya terdapat di kuadran III. Dan yang terakhir, pada kuadran I, ketika x menuju tak terhingga, nilai y menuju dan mendekati nilai nol. Secara simbolis dapat dituliskan sebagai $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$. Secara grafis, kurva dari grafik fungsi tersebut akan mendekati sumbu- x ketika x mendekati tak hingga.

Selain itu juga dapat mengamati bahwa ketika x mendekati nol dari kanan maka dari itu nilai y akan mendekati bilangan real positif yang sangat besar (positif tak terhingga): $x \rightarrow 0^+, y \rightarrow \infty$. Sebagai catatan, tanda + atau - yang terdapat di atas mengindikasikan *arah dari pendekatan*, yaitu *dari sisi positif* (+) atau *dari sisi negatif* (-).

Contoh : Mendeskripsikan Sifat dari Ujung Grafik Fungsi Rasional

Untuk $y = 1/x$ dalam kuadran III,

1. Deskripsikan sifat dari ujung grafik fungsi tersebut.
2. Deskripsikan apa yang terjadi ketika x mendekati nol.

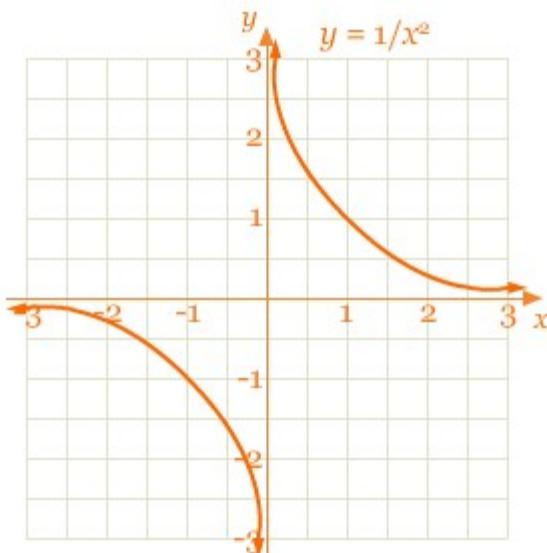
Pembahasan yang sama dengan sifat grafiknya pada kuadran I, kita mendapatkan

1. Ketika x mendekati negatif tak terhingga, nilai y akan mendekati nol. Apabila disimbolkan $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$.
2. Ketika x mendekati nol dari kiri, nilai y akan mendekati negatif tak terhingga. Pernyataan ini juga dapat dituliskan dengan $x \rightarrow 0^{--}, y \rightarrow -\infty$.

Fungsi $y = 1/x$

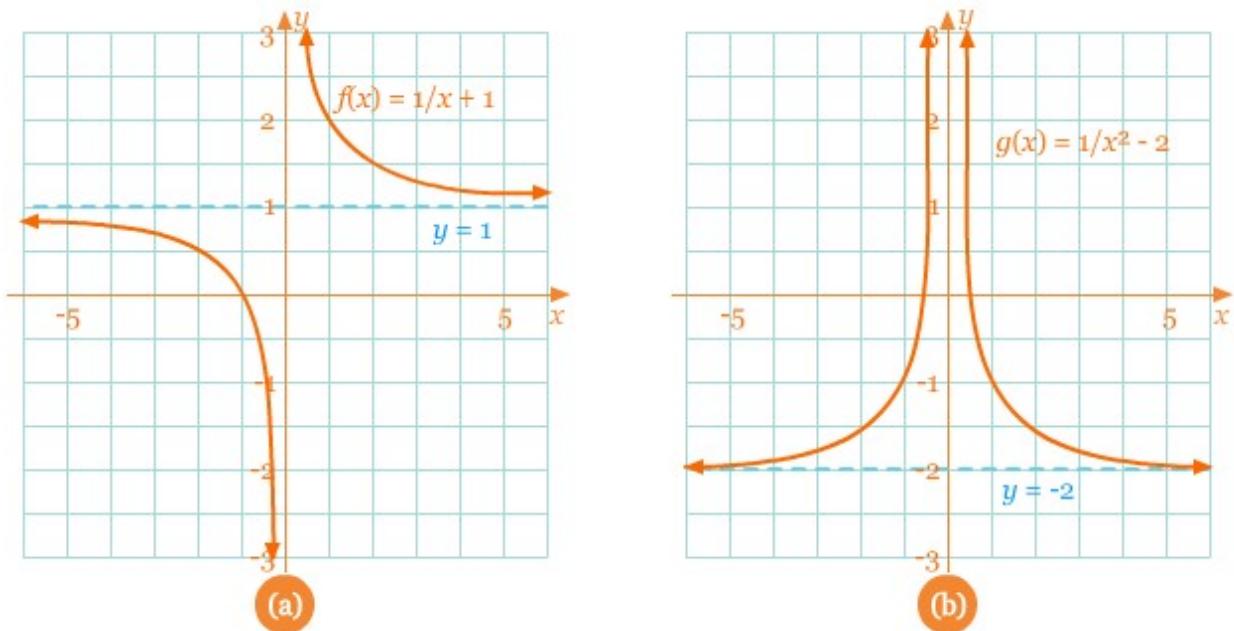
Dari pembahasan awal, kita dapat menduga bahwa grafik dari fungsi ini akan jeda ketika $x = 0$. Akan tetapi karena kuadran dari sembarang bilangan negatif merupakan bilangan positif, cabang-cabang dari grafik fungsi ini akan berada di atas sumbu- x . Perhatikan bahwa fungsi $y = 1/x$ adalah fungsi genap.

x	y	x	Y
-1.000	1/1.000.000	1/3	9
-5	1/25	1/2	4
-4	1/16	1	1
-3	1/9	2	1/4
-2	1/4	3	1/9
-1/2	1	4	1/16
-1/3	4	5	1/25
-1/1.000	9	1.000	1/1.000.000
0	Tidak Terdefinisi		



Seperti dengan $y = 1/x$, nilai x yang mendekati positif tak terhingga, menghasilkan y yang mendekati nol: $x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$.

Dalam gambar (a) di bawah ini menunjukkan bahwa garis asimtot horizontal pada $y = 1$, yang menunjukkan grafik $f(x)$ sebagai translasi grafik $y = 1/x$ ke atas sejauh 1 satuan. Gambar (b) menggambarkan garis asimtot horizontal pada $y = -2$, yang menunjukkan grafik $g(x)$ sebagai pergeseran grafik $y = 1/x$ ke bawah sejauh 2 satuan.



Contoh :

Contoh soal.....

1. Gambar grafik fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}$

Penyelesaian:

a. Titik potong dengan sumbu x ($y=0$)

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \text{ atau } x = 3 \quad (2, 0) \text{ dan } (3, 0)$$

b. Titik potong sumbu y ($x = 0$)

$$y = \frac{c}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$(0, 3/2)$$

Contoh Soal

1. Gambarlah grafik fungsi $y = f(x) = \frac{2x - 4}{x - 1}$
penyelesaian:

Titik potong dengan sumbu x dicapai untuk $y = 0$

$$0 = \frac{2x - 4}{x - 1}$$

$$0 = 2x - 4, \text{ maka } x = 2 \quad x = \frac{b}{a} = \frac{-4}{2} = 2$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x yaitu $(2, 0)$

Contoh Soal...

1. Lukislah grafik fungsi $y = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$
penyelesaian:

➤ Titik potong pada sumbu x

$$0 = \frac{x-1}{2x^2+x-1} \quad x = \frac{-b}{a} = \frac{-(1)}{1} = 1$$

$$0 = x-1$$

$$x = 1 \rightarrow (1,0)$$

➤ Titik potong pada sumbu y

$$y = \frac{(0)-1}{2(0)^2+(0)-1}$$

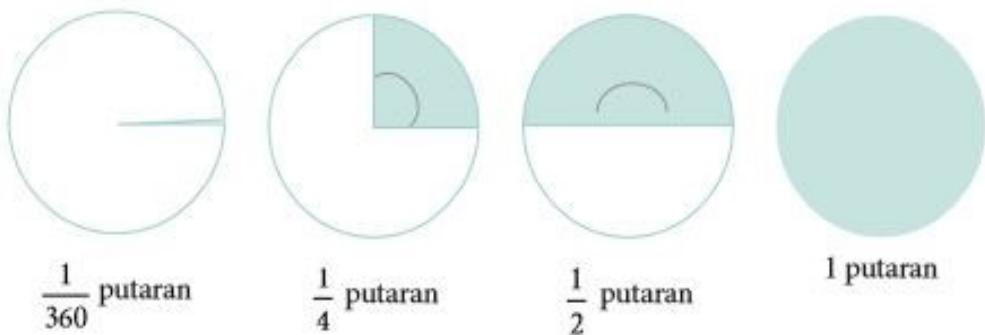
$$y = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \rightarrow (0,1) \quad y = \frac{b}{r} = \frac{-1}{-1} = 1$$

4. Trigonometri

4.1 Pengukuran Sudut

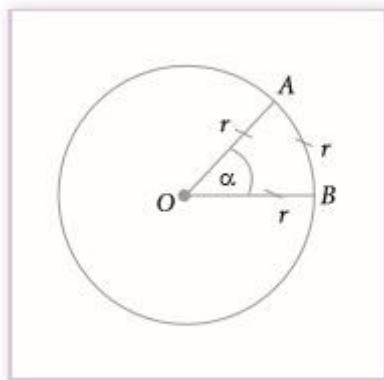
1. (a) Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda “?” dan “rad” berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, satu putaran penuh = $360^?$, atau $1?$ didefinisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ kali putaran.



Gambar 4.1 Beberapa besar putaran/rotasi

Tentunya dari Gambar 4. 1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Misalnya, untuk $\frac{1}{3}$ putaran, $\frac{1}{6}$ putaran, $\frac{2}{3}$ putaran. Sebelum memahami hubungan derajat dengan radian, berikut ini merupakan teori mengenai radian.

**Gambar 4.2** Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai besar ukuran sudut pusat α yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 4.2. Jika $\angle AOB = \alpha$ dan $AB = OA = OB$, maka $\alpha = \frac{AB}{r} = 1$ radian. Jika panjang busur tidak sama dengan r , maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian dapat dihitung menggunakan perbandingan:

Sifat 4.1

$$\angle AOB = \frac{\overline{AB}}{r} \text{ rad}$$

Dapat dikatakan bahwa hubungan satuan derajat dengan satuan radian, adalah 1 putaran sama dengan 2π rad. Oleh karena itu, berlaku:

Sifat 4.2

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad atau } 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad atau } 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57,3^\circ$$

Dari Sifat 4.2, dapat disimpulkan sebagai berikut.

? Konversi x derajat ke radian dengan mengalikan $x \times \frac{\pi}{180^\circ}$.

Misalnya, $45^\circ = 45^\circ \times \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

? Konversi x radian ke derajat dengan mengalikan $x \times \frac{180^\circ}{\pi}$

Misalnya, $\frac{3}{2}\pi \text{ rad} = \frac{3}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$.

