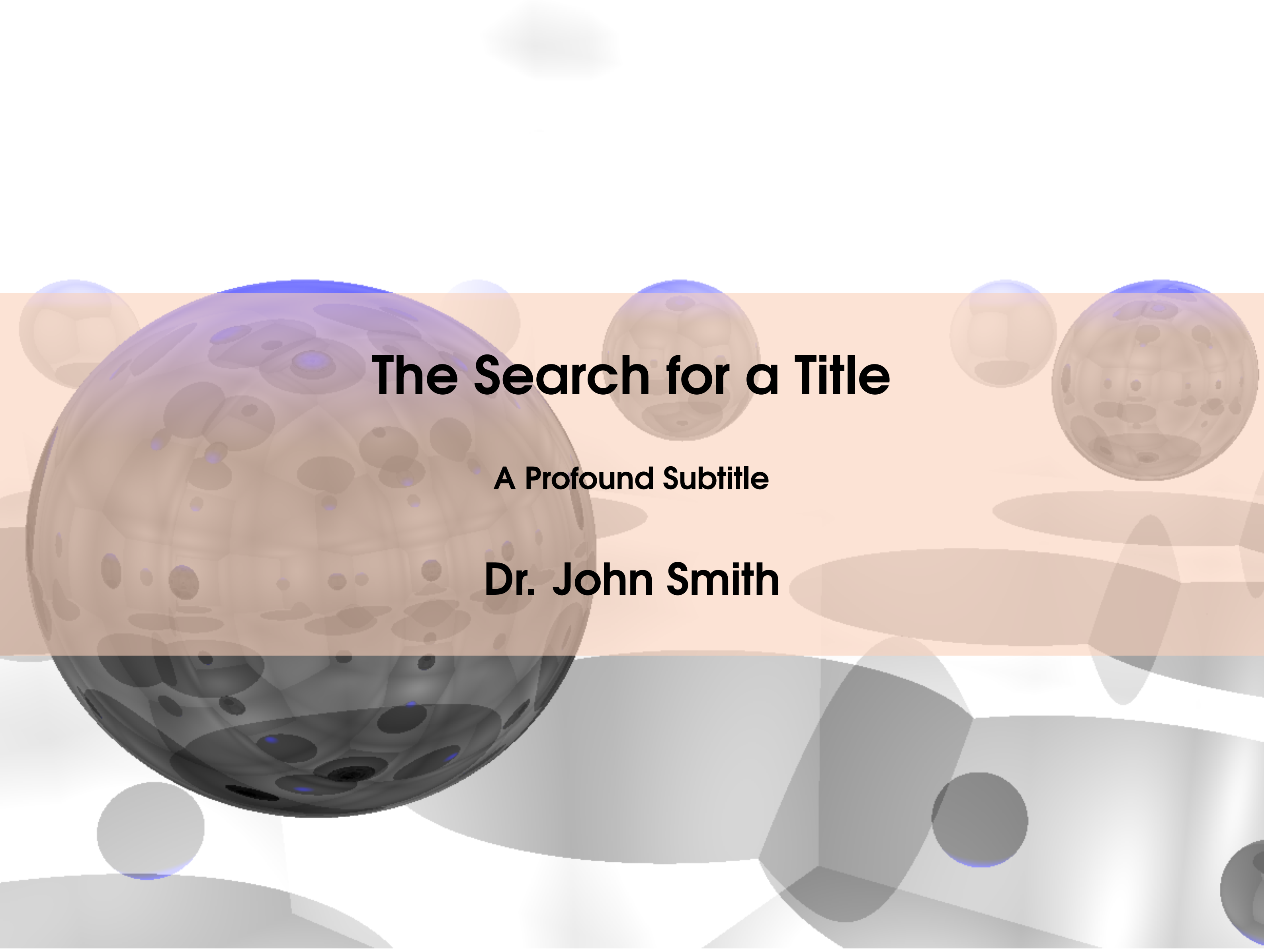


The Search for a Title

A Profound Subtitle

Dr. John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, March 2013

Contents

II Part Two

Part One

1. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Va

1.1 Paragraphs of Text

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim.

1.2 Pertidaksamaan Nilai Mutlak Linear Satu Variabel

1. **KOMPETENSI INTI (KI)**
2. Memahami dan menerapkan pengetahuan faktual, konseptual, prosedural dalam ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah
3. Mencoba, mengolah, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metoda sesuai kaidah keilmuan

1. **KOMPETENSI DASAR (KD)**

1.1 Mengintepretasi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variabel dengan persamaan dan pertidaksamaan linear Aljabar lainnya.

1.2 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dari bentuk linear satu variable

1. **INDIKATOR PENCAPAIAN KOMPETENSI**
2. Memahami dan menjelaskan konsep nilai mutlak.
3. Menentukan penyelesaian persamaan nilai mutlak linear satu variabel.
4. Menentukan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak linear satu variabel.
5. Menggunakan konsep nilai mutlak untuk menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan nilai mutlak.
6. Menggunakan konsep persamaan dan pertidaksamaan untuk menentukan penyelesaian permasalahan nilai mutlak.

1. **TUJUAN PEMBELAJARAN**
2. Setelah membaca, berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat memahami dan menjelaskan konsep nilai mutlak dengan baik dan percaya diri.
3. Setelah berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat menentukan penyelesaian persamaan nilai mutlak satu variable dengan percaya diri.

4. Setelah berdiskusi dan menggali informasi, peserta didik akan dapat pertidaksamaan nilai mutlak satu variable dengan percaya diri.
5. Disediakan permasalahan kontekstual dan LKS, peserta didik dapat menyelesaikan permasalahan tersebut dengan konsep nilai mutlak secara mandiri.
6. Disediakan permasalahan nilai mutlak dan LKS, peserta didik dapat menyelesaikan persmasalahan nilai mutlak dengan menggunakan konsep persamaan dan pertidaksaman secara mandiri.

MATERI PEMBELAJARAN

Pertidaksamaan adalah kalimat/pernyataan matematika yang menunjukkan perbandingan ukuran dua objek atau lebih dan dihubungkan oleh satu dari beberapa simbol berikut :

1. $<$ (kurang dari)
2. $>$ (lebih dari)
3. $\leq$ (kurang dari atau sama dengan)
4. $\geq$ (lebih dari atau sama dengan)

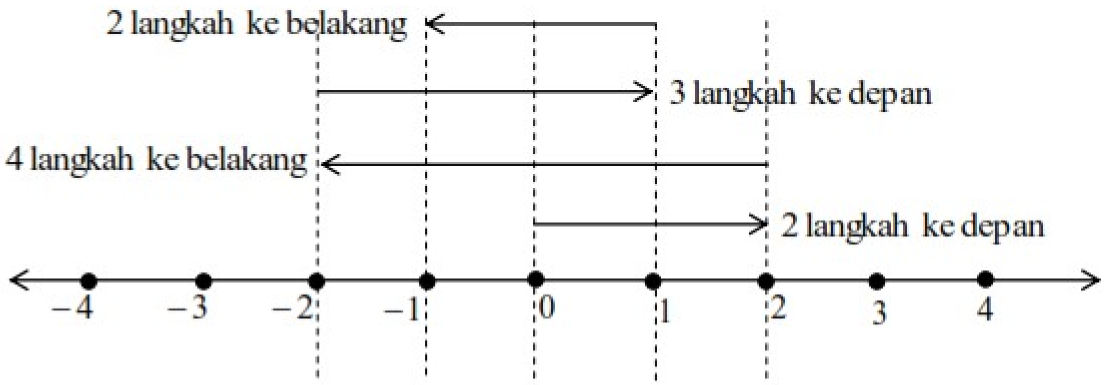
Nilai Mutlak adalah nilai suatu bilangan yang dihitung dari jarak bilangan itu dengan nol (0), sehingga bilangan yang dinilaimutlakkan selalu bernilai positif.

1. (a) **Konsep Nilai Mutlak**

Untuk memahami konsep nilai mutlak, akan diilustrasikan dengan cerita berikut ini: Seorang anak pramuka sedang latihan baris berbaris. Dari posisi diam, si anak diminta maju 2 langkah ke depan, kemudian 4 langkah ke belakang. Dilanjutkan dengan 3 langkah ke depan dan akhirnya 2 langkah ke belakang. Dari cerita di atas dapat diambil permasalahan :

1. (a) i. Berapakah banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir ?
   ii. Dimanakah posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam? (berapa langkah ke depan atau berapa langkah ke belakang)

Untuk menjawab permasalahan diatas, akan diberikan gambar garis bilangan berikut:



Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa x = 0 adalah posisi diam (awal) si anak. Anak panah ke kanan menunjukkan arah langkah ke depan (bernilai positif) dan anak panah ke kiri menunjukkan arah langkah ke belakang (bernilai negatif). Sehingga permasalahan di atas dapat dijawab sebagai berikut :

1. Banyaknya langkah anak pramuka tersebut dari pertama sampai terakhir adalah bentuk penjumlahan 2 + 4 + 3 + 2 = 11 langkah. Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan tampa memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif)
2. Dari gambar diatas, dapat dilihat bahwa posisi terakhir anak pramuka tersebut, jika diukur dari posisi diam adalah 1 langkah ke belakang (x = –1). Hasil ini didapat dari bentuk penjumlahan 2 + (–4) + 3 + (–1) = –1. Bentuk penjumlahan ini merupakan penjumlahan dengan memperhatikan arah ke depan (positif) dan ke belakang (negatif).

Ilustrasi dari penyelesaian soal (a) di atas merupakan dasar dari konsep nilai mutlak.Dimana ***Nilai mutlak suatu bilangan real x merupakan jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan***. Dan dilambangkan dengan x. Secara formal nilai mutlak didefinisikan :

Misalkan x bilangan real, maka : $|x| = \begin{cases} x, & jika\, x \geq 0 \\ -x, & jika\, x < 0 \end{cases}$

1. (a) **Pertidaksamaan Nilai Mutlak Satu Variabel**

Pertidaksamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat berikut :

Bentuk 1

1. $Jika\ |f(x)| < a,\ maka\ -a < f(x) < a$
2. $Jika\ |f(x)| > a,\ maka\ \ f(x) < -a\ atau\ f(x) > a$

Bentuk 2

1. $Jika\ |f(x)| < g(x),\ maka\ f^2(x) < g^2(x),\ dengan\ syarat\ g(x) > 0$
2. $Jika\ |f(x)| > g(x),\ maka\ f^2(x) > g^2(x),\ dengan\ syarat\ g(x) > 0$

Bentuk 3

1. $Jika\ |f(x)| < |g(x)|,\ maka\ f^2(x) < g^2(x)$
2. $Jika\ |f(x)| > |g(x)|,\ maka\ f^2(x) > g^2(x)$

Contoh :

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x+3| < 5$

Jawab :

$$|2x+3| < 5$$
$$-5 < 2x+3 < 5$$
$$-5-3 < 2x+3-3 < 5-3$$
$$-8 < 2x < 2$$
$$-4 < x < 1$$

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|2x-9| < 4x-3$

Jawab :

$$|2x-9| < 4x-3$$
$$(2x-9)^2 < (4x-3)^2$$
$$4x^2-36x+81 < 16x^2-24x+9$$
$$-12x^2-12x+72 < 0$$
$$x^2+x-6 > 0$$
$$(x+3)(x-2) > 0$$

$x < -3$ atau $x > 2$ .... (**??**)

Syarat : $4x-3 > 0 \implies x > \frac{3}{4}$ .... (**??**)

Dari (**??**) dan (**??**) diperoleh interval : $x > 2$

1. Tentukan interval nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|x+4| \geq |3x-8|$

Jawab :

$$|x+4| \geq |3x-8|$$
$$(x+4)^2 \geq (3x-8)^2$$
$$x^2+8x+16 \geq 9x^2-48x+64$$

$-8x^2+56x-48 \geq 0$

$x^2-7x+6 \leq 0$

$1 \leq x \leq 6$

1. (a) **Menemukan konsep nilai mutlak**

Nilai mutlak dari suatu bilangan adalah positif. Hal ini sama dengan akar dari sebuah bilangn selalu positif. Misal $a \in R$, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$. Dengan demikian grafik fungsi nilai mutlak selalu berada di atas sumbu X.

Konsep

Persamaan dan pertidaksamaan linier dapat diperoleh dari persamaan atau fungsi nilai mutlak yang diberikan.
Misalnya jika diketahui $|ax+b| = c,\ untuk\ a,\ b,\ c\ \in R$,
maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax+b=c$.
Demikian juga untuk pertidaksamaan linier.

Prinsip

1. Bentuk umum dari persamaan linier dinyatakan : $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots. + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika a_2 = a_3 = ...= a_n = 0, maka diperoleh persamaan linier satu variable dan apabila a_3 = a_4 = ...= a_n = 0 maka diperoleh persamaan linier dua variable.
2. Pertidaksamaan linier adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan tanda pertidaksamaan $<$, $\leq$, $>$, dan $\geq$. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots. + a_nx_n > 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika a_2 = a_3 = ...= a_n = 0, maka diperoleh pertidaksamaan linier satu variable dan apabila a_3 = a_4 = ...= a_n = 0 maka diperoleh pertidaksamaan linier dua variableBentuk umum dari persamaan linier dinyatakan :

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots. + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefesien dan variable-variabelnya merupakan bilangan-bilangan rill. Jika a_2 = a_3 = ...= a_n = 0, maka diperoleh persamaan linier satu variable dan apabila a_3 = a_4 = ...= a_n = 0 maka diperoleh persamaan linier dua variable.

1. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linier adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variable yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaan dapat :

(**??**) tepat satu,
(**??**) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian, atau
(**??**) tidak punya penyelesaian.

4. Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan lambing $<$, $>$, $\geq$, dan $\leq$. Contohnya bentuk pertidaksamaan : y + 7 $<$ 7 dan 2y + 1 $>$ y + 4. Pertidaksamaan linier dengan satu variable adalah suatu kalimat terbuka yang hanya memuat satu variable dengan derajad satu, yang dihubungkan oleh lambang $<$, $>$, $\geq$, dan $\leq$. Variablenya hanya satu yaitu y dan berderajad satu. Pertidaksamaan yang demikian disebut pertidaksamaan linier dengan satu variable (peubah).

