

The background features a large, textured sphere on the left, resembling a planet or moon with various shades of brown and tan. Several smaller, similar spheres are floating in the air around it. The scene is set against a light blue sky with a few wispy clouds. The ground is a flat, light blue surface. The title text is centered in the upper half of the image.

# **The Search for a Title**

**A Profound Subtitle**

**Dr. John Smith**

Copyright © 2013 John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First printing, March 2013*

# Contents

I	Part One	
<b>1</b>	<b>Logika Matematika</b>	<b>9</b>
1.1	Pernyataan Berkuantor	9
1.2	Pernyataan Penyangkal (Lingkaran)	9
1.3	Penarikan Kesimpulan	10
1.3.1	Numbered List	10
1.3.2	Bullet Points	10
1.3.3	Descriptions and Definitions	10
<b>2</b>	<b>Induksi Matematika</b>	<b>11</b>
2.1	Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung	11
2.1.1	Several equations	11
2.1.2	Single Line	11
2.2	Kontradiksi	11
2.3	Induksi Matematis	12
2.4	Remarks	12
2.5	Corollaries	12
2.6	Kontradiksi	12
2.6.1	Several equations	12
2.6.2	Single Line	12
2.7	Examples	12
2.7.1	Equation and Text	12
2.7.2	Paragraph of Text	13

2.8	Exercises	13
2.9	Problems	13
2.10	Vocabulary	13
<b>3</b>	<b>Pertidaksamaan Linear Dua Variabel</b>	<b>15</b>
3.1	Pengertian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	15
3.2	Penerapan Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	15
<b>4</b>	<b>Program Linear Dua Variabel</b>	<b>17</b>
4.1	Pengertian Program Linear Dua Variabel	17
4.2	Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	17
4.3	Nilai Optimum Fungsi Objektif	17
4.3.1	Teorema	17
4.3.2	Contoh Soal	18
4.3.3	Soal Latihan	19
4.4	Penerapan Program Linier Dua Variabel	20
4.4.1	Soal Latihan Penerapan Program Linear Dua Variabel	23
<b>5</b>	<b>Matriks</b>	<b>25</b>
5.1	Pengertian Matriks	25
5.2	Operasi Matriks	25
5.3	Determinan dan Invers Matriks Berorde 2x2 dan 3x3	25
5.4	Pemakaian Matriks Pada Pransformasi Geometri	25
<b>6</b>	<b>Barisan dan Deret</b>	<b>35</b>
6.1	Pola Bilangan	35
6.2	Barisan dan Deret Aritmatika	39
6.3	Barisan dan Deret Geometri	39

## II

## Part Two

<b>7</b>	<b>Limit Fungsi Aljabar</b>	<b>43</b>
7.1	Table	43
7.2	Figure	43
<b>8</b>	<b>Turunan Fungsi Aljabar</b>	<b>45</b>
8.1	Pengertian Turunan	45
8.2	Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar	48
8.3	Penerapan Turunan Fungsi Aljabar	51
8.4	Nilai-Nilai Stasioner	51
8.5	Aplikasi Turunan	51
8.5.1	Fungsi Naik dan Fungsi Turun	51
8.5.2	Aplikasi Turunan dalam Permasalahan Fungsi Naik dan Fungsi Turun	52

8.5.3	Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Maksimum dan Minimum . . . .	57
8.5.4	Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Maksimum dan Minimum . . . .	60
<b>8.6</b>	<b>Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal</b>	<b>66</b>
<b>9</b>	<b>Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>9.1</b>	<b>Pengertian Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar</b>	<b>67</b>
<b>9.2</b>	<b>Sifat-Sifat Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar</b>	<b>67</b>
<b>9.3</b>	<b>Penerapan Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar</b>	<b>67</b>
	<b>Bibliography . . . . .</b>	<b>69</b>
	<b>Books</b>	<b>69</b>
	<b>Articles</b>	<b>69</b>



# Part One

<b>1</b>	<b>Logika Matematika</b> .....	<b>9</b>
1.1	Pernyataan Berkuantor	
1.2	Pernyataan Penyangkal (Lingkaran)	
1.3	Penarikan Kesimpulan	
<b>2</b>	<b>Induksi Matematika</b> .....	<b>11</b>
2.1	Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung	
2.2	Kontradiksi	
2.3	Induksi Matematis	
2.4	Remarks	
2.5	Corollaries	
2.6	Kontradiksi	
2.7	Examples	
2.8	Exercises	
2.9	Problems	
2.10	Vocabulary	
<b>3</b>	<b>Pertidaksamaan Linear Dua Variabel</b> .	<b>15</b>
3.1	Pengertian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	
3.2	Penerapan Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	
<b>4</b>	<b>Program Linear Dua Variabel</b> .....	<b>17</b>
4.1	Pengertian Program Linear Dua Variabel	
4.2	Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	
4.3	Nilai Optimum Fungsi Objektif	
4.4	Penerapan Program Linier Dua Variabel	
<b>5</b>	<b>Matriks</b> .....	<b>25</b>
5.1	Pengertian Matriks	
5.2	Operasi Matriks	
5.3	Determinan dan Invers Matriks Berorde 2x2 dan 3x3	
5.4	Pemakaian Matriks Pada Pransformasi Geometri	
<b>6</b>	<b>Barisan dan Deret</b> .....	<b>35</b>
6.1	Pola Bilangan	
6.2	Barisan dan Deret Aritmatika	
6.3	Barisan dan Deret Geometri	





# 1. Logika Matematika

## 1.1 Pernyataan Berkuantor

Kuantor dari suatu pernyataan adalah istilah yang digunakan untuk menyatakan “berapa banyak” objek di dalam suatu kalimat atau pembicaraan. Selain untuk menyatakan kuantifikasi, kuantor juga biasa digunakan untuk mengubah kalimat terbuka menjadi suatu kalimat deklaratif.