Contoh 4.1

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini:

1. $\frac{1}{4}$ putaran $= \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$ atau $90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$.
2. $\frac{1}{3}$ putaran $= \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ$ atau $120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{2}{3}\pi \text{ rad}$.
3. - putaran $= \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$ atau $180^\circ = 180 \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad}$.
4. 4 putaran $= 4 \times 360^\circ = 1.440^\circ$ atau $1.440^\circ = 1.440 \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = 8\pi \text{ rad}$.
5. 5 putaran $= 5 \times 360^\circ = 1.800^\circ$ atau $1800^\circ = 1800 \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = 10\pi \text{ rad}$.
6. $225^\circ = 225^\circ \times \frac{1}{360^\circ} \text{ putaran} = \frac{5}{8} \text{ putaran}$ atau $225^\circ = 225^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{5}{4}\pi \text{ rad}$.
7. $1.200^\circ = 3 \times 360^\circ + 120^\circ = [(3 \times 360^\circ) \times \frac{1}{360^\circ} + (120^\circ) \times \frac{1}{360^\circ}] \text{ putaran}$
 $[3 + \frac{1}{3}] \text{ putaran} = 3\frac{1}{3} \text{ putaran}$

1. Pada saat pukul 11.00, berarti jarum panjang pada jam menunjuk ke angka 12 dan jarum pendek pada jam menunjuk ke angka 11. Artinya besar sudut yang terbentuk oleh setiap dua angka yang berdekatan adalah 30° .

$$30^\circ = 30^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} = \frac{1}{6}\pi \text{ rad}$$

1. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, maka setiap satu detik pemancar berputar sebanyak 3.600 putaran.
 2. Ubahlah ukuran sudut berikut ke dalam ukuran derajat atau radian!

a. 30°	f. $\frac{4\pi}{3}$
b. 90°	g. $\frac{2\pi}{5}$
c. -45°	h. $\frac{5\pi}{6}$
d. 100°	i. $\frac{\pi}{3}$
e. -390°	j. $-\frac{3\pi}{4}$

1. Nyatakan sudut 50° dan 89° ke dalam radian!

Penyelesian:

$$50^\circ = 50^\circ \times \pi/180^\circ$$

$$50^\circ = 0,277\pi$$

$$50^\circ = 0,277 (3,14)$$

$$50^\circ = 0,87 \text{ radian}$$

$$89^\circ = 89^\circ \times \pi/180^\circ$$

$$89^\circ = 0,494\pi$$

$$89^\circ = 0,494 (3,14)$$

$$89^\circ = 1,55 \text{ radian}$$

1. Sebuah kipas angin berputar dengan kecepatan 36 putaran per menit. Nyatakan kecepatan putaran kipas angin tersebut ke dalam satuan radian per detik!

Penyelesaian:

$$36 \text{ putaran/menit} = 36 \times 2\pi/60 \text{ putaran/detik}$$

$$36 \text{ putaran/menit} = 1,2\pi \text{ putaran/detik}$$

Jadi 36 putaran per menit sama dengan $1,2\pi$ putaran per detik.

1. Nyatakan besar sudut berikut ke dalam satuan radian!
 a. $30^\circ 20' 15''$ b. $106^\circ 20'$

Penyelesaian:

$$\text{a. kita ketahui bahwa: } 1'' = (1/3600)^\circ, 1' = (1/60)^\circ, 1^\circ = 0,0174 \text{ radian, maka: } 30^\circ 20'$$

$$= 30^\circ + 20 \cdot (1/60)^\circ + 15 \cdot (1/3600)^\circ = (108000/3600)^\circ + (1200/3600)^\circ + (15/3600)^\circ = (109215/3600)^\circ = (109215/3600)$$

$$\text{dian} = 0,53 \text{ rad. b. kita ketahui bahwa: } 1' = (1/60)^\circ, 1^\circ = 0,0174 \text{ radian, maka: } 106^\circ 20' = 106^\circ + 20 \cdot (1/60)^\circ = 106^\circ + 20 \cdot 0,0174 = 106^\circ + 0,348 = 106,348^\circ$$

$$20' = 1,85 \text{ rad}$$

1. Hitunglah jari-jari suatu lingkaran jika panjang busurnya 10 cm dan sudut pusatnya 36° !

Penyelesaian:

$$\theta = 36^\circ, \text{ maka:}$$

$$36^\circ = 36^\circ \times \pi/180^\circ$$

$$36^\circ = 0,2\pi$$

Kita ketahui bahwa :

$$r = s/\theta$$

$$r = 10 \text{ cm}/0,2\pi$$

$$r = 10 \text{ cm}/0,628$$

$$r = 15,9 \text{ cm}$$

Selanjutnya, dalam pembahasan topik selanjutnya terdapat beberapa sudut (sudut istimewa) yang sering digunakan.

Berikut merupakan sudut istimewa yang sering digunakan :

Derajat	Radian	Derajat	Radian
0°	0 rad	90°	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$
30°	$\frac{\pi}{6} \text{ rad}$	120°	$\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$
45°	$\frac{\pi}{4} \text{ rad}$	135°	$\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$
60°	$\frac{\pi}{3} \text{ rad}$	150°	$\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$

Derajat	Radian	Derajat	Radian
180°	$\pi \text{ rad}$	270°	$\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$
210°	$\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$	300°	$\frac{5\pi}{3} \text{ rad}$
225°	$\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$	315°	$\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$
240°	$\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$	330°	$\frac{11\pi}{6} \text{ rad}$

Tanda-tanda Perbandingan Trigonometri

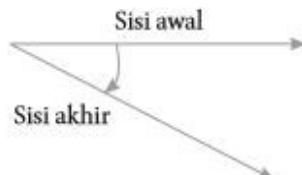
Perbandingan Trigonometri	Kuadran			
	I	II	III	IV
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	-	+
Cosec	+	+	-	-

Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (initial side) ke sisi akhir (terminal side). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda “positif” jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda “negatif” jika arah putarannya searah dengan arah putaran jarum jam. Arah putaran sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk

memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



a. Sudut bertanda positif

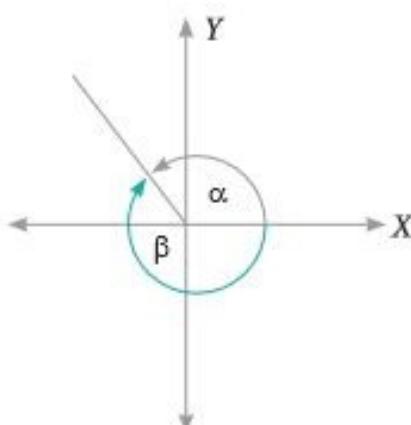


b. Sudut bertanda negatif

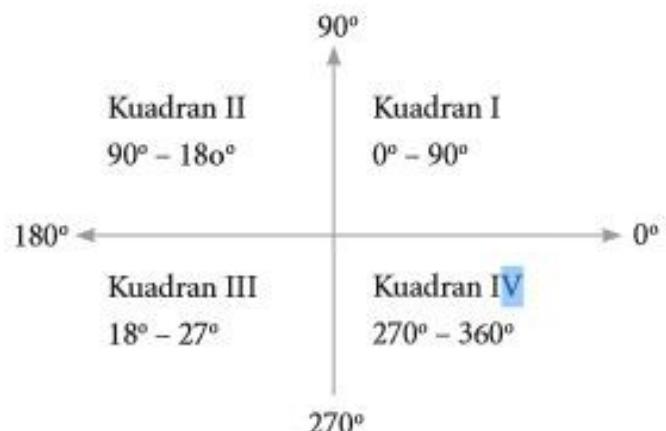
Gambar sudut berdasarkan arah putaran

Dalam koordinat kartesius, jika sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius, disebut sudut standar (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0° , 90° , 180° , 270° , dan 360° .

Sebagai catatan bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya menggunakan huruf-huruf Yunani, seperti, α (alpha), β (beta), γ (gamma) dan θ (theta) juga menggunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D. Selain itu, jika sudut yang dihasilkan sebesar α , maka sudut b disebut sudut koterminal, seperti yang dideskripsikan pada gambar di bawah ini.



a. Sudut baku dan sudut koterminal



b. Besar sudut pada setiap kuadran

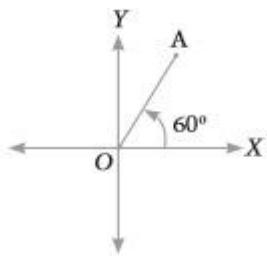
Contoh soal :

1. Gambarkan sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

- a. 60°
- b. -45°
- c. 120°
- d. 600°

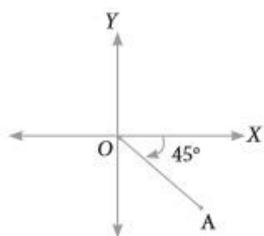
Penyelesaian:

1. 60°



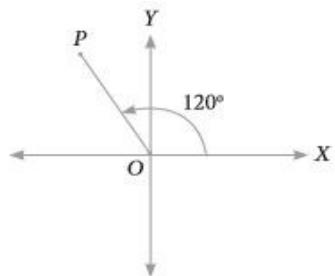
Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran I.

1. -45°



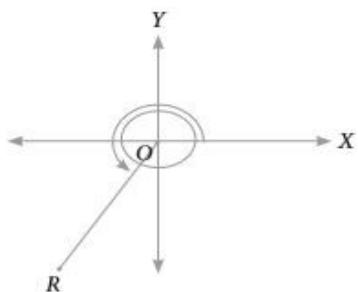
Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran IV.

1. 120°



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OP terletak di kuadran II.

1. 600°



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OR terletak di kuadran III.

2. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam satuan radian (rad):a) 270° b)

$$270^\circ$$

$$= 270^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$= \frac{3}{2}\pi \text{ rad}$$

330° Pembahasan Konversi: 1 π radian = 180° Jadi:a) 270° b)

$$330^\circ$$

$$= 330^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$= \frac{11}{6}\pi \text{ rad}$$

3. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam satuan derajad:a) $1/2\pi$ radb) $3/4\pi$ radc) $5/6\pi$ rad

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

Pembahasan Konversi: 1 π radian = 180° Jadi:a) $1/2\pi$ rad = 90° b) $3/4\pi$

$$\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \times 180^\circ$$

$$\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6} \times 180^\circ$$

rad = 135° c) $5/6\pi$ rad = 150°

Sudut-sudut Khusus

Kuadran	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-
cosec	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Kuadran II Sin & Csc +	Kuadran I Semua +
Kuadran III Tan & Cotg +	Kuadran IV Cos & Csc +

Contoh :

- Diketahui $\sin \alpha = ,5$ α dikuadran II (sudut tumpul).

Tentukan nilai $\sec \alpha, \csc \alpha, \cotg \alpha$

Jawab : $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $y = 3$, $r = 5$, $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

Karena dikuadran II, nilai $x = -4$

Sehingga : $\sec \alpha = \frac{5}{-4}$, $\csc \alpha = \frac{5}{3}$, $\cot \alpha = \frac{-4}{3}$

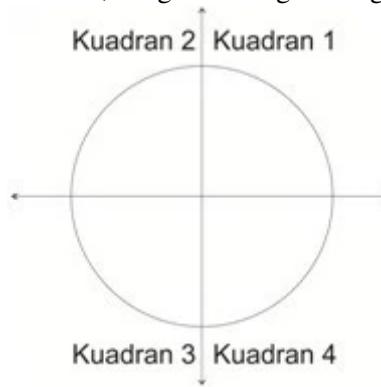
1. Tentukan nilai dari :

$$1. \sin 0^\circ + \csc 45^\circ = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$2. \frac{\sec \frac{\pi}{6} + \cot g \frac{\pi}{3}}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

Dalam Kuadran

Sudut dalam suatu lingkaran, memiliki rentang $0^\circ - 360^\circ$, sudut tersebut dibagi menjadi 4 kuadran, dengan masing-masing kuadran memiliki rentang sebesar 90° .