Menentukan Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linier Satu variable

Sifat- sifat pertidaksamaan adalah :

1. Jika pada suatu pertidaksamaan kedua ruasnya ditambah atau dikurang dengan bilangan yang sama, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
2. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan positif , maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula
3. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan negatif , maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula bila arah dari tanda ketidaksamaan dibalik

4. Jika pertidaksamaannya mengandung pecahan, cara menyelesaikannya adalah mengalikan kedua ruasnya dengan KPK penyebut-penyebutnya sehingga penyebutnya hilang .

Menyelesaikan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak caranya hampir sama dengan persamaan nilai mutlak. hanya saja berbeda sedikit pada tanda ketidaksamaannya. Langkah-langkah selanjutnya seperti menyelesaikan pertidaksamaan linear atau kuadrat satu variabel .Pertidaksamaan mutlak dapat digambarkan sebagai berikut.

$$\text{Untuk } |x|, \begin{cases} |x| < a & \text{, maka penyelesaiannya } -a < x < a \\ |x| > a & \text{, maka penyelesaiannya } x < -a \text{ atau } x > a \end{cases}$$

$$\text{Dengan } a \geq 0, x \in R, a \in R$$

Apabila fungsi di dalam nilai mutlak berbentuk ax + b maka pertidaksamaan nilai mutlak dapat diselesaikan seperti berikut.

$$\text{Untuk } |ax+b|, \begin{cases} |ax+b| < p & \text{, maka penyelesaiannya } -p < x < p \\ |ax+b| > p & \text{, maka penyelesaiannya } x < -p \text{ atau } x > p \end{cases}$$

$$\text{Dengan } p \geq 0, \quad x \in R, \quad a, b \in R$$

Lebih jelasnya perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1 :

Tentukan himpunan penyelesaian 3x – 7 > 2x + 2 jika x merupakan anggota {1,2,3,4,. . . ,15}

Jawab :

3x – 7 > 2x + 2; x ? {1, 2, 3, 4. . . 15}

3x –2x – 7 > 2x - 2x + 2 (kedua ruas dikurangi 2x)

x – 7 > 2

x – 7 + 7 > 2 + 7 (kedua ruas dikurangi7)

x > 9

jadi himpunan penyelesaiannya adalah {x | x > 9 ; x bilangan asli ≤ 15}

HP = {10, 11, 12, 13, 14, 15}

Contoh 2 :

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan 3x – 1 < x + 3 dengan x variable pada himpunan bilangan cacah.

Jawab :

3x – 1 < x + 3

3x – 1+ 1 < x + 3 + 1 (kedua ruas ditambah 1)

3x < x + 4

3x + (-x) < x + (-x) +4 (kedua ruas ditambah – x)

2x < 4

X < 2

Karena x anggota bilangan cacah maka yang memenuhi x < 2 adalah x = 0 atau x = 1

Jadi himpunan pnyelesaiannya adalah { 0,1 } .

Contoh 3 :

Sebuah perahu angkut dapat menampung dengan berat tidak lebih dari 1 ton . jika sebuah kotak beratnya 15 kg, maka berapa paling banyak kotak yang dapat diangkut oleh perahu ?

Jawab :

Kalimat matematika : 15 kg x ≤ 1 ton

Penyelesaian : 15 kg x ≤ 1 .500 kg

x ≤ 1 .500 kg

15 kg

x ≤ 100

jadi perahu paling banyak mengangkut 100 kotak .

Contoh 4 :

Jarak terpendek yang diperlukan untuk menghentikan suatu mobil sejak pengereman dilakukan disebut jarak henti. Jarak henti ini merupakan faktor penting yang perlu diuji sebelum peluncuran produk mobil baru. Data mengenai jarak henti dapat digunakan untuk menghitung waktu reaksi pengemudi (selang waktu mulai pengemudi melihat kejadian sampai dia bereaksi menginjak pada rem) berdasarkan tingkat kelajuan mobil (dalam meter/jam).

Suatu penelitian menyatakan bahwa jarak henti dapat dinyatakan dengan formula :d = |0,44v2 + 1,1v|, dimana v adalah kelajuan dan d dalam meter.

Pada batas kelajuan berapakah jarak henti mobil lebih dari 100 meter?

Penyelesaian :

Oleh karena kelajuan selalu bernilai positif, maka |0,44v2 + 1,1v| = 0,44v2 + 1,1v. Selanjutnya, agar jarak henti mobil lebih dari 100 meter, maka d haruslah lebih besar dari seratus.

$$\left|0,44v^2+1,1v\right|>100$$
$$\Leftrightarrow 0,44v^2+1,1v-100>0$$
$$\Leftrightarrow 22v^2+55v-5000>0$$

$$a=22,\ b=55,\ c=-5000$$

$$v=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$v=\frac{-55\pm\sqrt{3025+440000}}{44}$$
$$v=\frac{-55\pm\sqrt{443025}}{44}$$
$$v\approx\frac{-55\pm665{,}6}{44}$$
$$v_1\approx\frac{-55+665{,}6}{44}\approx 13,9\ \text{meter/jam}$$
$$v_2\approx\frac{-55-665{,}6}{44}\approx -16,4\ \text{meter/jam}$$

Jadi, batas kelajuannya jarak henti mobil lebih dari 100 meter adalah **-16,4 < v < 13,9 meter/jam**.

Contoh 5 :

Selisih antara panjang dan lebar suatu persegi panjang kurang dari 6 cm. Jika keliling persegi panjang adalah 32 cm, maka tentukan batas nilai lebar persegi panjang tersebut!

Penyelesaian :

Oleh karena keliling persegi panjang adalah 32 cm, maka *2(p + l) = 32 <=> p + l*

= 16 <=> p = 16-l

Selanjutnya, karena selisih antara panjang dan lebar persegi kurang dari 6 cm, maka

$|p - l| < 6$
$\Leftrightarrow -6 < 16 - l - l < 6$
$\Leftrightarrow -6 < 16 - 2l < 6$
$\Leftrightarrow -6 - 16 < -2l < 6 - 16$
$\Leftrightarrow -22 < -2l < -10$
$\Leftrightarrow -11 < -l < -5$
$\Leftrightarrow 11 > l > 5$
$\Leftrightarrow 5 < l < 11$

Dengan demikian, batas nilai lebar persegi panjang yang dimaksud adalah antara 5 cm sampai dengan 11 cm.

Contoh 6 :

Pergerakan suatu titik dalam koordinat kartesius ditentukan oleh nilai absis dan memenuhi pertidaksamaan |x – 1|2 + 2|x – 1| < 15. Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan tersebut!

Penyelesaian :

Jika dimiisalkan |x – 1| = p, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

$p^2 + 2p < 15$
$\Leftrightarrow p^2 + 2p - 15 < 0$
$\Leftrightarrow (p + 5)(p - 3) < 0$
$\Leftrightarrow -5 < p < 3$
$\Leftrightarrow p < 3 atau p > -5$

$p < 3$
$\Leftrightarrow \ |x - 1| < 3$
$\Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3$
$\Leftrightarrow -3 + 1 < x < 3 + 1$
$\Leftrightarrow -2 < x < 4$

$p > -5$
$\Leftrightarrow \ |x - 1| > -5 selalu terpenuhi untuk setiap px \in \mathbb{R}$

jadi, nilai x yang memenuhi adalah { **x** $\in \mathbb{R}$ **| -2** < **x** < **4** }.

Mengubah soal cerita ke bentuk pertidaksamaan linear

Pertidaksamaan Linear adalah peridaksamaan yang memiliki variabel atau peubah yang berderajat satu. Pada kesempatan sebelumnya telah dibahas bagaimana penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel. Berdasarkan prinsip penyelesaian tersebut, pertidaksamaan linear ternyata dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, yaitu untuk menyelesaikan berbagai persoalan atau perhitungan yang melibatkan pertidaksamaan. Beberapa perhitungan matematika dapat diterjemahkan ke dalam model matematika berbentuk pertidaksamaan satu variabel. Soal tersebut dapat diubah ke pertidaksamaannilai mutlak sesuai model soalnya. Pada kesempatan ini, bahan belajar sekolah akan membahas bagaimana cara mengubah soal cerita ke bentuk pertidaksamaan linear dan menentukan penyelesaiannya.

Bentuk Pertidaksamaan Linear

Setiap masalah memiliki bentuknya masing-masing. Tidak sesuai soal dapat diselesaikan dengan model matematika berbentuk pertidaksamaan linear. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan suatu permasalahan kita harus mengidentifikasi bentuk pertidaksamaan yang paling relevan dengan masalah tersebut.

Karena kita berbicara tentang pertidaksamaan linear, maka kita harus terlebih dahulu memahami ciri dari pertidaksamaan linear dan mengenali ciri-ciri soal yang berkaitan dengan pertidaksamaan linear. Salah satu ciri utama yang dapat kita lihat adalah penggunaan kata-kata pertidaksamaan. Dalam Soal cerita, hubungan pertidaksamaan seringkali dihadirkan dengan penggunaan kata-kata seperti kurang dari, sebanyak-banyaknya, maksimal, dan sebagainya. Kata-kata tersebut merupakan indikasi bahwa soal tersebut berbentuk pertidaksamaan. Selanjutnya, kita harus mengidentifikasi kondisi yang diketahui dalam soal. Kita harus mengidentifikasi besaran yang digunakan dalam soal dan selanjutnya menyatakan besaran tersebut sebagai variabel. Setelah itu, kita susunlah pertidaksamaan yang sesuai dengan soal. Sebagai acuan, kita harus memahami bentuk umum atau bentuk baku dari pertidaksamaan yang ingin kita gunakan. Karena kita membahas pertidaksamaan linear satu variabel, maka kita harus memahami bentuk baku dari pertidaksamaan linear satu variabel.

Bentuk baku pertidaksamaan linear satu variabel dalam variabel x :

1. Pertidaksamaan kurang dari : ax + b < 0
2. Pertidaksamaan kurang dari sama dengan : ax + b ≤ 0
3. Pertidaksamaan lebih dari : ax + b > 0
4. Pertidaksamaan lebih dari sama dengan : ax + b ≥ 0

Pada bentuk di atas, x merupakan variabel atau peubah sedangkan a dan b merupakan bilangan-bilangan real. Nilai a dan b diperoleh dari soal cerita sehingga bentuk pertidaksamaannya akan bergantung pada soal ceritanya.

Suatu pertidaksamaan linear satu variabel dapat diselesaikan dengan metode manipulasi aljabar. Dalam memanipulasi aljabar pertidaksamaan linear, ada aturan atau sifat-sifat yang harus diperhatikan.

Menyelesaikan soal cerita berbentuk pertidaksamaan linear

Untuk menyelesaikan suatu soal cerita, kita harus memastikan bentuk pertidaksamaan yang sesuai. Jika soal cerita sudah dipastikan berbentuk pertidaksamaan linear satu variabel, maka soal tersebut dapat kita selesaikan dengan prinsip penyelesaian pertidaksamaan linear.

Langkah pertama yang harus kita lakukan adalah mengidentifikasi besaran yang tidak diketahui nilainya dalam soal. Besaran inilah yang nanti akan kita nyatakan sebagai variabel. Kemudian kita identifikasi nilai-nilai yang diketahui dalam soal dan hubungan pertidaksamaan yang digunakan.

Selanjutnya kita lakukan pemisalan untuk menyatakan besaran sebagai variabel. Kita bisa menggunakan symbol huruf abjad yang paling relevan dengan besaran tersebut kemudian kita susun bentuk pertidaksamaannya berdasarkan nilai-nilai yang diketahui dalam soal.

Setelah dihasilkan bentuk pertidaksamaan linear satu variabel, selanjutnya kita selesaikan pertidaksamaan tersebut dengan prinsip manipulasi aljabar. Dalam manipulasi ini kita harus memperhatikan sifat-sifat perubahan tanda pertidaksamaan.

Berdasarkan uraian diatas, maka berikut langkah menyelesaikan soal cerita yang berbentuk pertidaksamaan linear satu variabel:

1. Identifikasi besaran yang tidak diketahui dalam soal
2. Nyatakan besaran tersebut sebagai variabel
3. Identifikasi hubungan pertidaksamaan yang digunakan
4. Susun pertidaksamaan linear satu variabel sesuai soal
5. Tentukan penyelesaian pertidaksamaannya.

Contoh Soal Cerita

Jumlah dua bilangan tidak kurang dari 400. Jika bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan kedua, maka tentukanlah batas-batas nilai dari kedua bilangan tersebut.

Pembahasan :

Langkah pertama, kita identifikasi besaran yang belum diketahui. Besaran tersebut adalah bilangan pertama dan bilangan kedua. Selanjutnya kita misalkan bilangan pertama dan bilangan kedua sebagai variabel.

Misalkan :

Bilangan pertama = x

Bilangan kedua = y

Dari soal diketahui kalau bilangan pertama sama dengan empat kali bilangan kedua, dengan demikian berlaku hubungan x=4y

Selanjutnya diketahui bahwa jumlah kedua bilangan tersebut tidak kurang dari 400. Kata "Tidak kurang" dalam soal merupakan indikasi hubungan pertidaksamaan lebih besar sama dengan ($\geq$). Itu artinya, model pertidaksamaannya adalah pertidaksamaan lebih dari sama dengan.

Berdasarkan kondisi yang diketahui dalam soal, maka bentuk pertidaksamaan yang sesuai dengan soal adalah sebagai berikut :

1. $x + y \geq 400$

Karena x = 4y, maka pertidaksamaannya menjadi:

1. $4y + y \geq 400$
2. $5y \geq 400$

Selanjutnya, kita selesaikan pertidaksamaan linear tersebut dengan manipulasi aljabar yaitu dengan membagi kedua ruas dengan 5 sehingga diperoleh :

1. $5y \geq 400$
2. $y \geq 80$

Karena kedua ruas sama-sama dibagi 5 (bilangan positif), maka tanda pertidaksamaannya tetap. Nilai y di atas merupakan batas nilai untuk bilangan kedua.