Kuadran 1 memiliki rentang sudut dari $0^\circ - 90^\circ$ dengan nilai sinus, cosinus dan tangent positif.

Kuadran 2 memiliki rentang sudut dari $90^\circ - 180^\circ$ dengan nilai cosinus dan tangent negatif, sinus positif.

Kuadran 3 memiliki rentang sudut dari $180^\circ - 270^\circ$ dengan nilai sinus dan cosinus negatif, tangent positif.

Kuadran 4 memiliki rentang sudut dari $270^\circ - 360^\circ$ dengan nilai sinus dan tangent negatif, cosinus positif.

4.2 Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

4.2 Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

Trigonometri berasal dari bahasa Yunani, *trigonon* artinya tiga sudut, dan *metro* artinya mengukur. Ilmuwan Yunani di masa Helenistik, **Hipparchus** (190 B.C – 120 B.C) diyakini adalah orang yang pertama kali menemukan teori tentang trigonometri dari keingintahuannya akan dunia. Matematikawan Yunani lainnya, **Ptolemy** sekitar tahun 100 mengembangkan penghitungan trigonometri lebih lanjut. Matematikawan Silesia **Bartholemaeus Pitiskus** menerbitkan sebuah karya yang berpengaruh tentang trigonometri pada 1595 dan memperkenalkan kata ini ke dalam bahasa Inggris dan Perancis. Adapun rumusan sinus, cosinus juga tangent diformulasikan oleh **Surya Siddhanta**, ilmuwan India yang dipercaya hidup sekitar abad 3 SM. Selebihnya teori tentang Trigonometri disempurnakan oleh ilmuwanilmuwan

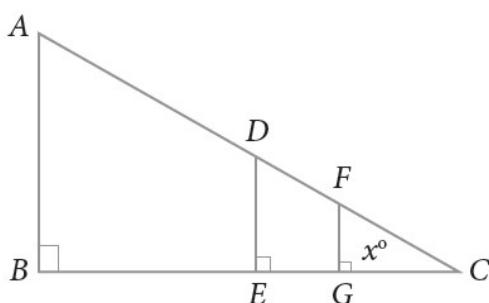
lain di jaman berikutnya.

Pada subbab ini, akan dipahami konsep perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku.

Masalah 4.1

Pak Yahya adalah seorang penjaga sekolah. Tinggi pak Yahya adalah 1,6 m. Dia mempunyai seorang anak, namanya Dani. Dani masih kelas II Sekolah Dasar. Tinggi badannya 1,2 m. Dani adalah anak yang baik dan suka bertanya. Dia pernah bertanya kepada ayahnya tentang tinggi tiang bendera di lapangan itu. Dengan senyum, Ayahnya menjawab 8 m. Suatu sore, disaat dia menemani ayahnya membersihkan rumput liar di lapangan, Dani melihat bayangan setiap benda di tanah. Dia mengambil tali meteran dan mengukur panjang bayangan ayahnya dan panjang bayangan tiang bendera, yaitu 3 m dan 15 m. Tetapi dia tidak dapat mengukur panjang bayangannya sendiri karena bayangannya mengikuti pergerakannya. *Jika kamu sebagai Dani, dapatkah kamu mengukur bayangan kamu sendiri?*

Konsep kesebangunan pada segitiga terdapat pada cerita tersebut. Mari kita gambarkan segitiga sesuai cerita di atas.

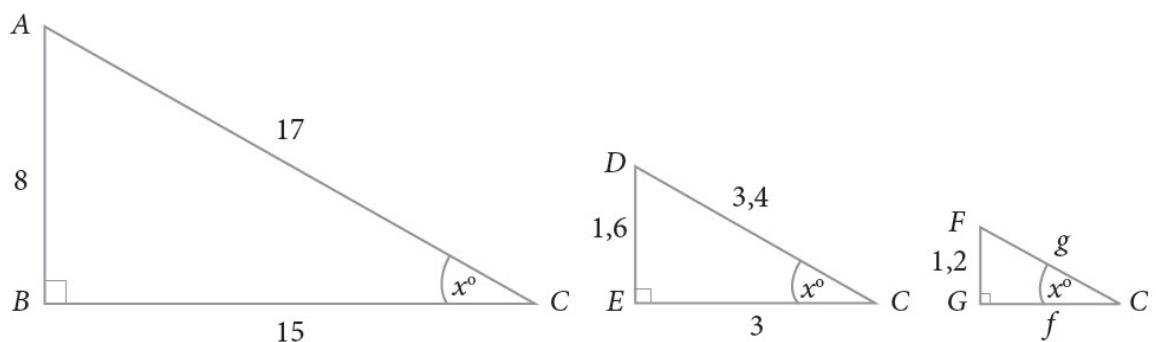


Dimana:

- AB = tinggi tiang bendera (8 m)
- BG = panjang bayangan tiang (15 m)
- DC = tinggi pak Yahya (1,6 m)
- CG = panjang bayangan pak Yahya (3 m)
- EF = tinggi Dani (1,2 m)
- FG = panjang bayangan Dani (4,8 m)

Gambar 4.7 Segitiga sebangun

Berdasarkan gambar segitiga di atas terdapat tiga segitiga, yaitu ΔABC , ΔDEC , dan ΔFGC sebagai berikut.



Gambar 4.8 Kesebangunan

Karena ΔABC , ΔDEC , dan ΔFGC adalah sebangun, maka berlaku

$$\frac{FG}{DE} = \frac{GC}{EC} = \frac{1,2}{1,6} = \frac{f}{3} \Rightarrow f = 2,25.$$

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh nilai dari
 $FC = g = \sqrt{6,5025} = 2,55$.

Berdasarkan ΔABC , ΔDEC , dan ΔFGC diperoleh perbandingan sebagai berikut.

a. $\frac{FG}{FC} = \frac{DE}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1,2}{2,55} = \frac{1,6}{3,4} = \frac{8}{17} = \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,47$.

Perbandingan ini disebut dengan sinus sudut C , ditulis $\sin x^0 = \frac{8}{17}$.

b. $\frac{GC}{FC} = \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC} = \frac{2,25}{2,55} = \frac{3}{3,4} = \frac{15}{17} = \frac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,88$.

Perbandingan ini disebut dengan cosinus sudut C , ditulis $\cos x^0 = \frac{15}{17}$.

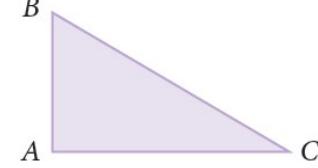
c. $\frac{FG}{GC} = \frac{DE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1,2}{2,25} = \frac{1,6}{3} = \frac{8}{15} = \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}} = 0,53$.

Perbandingan ini disebut dengan tangen sudut C , ditulis $\tan x^0 = \frac{8}{15}$.

Hubungan perbandingan sudut (lancip) dengan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 4.1

1. Sinus C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi miring segitiga, ditulis $\sin C = \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$
2. Cosinus C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di samping sudut dengan sisi miring segitiga, $\cos C = \frac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$
3. Tangen C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi di samping sudut, ditulis $\tan C = \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}}$
4. Cosecan C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring segitiga dengan sisi di depan sudut, ditulis $\csc C = \frac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di depan sudut}}$
atau $\csc C = \frac{1}{\sin C}$



5. Secan C didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring segitiga dengan sisi di samping sudut, ditulis $\sec C = \frac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di samping sudut}}$
atau $\sec C = \frac{1}{\cos C}$
6. Cotangen C didefinisikan sebagai perbandingan sisi di samping sudut dengan sisi di depan sudut, ditulis $\cot C = \frac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi di depan sudut}}$
atau $\cot C = \frac{1}{\tan C}$

Jika diperhatikan aturan perbandingan di atas, prinsip matematika lain yang perlu diingat kembali adalah Teorema Phytagoras. Selain itu, pengenalan akan sisi miring segitiga, sisi di samping sudut, dan sisi di depan sudut tentunya dapat mudah diperhatikan. Oleh karena yang telah didefinisikan perbandingan sudut untuk sudut lancip C , sekarang giliranmu untuk merumuskan keenam jenis perbandingan sudut lancip A.

Contoh 4.3

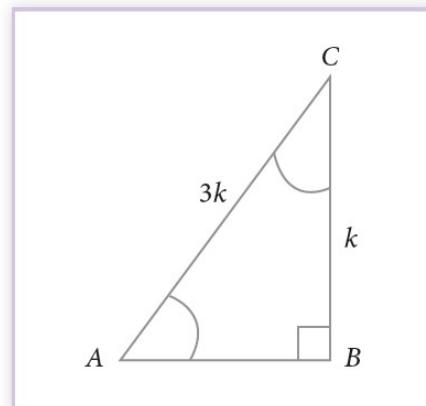
Diberikan segitiga siku-siku ABC , $\sin A = \frac{1}{3}$. Tentukan $\cos A$, $\tan A$, $\sin C$, $\cos C$, dan $\cot C$.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $\sin A = \frac{1}{3}$, artinya $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$. Lebih tepatnya, panjang sisi (BC) di depan sudut A dan panjang sisi miring (AC) segitiga ABC memiliki perbandingan $1 : 3$, lihat Gambar 4.9.

Untuk menentukan nilai $\cos A$, $\tan A$, $\sin C$, $\cos C$, dan $\cot C$, kita memerlukan panjang sisi AB . Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 - BC^2 \\ \Rightarrow AB &= \sqrt{(3k)^2 - (k)^2} \\ &= \sqrt{9k^2 - k^2} = \sqrt{8k^2} \\ &= \pm 2\sqrt{2}k \end{aligned}$$



Jadi, kita memperoleh panjang sisi $AB = 2\sqrt{2}k$. (Mengapa bukan $-2\sqrt{2}k$?)

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita peroleh

- $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2\sqrt{2}k} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
- $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$
- $\cot C = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{2\sqrt{2}k} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

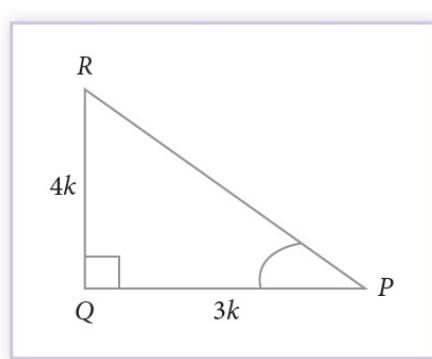
Perlu Diingat!

Panjang sisi miring adalah sisi terpanjang pada suatu segitiga siku-siku. Akibatnya nilai sinus dan cosinus selalu kurang dari 1 (pada kondisi khusus akan bernilai 1).

Contoh 4.4

Pada suatu segitiga siku-siku PQR , dengan siku-siku di Q , $\tan P = \frac{4}{3}$. Hitung nilai perbandingan trigonometri yang lain untuk sudut P .

Alternatif Penyelesaian



Kita ketahui $\tan P = \frac{4}{3}$, artinya $\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{4}{3}$.

Akibatnya, jika $QR = 4k$ dan $PQ = 3k$, dengan k adalah bilangan positif.

$$\begin{aligned} PR^2 &= PQ^2 + QR^2 \\ \Rightarrow PR &= \sqrt{PQ^2 + QR^2} \\ &= \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} \\ &= \sqrt{25k^2} \end{aligned}$$

$$PR = 5k$$

Sekarang gunakan Definisi 4.1 untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri yang lain, yaitu

- a. $\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5} = 0,2$
- b. $\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5} = 0,6$
- c. $\csc P = \frac{PR}{RQ} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4} = 1,25$
- d. $\sec P = \frac{PR}{PQ} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3} = 1,66$
- e. $\cot P = \frac{PQ}{QR} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4} = 0,75$

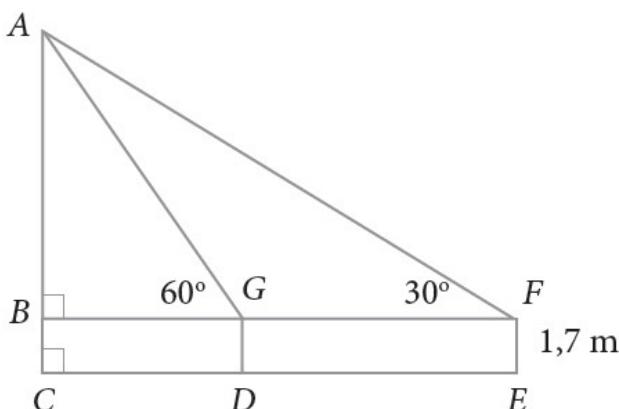
Selanjutnya kamu akan mengkaji bagaimana penerapan konsep perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah kontekstual. Mari kita cermati dan pahami masalah berikut.

Masalah 4.2

Dua orang guru dengan tinggi badan yang sama yaitu 170 cm sedang berdiri memandang puncak tiang bendera di sekolahnya. Guru pertama berdiri tepat 10 m di depan guru kedua. Jika sudut elevasi guru pertama 60° dan guru kedua 30° dapatkah kamu menghitung tinggi tiang bendera tersebut?

Memahami dan Merencanakan Pemecahan Masalah

Misalkan tempat berdiri tegak tiang bendera, dan kedua guru tersebut adalah suatu titik. Ujung puncak tiang bendera dan kepala kedua guru juga diwakili oleh suatu titik, maka dapat diperoleh Gambar 4.12 sebagai berikut.



Dimana:

AC = tinggi tiang bendera
 DG = tinggi guru pertama
 EF = tinggi guru kedua
 DE = jarak kedua guru

Gambar 4.12 Model masalah tiang bendera

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan pengalaman kita di awal pembicaraan di atas, maka kita memiliki perbandingan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\tan 60^\circ &= \frac{AB}{BG} &\Leftrightarrow BG = \frac{AB}{\tan 60^\circ} \\ \tan 60^\circ &= \frac{AB}{BG} = \frac{AB}{10 + BG} \Leftrightarrow AB = (10 + BG) \times \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow AB = \left(10 + \frac{AB}{\tan 60^\circ}\right) \times \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ = (10 \times \tan 60^\circ + AB) \times \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ + AB \times \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow AB \times \tan 60^\circ - AB \times \tan 30^\circ = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow AB \times (\tan 60^\circ - \tan 30^\circ) = 10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow AB = \frac{10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}\end{aligned}$$

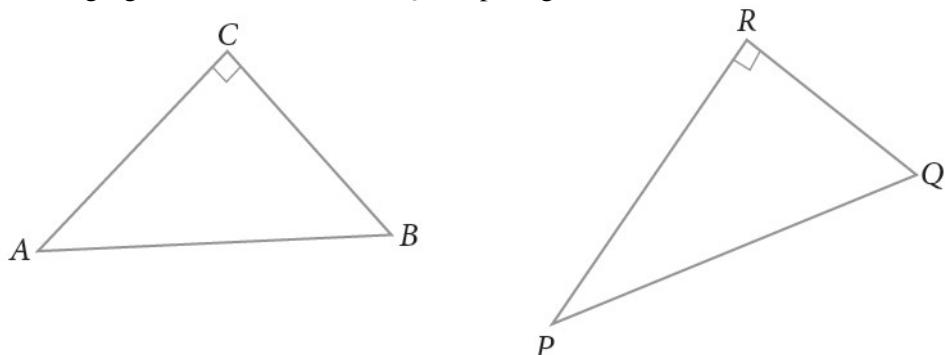
Jadi, tinggi tiang bendera adalah

$$AC = AB + BC \text{ atau } AC = \left(\frac{10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} + 1,7 \right) \text{ m}$$

Untuk menentukan nilai $\tan 60^\circ$ dan $\tan 30^\circ$ akan dibahas pada subbab selanjutnya. Dengan demikian, tinggi tiang bendera dapat ditemukan.

Contoh 4.5

Diketahui segitiga siku-siku ABC dan PQR , seperti gambar berikut ini.



Jika $\sin B = \sin Q$, maka buktikan bahwa $\angle B = \angle Q$.

Alternatif Penyelesaian

Dari Gambar 4.13, diperoleh

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \text{ dan } \sin Q = \frac{PR}{PQ}$$

Akibatnya, $\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$ atau $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$, dengan k bilangan positif.

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(k \cdot PQ)^2 - (k \cdot PR)^2} \\ &= \sqrt{k^2 \cdot [(PQ)^2 - (PR)^2]} = k \cdot \sqrt{(PQ)^2 - (PR)^2} \end{aligned}$$

$$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

Dengan demikian,

$$\frac{BC}{QR} = \frac{k \sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k$$

Akibatnya diperoleh

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = k$$

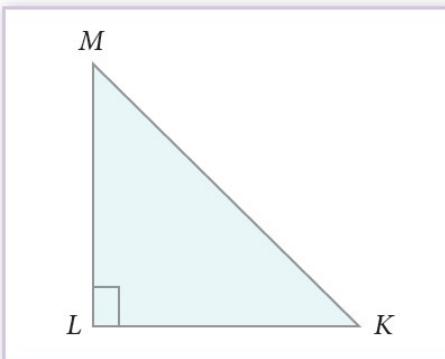
Karena perbandingan sisi-sisi kedua segitiga sama, maka $\angle B = \angle Q$. Perhatikan contoh berikut. Temukan pola dalam menentukan setiap pernyataan terkait perbandingan trigonometri.

Contoh 4.6

Diketahui suatu segitiga siku-siku KLM , $\angle L = 90^\circ$, dan $\tan M = 1$.

Hitung nilai dari $(\sin M)^2 + (\cos M)^2$ dan $2 \cdot \sin M \cdot \cos M$.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 4.14 Segitiga siku-siku KLM

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, coba cermati gambar berikut ini.

Diketahui $\tan M = 1$, artinya;

$$\tan M = 1 \Rightarrow \frac{KL}{LM} = 1 \text{ atau } KL = LM = k,$$

dengan k bilangan positif.

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras, diperoleh

$$\begin{aligned} KM &= \sqrt{LM^2 + LM^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2k^2} \\ &= k\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Akibatnya, } \sin M = \frac{KL}{KM} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ atau } (\sin M)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos M = \frac{LM}{KM} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ atau } (\cos M)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Jadi, } (\sin M)^2 + (\cos M)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ dan } 2 \cdot \sin M \cdot \cos M = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

4.3 Sudut-sudut Berelasi

4.4 Nilai Perbandingan Trigonometri untuk $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ dan 90°

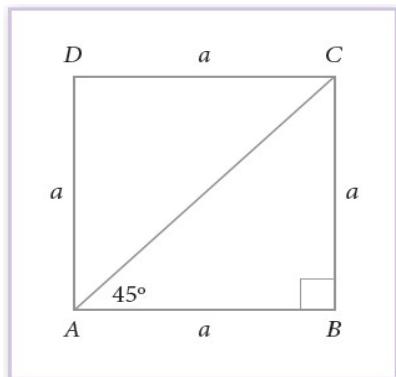
4.3 Perbandingan Trigonometri Untuk Sudut $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ dan 90°

Pada saat mempelajari teori trigonometri, secara tidak langsung kamu harus menggunakan beberapa teori geometri. Dalam geometri, khususnya dalam kajian konstruksi sudah tidak asing lagi dengan penggunaan besar sudut $30^\circ, 45^\circ$, dan 60° . Pada subbab ini, kamu akan menyelidiki dan menghitung nilai perbandingan trigonometri untuk ukuran sudut $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, dan 90° .

Masalah 4.3

Diketahui suatu persegi $ABCD$ dengan ukuran a (a adalah bilangan positif). Dibentuk garis diagonal AC sedemikian sehingga membentuk sudut dengan AB , seperti Gambar 4. 15.

Temukan nilai $\sin 45^\circ, \cos 45^\circ$, dan $\tan 45^\circ$.

**Gambar 4.15** Persegi ABCD**Penyelesaian**

Untuk memudahkan kita menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut 45° , coba cermati segitiga siku-siku ABC .

Untuk menentukan nilai $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, dan $\tan 45^\circ$, perlu diingat kembali Definisi 4.1. Untuk menentukan panjang AC , gunakan Teorema Phytagoras, yaitu

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$\triangleright \quad \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\triangleright \quad \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\triangleright \quad \tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Mengingat kembali Definisi 4.1, terdapat cara lain untuk menentukan nilai $\tan 45^\circ$. Yaitu

$$\tan 45^\circ =$$

Dengan nilai di atas, bukanlah sesuatu hal yang sulit untuk menentukan nilai $\sec 45^\circ$, $\csc 45^\circ$, dan $\cot 45^\circ$.

$$\sec 45^\circ = \sec 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \text{ atau}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \text{ atau}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1 \text{ atau } \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

Jadi, dapat disimpulkan

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

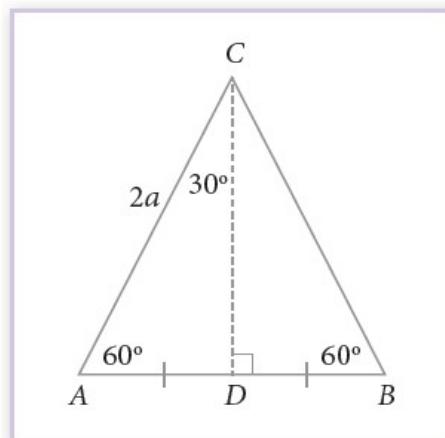
$$\cot 45^\circ = 1$$

Masalah 4.4

Diberikan segitiga sama sisi ABC , dengan panjang sisi $2a$ satuan (a adalah bilangan positif). D adalah titik tengah sisi AB , seperti Gambar 4.16.

Hitung nilai:

$\sin 30^\circ, \cos 30^\circ, \tan 30^\circ, \sin 60^\circ, \cos 60^\circ$, dan $\tan 60^\circ$.



Gambar 4.16 Segitiga sama sisi ABC

Penyelesaian

Mari cermati segitiga sama sisi ABC .