Selanjutnya kita tentukan batas nilai untuk bilangan pertama:

1. $x + y \geq 400$
2. $x + 80 \geq 400$
3. $x + 80 - 80 \geq 400 - 80$
4. $x \geq 320$

Jadi, batas nilai untuk bilangan pertama tidak kurang dari 80 dan batas nilai untuk bilangan kedua tidak kurang dari 320.

2. Linear Tiga Variabel

2.1 Theorems

This is an example of theorems.

2.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

Theorem 2.1.1 — Name of the theorem. In $E = \mathbb{R}^n$ all norms are equivalent. It has the properties:

$$\big| ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \big| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \tag{2.1}$$

$$||\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{2.2}$$

2.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

Theorem 2.1.2 A set $\mathscr{D}(G)$ in dense in $L^2(G)$, $|\cdot|_0$.

2.2 Definitions

This is an example of a definition. A definition could be mathematical or it could define a concept.

Definition 2.2.1 — Definition name. Given a vector space E, a norm on E is an application, denoted $||\cdot||$, E in $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ such that:

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

$$||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| \tag{2.4}$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \tag{2.5}$$

2.3 Notations

Notation 2.1. *Given an open subset G of $\mathbb{R}^n$, the set of functions φ are:*

1. *Bounded support G;*
2. *Infinitely differentiable;*

a vector space is denoted by $\mathscr{D}(G)$.

2.4 Remarks

This is an example of a remark.

R The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.5 Corollaries

This is an example of a corollary.

Corollary 2.5.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.6 Propositions

This is an example of propositions.

2.6.1 Several equations

Proposition 2.6.1 — Proposition name. It has the properties:

$$\left| ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \right| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \tag{2.6}$$

$$||\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{2.7}$$

2.6.2 Single Line

Proposition 2.6.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathscr{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

2.7 Examples

This is an example of examples.

2.7.1 Equation and Text

■ **Example 2.1** Let $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ and denoted by: $x^0 = (1, 1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \tag{2.8}$$

The function f has bounded support, we can take $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$ for all $\varepsilon \in]0; 5/2 - \sqrt{2}[$. ■

2.7.2 Paragraph of Text

■ **Example 2.2 — Example name.** Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. ■

2.8 Exercises

This is an example of an exercise.

Exercise 2.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

2.9 Problems

Problem 2.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

2.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.
Vocabulary 2.1 — Word. Definition of word.

Part Two

3. Fungsi

3.1 Relasi dan Fungsi

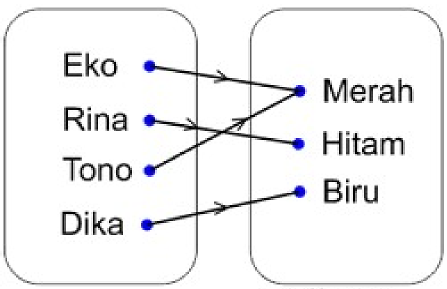
1. **RELASI**

   (a) **Pengertian Relasi**

Relasi adalah hubungan antara 2 elemendua himpunan. Relasi dikatakan sebagai suatu aturan yang memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan yang lain. Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan korespondensi dari anggota-anggota himpunan A ke anggota-anggota himpunan B. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan yang memasangkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B dengan aturan tertentu.

Contoh 1.1

Ada 4 orang anak Eko, Rina, Tono, dan Dika. Mereka diminta untuk menyebutkan warna favorit mereka. Hasilnya adalah sebagai berikut:
Dari hasil uraian di atas terdapat dua buah himpunan. Pertama adalah himpunan anak, kita sebut dengan A dan himpunan warna yang kita sebut dengan B. Hubungan antara A dan B digambarkan seperti ilustrasi di bawah ini:



Gambar 1 contoh relasi himpunan

Kesimpulannya, relasi antara himpunan A dan himpunan B adalah “suka dengan warna”. Eko dipasangkan dengan merah karena eko suka dengan warna merah. Rina dipasangkan dengan warna hitam karena rina menyukai warna hitam, dan seterusnya. Dari uraian di atas kita dapat mengambil kesimpulan bahwa definisi relasi adalah

"Relasi antara dua himpunan, contoh himpunan A dengan himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B."

Contoh 1.2

Ada 3 anak mengatakan makanan kesukaannya yaitu : Anis menyukasi Bakso, Rina menyukasi Sate dan Diko menyukasi Nasi Padang.

Dari pernyataan diatas terdapat dua himpunan yaitu :

A = Himpunan anak {Anis, Rina, Diko}

B = Himpunan makanan {Bakso, Sare, Nasi Padang}

Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah menyukasi atau menyenangi.

Dari contoh di atas, himpunan A tersebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut daerah tujuan (ko-domain) . Sementara itu menyukasi disebut relasi. Himpunan semua anggota ko-domain di sebut range (daerah hasil).

1. (a) **Menyatakan Relasi**

Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu menggunakan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan diagram Cartesius.

1. **Diagram Panah**

Perhatikan gambar di bawah ini. Relasi antara himpunan A dengan himpunan B dinyatakan dengan panah-panah yang memasangkan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B. Karena penggambarannya menggunakan bentuk panah (arrow) maka disebut dengan diagram panah.

Langkah-langkah menyatakan relasi dengan diagram panah :

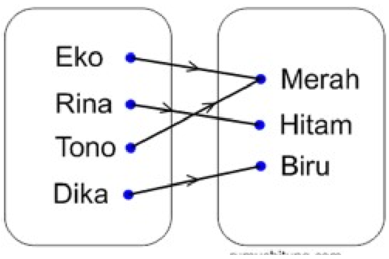
a. Membuat dua lingkaran atau elips

b. Untuk meletakkan anggota himpunan A dan anggota himpunan B x=A diletakkan pada lingkaran A dan y=B diletakkan pada lingkaran B

c. X dan Y dihubungkan dengan anak panah

d. Arah anak panah menunjukkan arah relasi

e. Anak panah tersebut mewakili aturan relasi



Gambar 2 diagram panah

1. **Himpunan Pasangan Berurutan**

Sebuah relasi juga dapat dinyatakan dengan menggunakan pasangan beruturan. Artinya kita memasangkan himpunan A dengan himpunan B secara berurutan.

menyatakan relasinya dengan pasangan berurutan sebagai berikut:*(eko, merah), (rina, hitam),(tono, merah),(dika, biru).*

Jadi relasi antara himpunan A dengan himpunan B dapat dinyatakan sebagai pasangan berurutan (x,y) dengan x $\in$ A dan y $\in$ B.

1. **Diagram Cartesius**

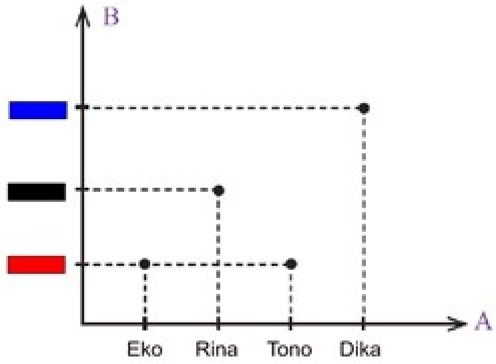
Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan ke dalam pasangan berurutan yang kemudian dituangkan dalam dot (titik-titk) dalam diagram cartesius. Contoh dari relasi suka dengan warna di atas dapat digambarkan dalam bentuk diagram cartesius sebagai berikut:

Pada diagram Cartesius diperlukan dua salip sumbu yaitu : sumbu mendatar (horizontal) dan sumbu tegak (vertical) yang berpotongan tegak lurus.

a. X= A diletakkan pada sumbu mendatar

b. Y= B diletakkan pada sumbu tegak

c. Pemasangan (x,y) ditandai dengan sebuah Noktah (titik) yang koordinatnya ditulis sebagai pasangan berurutan x,y.



Gambar 3 Diagram Cartecius

1.3 **Sifat-Sifat Relasi**

a. Relasi Refleksif (Bercermin)

Relasi disebut *refleksif* jika dan hanya jika untuk setiap x anggota semesta-nya, x berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi R refleksif jika dan hanya jika xRx.

Contoh:

Jika diketahui A= {1,2,3,4} dan relasi R= {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)} Pada A, maka R x∈A adalah refleksif, karena untuk setiap x∈A terdapat (x,x) pada R.Perhatikan relasi pada himpunan = {1,2,3,4} berikut:

R1= {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)}

R2= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)}

Relasi-relasi tersebut merupakan relasi refleksif karena memiliki elemen (1,1), (2,2), (3,3), dan (4,4).

b. Relasi Irrefleksif

Relasi R pada A disebut *Irrefleksif* (anti refleksif) jika dan hanya jika setiap elemen di dalam tidak berelasi dengan dirinya sendiri. Jadi, irrefleksif jika dan hanya jika xRx.

Contoh :

Diketahui himpunan B= {a,b,c} dan relasi R= {(a,c), (b,c), (b,a)}. Relasi R adalah irrefleksif, karena (a,a), (b,b), dan (c,c) bukan elemen.

Diketahui A= {1,2,3,4} dan relasi R= {(2,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}. Relasi R merupakan relasi irrefleksif, karena tidak terdapat elemen (x,x), dimana x∈A.

1. **Relasi Nonrefleksif**

Relasi R pada A disebut *nonrefleksif* jika dan hanya jika ada sekurang-kurangnya satu elemen di dalam A yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh :

Perhatikan relasi pada himpunan A= {1,2,3,}

R= {(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3)}

Relasi tersebut merupakan relasi non refleksif, karena ada (1,2) dan (2,3).

1. **Relasi Simetri**

Relasi R disebut *simetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku jika a berelasi R dengan b maka b juga berelasi dengan a.
Secara simbolik: aRb $\rightarrow$ bRa.
Contoh:

1. Relasi R = { (a,b), (b,a), (a,c), (c,a) } dalam himpunan {a, b, c}.
2. Ani menyukai Budi, Budi menyukai Ani {(Ani,Budi),(Budi,Ani)}

1. **Relasi Asimetri**

Relasi R disebut *asimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b maka b tidak berelasi R dengan a.
Secara simbolik: R asimetri pada S jhj ($\forall$a,b$\in$S) aRb $\rightarrow$ bRa.
Contoh:
1. Relasi R = { (a,b), (b,c), (c,a) } dalam himpunan { a,b,c }.

1. **Relasi Nonsimetri**

Relasi R disebut *nonsimetri* pada S jika dan hanya jika ada dua anggota a dan b dari S sedemikian hingga berlaku: a berelasi R dengan b tetapi b tidak berelasi R dengan a.Perhatikan bahwa nonsimetri adalah negasi/ingkaran dari simetri.
Contoh:
1. Relasi R = { (a,b), (a,c), (c,a) } dalam himpunan {a, b, c}

1. **Relasi Antisimetri**

Relasi R disebut *antisimetri* pada S jika dan hanya jika setiap dua anggota a dan b dari S berlaku: jika a berelasi R dengan b dan b berelasi R dengan a maka a=b.
Contoh:

1. A = keluarga himpunan.

Relasi “ himpunan bagian” adalah relasi yang antisimetris pada A, karena untuk setiap dua himpunan x dan y, jika x y dan y x, maka x = y.

1. Relasi “kurang dari atau sama dengan ($\leq$)” dalam himpunan bilangan real. Jadi, relasi “kurang dari atau sama dengan ($\leq$)” bersifat anti simetri, karena jika a $\leq$ b dan b $\leq$ a berarti a = b.
1. Relasi “habis membagi” pada himpunan bilangan bulat asli N merupakan contoh relasi yang tidak simetri karena jika a habis membagi b, b tidak habis membagi a, kecuali jika a = b. Sementara itu, relasi “habis membagi” merupakan relasi yang anti simetri karena jika a habis membagi b dan b habis membagi a maka a = b.
1. **Relasi Transitif**

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *Transitif* pada A jika dan hanya jika setiap 3 anggota himpunan A, (a,b,c $\in$A) jika (a,b)$\in$R, dan (b,c)$\in$R maka (a,c)$\in$R (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a berelasi dengan c).

Contoh:

1. Relasi R = {(a,b), (b,c), (a,c), (c,c) } dalam himpunan { a,b,c }.
1. **Relasi Nontransitif**

R adalah relasi pada A. R disebut relasi *nontransitif* pada A jika dan hanya jika ada tiga anggota himpunan A, (a,b,c $\in$A) sedemikian hingga (a,b)$\in$R , dan (b,c)$\in$R dan (a,c)$\notin$R (ada tiga anggota a,b,c dari A sedemikian hingga a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c dan a tidak berelasi dengan c).
Contoh:

R = {(1,2),(2,3),(3,4)} dalam himpunan { 1,2,3,4}

1. **Relasi Intransitif**

R adalah relasi pada himpunan A. R disebut relasi intransitif pada A jika dan hanya jika setiap tiga anggota himpunan A, (a,b,c ∈A) jika (a,b)∈R dan (b,c)∈R maka (a,c)∉R (setiap tiga anggota a,b,c dari A, jika a berelasi dengan b dan b berelasi dengan c maka a tidak berelasi dengan c).

Misal E = {1,2,3}, R = {(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(5,7)}

Relasi di atas intransitif karena :

(1,2)∈R dan (2,3)∈R, tetapi (1,3)∉R

(1,2)∈R dan (2,5)∈R, tetapi (1,5)∉R

(2,3)∈R dan (3,4)∈R, tetapi (2,4)∉R

(2,5)∈R dan (5,7)∈R, tetapi (2,7)∉R

1.4 Komposisi Relasi

R adalah relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*

T adalah relasi dari himpunan *B* ke himpunan *C*.