Karena D merupakan titik tengah sisi AB ,

$$AD = \frac{1}{2} AB = a.$$

maka

Dengan demikian, kita peroleh

$\Delta ACD \cong \Delta BCD$, (simbol \cong dibaca: kongruen)

$$AD = BD = a$$

$$\angle ACD = \angle DBC = 30^\circ$$

Dengan demikian, $\angle ACD$ dan $\angle BCD$ adalah segitiga siku-siku.

Kita fokus pada ΔACD .

Diketahui bahwa $AC = 2a$, $AD = a$, dengan menggunakan Teorema Phytagoras, dapat ditentukan panjang sisi CD , yaitu

$$\begin{aligned} CD^2 &= AC^2 - AD^2 \\ \Rightarrow CD^2 &= (2a)^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \\ \Rightarrow CD &= \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a \end{aligned}$$

dan $\angle ACD = 30^\circ$, $\angle CAD = 60^\circ$

a. Untuk $\angle ACD = 30^\circ$, maka nilai perbandingan trigonometri (menggunakan Definisi 4.1),

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \csc 30^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sec 30^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 30^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

b. Untuk $\angle CAD = 60^\circ$, maka nilai perbandingan trigonometri (menggunakan Definisi 4.1), yaitu

$$\sin 60^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \csc 60^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sec 60^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot 60^\circ = \frac{AD}{CD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

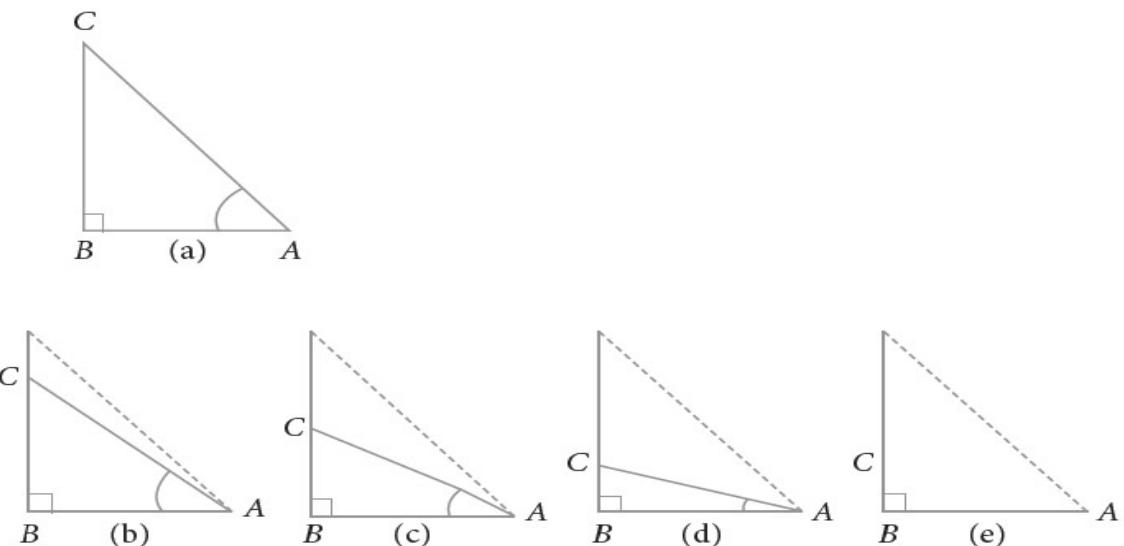
Masalah 4.5

Diberikan suatu ΔABC , siku-siku di B , misalkan $\angle BAC = a$, dimana a merupakan sudut lancip.

Apa yang kamu peroleh jika a mendekati 0° ? Apa pula yang terjadi jika a mendekati 90° ?

Penyelesaian

Diketahui ΔABC , merupakan segitiga siku-siku, dengan $\angle B = 90^\circ$. Gambar 4.17 merupakan ilustrasi perubahan $\angle B = a$ hingga menjadi nol.



Gambar 4.17 Ilustrasi perubahan $\angle B$ segitiga siku-siku ABC menjadi 0°

Pada waktu memperkecil $\angle A$, mengakibatkan panjang sisi BC juga semakin kecil, sedemikian

sehingga AC hampir berimpit dengan AB . Jika $\alpha = 0^\circ$, maka $BC = 0$, dan AC berimpit dengan AB . Dari ΔABC (Gambar 4.17 (a)), kita memiliki

a. $\sin \alpha = \frac{BC}{AC}$, jika α mendekati 0° , maka panjang BC mendekati 0.

Akibatnya

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{AC} \text{ atau } \sin 0^\circ = 0$$

b. $\cos \alpha = \frac{BC}{AC}$, jika α mendekati 0° , maka sisi AC hampir berimpit dengan sisi AB . Akibatnya

$$\cos 0^\circ = \frac{AB}{AB} \text{ atau } \cos 0^\circ = 1$$

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri lainnya, yaitu

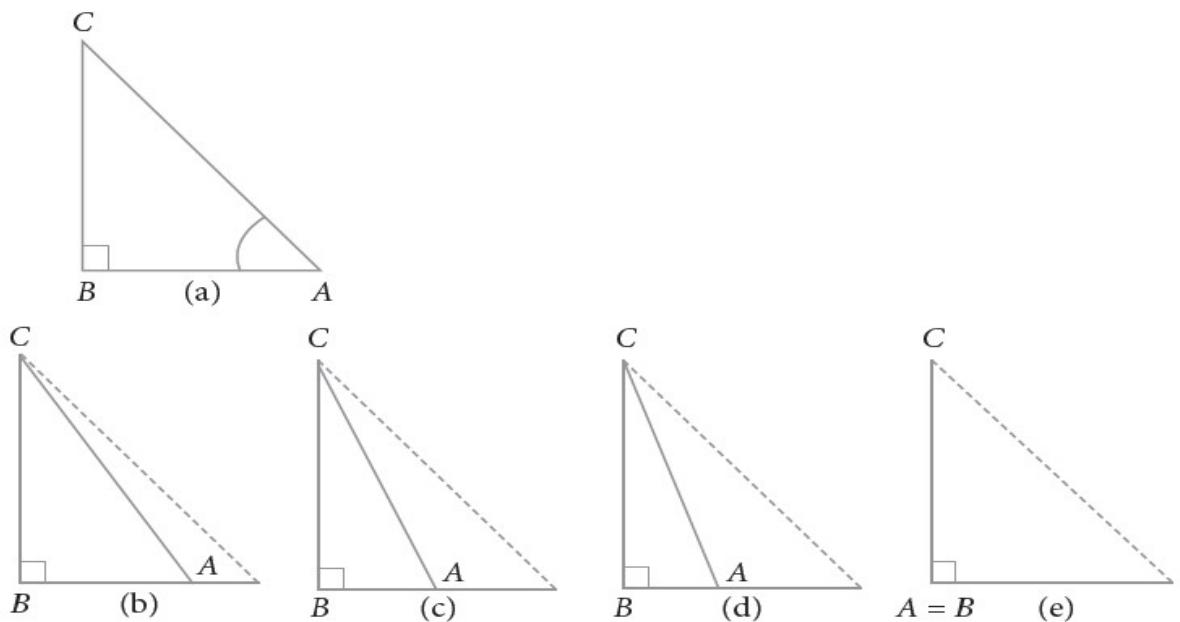
➤ $\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$

➤ $\csc 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0}$ (*tak terdefinisi*)

➤ $\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$

➤ $\cot 0^\circ = \frac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0}$ (*tak terdefinisi*)

Selanjutnya, kita kembali mengkaji ΔABC . Kita akan cermati bagaimana perubahan segetiga tersebut jika α mendekati 90° . Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 4.18 Ilustrasi perubahan $\angle A$ segitiga siku-siku ABC menjadi 90°

Jika $\angle A$ diperbesar mendekati 90° , maka $\angle C$ diperkecil mendekati 0° . Akibatnya, sisi AC hampir berimpit dengan sisi BC .

Dari ΔABC , Gambar 4.18 (a), dapat kita tuliskan

a) $\sin \angle A = \frac{BC}{AC}$, karena $\angle A$ diperbesar mendekati 90° , maka sisi AC hampir berimpit dengan BC . Akibatnya

$$\sin 90^\circ = \text{atau } \sin 90^\circ = 1$$

b) $\cos \angle A = \frac{AB}{AC}$, karena $\angle A$ diperbesar mendekati 90° , maka sisi AB hampir mendekati 0 atau titik A hampir berimpit dengan B . Akibatnya

$$\cos 90^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{0}{BC} \text{ atau } \cos 90^\circ = 0$$

Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita dapat menentukan nilai perbandingan trigonometri yang lain, yaitu:

$$\Rightarrow \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \text{ (tak terdefinisi)}$$

$$\Rightarrow \csc 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \sec 90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \text{ (tak terdefinisi)}$$

$$\Rightarrow \cot 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

Dari pembahasan Masalah 4.2, 4.3, dan 4.4, maka hasilnya dapat disimpulkan pada tabel berikut.

Tabel 4.2 Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa

	sin	cos	tan	csc	sec	cot
0°	0	1	0	~	1	~
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

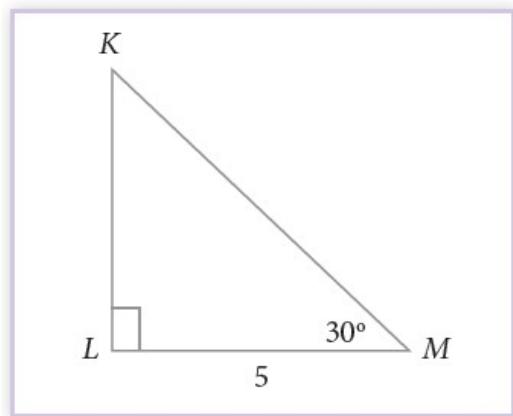
Keterangan: Dalam buku ini, simbol \sim diartikan tidak terdefinisi

Contoh 4.7

Diberikan suatu segitiga siku-siku KLM , siku-siku di L . Jika $LM = 5$ cm, dan $\angle M = 30^\circ$.

Hitung:

- panjang KL dan MK ,
- $\cos \angle K$,
- untuk setiap a (a adalah sudut lancip), selidiki hubungan nilai $\sin a$ dengan $\sin (90^\circ - a)$.



Gambar 4.19 Segitiga siku-siku KLM .

Penyelesaian

Untuk memudahkan dalam menyelesaiakannya, tidak ada salahnya lagi perhatikan Gambar 4.19 berikut.

- Dengan menggunakan Definisi 4.1, kita mengartikan nilai perbandingan $\cos 30^\circ$, yaitu

Selanjutnya, untuk menentukan panjang KL dapat dihitung dengan mencari $\sin 30^\circ$ atau menggunakan Teorema Phytagoras, sehingga diperoleh

$$KL = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

- b. Ada dua cara untuk menentukan nilai $\cos \angle K$. Pertama, karena $\angle K = 90^\circ$ dan $\angle M = 30^\circ$, maka $\angle K = 60^\circ$. Akibatnya $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (Lihat Tabel 4.2). Kedua, karena semua panjang sisi sudah dihitung dengan menggunakan Definisi 4.1, maka

$$\cos \angle K = \frac{KL}{MK} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\frac{10\sqrt{3}}{3}K} = \frac{1}{2}$$

- c. Untuk setiap segitiga berlaku bahwa

$$\angle L + \alpha + \angle K = 180^\circ, \text{ maka } \angle K = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ) = (90^\circ - \alpha)$$

Karena $\alpha = 30^\circ$, maka $(90^\circ - \alpha) = 60^\circ$. Oleh karena itu, dapat dituliskan bahwa

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha), \text{ karena}$$

$$\sin 30^\circ = \cos (90^\circ - 30^\circ)$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \text{ (Lihat Tabel 4.2)}$$

Sekarang, mari kita selidiki, jika $\alpha = 60^\circ$, maka

$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha), \text{ karena}$$

$$\sin 60^\circ = \cos (90^\circ - 60^\circ)$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

Ternyata, pola tersebut juga berlaku untuk $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, dan $\alpha = 90^\circ$

Jadi, diperoleh hubungan sinus dan cosinus. Jika $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, maka $\sin \alpha = \cos ((90^\circ - \alpha))$

Contoh 4.8

Diketahui $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < (A + B) < 90^\circ$, $A > B$

Hitung $\sin A$ dan $\tan B$.

Untuk memulai memecahkan masalah tersebut, harus dapat mengartikan $0^\circ < (A + B) < 90^\circ$, yaitu kita harus menentukan dua sudut A dan B , sedemikian

sehingga $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ dan $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$

Lihat kembali Tabel 4.2, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ (α adalah sudut lancip), maka $\alpha = 60^\circ$

Jadi, diperoleh: $A + B = 60^\circ$ (1*)

Selanjutnya, dari Tabel 4.2, $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ (α adalah sudut lancip), maka $\alpha = 30^\circ$

Jadi, kita peroleh: $A - B = 30^\circ$ (2*)

Dari (1*) dan (2*), dengan cara eliminasi maka diperoleh $A = 45^\circ$ dan $B = 15^\circ$

4.5 Identitas Trigonometri

IDENTITAS TRIGONOMETRI

1. Identitas Trigonometri

Dari nilai fungsi trigonometri tersebut kemudian diperoleh *identitas trigonometri*. Identitas trigonometri adalah suatu persamaan dari fungsi trigonometri yang bernilai benar untuk setiap sudutnya dengan kedua sisi ruasnya terdefinisi. Identitas trigonometri terbagi 3, yaitu *Identitas Kebalikan*, *Identitas Perbandingan* dan *Identitas Phytagoras* yang masing-masing memiliki fungsi dasar, yaitu:

Identitas Kebalikan	Identitas Perbandingan	Identitas Phytagoras
$\text{Cosec } A = 1/\sin A$ $\text{Sec } A = 1/\cos A$ $\text{Cot } A = 1/\tan A$	$\text{Tan } A = \sin A / \cos A$ $\text{Cot } A = \cos A / \sin A$	$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ $1 + \cot^2 A = \cosec^2 A$

1. (a) Kuadran

Kuadran adalah pembagian daerah pada sistem koordinat kartesius → dibagi dalam 4 daerah Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran memenuhi aturan seperti pada gambar: Untuk sudut $b > 360^\circ \rightarrow b = (k \cdot 360 + a) \rightarrow b = a$ ($k = \text{bilangan bulat} > 0$)

1. (a) Mengubah fungsi trigonometri suatu sudut ke sudut lancip

2. Jika menggunakan $90^\circ \pm a$ atau $270^\circ \pm a$ maka fungsi berubah:

$\sin \leftrightarrow \cos$

$\tan \leftrightarrow \cot$

$\sec \leftrightarrow \csc$

- Jika menggunakan $180^\circ \pm a$ atau $360^\circ \pm a$ maka fungsi tetap

(a) **Sudut dengan nilai negatif**

Nilai negatif diperoleh karena sudut dibuat dari sumbu x, diputar searah jarum jam Untuk sudut dengan nilai negatif, sama artinya dengan sudut yang berada di kuadran IV

Contoh:

- $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$ (120° ada di kuadran II sehingga nilai cos-nya negatif)
- $\cos 120^\circ = \cos (90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$
- $\tan 1305^\circ = \tan (3 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = \tan 225^\circ = \tan (180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$ (225° ada di kuadran III sehingga nilai tan-nya positif)
- $\sin -315^\circ = -\sin 315^\circ = -\sin (360^\circ - 45^\circ) = -(-\sin 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
-

Identitas Trigonometri

Dalam suatu segitiga siku-siku, selalu berlaku prinsip phytagoras, yaitu . Pada materi ini, prinsip phytagoras ini menjadi asal pembuktian identitas trigonometri sendiri.

bagi kedua ruas dengan , diperoleh persamaan baru . Sederhanakan dengan sifat eksponensial menjadi . Dari persamaan terakhir, substitusi bagian yang sesuai dengan perbandingan trigonometri pada segitiga, yaitu dan , sehingga diperoleh atau bisa ditulis menjadi .

Dari identitas yang pertama, dapat diperoleh bentuk lainnya, yaitu:

bagi kedua ruas dengan , diperoleh dimana dan , sehingga diperoleh: $\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = d_1 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = d_2 \\ a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = d_3 \end{cases}$

Bentuk ketiga yaitu $a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = d_1$, $a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = d_2$, $a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = d_3$, dimana $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3$ dan $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, sehingga diperoleh persamaan:

Contoh Soal Trigonometri

Tentukanlah nilai dari $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$!

Jawab:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ berada pada kuadran 2, sehingga nilainya tetap positif dengan besar sama seperti

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ berada pada kuadran 3, sehingga nilainya negatif dengan besar sama seperti

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ berada pada kuadran 4, sehingga nilainya positif dengan besar sama seperti

Sehingga, secara umum, berlaku:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

1. (a) **Grafik fungsi trigonometri**

$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \tan x$ $y = \cot x$ $y = \sec x$ $y = \csc x$ 5. **Menggambar Grafik fungsi $y = A \sin/cos/tan/cot/sec/csc (kx \pm b) \pm c$**

- Periode fungsi untuk $\sin/\cos/\sec/\csc = 2\pi/k$ → artinya: grafik akan berulang setiap kelipatan $2\pi/k$

Periode fungsi untuk $\tan/\cot = \pi/k$ → artinya: grafik akan berulang setiap kelipatan π/k

- Nilai maksimum = $c + |A|$, nilai minimum = $c - |A|$

- Amplitudo = $(y_{\max} - y_{\min})$

- Cara menggambar:

- (a) Gambar grafik fungsi dasarnya seperti pada gambar di atas
- (b) Hitung periode fungsi, dan gambarkan grafik sesuai dengan periode fungsinya
- (c) Jika $A \neq 1$, kalikan semua nilai y pada grafik fungsi dasar dengan A
- (d) Untuk $kx + b \rightarrow$ grafik digeser ke kiri sejauh b/k

Untuk $kx - b \rightarrow$ grafik digeser ke kanan sejauh b/k

1. (a) Untuk $+c \rightarrow$ grafik digeser ke atas sejauh c

Untuk $-c \rightarrow$ grafik digeser ke bawah sejauh c

1. Aturan-Aturan pada Segitiga ABC

2. Aturan Sinus Dari segitiga ABC di atas: Sehingga, secara umum, dalam segitiga ABC berlaku rumus: Aturan Cosinus Dari segitiga ABC di atas: Sehingga, secara umum:

3. Luas Segitiga Dari segitiga ABC di atas diperoleh: Sehingga, secara umum:

B. RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SUDUT

Dari gambar segitiga ABC berikut: $AD = b \sin \alpha$ $BD = a \sin C$ $CD = a \cos \alpha = b \cos \alpha$

Untuk mencari $\cos(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ - (\alpha + \beta))$ Untuk fungsi tangens:

Contoh Soal

1. sederhanakan bentuk trigonometri $(1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2)$.

Pembahasan Dari pecahan $(1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2)$, sederhanakan masing-masing penyebut dan pembilangnya. $1 + \cot^2 = \operatorname{cosec}^2 \Rightarrow 1 + \cot^2 = 1/\sin^2 \cot \cdot \sec^2 = (\cos / \sin) \cdot \sec^2 \Rightarrow \cot \cdot \sec^2 = (\cos / \sin) \cdot (1/\cos^2) \Rightarrow \cot \cdot \sec^2 = \cos / \sin \cdot \cos^2$ Setelah digabung kembali diperoleh: $(1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = (1/\sin^2) / (\cos / \sin \cdot \cos^2) \Rightarrow (1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = (1/\sin^2) \cdot (\sin \cdot \cos^2 / \cos) \Rightarrow (1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = \sin \cdot \cos^2 / \sin^2 \cdot \cos \Rightarrow (1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = \cos / \sin \Rightarrow (1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = \cot$ Jadi, $(1 + \cot^2) / (\cot \cdot \sec^2) = \cot$.

1. Tentukan nilai dari $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Pembahasan Karena keterbatasan ruang dan pengkodean, jadi soal di atas dikerjakan masing-masing agar tidak terlalu panjang. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Selanjutnya: $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$ Jadi, $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$.

1. Buktikan bahwa $\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha$.

Pembahasan $\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha (\sec^2 \alpha - 1) = \tan^2 \alpha (\tan^2 \alpha + 1) \Rightarrow \sec^2 \alpha (\tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha (\sec^2 \alpha) \Rightarrow \sec^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha$ Jadi, $\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha = \tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \cdot \tan^2 \alpha$. Terbukti.

1. Nyatakan setiap bentuk berikut ke dalam faktor-faktor yang paling sederhana.

a. $1 - \cos^2 \alpha$ b. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ c. $\tan^2 \alpha - 1$ d. $\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

1. (a) $1 - \cos^2 \alpha$

Dari identitas $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka diperoleh: $\Rightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ Jadi, $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.

1. (a) $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$

Dari identitas $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$ Karena $2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$, maka $1 - 2 \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$ Jadi, $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$.

1. (a) $\tan^2 \alpha - 1$

Dari identitas $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$, maka $\tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1 \Rightarrow \tan^2 \alpha - 1 = \sec^2 \alpha - 1 - 1$

$\Rightarrow \tan^2 \alpha - 1 = \sec^2 \alpha - 2$

? $\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin 2\alpha$ Jadi, $\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin 2\alpha$.

? Buktikan tiap identitas trigonometri berikut.

a. $\frac{1}{3} \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$
b. $3 \cos^2 \alpha - 2 = 1 - 3 \sin^2 \alpha$
c. $3 + 5 \sin^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha$

Pembahasan

1. $\frac{1}{3} \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} (??) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Terbukti.

1. $3 \cos^2 \alpha - 2 = 1 - 3 \sin^2 \alpha$

Ingat bahwa $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, maka $3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3$. Dari $3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3$, maka $3 \cos^2 \alpha = 3 - 3 \sin^2 \alpha$.

$$\Rightarrow 3 \cos^2 \alpha - 2 = 1 - 3 \sin^2 \alpha \Rightarrow 3 - 3 \sin^2 \alpha - 2 = 1 - 3 \sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - 3 \sin^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha$$

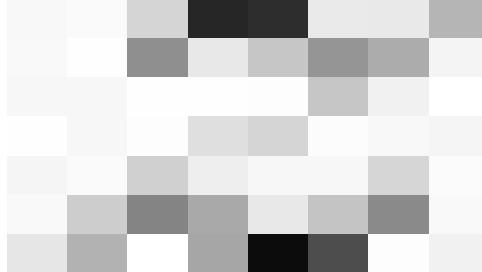
Terbukti.