· Komposisi *R* dan *S*, dinotasikan dengan *T* o *R*, adalah relasi dari *A* ke *C* yang didefinisikan oleh :

$T \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C$, dan untuk suatu $b \in B$ sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$ }

· Contoh komposisi relasi

Ø Misalkan, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $C = \{s, t, u\}$

Ø Relasi dari *A* ke *B* didefinisikan oleh :

$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$

Ø Relasi dari *B* ke *C* didefisikan oleh :

$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$

Ø Maka komposisi relasi *R* dan *T* adalah

$T \circ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$

contoh soal relasi dan jawabannyaDikelas 8 SMP belajar matematika terdapat 4 orang siswa yang lebih menyukai pelajaran tertentu. berikut ke-4 anak tersebut :

1. Buyung menyukai pelajaran IPS dan Kesenian
2. Doni menyukai pelajaran ketrampilan dan olah raga
3. Vita menyukai pelajaran IPA, dan
4. Putri lebih menyukai pelajaran matematika dan bahasa ingris

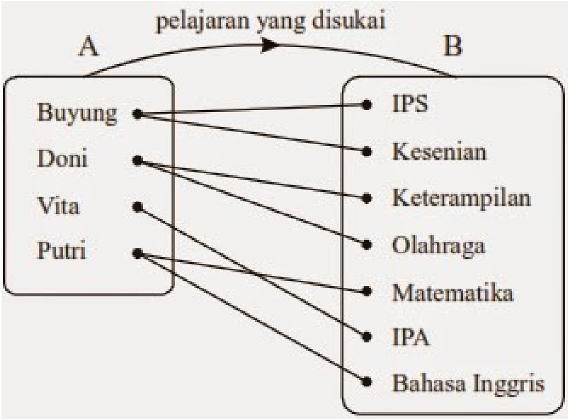
Buatlah relasi dari soal diatas dan disajikan menggunakan diagram panah, diagram cartesius, dan himpunan pasangan berurutan.*Jawab:*Untuk mempermudah menjawab persoalan diatas gunakanlah permisalan seperti :

Himpunan A = {Buyung, Doni, Vita, Putri}

Himpunan B = {IPS, kesenian, keterampilan, olahraga, matematika, IPA, bahasa Inggris}

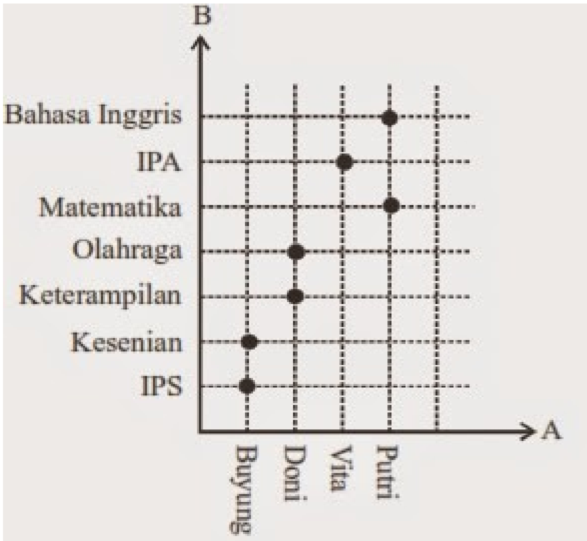
"pelajaran yang disukai" adalah relasi yang menghubungkan himpunan A ke B.

1. **Diagram panah**



Gambar 4 Diagram Panah

b. Diagram Cartesius



Gambar 5 Diagram Cartecius

1. **Himpunan pasangan berurutan**

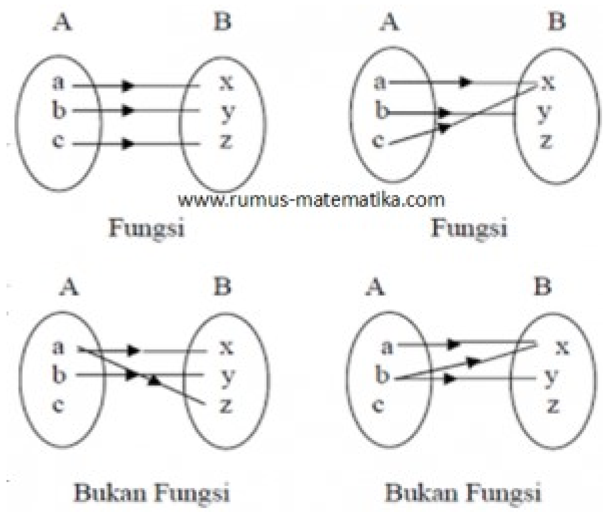
Himpunan pasangan berurutan dari soal diatas adalah :

{(Buyung, IPS), (Buyung, kesenian), (Doni, keterampilan), (Doni, olahraga), (Vita, IPA), (Putri, matematika), (Putri, bahasa Inggris)}

2. FUNGSI

2.1 Pengertian Fungsi

Fungsi adalah bentuk khusus dari relasi. Sebuah relasi dikatakan fungsi jika xRy, untuk**setiap** x anggota A memiliki **tepat satu** pasangan, y, anggota himpunan B Kita dapat menuliskan $f(a) = b$, jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A. Ini berarti bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$ maka $b = c$. Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, kita dapat menuliskan dalam bentuk : $f : A \to B$



Gambar 5 fungsi dan bukan fungsi

Perhatikan contoh kasus diatas, gambar satu dan dua merupakan fungsi dan gambar tiga dan empat bukan merupakan fungsi. Sehingga dari penjelasan contoh diatas yang merupakan fungsi adalah jika setiap anggota A memiliki pasangan dengan anggota B, dan setiap anggota memiliki tepat satu kawan dengan anggota B. Maka dapat kita simpulkan bahwa relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Relasi seperti ini disebut sebagai fungsi atau pemetaan.

Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B merupakan relasi khusus yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Dimana syarat suatu relasi adalah fungsi atau pemetaan sebagai berikut.

1. Setiap anggota A memiliki pasangan di B
2. Setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota di B

2.2 Domain, Kodomain, Dan Range

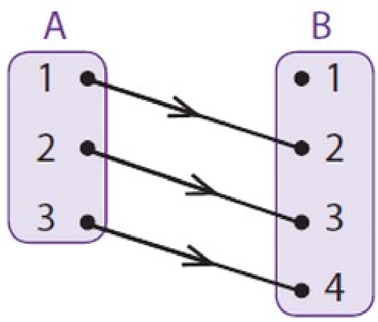
? $f : A \to B$

? A dinamakan daerah asal (*domain*) dari f dan B dinamakan daerah hasil (*codomain*) dari f.

? Misalkan $f(a) = b$, maka b dinamakan bayangan (*image*) dari a,dan a dinamakan pra-bayangan (*pre-image*) dari b.

? Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f dinamakan jelajah (*range*) dari f.

Dalam materi fungsi dikenal istilah Domain, Kodomain, dan juga Range Fungsi. Coba perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 6 Domain dan kodomain

Dari diagram panah tersebut himpunan A atau himpunan daerah asal disebut dengan **Domain**. Himpunan B yang merupakan daerah kawan disebut dengan **Kodomain** sedangkan anggota daerah kawan yang merupakan hasil dari pemetaan disebut dengan daerah hasil atau **range fungsi**. Jadi dari diagram panah di atas dapat disimpulkan

Domain (D_f) adalah A = {1,2,3}Kodomain adalah B = {1,2,3,4}Range Hasil (R_f) adalah = {2,3,4}

2.3 Jenis-jenis Fungsi

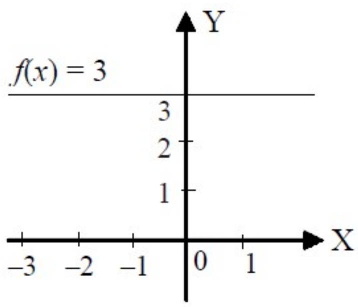
1 Fungsi konstan (fungsi tetap)

Suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B ditentukan dengan rumus f(x) disebut fungsi konstan apabila untuk setiap anggota domain fungsi selalu berlaku f(x) = C, di mana C bilangan konstan. Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh soal berikut ini.

Diketahui f : R $\rightarrow$ R dengan rumus f(x) = 3 dengan daerah domain: $\{x \mid -3 \leq x < 2\}$. Sehingga, gambar grafiknya.

x	–3	–2	–1	0	1
$f(x)$	3	3	3	3	3

Grafik:



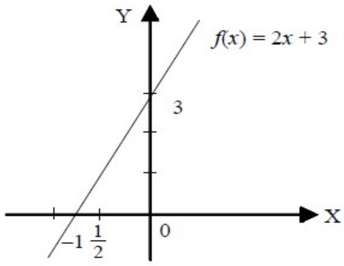
Gambar 7 grafik fungsi konstan

1. **Fungsi linear**

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi linear apabila fungsi itu ditentukan oleh f(x) = ax + b, di mana a $\neq$ 0, a dan b bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus. Perhatikan contoh berikut.Diketahui f(x) = 2x + 3, gambar grafiknya

$2x + 3$		
x	0	$-1\frac{1}{2}$
$f(x)$	3	0

Grafik:

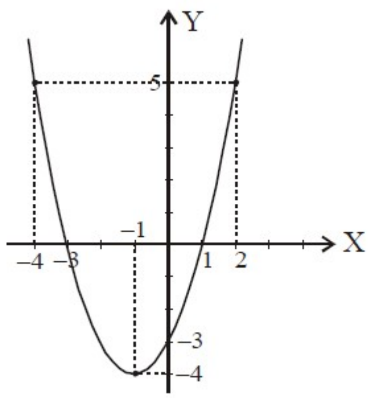


Gambar 8 grafik fungsi Linier

1. **Fungsi Kuadrat**

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi kuadrat apabila fungsi itu ditentukan oleh f(x) = ax^2 + bx + c, di mana a $\neq$ 0 dan a, b, dan c bilangan konstan dan grafiknya berupa parabola.Perhatikan contoh fungsi kuadrat berikut.

Fungsi f ditentukan oleh f(x) = x2 + 2x – 3, gambar grafiknya



Gambar 8 grafik fungsi kuadrat

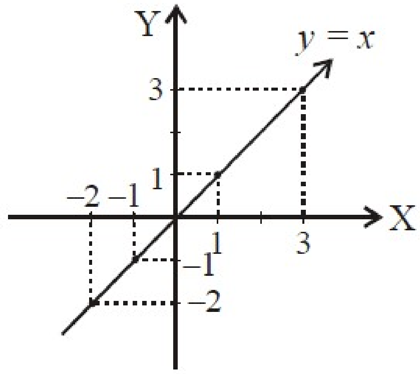
1. **Fungsi identitas**

Suatu fungsi f(x) disebut fungsi identitas apabila setiap anggota domain fungsi berlaku f(x) = x atau setiap anggota domain fungsi dipetakan pada dirinya sendiri. Grafik fungsi identitas berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama. Fungsi identitas ditentukan oleh f(x) = x. Agar lebih memahami tentang fungsi identitas, pelajarilah contoh berikut ini.

Fungsi pada R didefinisikan sebagai f(x) = x untuk setiap x.a. Carilah f(–2), f(0), f(**??**), f(**??**).b. Gambarlah grafiknya.

Penyelesaian:a. Nilai f(–2), f(0), f(**??**), dan f(**??**).f(x) = xf(–2) = –2f(0) = 0f(**??**) = – 1f(**??**) = 3

b. Gambar grafik.



Gambar 9 grafik fungsi identitas

1. (a) **Sifat-sifat Fungsi**

Dengan memperhatikan bagaimana elemen-elemen pada masing-masing himpunan A dan B yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal tiga sifat fungsi yakni sebagai berikut :

1. **Injektif (Satu-satu)**

Misalkan fungsi f menyatakan A ke B maka fungsi f disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B. Selanjutnya secara singkat dapat dikatakan bahwa f:A→B adalah fungsi injektif apabila a $\neq$ a' berakibat f(a) $\neq$ f(a') atau ekuivalen, jika f(a) = f(a') maka akibatnya a = a'.

? Fungsi satu-satu

? Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut fungsi satu-satu jika dan hanya jika untuk sembarang a_1 dan a_2 dengan a_1 tidak sama dengan a_2 berlaku $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$. Dengan kata lain, bila $a_1 = a_2$ maka $f(a_1)$ sama dengan $f(a_2)$.

2. Surjektif (Onto)

Misalkan f adalah suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil f(A) dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B. Apabila f(A) = B, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau "f memetakan A Onto B".

? Fungsi kepada

? Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut fungsi kepada jika dan hanya jika untuk sembarang *b* dalam kodomain *B* terdapat paling tidak satu *a* dalam domain *A* sehingga berlaku $f(a) = b$.

? Suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan *range*-nya (semua kodomain adalah peta dari domain).

3. Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan f: A→B sedemikian rupa sehingga f merupaka n fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu

? Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika untuk sembarang*b* dalam kodomain *B* terdapat tepat satu *a* dalam domain *A* sehingga $f(a) = b$, dan tidak ada anggota *A* yang tidak terpetakan dalam *B*.