1. $3 + 5 \sin^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha$

Dari $5 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha = 5$, maka $5 \sin^2 \alpha = 5 - 5 \cos^2 \alpha \Rightarrow 3 + 5 \sin^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha \Rightarrow 3 + 5 - 5 \cos^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha \Rightarrow 8 - 5 \cos^2 \alpha = 8 - 5 \cos^2 \alpha$. Terbukti.

Bukti bahwa $\cos 2x + \sin 2x = 1$

1



Pada segitiga siku-siku berlaku perbandingan trigonometri

Pada gambar di samping berlaku rumus pitagoras

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Kemudian kita bagi masing-masing ruas dengan r^2

$$x^2 + y^2 / r^2 = r^2 / r^2$$

$$\rightarrow (xr)^2 + (yr)^2 = 1$$

Dengan mengganti $\sin \alpha = yr$

$$\cos \alpha = xr$$

didapat

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

(terbukti)

1. Buktikan bahwa $\cos 2x = 1 - 2 \sin x \cos x$

Bukti :

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin x \cos x$$

$$= (1 - \sin x)(1 + \sin x)$$

$$= 1 + \sin x - \sin x$$

$$= 1$$

1.

terbukti

1. Buktikan bahwa $1 + \cos x \sin x = \sin x(1 - \cos x)$

Bukti :

$$1 + \cos x \sin x = 1 + \cos x \sin x$$

$$\times 1 - \cos x(1 - \cos x)$$

$$= 1 - \cos x \sin x(1 - \cos x)$$

$$\sin 2x = 1 - \cos 2x$$

$$= \sin 2x \sin x (1 - \cos x)$$

$$= \sin x (1 - \cos x)$$

Terbukti

1. Jika $\sin x + \cos x = 1,2$

maka tentukan

a.

$$\sin x \cos x$$

b.

$$\sin 3x + \cos 3x$$

Jawab :

$$1. \sin x \cos x$$

$$\sin x + \cos x = 1,2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1,2^2$$

kuadratkan kedua ruas

$$\sin 2x + 2 \sin x \cos x + \cos 2x = 1,44$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = 1,44$$

$$2 \sin x \cos x = 0,44$$

$$\sin x \cos x = 0,22$$

$$1. \sin 3x + \cos 3x$$

2.

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

Substitusikan $a = \sin x$

dan $b = \cos x$

$$\sin 3x + \cos 3x = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$= (1,2)^3 - 3(0,22)(1,2)$$

$$= 1,728 - 0,792$$

$$= 0,936$$

1. Jika $\sec x + \tan x = 11$

maka tentukan nilai dari

a.

$$\sec x$$

b.

$$\tan x$$

Jawab :

$$1. \sec x$$

$$\sec x + \tan x = 11$$

$$(\sec x + \tan x)^2 = (??)^2$$

$$\sec 2x + 2 \sec x \tan x + \tan 2x = 121$$

$$\sec 2x + 2 \sec x \tan x + \sec 2x - 1 = 121$$

$$\tan 2x = \sec 2x - 1$$

$$2 \sec 2x + 2 \sec x \tan x = 122$$

$$2 \sec x (\sec x + \tan x) = 122$$

$$2 \sec x (??) = 122$$

$$\sec x = 12222$$

$$= 6111$$

1. $\tan x$

Dari $\sec x + \tan x = 11$

Kita substitusikan $\sec x = 6111$

$$6111 + \tan x = 11$$

$$\tan x = 11 - 6111$$

$$= 6011$$

Contoh Soal Identitas Trigonometri

1. Nilai dari $\cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 75^\circ$ adalah...

Penyelesaian:

1. Soal dengan bentuk seperti ini dapat dikerjakan dengan rumus Kuadran I. Dimana: $\sin \alpha = \cos (90 - \alpha)$ atau $\cos \alpha = \sin (90 - \alpha)$.

1. Penyelesaiannya juga bisa menggunakan identitas trigonometri. Dimana:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 1$$

Jadi,

$$\cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 75^\circ$$

$$= \cos 15^\circ + \cos 75^\circ + \cos 35^\circ + \cos 55^\circ$$

$$= \cos(90 - 75)^\circ + \cos 75^\circ + \cos(90 - 55)^\circ + \cos 55^\circ$$

$$= \sin 75^\circ + \cos 75^\circ + \sin 55^\circ + \cos 55^\circ$$

$$= 1 + 1 = 2 \longrightarrow (\text{identitas trigonometri } \sin \alpha + \cos \alpha = 1)$$

2. Jika $\sin(x-600)^\circ = \cos(x-450)^\circ$ maka nilai dari $\tan x$ adalah...

Penyelesaian:

1. Penyetaraan antara sisi kiri dan sisi kanan. Menggunakan aturan Kuadran I (seperti pada soal nomor 1).

$$\sin(x + \alpha) = \cos(x + \alpha)$$

$$\sin(x + \alpha) = \sin(90 - (x + \alpha))$$

1. Setelah sisi kiri dan kanan sama, nah bisa ditentukan nilai x nya.

2. Setelah nilai x di dapat, baru deh dihitung nilai $\tan x$ nya

Jadi,

$$\sin(x-600)^\circ = \cos(x-450)^\circ$$

$$\sin(x-600)^\circ = \sin(90 - (x-450))^\circ$$

$$\sin(x-600)^\circ = \sin(540 - x)^\circ$$

$$x - 600^\circ = 540^\circ - x$$

$$2x = 540^\circ + 600^\circ$$

$$x = 1140^\circ / 2 = 570^\circ$$

$$\tan x = \tan 570^\circ$$

$$= \tan(360 + 210)^\circ = \tan 210^\circ$$

$$= \tan(180 + 30)^\circ \longrightarrow \text{Kuadran III}$$

$$= \tan 30^\circ = 1/3 \sqrt{3}$$

(bernilai + karena tangen pada kuadran III bernilai positif).

3. Diketahui $\sin x + \cos x = -1/5$. Maka nilai dari $\sin 2x$ adalah...

Penyelesaian:

Identitas Trigonometri yang berpengaruh pada soal ini yakni:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 1 \text{ dan aturan sudut rangkap.}$$

Jadi,

$$\sin x + \cos x = -1/5$$

$(\sin x + \cos x) = (-1/5) \rightarrow$ (Kuadratkan kedua ruas.)
 $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1/25$
 $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1/25$
 $1 + 2\sin x \cos x = 1/25 \rightarrow$ (Identitas trigonometri $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$)
 $2\sin x \cos x = 1/25 - 1$
 $2\sin x \cos x = 1/25 - 25/25$
 $2\sin x \cos x = -24/25$
 $\sin 2x = -24/25$
 (aturan sudut rangkap $\sin 2x = 2\sin x \cos x$).

4. Diketahui $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 8/25$. Maka nilai dari $1/\sin \alpha - 1/\cos \alpha$ adalah...

Penyelesaian:

1. Karena berbentuk pecahan maka samakan dulu penyebutnya.
2. Identitas trigonometri yg berlaku pada soal ini adalah $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$
- 3.

Perhatikan pembahasannya pada gambar di bawah ini.

The diagram consists of three separate right-angled triangles arranged vertically.
 The top triangle has legs of length 3 and 4, with a hypotenuse of 5. It is labeled with the ratio $3x + y - z = 4 \dots (III)$.
 The middle triangle has legs of length 3 and 4, with a hypotenuse of 5. It is labeled with the ratio $3x - y + z = 6 \dots (I)$.
 The bottom triangle has legs of length 3 and 4, with a hypotenuse of 5. It is labeled with the ratio $3x - 6y - z = 10 \dots (II)$.
 Brackets on the left group the first two triangles as (I, III), and the bottom triangle as (II). Brackets on the right group (I, III) and (II) as a single large bracketed expression.

Jadi, nilai dari $1/\sin \alpha - 1/\cos \alpha$ adalah $1 \frac{7}{8}$.

5. Nilai $\tan x$ dari persamaan $\cos 2x - 3\sin x - 1 = 0$ adalah...

Penyelesaian:

1. Karena berbentuk persamaan maka unsur trigonometrinya mesti disamakan/disetarakan.
2. Menggunakan aturan sudut rangkap $\cos 2\alpha$. Dimana:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \text{ atau}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \text{ atau}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin \alpha$$

1. Setelah nilai x di dapat, kemudian dilanjutkan penentuan $\tan x$ nya.

Jadi,

$$\cos 2x - 3\sin x - 1 = 0$$

$$\cos 2x - 3\sin x = 1$$

$$(1 - 2\sin x) - 3\sin x = 1$$

(mengubah $\cos 2x$ yang sesuai dengan $-3\sin x$ sehingga persamaan dapat dikerjakan karena bervariabel sama yakni $\sin x$).

$$(1 - 2\sin x) - 3\sin x = 1$$

$$-2\sin x - 3\sin x = 1 - 1$$

$$\begin{aligned}
 -2\sin x - 3\sin x &= 0 \\
 \sin x(-2\sin x - 3) &= 0 \\
 \sin x = 0 \text{ atau } -2\sin x - 3 &= 0 \\
 \sin x = 0 \text{ atau } \sin x &= -3/2 \\
 x &= 0^\circ \\
 (\sin x = -3/2 \text{ tidak memenuhi}) \\
 \text{maka nilai } \tan x &= \tan 0^\circ = 0
 \end{aligned}$$

4.6 Aturan Sinus dan Cosinus

4.7 Fungsi Trigonometri

Pada subbab ini, kita akan mengkaji bagaimana konsep trigonometri jika dipandang sebagai suatu fungsi. Mengingat kembali konsep fungsi pada Bab 3, fungsi $f(x)$ harus terdefinisi pada daerah asalnya. Jika $y = f(x) = \sin x$, maka daerah asalnya adalah semua x bilangan real. Namun, mengingat satuan sudut (subbab 4.1) dan nilai-nilai perbandingan trigonometri (yang disajikan pada Tabel 4.3), pada kesempatan ini, kita hanya mengkaji untuk ukuran sudut dalam derajat. Mari kita sketsakan grafik fungsi $y = f(x) = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

1. Grafik Fungsi $y = \sin x$, dan $y = \cos x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Problem 4.1 Dengan keterampilan kamu dalam menggambar suatu fungsi (Bab 3), gambarkan grafik fungsi $y = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

Alternatif Penyelesaian

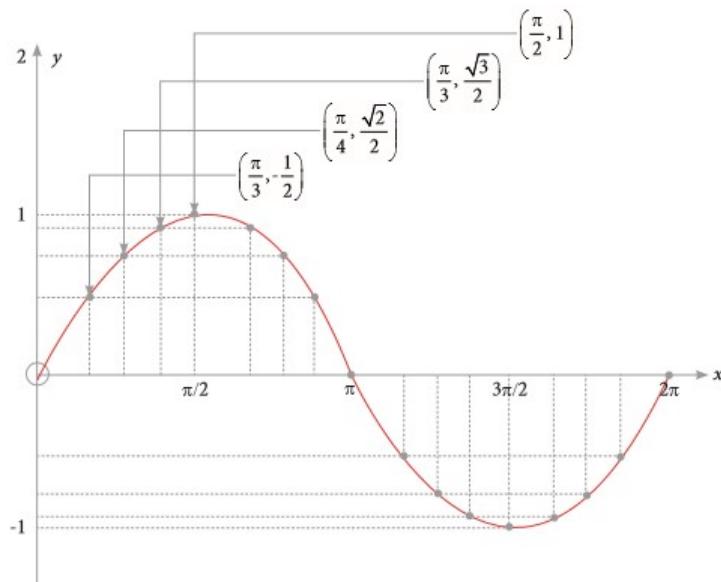
Dengan mencermati nilai-nilai sinus untuk semua sudut istimewa yang disajikan pada Tabel 4.3, kita dapat memasangkan ukuran sudut dengan nilai sinus untuk setiap sudut tersebut, sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 (0, 0); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right); \\
 (\pi, 0); \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right); \left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \\
 \left(\frac{11\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \text{ dan } (2\pi, 0).
 \end{aligned}$$

Selanjutnya pada koordinat kartesius, kita menempatkan pasangan titiktitik untuk menemukan suatu kurva yang melalui semua pasangan titik-titik tersebut. Selengkapnya disajikan pada Gambar berikut ini.