? Dengan kata lain, fungsi bijektif adalah **fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif.**

1. (a) **Menghitung Nilai dari Sebuah Fungsi**
2. **Penulisan Fungsi**

1. **Himpunan pasangan terurut.**

? Misalkan fungsi kuadrat pada himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10} maka fungsi itu dapat dituliskan dalam bentuk :
f = {(2, 4), (3, 9)}

1. **Formula pengisian nilai (assignment)**

? $f(x) = x^2 + 10$,
? $f(x) = 5x$

1. **Notasi Fungsi**

Sebuah fungsi dinotasikan dengan huruf kecil seperti f, g, h, i, dan sebagainya. Pada fungsi g yang memetakan himpunan A ke himpunan B dinotasikan dengan g(x). Misal ada fungsi f yang memetakan A ke B dengan aturan f : x → 2x + 2. Dari notasi fungsi tersebut, x merupakan anggota domain. fungsi x → 2x + 2 berarit fungsi f memetakan x ke 2x+2. Jadi daerah bayangan x oleh fungsi f adalah 2x + 2. Dapat di notasikan dengan f(x) = 2x +2. Kesimpulan
Jika fungsi f : x → ax + b dengan x anggota domain f maka rumus fungsi f adalah f(x) = ax +b

1. **Menghitung nilai dari Sebuah Fungsi**

Menghitung nilai dari sebuah fungsi cukup sederhana. Kita hanya perlu mengikuti *rules* dari fungsi tersebut. Semakin susah fungsi yang memetakannya maka akan semakin susah menghitung nilai fungsinya. Terkadang soal-soal membalik fungsi tersebut, diketahui daerah hasil kemudian diminta mencari daerah asal. Yuk mari dismak contoh berikut:
Diketahui fungsi f : x → 2x – 2 dengan x anggota bilangan bulat. Coba tentukan nilai dari

1. f(**??**)
2. f(**??**)
3. bayangan (-3) oleh f
4. nilai f untuk x = -10
5. nilai a jika f(a) = 14

Jawaban :
fungsi fungsi f : x → 2x – 2 dapat dinyatakan dengan f(x) = 2x – 2

1. f(x) = 2x – 2f(**??**) = 2(**??**) – 2 = 4
1. f(x) = 2x – 2f (**??**) = 2(**??**) – 2 = 6
1. f(x) = 2x – 2f(-3) = 2(-3) – 2 = -8
1. f(x) = 2x – 2f(**??**) = 2(**??**) -2 = 18
1. f(a) = 2a – 214 = 2a -22a = 16a = 8
1. **Menentukan Rumus sebuah fungsi**

Sebuah fungsi dapat ditemukan rumusnya apabila ada nilai atau data yang diketehui. Kemudian dengan menggunakan aljabar kita bisa dengan mudah menemukan rumus dari fungsi tersebut. Untuk lebih jelasnya bisa simak contoh berikut:
Fungsi g yang berlaku pada himpunan bilangan riil ditentukan oleh rumus g(x) = ax + b dengan a dan b adalah bilangan bulat. Jika g(-2) = -4 dan g(**??**) = 5. Coba tentukan nalai dari:

1. nilai dari a dan b
2. rumus fungsi
3. g (-3)

Jawaban :

Untuk mencari nila a dan b kita buat persamaan dulu dari himpunan pasangan berurutan yang diketahui.
g(-2) = -4 → -4 = -2a + b → b = 2a – 4 ...(**??**)g(**??**) = 5 → 5 = a + b ...(**??**)
kita substitusikan persamaan 1 ke persamaan 2

5	= a + b
5	= a + 2a – 4
5	= 3a – 4
9	= 3a
a	= 3

1. (a) i. b = 2a – 4b = 2(??) -4b = 2jadi nilai a = 3 dan b = 4
1. (a) i. rumus fungsinya g(x) = 3a + 2
1. (a) i. g(x) = 3a + 2g(-3) = 3 (-3) + 2g (-3) = -7

3.2 Operasi Aritmatika

3.3 Komposisi Fungsi

3.4 Fungsi Linear

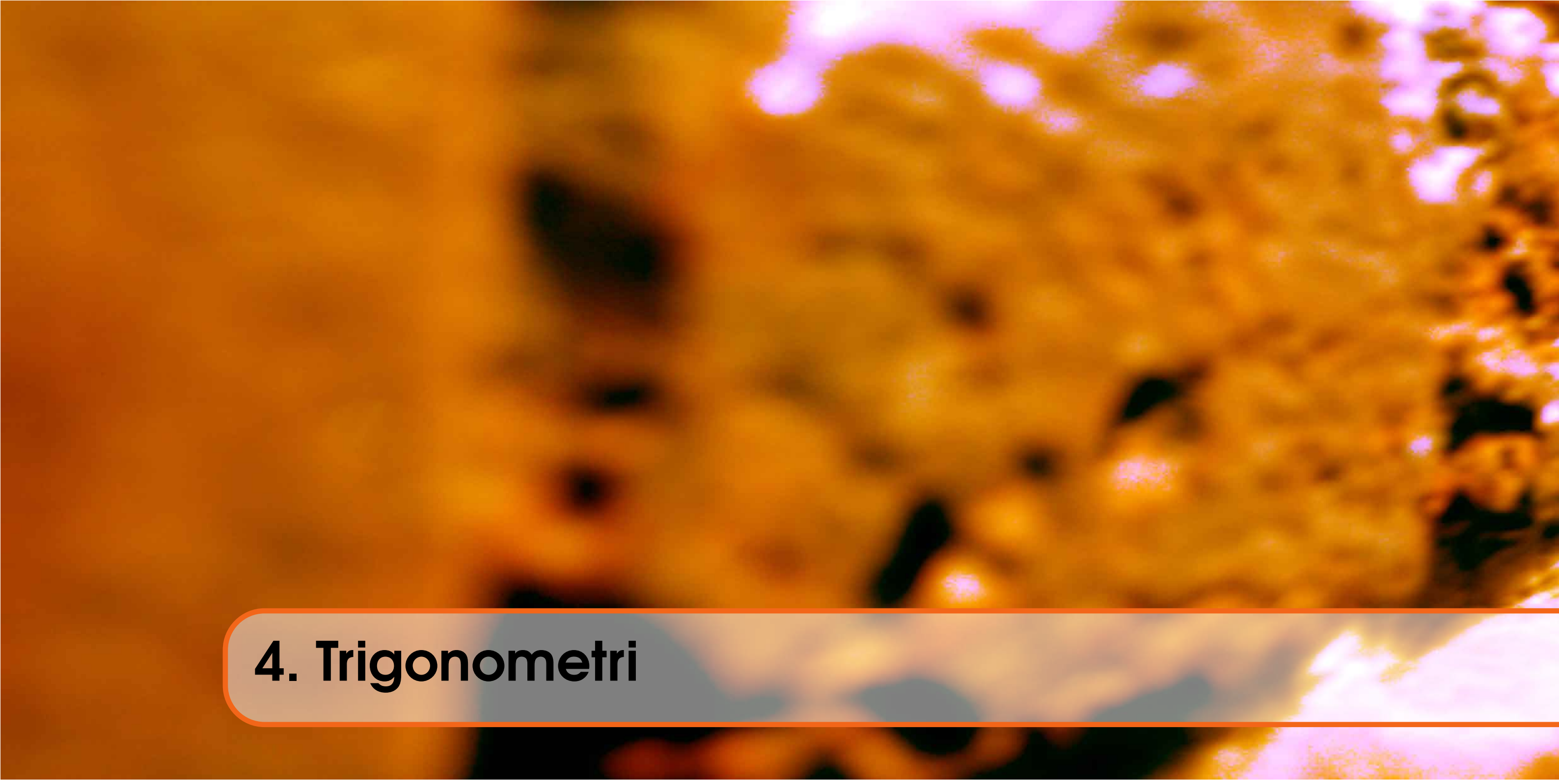
3.5 Fungsi Kuadrat

3.6 Fungsi Inversi

3.7 Fungsi Rasional

Treatments	**Response 1**	**Response 2**
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 3.1: Table caption

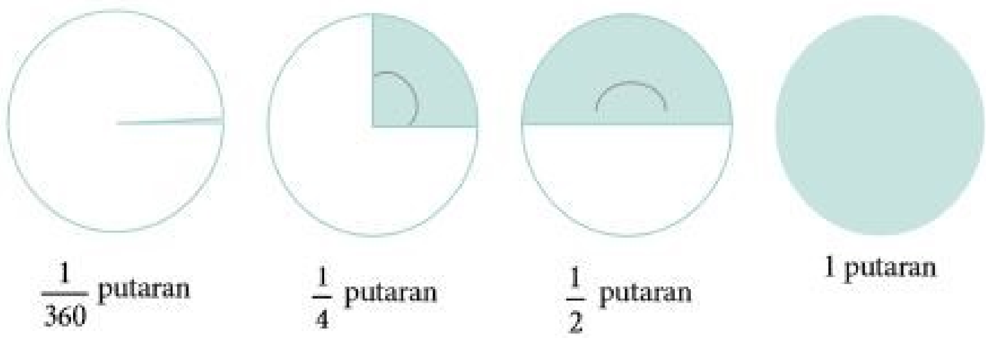


4. Trigonometri

4.1 Pengukuran Sudut

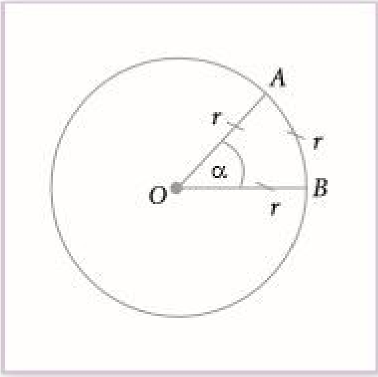
1. (a) **Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)**

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda "?" dan " *rad* " berturutturut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, satu putaran penuh = 360?, atau 1? didefenisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ kali putaran.



Gambar 4.1 Beberapa besar putaran/rotasi

Tentunya dari Gambar 4. 1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Misalnya, untuk $\frac{1}{3}$ putaran, $\frac{1}{6}$ putaran, $\frac{2}{3}$ putaran. Sebelum memahami hubungan derajat dengan radian,berikut ini merupakan teori mengenai radian.



Gambar 4.2 Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai besar ukuran sudut pusat α yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 4.2. Jika $\angle$AOB = α dan AB= OA = OB, maka α = $\frac{AB}{r}$ = 1 radian. Jika panjang busur tidak sama dengan r, maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian dapat dihitung menggunakan perbandingan:

Sifat 4.1

$$\angle AOB = \frac{\overline{AB}}{r}\ rad$$

Dapat dikatakan bahwa hubungan satuan derajat dengan satuan radian, adalah 1 putaran sama dengan 2π rad. Oleh karena itu, berlaku:

Sifat 4.2

$$360^\circ = 2\pi\ rad \text{ atau } 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\ rad \text{ atau } 1\ rad = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57{,}3^\circ$$

Dari Sifat 4.2, dapat disimpulkan sebagai berikut.
? Konversi x derajat ke radian dengan mengalikan x $\times \frac{\pi}{180^\circ}$.
Misalnya, 45?= 45?x$(\frac{\pi}{180}{}^\circ)rad = \frac{\pi}{4}rad$
? Konversi x radian ke derajat dengan mengalikan x $\times \frac{\pi}{180^\circ}$
Misalnya, $\frac{3}{2}\pi\ rad = \frac{3}{2}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi}$ =270° .

Contoh 4.1

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini:

1. $\frac{1}{4}$ putaran = $\frac{1}{4}$x$360^\circ = 90^\circ$ *atau* $90^\circ = 90$x$\frac{\pi}{180}rad = \frac{1}{2}\pi$ rad.
2. $\frac{1}{3}$ putaran = $\frac{1}{3}$x$360^\circ = 120^\circ$ *atau* $120^\circ = 120$x$\frac{\pi}{180}rad = \frac{2}{3}\pi$ rad.
3. - putaran = $\frac{1}{2}$x$360^\circ = 180^\circ$ *atau* $180^\circ = 180$x$\frac{\pi}{180}rad = \frac{1}{2}\pi$ rad.
4. 4 putaran = 4 x 360° $= 1.440^\circ$ *atau* $1.440^\circ = 1.440$x$\frac{\pi}{180}rad = 8\pi$ rad.
5. 5 putaran = 5x$360^\circ = 1.800^\circ$ *atau* $1800^\circ = 1800$x$\frac{\pi}{180}rad = 10\pi$ rad.
6. 225° = 225° $x\ \frac{1}{360^\circ} putaran = \frac{5}{8} putaran\ atau\ 225^\circ = 225^\circ$ x $\frac{\pi}{180^\circ}rad = \frac{5}{4}\pi$ rad.
7. $1.200^\circ = 3\ x\ 360^\circ + 120^\circ = \left[(3\ x\ 360^\circ) \text{ x } \frac{1}{360^\circ} + (120^\circ) \times \frac{1}{360^\circ}\right]$ putaran

$= \left[3 + \frac{1}{3}\right]$ putaran = $3\frac{1}{3}$ putaran

1. Pada saat pukul 11.00, berarti jarum panjang pada jam menunjuk ke angka 12 dan jarum pendek pada jam menunjuk ke angka 11. Artinya besar sudut yang terbentuk oleh setiap dua angka yang berdekatan adalah 30°.

30°=30° x $\frac{\pi}{180°} rad = \frac{1}{6}\pi\ rad$

1. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, maka setiap satu detik pemancar berputar sebanyak 3.600 putaran.
2. Ubahlah ukuran sudut berikut ke dalam ukuran derajat atau radian!

a. 30^0	f. $\frac{4\pi}{3}$
b. 90^0	g. $\frac{2\pi}{5}$
c. -45^0	h. $\frac{5\pi}{6}$
d. 100^0	i. $\frac{\pi}{3}$
e. -390^0	j. $-\frac{3\pi}{4}$

1. Nyatakan sudut 50° dan 89° ke dalam radian!

Penyelesian:
50° = 50° x π/180°
50° = 0,277π
50° = 0,277 (3,14)
50° = 0,87 radian
89° = 89° x π/180°
89° = 0,494π
89° = 0,494 (3,14)
89° = 1,55 radian

1. Sebuah kipas angin berputar dengan kecepatan 36 putaran per menit. Nyatakan kecepatan putaran kipas angin tersebut ke dalam satuan radian per detik!

Penyelesaian:
36 putaran/menit = 36 x 2π/60 putaran/detik
36 putaran/menit = 1,2π putaran/detik
Jadi 36 putaran per menit sama dengan 1,2π putaran per detik.

1. Nyatakan besar sudut berikut ke dalam satuan radian!a. 30°20’15”b. 106° 20’

Penyelesaian:

a. kita ketahui bahwa:1”=(1/3600)°1’=(1/60)°1°=0,0174radian,maka:30°20’ = 30° +20.(1/60)° +15.(1/3600)° = (108000
dian=0,53radb. kita ketahui bahwa:1’=(1/60)°1°=0,0174radian,maka:106°20’= 106°+20.(1/60)°106°20’= (318/3)°+ (1/3
20’ = 1,85 rad

1. Hitunglah jari-jari suatu lingkaran jika panjang busurnya 10 cm dan sudut pusatnya 36°!

Penyelesaian:
θ = 36°, maka:
36° = 36°xπ/180°
36° = 0,2π
Kita ketahui bahwa :
r = s/θ
r = 10 cm/0,2π
r = 10 cm/0,628

r = 15,9 cm

Selanjutnya, dalam pembahasan topik selanjutnya terdapat beberapa sudut (sudut istimewa) yang sering digunakan.