Dari grafik di atas, kita dapat merangkum beberapa data dan informasi seperti berikut.

- Untuk semua ukuran sudut x , nilai maksimum fungsi $y = \sin x$ adalah 1, dan nilai minimumnya adalah -1.
- Kurva fungsi $y = \sin x$, berupa gelombang.
- Untuk 1 periode (1 putaran penuh) kurva fungsi $y = \sin x$, memiliki 1 gunung dan 1 lembah.
- Nilai fungsi sinus berulang saat berada pada lembah atau gunung yang sama.
- Untuk semua ukuran sudut x , daerah hasil fungsi $y = \sin x$, adalah $1 \leq y \leq 1$. Dengan konsep grafik fungsi $y = \sin x$, dapat dibentuk kombinasi fungsi sinus.

Figure 4.1: Grafik fungsi $y = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Misalnya $y = 2 \cdot \sin x$, $y = \sin 2x$, dan $y = \sin(x + \pi/2)$. Selengkapnya dikaji pada contoh berikut.

■ **Example 4.1** Gambarkan grafik fungsi $y = \sin 2x$ dan $y = \sin(x + \pi/2)$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Kemudian tuliskanlah perbedaan kedua grafik tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan nilai-nilai perbandingan trigonometri yang disajikan pada Tabel 4.3, maka pasangan titik-titik untuk fungsi $y = \sin 2x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:

Untuk $x = 0$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2 \cdot (0) = \sin 0 = 0 \Rightarrow (0,0)$

Untuk $x = (\pi/6)$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2 \cdot (\pi/6) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 \Rightarrow (\pi/6, \sqrt{3}/2)$

Untuk $x = \pi/4$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2 \cdot (\pi/4) = \sin \pi/2 = 1 \Rightarrow (\pi/4, 1)$.

Demikian seterusnya hingga

untuk $x = 2\pi$, maka niali fungsi adalah $y = \sin 2 \cdot (2\pi) = \sin 4\pi = \sin 0 = 0 \Rightarrow (2\pi, 0)$

Selengkapnya pasangan titik-titik untuk fungsi $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, yaitu

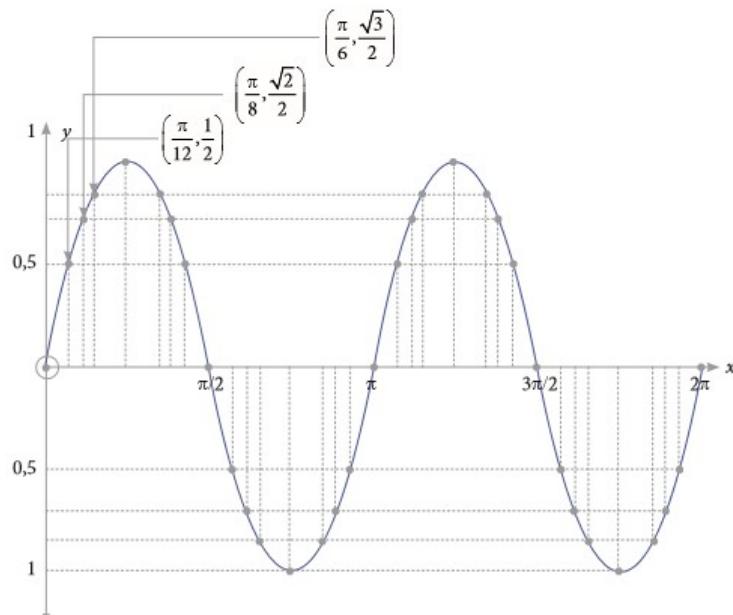
$$(0, 0); \left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}, 1\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \\ \left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); (\pi, 0); \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \dots; (2\pi, 0).$$

Dengan pasangan titik-titik tersebut, maka grafik fungsi $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ disajikan pada Gambar.

Berbeda dengan fungsi $y = \sin 2x$, setiap besar sudut dikalikan dua, tetapi untuk fungsi $y = \sin(x + \pi/2)$, setiap besar sudut ditambah $\pi/2$ atau 90° .

Sekarang kita akan menggambarkan fungsi $y = \sin(x + \pi/2)$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

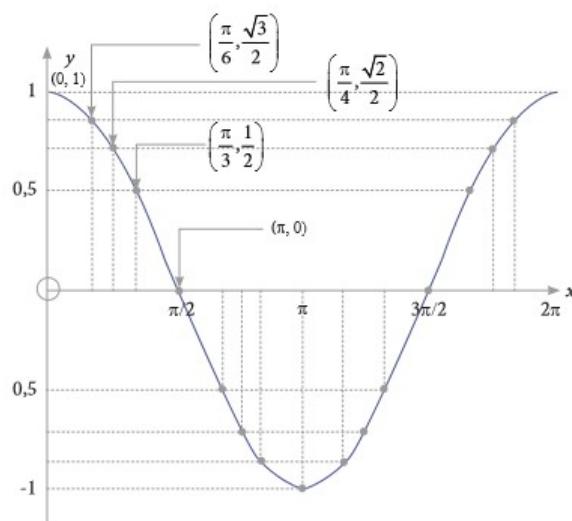
Coba kita perhatikan kembali, bahwa $\sin(x + \pi/2) = \cos x$. Artinya, sekarang kita akan menggambarkan fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Dengan menggunakan nilai-nilai cosinus yang diberikan pada Tabel kita dapat merangkumkan pasangan titik-titik yang

Figure 4.2: Grafik fungsi $y = \sin 2x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

memenuhi fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, sebagai berikut.

$$(0, 1); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); (\pi, -1) \\ \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (2, 1).$$

Dengan demikian, grafik fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, disajikan pada Gambar berikut.

Figure 4.3: Grafik fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari kajian grafik, grafik fungsi $y = \sin 2x$ sangat berbeda dengan grafik fungsi $y =$

$\sin(x + \pi/2) = \cos x$, meskipun untuk domain yang sama. Grafik $y = \sin 2x$, memiliki 2 gunung dan 2 lembah, sedangkan grafik fungsi $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$, hanya memiliki 1 lembah dan dua bagian setengah gunung. Nilai maksimum dan minimum fungsi $y = \sin 2x$ sama dengan $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$ untuk domain yang sama. Selain itu, secara periodik, nilai fungsi $y = \sin 2x$ dan $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$, berulang, terkadang menaik dan terkadang menurun. ■

Exercise 4.1 Dengan pengetahuan dan keterampilan kamu akan tiga grafik di atas dan konsep yang sudah kamu miliki pada kajian fungsi, sekarang gambarkan dan gabungkan grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, untuk domain $0 \leq x \leq 2\pi$. Rangkumkan hasil analisis yang kamu temukan atas grafik tersebut. ■

2. Grafik Fungsi $y = \tan x$, dan $y = \cos x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Kajian kita selanjutnya adalah untuk menggambarkan grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Mari kita kaji grafik fungsi $y = \tan x$, melalui masalah berikut

Problem 4.2 Untuk domain $0 \leq x \leq 2\pi$, gambarkan grafik fungsi $y = \tan x$.

Alternatif Penyelesaian

Dengan nilai-nilai tangen yang telah kita temukan pada Tabel 4.3 dan dengan pengetahuan serta keterampilan yang telah kamu pelajari tentang menggambarkan grafik suatu fungsi, kita dengan mudah memahami pasangan titik-titik berikut.

$$(0, 0); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{\pi}{4}, 1\right); \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\sqrt{3}\right); \left(\frac{3\pi}{4}, -1\right); \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \\ (\pi, 0); \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{4}, 1\right); \left(\frac{4\pi}{3}, \sqrt{3}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, \infty\right); \left(\frac{5\pi}{3}, -\sqrt{3}\right); \left(\frac{7\pi}{4}, -1\right); \\ \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right); (2\pi, 0).$$

Dengan demikian, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, seperti pada Gambar berikut ini.

Dari grafik di atas, jelas kita lihat bahwa jika x semakin mendekati $\pi/2$ (dari kiri), nilai fungsi semakin besar, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terbesarnya. Sebaliknya, jika x atau mendekati $\pi/2$ (dari kanan), maka nilai fungsi semakin kecil, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terkecilnya. Kondisi ini berulang pada saat x mendekati $3\pi/2$. Artinya, fungsi $y = \tan x$, tidak memiliki nilai maksimum dan minimum.

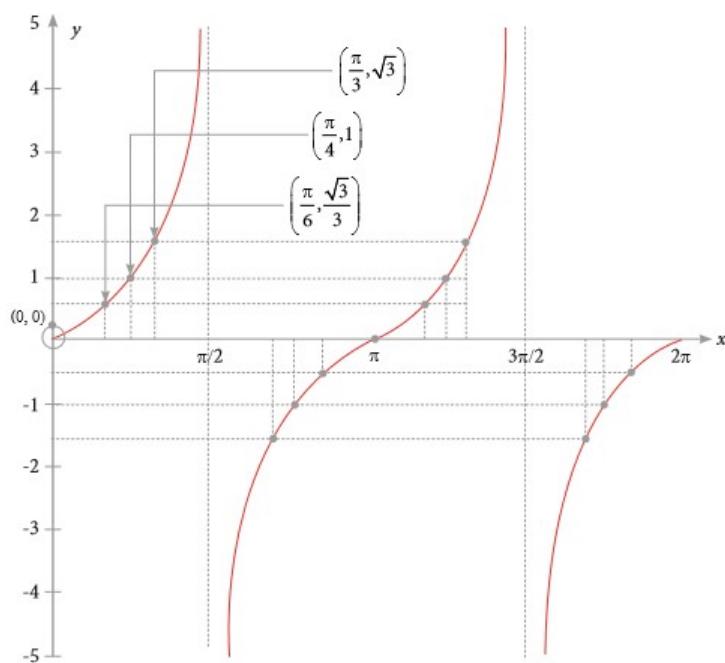


Figure 4.4: Grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$



Bibliography

Books

Articles