Berikut merupakan sudut istimewa yang sering digunakan :

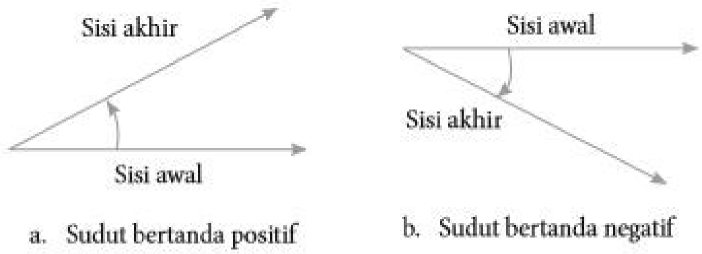
Derajat	Radian	Derajat	Radian
0^o	$0\ rad$	90^o	$\frac{\pi}{2}\ rad$
30^o	$\frac{\pi}{6}\ rad$	120^o	$\frac{2\pi}{3}\ rad$
45^o	$\frac{\pi}{4}\ rad$	135^o	$\frac{3\pi}{4}\ rad$
60^o	$\frac{\pi}{3}\ rad$	150^o	$\frac{5\pi}{6}\ rad$

Derajat	Radian	Derajat	Radian
180^o	$\pi\ rad$	270^o	$\frac{3\pi}{2}\ rad$
210^o	$\frac{7\pi}{6}\ rad$	300^o	$\frac{5\pi}{3}\ rad$
225^o	$\frac{5\pi}{4}\ rad$	315^o	$\frac{7\pi}{4}\ rad$
240^o	$\frac{4\pi}{3}\ rad$	330^o	$\frac{11\pi}{6}\ rad$

Tanda-tanda Perbandingan Trigonometri

Perbandingan Trigonometri	Kuadran			
	I	II	III	IV
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	-	+
Cosec	+	+	-	-

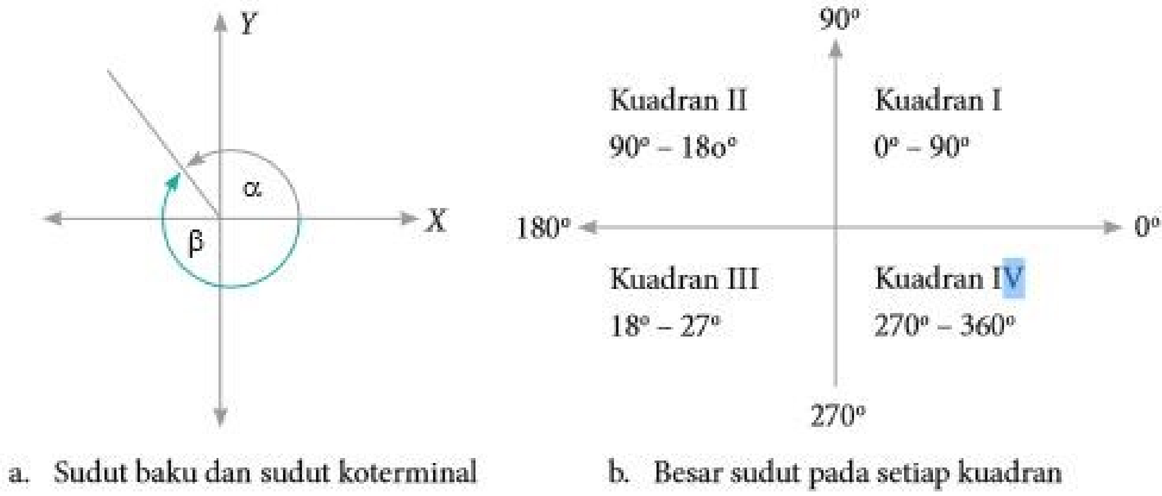
Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (initial side) ke sisi akhir (terminal side). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda "positif" jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda "negatif" jika arah putarannya searah dengan arah putaran jarum jam. Arah putaran sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



Gambar sudut berdasarkan arah putaran

Dalam koordinat kartesius, jika sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius, disebut sudut standar (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0°, 90°, 180°, 180°, 270°, dan 360°.

Sebagai catatan bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya menggunakan huruf-huruf Yunani, seperti, α(alpha), β (betha), γ(gamma) dan θ(tetha) juga menggunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D. Selain itu, jika sudut yang dihasilkan sebesar α, maka sudut b disebut sudut koterminal, seperti yang dideskripsikan pada gambar di bawah ini.



Contoh soal :

1. Gambarkan sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

a. 60°

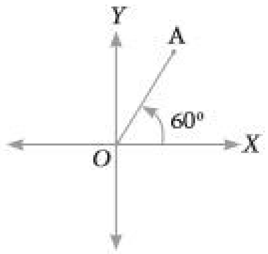
b. -45°

c. 120°

d. 600°

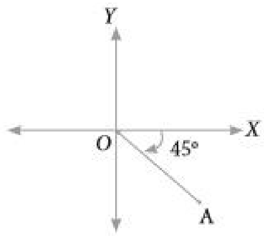
Penyelesaian:

1. 60°



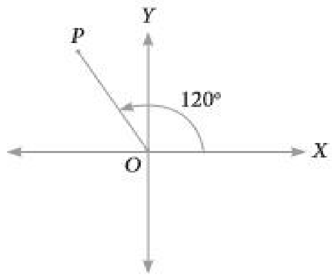
Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran I.

1. -45°



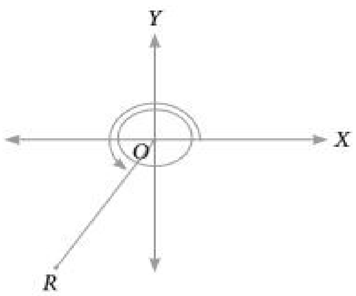
Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OA terletak di kuadran IV.

1. 120°



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OP terletak di kuadran II.

1. 600°



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi terminal OR terletak di kuadran III.

2. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam satuan radian (rad):a) 270°b) 330°PembahasanKonversi:1 π radian = 180°Jadi:a) 270°

$$270^\circ = 270^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3}{2}\pi\, rad$$

b) 330°

$$330^\circ = 330^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11}{6}\pi\, rad$$

3. Nyatakan sudut-sudut berikut dalam satuan derajad:a) 1/2 π radb) 3/4 π radc) 5/6 π rad

PembahasanKonversi:1 π radian = 180°Jadi:a) 1/2 π rad

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2} \times 180^o = 90^\circ$$

b) 3/4 π rad

$$\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \times 180^o = 135^\circ$$

c) 5/6 π rad

$$\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6} \times 180^o = 150^\circ$$

Sudut-sudut Khusus

Kuadran	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
Cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
Sec	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-
Cosec	-	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Kuadran II Sin & Csc +	Kuadran I Semua +
Kuadran III Tan & Cotg +	Kuadran IV Cos & Csc +

Contoh :

1. Diketahui Sin α = , 5 3 α dikuadran II (sudut tumpul).

   Tentukan nilai Sec α,Csc α,Cotg α

   Jawab : Sin $\alpha = \frac{3}{5}$, $y = 3$, r = 5, $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

   Karena dikuadran II, nilai x = -4

   Sehingga : Sec $\alpha = \frac{5}{-4}$, Csc $\alpha = \frac{5}{3}$, Cotg $\alpha = \frac{-4}{3}$

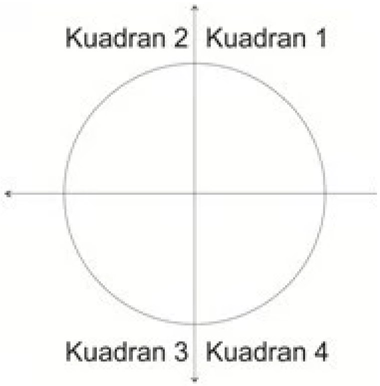
1. Tentukan nilai dari :

1. $\text{Sin } 0^0 + \text{Csc } 45^0 = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

2. $$\frac{\sec\frac{\pi}{6} + \cot g\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

Dalam Kuadran

Sudut dalam suatu lingkaran, memiliki rentang 0° – 360°, sudut tersebut dibagi menjadi 4 kuadran, dengan masing-masing kuadran memiliki rentang sebesar 90°.



Kuadran 1 memiliki rentang sudut dari 0° – 90° dengan nilai sinus, cosinus dan tangent positif.
Kuadran 2 memiliki rentang sudut dari 90° – 180° dengan nilai cosinus dan tangen negatif, sinus positif.
Kuadran 3 memiliki rentang sudut dari 180° – 270° dengan nilai sinus dan cosinus negatif, tangen positif.
Kuadran 4 memiliki rentang sudut dari 270° – 360° dengan nilai sinus dan tangent negatif, cosinus positif.

4.2 Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

4.3 Sudut-sudut Berelasi

4.4 Identitas Trigonometri

IDENTITAS TRIGONOMETRI

1. **Identitas Trigonometri**

Dari nilai fungsi trigonometri tersebut kemudian diperoleh *identitas trigonometri*. Identitas trigonometri adalah suatu persamaan dari fungsi trigonometri yang bernilai benar untuk setiap sudutnya dengan kedua sisi ruasnya terdefinisi. Identitas trigonometri terbagi 3, yaitu *Identitas Kebalikan, Identitas Perbandingan* dan *Identitas Phytagoras* yang masing-masing memiliki fungsi dasar, yaitu:

Identitas Kebalikan	Identitas Perbandingan	Identitas Phytagoras
Cosec A = 1/ sin A Sec A = 1/cos A Cot A = 1/ tan A	Tan A = Sin A/ Cos A Cot A = Cos A / Sin A	Cos^2 A + Sin^2 A = 1 1 + $\tan^2$ A = Sec^2 A 1 + Cot^2 A = Cosec^2 A

1. (a) **Kuadran**

Kuadran adalah pembagian daerah pada sistem koordinat kartesius → dibagi dalam 4 daerah Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut di berbagai kuadran memenuhi aturan seperti pada gambar: Untuk sudut b > 360° → b = (k . 360 + a) → b = a(k = bilangan bulat > 0)

1. (a) **Mengubah fungsi trigonometri suatu sudut ke sudut lancip**
2. Jika menggunakan 90 $\pm$ a atau 270 $\pm$ a maka fungsi berubah:

sin $\leftrightarrow$ cos
tan $\leftrightarrow$ cot
sec $\leftrightarrow$ csc

1. Jika menggunakan 180 $\pm$ a atau 360 $\pm$ a maka fungsi tetap
   (a) **Sudut dengan nilai negatif**

Nilai negatif diperoleh karena sudut dibuat dari sumbu x, diputar searah jarum jamUntuk sudut dengan nilai negatif, sama artinya dengan sudut yang berada di kuadran IV

Contoh:

1. Cos 120^o = cos (180 – 60)^o = – cos 60^o = – 1/2 (120^o ada di kuadran II sehingga nilai cos-nya negatif)
2. Cos 120^o = cos (90 + 30)^o = – sin 30^o = – 1/2
3. Tan 1305^o = tan (3.360 + 225)^o = tan 225^o = tan (180 + 45)^o = tan 45^o = 1 (225^o ada di kuadran III sehingga nilai tan-nya positif)
4. Sin –315^o = – sin 315^o = – sin (360 – 45)^o = –(– sin 45)^o = sin 45^o = 1/2 $\sqrt{2}$
5.

Identitas Trigonometri

Dalam suatu segitiga siku-siku, selalu berlaku prinsip phytagoras, yaitu . Pada materi ini, prinsip phytagoras ini menjadi asal pembuktian identitas trigonometri sendiri.
bagi kedua ruas dengan , diperoleh persamaan baru . Sederhanakan dengan sifat eksponensial menjadi . Dari persamaan terakhir, subtitusi bagian yang sesuai dengan perbandingan trigonometri pada segitiga, yaitu dan , sehingga diperoleh atau bisa ditulis menjadi .
Dari identitas yang pertama, dapat diperoleh bentuk lainnya, yaitu:
bagi kedua ruas dengan , diperoleh dimana dan , sehingga diperoleh:
Bentuk ketiga yaitu dibagi dengan menjadi , dimana dan , sehingga diperoleh persamaan: .

Contoh Soal Trigonometri

Tentukanlah nilai dari !
Jawab:
berada pada kuadran 2, sehingga nilainya tetap positif dengan besar sama seperti
berada pada kuadran 3, sehingga nilainya negatif dengan besar sama seperti
berada pada kuadran 4, sehingga nilainya positif dengan besar sama seperti
Sehingga, secara umum, berlaku:
$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$
$1 + \cot^2 a = \csc^2 a$

1. (a) **Grafik fungsi trigonometri**

y = sin xy = cos xy = tan xy = cot xy = sec xy = csc x 5. **Menggambar Grafik fungsi y = A sin/cos/tan/cot/sec/csc (kx $\pm$ b) $\pm$ c**

1. Periode fungsi untuk sin/cos/sec/csc = 2π/k $\rightarrow$ artinya: grafik akan berulang setiap kelipatan 2π/k

   Periode fungsi untuk tan/cot = π/k $\rightarrow$ artinya: grafik akan berulang setiap kelipatan π/k
1. Nilai maksimum = c + |A|, nilai minimum = c – |A|
2. Amplitudo = $(y_{max} - y_{min})$
3. Cara menggambar:
   (a) Gambar grafik fungsi dasarnya seperti pada gambar di atas
   (b) Hitung periode fungsi, dan gambarkan grafik sesuai dengan periode fungsinya
   (c) Jika A $\neq$ 1, kalikan semua nilai y pada grafik fungsi dasar dengan A
   (d) Untuk kx + b $\rightarrow$ grafik digeser ke kiri sejauh b/k

Untuk kx – b $\rightarrow$ grafik digeser ke kanan sejauh b/k

1. (a) Untuk + c $\rightarrow$ grafik digeser ke atas sejauh c

Untuk – c $\rightarrow$ grafik digeser ke bawah sejauh c

1. **Aturan-Aturan pada Segitiga ABC**
2. **Aturan Sinus**Dari segitiga ABC di atas:Sehingga, secara umum, dalam segitiga ABC berlaku rumus: **Aturan Cosinus**Dari segitiga ABC di atas: Sehingga, secara umum:
3. **Luas Segitiga**Dari segitiga ABC di atas diperoleh: Sehingga, secara umum:

B. RUMUS JUMLAH DAN SELISIH SUDUT

Dari gambar segitiga ABC berikut:AD = b.sin αBD = a.sin CD = a.cos = b.cos α

Untuk mencari cos(α+) = sin (90 – (α+))°Untuk fungsi tangens:

Contoh Soal

1. sederhanakan bentuk trigonometri (1 + $\cot^2$) / (cot . $\sec^2$).

PembahasanDari pecahan (1 + $\cot^2$) / (cot . $\sec^2$), sederhanakan masing-masing penyebut dan pembilangnya.1 + $\cot^2$ = cosec^2 $\Rightarrow$ 1 + $\cot^2$ = 1/$\sin^2$ cot . $\sec^2$ = (cos / sin) . $\sec^2$ $\Rightarrow$ cot . $\sec^2$ = (cos / sin).(1/$\cos^2$)$\Rightarrow$ cot . $\sec^2$ = cos / sin .$\cos^2$ Setelah digabung kembali diperoleh : (1 + $\cot^2$) / (cot . $\sec^2$) = (1/$\sin^2$) / (cos / sin.$\cos^2$)$\Rightarrow$ (1 + $\cot^2$) / (cot . $\sec^2$) = (1/$\sin^2$) . (sin .$\cos^2$ / cos)$\Rightarrow$ (1 + $\cot^2$) / (cot . $\sec^2$) = sin .$\cos^2$ / $\sin^2$ .cos $\Rightarrow$ (1 + $\cot^2$) / (cot . $\sec^2$) = cos / sin $\Rightarrow$ (1 + $\cot^2$) / (cot . $\sec^2$) = cot Jadi, (1 + $\cot^2$) / (cot . $\sec^2$) = cot .

1. Tentukan nilai dari (sin α - cos α)^2 + 2 sin α cos α.

PembahasanKarena keterbatasan ruang dan pengkodean, jadi soal di atas dikerjakan masing-masing agar tidak terlalu panjang.(sin α - cos α)^2 = $\sin^2\alpha$ - 2 sin α. cos α + $\cos^2\alpha$$\Rightarrow$ (sin α - cos α)^2 = $\sin^2\alpha$ + $\cos^2\alpha$ - 2 sin α. cos $\alpha$$\Rightarrow$ (sin α - cos α)^2 = 1 - 2 sin α. cos α

Selanjutnya :(sin α - cos α)^2 + 2 sin α cos α = 1 - 2 sin α. cos α + 2 sin α cos $\alpha$$\Rightarrow$ (sin α - cos α)^2 + 2 sin α cos α = 1Jadi, (sin α - cos α)^2 + 2 sin α cos α = 1.

1. Buktikan bahwa $\sec^4\alpha$ - $\sec^2\alpha$ = $\tan^4\alpha$ + $\tan^2\alpha$.

Pembahasan$\sec^4\alpha$ - $\sec^2\alpha$ = $\tan^4\alpha$ + $\tan^2\alpha$$\Rightarrow$ $\sec^2\alpha$ ($\sec^2\alpha$ - 1) = $\tan^2\alpha$ ($\tan^2\alpha$ + 1)$\Rightarrow$ $\sec^2\alpha$ ($\tan^2\alpha$) = $\tan^2\alpha$ ($\sec^2\alpha$)$\Rightarrow$ $\sec^2\alpha$. $\tan^2\alpha$ = $\sec^2\alpha$. $\tan^2\alpha$Jadi, $\sec^4\alpha$ - $\sec^2\alpha$ = $\tan^4\alpha$ + $\tan^2\alpha$ = $\sec^2\alpha$. $\tan^2\alpha$.Terbukti.

1. Nyatakan setiap bentuk berikut ke dalam faktor-faktor yang paling sederhana.

a. 1 - $\cos^2$ b. $\sin^2\alpha$ - $\cos^2\alpha$c. $\tan^2\alpha$ - 1d. $\sin^2\alpha$ - 2 sin α cos α + $\cos^2\alpha$**Pembahasan**

1. (a) 1 - $\cos^2$

Dari identitas $\sin^2$ + $\cos^2$ = 1, maka diperoleh :$\Rightarrow$ 1 - $\cos^2$ = $\sin^2$ Jadi, 1 - $\cos^2$ = $\sin^2$.

1. (a) $\sin^2\alpha$ - $\cos^2\alpha$

Dari identitas $\sin^2\alpha$ + $\cos^2\alpha$ = 1, maka $\sin^2\alpha$ = 1 - $\cos^2\alpha$.$\Rightarrow$ $\sin^2\alpha$ - $\cos^2\alpha$ = 1 - $\cos^2\alpha$ - $\cos^2\alpha$$\Rightarrow$ $\sin^2\alpha$ - $\cos^2\alpha$ = 1 - 2 $\cos^2\alpha$Karena 2 $\cos^2\alpha$ - 1 = cos 2α, maka 1 - 2 $\cos^2\alpha$ = - cos 2α.$\Rightarrow$ $\sin^2\alpha$ - $\cos^2\alpha$ = -cos 2αJadi, $\sin^2\alpha$ - $\cos^2\alpha$ = -cos 2α.

1. (a) $\tan^2\alpha$ - 1

Dari identitas 1 + $\tan^2\alpha$ = $\sec^2\alpha$, maka $\tan^2\alpha$ = $\sec^2\alpha$ - 1$\Rightarrow$ $\tan^2\alpha$ - 1 = $\sec^2\alpha$ - 1 - 1

$\Rightarrow$ $\tan^2\alpha$ - 1 = $\sec^2\alpha$ - 2

? $\sin^2\alpha$ - 2 sin α cos α + $\cos^2\alpha$ = $\sin^2\alpha$ + $\cos^2\alpha$ - 2 sin α cos α

$\Rightarrow$ $\sin^2\alpha$ - 2 sin α cos α + $\cos^2\alpha$ = 1 - 2 sin α cos α

$\Rightarrow$ $\sin^2\alpha$ - 2 sin α cos α + $\cos^2\alpha$ = 1 - sin 2αJadi, $\sin^2\alpha$ - 2 sin α cos α + $\cos^2\alpha$ = 1 - sin 2α .

? Buktikan tiap identitas trigonometri berikut.

a. 1/3 $\sin^2\alpha$ + 1/3 $\cos^2\alpha$ = 1/3b. 3 $\cos^2\alpha$ - 2 = 1 - 3 $\sin^2\alpha$c. 3 + 5 $\sin^2\alpha$ = 8 - 5 $\cos^2\alpha$**Pembahasan**

1. 1/3 $\sin^2\alpha$ + 1/3 $\cos^2\alpha$ = 1/3

$\Rightarrow$ 1/3 ($\sin^2\alpha$ + $\cos^2\alpha$) = 1/3$\Rightarrow$ 1/3 (**??**) = 1/3$\Rightarrow$ 1/3 = 1/3Terbukti.

1. 3 $\cos^2\alpha$ - 2 = 1 - 3 $\sin^2\alpha$

Ingat bahwa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, maka $3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = 3$.Dari $3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = 3$, maka $3\cos^2\alpha = 3 - 3\sin^2\alpha$.

$\Rightarrow 3\cos^2\alpha - 2 = 1 - 3\sin^2\alpha \Rightarrow 3 - 3\sin^2\alpha - 2 = 1 - 3\sin^2\alpha \Rightarrow 1 - 3\sin^2\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha$.Terbukti.

1. $3 + 5\sin^2\alpha = 8 - 5\cos^2\alpha$

Dari $5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha = 5$, maka $5\sin^2\alpha = 5 - 5\cos^2\alpha$.$\Rightarrow 3 + 5\sin^2\alpha = 8 - 5\cos^2\alpha \Rightarrow 3 + 5 - 5\cos^2\alpha = 8 - 5\cos^2\alpha \Rightarrow 8 - 5\cos^2\alpha = 8 - 5\cos^2\alpha$.Terbukti.

Bukti bahwa cos2x+sin2x=
1

Pada segitiga siku-siku berlaku perbandingan trigonometri
Pada gambar di samping berlaku rumus pitagoras
x2+y2=r2
Kemudian kita bagi masing-masing ruas dengan r2
x2+y2r2=r2r2
$\rightarrow$ (xr)2+(yr)2=1
Dengan mengganti sinα=yr
cosα=xr
didapat
cos2x+sin2x=1
(terbukti)

1. Buktikan bahwa cos2x1−sin$x$−tan$x$cos$x$=1

Bukti :
cos2x1−sin$x$−tan$x$cos$x$=1−sin2x1−sin$x$−sin$x$cos$x$cos$x$
cos2x=1−sin2x
=(1−sin$x$)(1+sin$x$)1−sin$x$−sin$x$
=1+sin$x$−sin$x$

= 1

1.

terbukti

1. Buktikan bahwa 1+cos$x$sin$x$=sin$x$1−cos

Bukti :
1+cos$x$sin$x$=1+cos$x$sin$x$
×1−cos$x$1−cos$x$
=1−cos2$x$sin$x$(1−cos$x$)
sin2x=1−cos2x
=sin2$x$sin$x$(1−cos$x$)
=sin$x$1−cos$x$
Terbukti

1. Jika sin$x$+cos$x$=1,2

maka tentukan

a. sin$x$cos$x$

	b. sin3x+cos3x

Jawab :

1. sin$x$cos$x$

$\sin x + \cos x = 1{,}2$
$(\sin x + \cos x)2 = 1{,}22$
kuadratkan kedua ruas
$\sin 2x + 2\sin x\cos x + \cos 2x = 1{,}44$
$\sin 2x + \cos 2x = 1$
$1 + 2\sin x\cos x = 1{,}44$
$2\sin x\cos x = 0{,}44$
$\sin x\cos x = 0{,}22$

1. $\sin 3x + \cos 3x$
2.

$a3 + b3 = (a+b)3 - 3ab(a+b)$
Substitusikan $a = \sin x$
dan $b = \cos x$
$\sin 3x + \cos 3x = (\sin x + \cos x)3 - 3\sin x\cos x(\sin x + \cos x)$
$= (1{,}2)3 - 3(0{,}22)(1{,}2)$
$= 1{,}728 - 0{,}792$

$$= 0,936$$

1. Jika $\sec x + \tan x = 11$

maka tentukan nilai dari

a. $\sec x$

b. $\tan x$

Jawab :

1. $\sec x$

$\sec x + \tan x = 11$
$(\sec x + \tan x)2 = (\mathbf{??})2$
$\sec 2x + 2\sec x\tan x + \tan 2x = 121$
$\sec 2x + 2\sec x\tan x + \sec 2x - 1 = 121$
$\tan 2x = \sec 2x - 1$
$2\sec 2x + 2\sec x\tan x = 122$
$2\sec x(\sec x + \tan x) = 122$
$2\sec x(\mathbf{??}) = 122$
$\sec x = 12222$

$$= 6111$$

1. $\tan x$

Dari $\sec x + \tan x = 11$
Kita substitusikan $\sec x = 6111$
$6111 + \tan x = 11$
$\tan x = 11 - 6111$

$$= 6011$$

Contoh Soal Identitas Trigonometri
1. Nilai dari $\cos 15° + \cos 35° + \cos 55° + \cos 75°$ adalah...
Penyelesaian:

1. Soal dengan bentuk seperti ini dapat dikerjakan dengan rumus Kuadran I. Dimana:

sin α = cos (90-α) atau cos α = sin (90-α).

1. Penyelesaiannya juga bisa menggunakan identitas trigonometri. Dimana:

sinα + cosα = 1
Jadi,
cos15° + cos35° + cos55° + cos75°
= cos15° + cos75° + cos35° + cos55°
= cos(90-75)° + cos75° + cos(90-55)° + cos55°
= sin75° + cos75° + sin55° + cos55°
= 1 + 1 = 2 ——-> (identitas trigonometri sinα + cosα = 1)

2. Jika sin(x-600)° = cos(x-450)° maka nilai dari tanx adalah…
Penyelesaian:

1. Penyetaraan antara sisi kiri dan sisi kanan. Menggunakan aturan Kuadran I (seperti pada soal nomor 1).

sin(x + α) = cos (x + α)
sin(x + α) = sin (90 – (x + α))

1. Setelah sisi kiri dan kanan sama, *nah* bisa ditentukan nilai x nya.
2. Setelah nilai x di dapat, *baru deh* dihitung nilai tanx nya

Jadi,
sin(x-600)° = cos(x-450)°
sin(x-600)° = sin(90 – (x-450))°
sin(x-600)° = sin(540 – x)°
x – 600° = 540° – x
2x = 540° + 600°
x = 1140°/2 = 570°

tan x = tan 570°
= tan (360 + 210)° = tan 210°
= tan (180 + 30)° —–> Kuadran III
= tan 30° = 1/3 $\sqrt{3}$
(bernilai + karena tangen pada kuadran III bernilai positif).

3. Diketahui sinx + cosx = -1/5. Maka nilai dari sin2x adalah…
Penyelesaian:
Identitas Trigonometri yang berpengaruh pada soal ini yakni:
sinα + cosα = 1 dan aturan sudut rangkap.
Jadi,
sinx + cosx = -1/5
(sinx + cosx) = (-1/5) —–> (Kuadratkan kedua ruas.)
sinx + 2sinxcosx + cosx = 1/25
sinx + cosx + 2sinxcosx = 1/25
1 + 2sinxcosx = 1/25 —–> (Identitas trigonometri sinα + cosα = 1)
2sinxcosx = 1/25 – 1
2sinxcosx = 1/25 – 25/25
2sinxcosx = -24/25
sin2x = -24/25
(aturan sudut rangkap sin2x = 2sinxcosx).

4. Diketahui sinα.cosα = 8/25. Maka nilai dari 1/sinα – 1/cosα adalah...
Penyelesaian:

1. Karena berbentuk pecahan maka samakan dulu penyebutnya.
2. Identitas trigonometri yg berlaku pada soal ini adalah sinα + cosα = 1
3.

Perhatikan pembahasannya pada gambar di bawah ini.
Jadi, nilai dari 1/sinα – 1/cosα adalah 1 7/8.
5. Nilai tanx dari persamaan cos2x – 3sinx – 1 = 0 adalah...
Penyelesaian:

1. Karena berbentuk persamaan maka unsur trigonometrinya mesti disamakan/disetarakan.
2. Menggunakan aturan sudut rangkap cos2α. Dimana:

cos2α = $\cos^2\alpha$ -sinα atau
cos2α = $2\cos^2\alpha$ – 1 atau
cos2α = 1 – 2sinα

1. Setelah nilai x di dapat, kemudian dilanjutkan penentuan tanx nya.

Jadi,
cos2x – 3sinx – 1 = 0
cos2x – 3sinx = 1
(1 – 2sinx) – 3sinx = 1
(mengubah cos2x yang sesuai dengan -3sinx sehingga persamaan dapat dikerjakan karena bervariabel sama yakni sinx).
(1 – 2sinx) – 3sinx = 1
-2sinx – 3sinx = 1 – 1
-2sinx – 3sinx = 0
sinx(-2sinx – 3) = 0
sinx = 0 atau -2sinx – 3 = 0
sin x = 0 atau sinx = -3/2
x = 0°
(sinx = -3/2 tidak memenuhi)
maka nilai tan x = tan 0° = 0

4.5 Aturan Sinus dan Cosinus

4.6 Fungsi Trigonometri

Pada subbab ini, kita akan mengkaji bagaimana konsep trigonometri jika dipandang sebagai suatu fungsi. Mengingat kembali konsep fungsi pada Bab 3, fungsi $f(x)$ harus terdefinisi pada daerah asalnya. Jika $y = f(x) = \sin x$, maka daerah asalnya adalah semua x bilangan real. Namun, mengingat satuan sudut (subbab 4.1) dan nilai-nilai perbandingan trigonometri (yang disajikan pada Tabel 4.3), pada kesempatan ini, kita hanya mengkaji untuk ukuran sudut dalam derajat. Mari kita sketsakan grafik fungsi $y = f(x) = \sin x$,untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

1. **Grafik Fungsi $y = \sin x$, dan $y = \cos x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$**

Problem 4.1 Dengan keterampilan kamu dalam menggambar suatu fungsi (Bab 3), gambarkan grafik fungsi $y = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

Alternatif Penyelesaian
Dengan mencermati nilai-nilai sinus untuk semua sudut istimewa yang disajikan pada Tabel

4.3, kita dapat memasangkan ukuran sudut dengan nilai sinus untuk setiap sudut tersebut, sebagai berikut.

$(0, 0)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$;

$(\pi, 0)$; $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{1}}{2}\right)$; $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$; $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

$\left(\frac{11\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$; dan $(2\pi, 0)$.

Selanjutnya pada koordinat kartesius, kita menempatkan pasangan titiktitik untuk menemukan suatu kurva yang melalui semua pasangan titik-titik tersebut. Selengkapnya disajikan pada Gambar berikut ini.

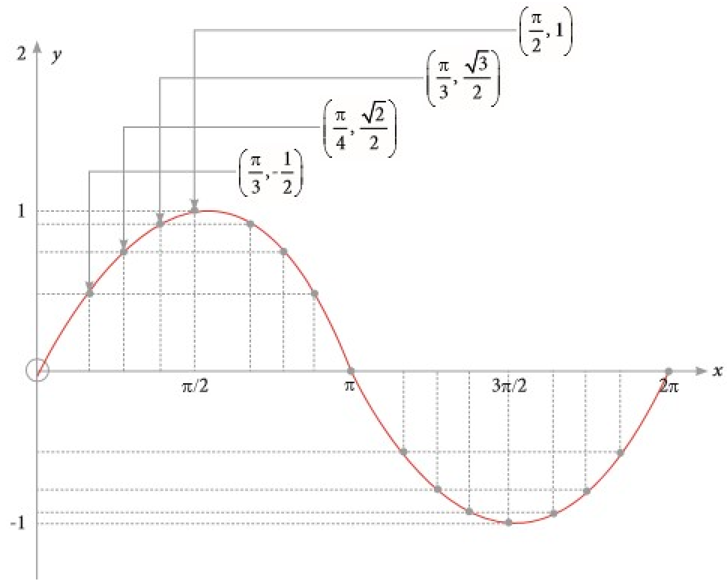


Figure 4.1: Grafik fungsi $y = \sin x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari grafik di atas, kita dapat merangkum beberapa data dan informasi seperti berikut.

- Untuk semua ukuran sudut x, nilai maksimum fungsi $y = \sin x$ adalah 1, dan nilai minimumnya adalah -1.
- Kurva fungsi $y = \sin x$, berupa gelombang.
- Untuk 1 periode (1 putaran penuh) kurva fungsi $y = \sin x$, memiliki 1 gunung dan 1 lembah.
- Nilai fungsi sinus berulang saat berada pada lembah atau gunung yang sama.
- Untuk semua ukuran sudut x, daerah hasil fungsi $y = \sin x$, adalah $1 \leq y \leq 1$. Dengan konsep grafik fungsi $y = \sin x$, dapat dibentuk kombinasi fungsi sinus.

Misalnya $y = 2.\sin x$, $y = \sin 2x$, dan $y = \sin(x + \pi/2)$. Selengkapnya dikaji pada contoh berikut.

■ **Example 4.1** Gambarkan grafik fungsi $y = \sin 2x$ dan $y = \sin(x + \pi/2)$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Kemudian tuliskanlah perbedaan kedua grafik tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan nilai-nilai perbandingan trigonometri yang disajikan pada Tabel 4.3, maka pasangan titik-titik untuk fungsi $y = \sin 2x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:
Untuk $x = 0$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.(0) = \sin 0 = 0 \Rightarrow (0,0)$
Untuk $x = (\pi/6)$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.(\pi/6) = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 \Rightarrow (\pi/6, \sqrt{3}/2)$
Untuk $x = \pi/4$, maka nilai fungsi adalah $y = \sin 2.(\pi/4) = \sin \pi/2 = 1 \Rightarrow (\pi/4, 1)$.
Demikian seterusnya hingga
untuk $x = 2\pi$, maka niali fungsi adalah $y = \sin 2.(2\pi) = \sin 4\pi = \sin 0 = 0 \Rightarrow (2\pi, 0)$
Selengkapnya pasangan titik-titik untuk fungsi $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, yaitu

$(0, 0)$; $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(\pi, 0)$; $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ……; $(2\pi, 0)$.

Dengan pasangan titik-titik tersebut, maka grafik fungsi $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ disajikan pada Gambar.

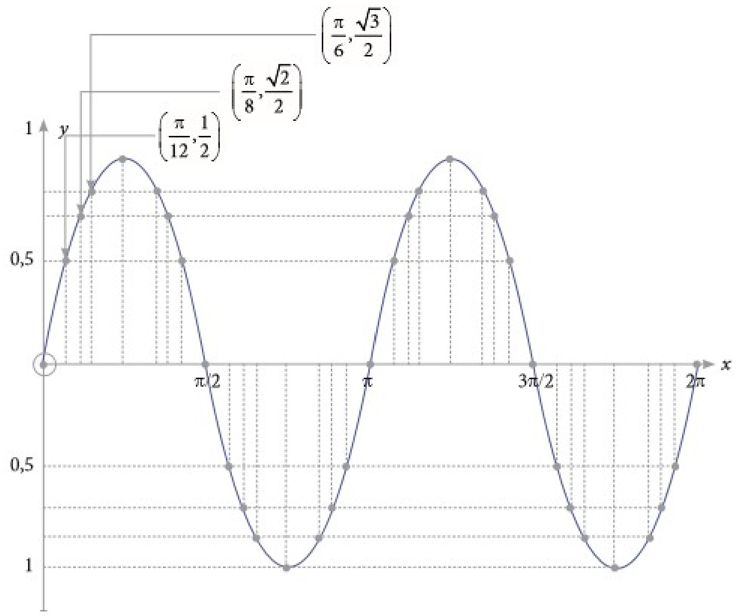


Figure 4.2: Grafik fungsi $y = \sin 2x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Berbeda dengan fungsi $y = \sin 2x$, setiap besar sudut dikalikan dua, tetapi untuk fungsi $y = \sin(x + \pi/2)$, setiap besar sudut ditambah $\pi/2$ atau 90^o.
Sekarang kita akan menggambarkan fungsi $y = \sin(x + \pi/2)$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.
Coba kita perhatikan kembali, bahwa $\sin(x + \pi/2) = \cos x$. Artinya, sekarang kita akan menggambarkan fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Dengan menggunakan nilai-nilai cosinus yang diberikan pada Tabel kita dapat merangkumkan pasangan titik-titik yang memenuhi fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, sebagai berikut.

$(0, 1)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(\pi, -1)$

$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(2, 1)$.

Dengan demikian, grafik fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, disajikan pada Gambar berikut.

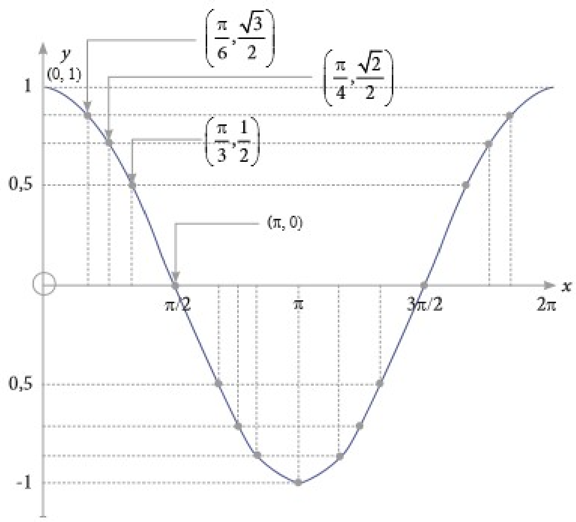


Figure 4.3: Grafik fungsi $y = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$

Dari kajian grafik, grafik fungsi $y = \sin 2x$ sangat berbeda dengan grafik fungsi $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$, meskipun untuk domain yang sama. Grafik $y = \sin 2x$, memiliki 2 gunung dan 2 lembah, sedangkan grafik fungsi $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$, hanya memiliki 1 lembah dan dua bagian setengah gunung. Nilai maksimum dan minimum fungsi $y = \sin 2x$ sama $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$ untuk domain yang sama. Selain itu, secara periodik, nilai fungsi $y = \sin 2x$ dan $y = \sin(x + \pi/2) = \cos x$, berulang, terkadang menaik dan terkadang menurun. ■

Exercise 4.1 Dengan pengetahuan dan keterampilan kamu akan tiga grafik di atas dan konsep yang sudah kamu miliki pada kajian fungsi, sekarang gambarkan dan gabungkan grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, untuk domain $0 \leq x \leq 2\pi$.
Rangkumkan hasil analisis yang kamu temukan atas grafik tersebut. ■

2. **Grafik Fungsi** $y = tan x$**, dan** $y = \cos x$ **untuk** $0 \leq x \leq 2\pi$
Kajian kita selanjutnya adalah untuk menggambarkan grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Mari kita kaji grafik fungsi $y = \tan x$, melalui masalah berikut

Problem 4.2 Untuk domain $0 \leq x \leq 2\pi$, gambarkan grafik fungsi $y = \tan x$.

Alternatif Penyelesaian
Dengan nilai-nilai tangen yang telah kita temukan pada Tabel 4.3 dan dengan pengetahuan serta keterampilan yang telah kamu pelajari tentang menggambarkan grafik suatu fungsi, kita dengan mudah memahami pasangan titik-titik berikut.

$(0,0)$; $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$; $\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2},\sim\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3},-\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4},-1\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$(\pi,\ 0)$; $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{4},1\right)$; $\left(\frac{4\pi}{3},\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2},\sim\right)$; $\left(\frac{5\pi}{3},-\sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{4},-1\right)$;

$\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $(2\pi,0)$.

Dengan demikian, grafik fungsi $y=\tan x$, untuk $0\leq x\leq 2\pi$, seperti pada Gambar berikut ini.

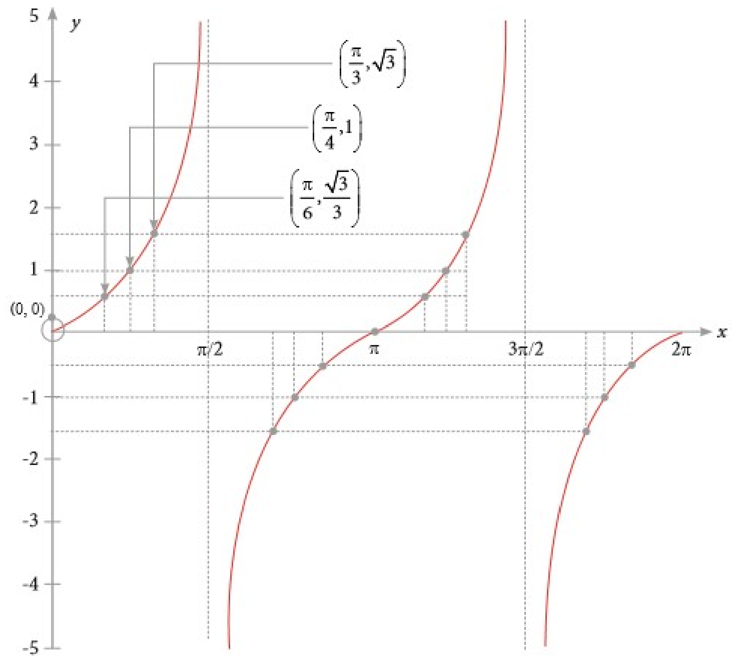


Figure 4.4: Grafik fungsi $y=\tan x$, untuk $0\leq x\leq 2\pi$

Dari grafik di atas, jelas kita lihat bahwa jika x semakin mendekati $\pi/2$ (dari kiri), nilai fungsi semakin besar, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terbesarnya. Sebaliknya, jika x atau mendekati $\pi/2$ (dari kanan), maka nilai fungsi semakin kecil, tetapi tidak dapat ditentukan nilai terkecilnya. Kondisi ini berulang pada saat x mendekati $3\pi/2$. Artinya, fungsi $y=\tan x$, tidak memiliki nilai maksimum dan minimum.

Bibliography