Definisi : Suatu fungsi pernyataan adalah suatu kalimat terbuka di dalam semesta pembicaraan (semesta pembicaraan diberikan secara eksplisit atau implisit). Perhatikan dua pernyataan berikut: 1. Semua planet dalam sistem tata surya mengelilingi matahari. 2. Ada ikan di laut yang menyusui. Pernyataan yang mengandung kata semua atau setiap seperti pada pernyataan (1) disebut pernyataan berkuantor universal (kuantor umum). Ungkapan untuk semua atau untuk setiap, disebut kuantor universal atau kuantor umum. Sedangkan pernyataan yang mengandung kata ada atau beberapa seperti pada pernyataan (2) disebut pernyataan berkuantor eksistensial (kuantor khusus). Ungkapan beberapa atau ada disebut kuantor eksistensial atau kuantor khusus.

## 1.2 Pernyataan Penyangkal (Lingkaran)

Dari sebuah pernyataan tunggal (atau majemuk), kita bisa membuat sebuah pernyataan baru berupa “ingkaran” dari pernyataan itu. “ingkaran” disebut juga “negasi” atau “penyangkalan”. Ingkaran menggunakan operasi uner (monar) “ $\neg$ ” atau “ $\sim$ ”.

Jika suatu pernyataan  $p$  benar, maka negasinya  $\neg p$  salah, dan jika sebaliknya pernyataan  $p$  salah, maka negasinya  $\neg p$  benar.

Perhatikan cara membuat ingkaran dari sebuah pernyataan serta menentukan nilai kebenarannya!

1.  $p$  : kayu memuai bila dipanaskan (S)  
 $\neg p$  : kayu tidak memuai bila dipanaskan (B)
2.  $r$  : 3 bilangan positif (B)  
 $\neg r$  : (cara mengingkar seperti ini salah)  
3 bilangan negative  
(Seharusnya) 3 bukan bilangan positif (S)  
Nilai kebenaran

Jika  $p$  suatu pernyataan bernilai benar, maka  $\neg p$  bernilai salah dan sebaliknya jika  $p$  bernilai salah maka  $\neg p$  bernilai benar

Konjungsi

Gabungan dua pernyataan tunggal yang menggunakan kata penghubung “dan” sehingga terbentuk pernyataan majemuk disebut konjungsi. Konjungsi mempunyai kemiripan dengan operasi irisan ( $\cap$ ) pada himpunan. Sehingga sifat-sifat irisan dapat digunakan untuk mempelajari bagian ini.

### 1.3 Penarikan Kesimpulan

Lists are useful to present information in a concise and/or ordered way<sup>1</sup>.

#### 1.3.1 Numbered List

1. The first item
2. The second item
3. The third item

#### 1.3.2 Bullet Points

- The first item
- The second item
- The third item

#### 1.3.3 Descriptions and Definitions

**Name** Description

**Word** Definition

**Comment** Elaboration

---

<sup>1</sup>Footnote example...

## 2. Induksi Matematika

### 2.1 Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung

This is an example of theorems.

#### 2.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

**Theorem 2.1.1 — Name of the theorem.** In  $E = \mathbb{R}^n$  all norms are equivalent. It has the properties:

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (2.1)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

**Theorem 2.1.2** A set  $\mathcal{D}(G)$  is dense in  $L^2(G)$ ,  $|\cdot|_0$ .

### 2.2 Kontradiksi

This is an example of a definition. A definition could be mathematical or it could define a concept.

**Definition 2.2.1 — Definition name.** Given a vector space  $E$ , a norm on  $E$  is an application, denoted  $||\cdot||$ ,  $E$  in  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$  such that:

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

$$||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| \quad (2.4)$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \quad (2.5)$$

## 2.3 Induksi Matematis

**Notation 2.1.** Given an open subset  $G$  of  $\mathbb{R}^n$ , the set of functions  $\varphi$  are:

1. Bounded support  $G$ ;
2. Infinitely differentiable;

a vector space is denoted by  $\mathcal{D}(G)$ .

## 2.4 Remarks

This is an example of a remark.



The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , however, established properties are easily extended to  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## 2.5 Corollaries

This is an example of a corollary.

**Corollary 2.5.1 — Corollary name.** The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , however, established properties are easily extended to  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## 2.6 Kontradiksi

This is an example of propositions.

### 2.6.1 Several equations

**Proposition 2.6.1 — Proposition name.** It has the properties:

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (2.6)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (2.7)$$

### 2.6.2 Single Line

**Proposition 2.6.2** Let  $f, g \in L^2(G)$ ; if  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ ,  $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$  then  $f = g$ .

## 2.7 Examples

This is an example of examples.

### 2.7.1 Equation and Text

■ **Example 2.1** Let  $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$  and denoted by:  $x^0 = (1, 1)$ ; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \quad (2.8)$$

The function  $f$  has bounded support, we can take  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$  for all  $\varepsilon \in ]0; 5/2 - \sqrt{2}[$ . ■

### 2.7.2 Paragraph of Text

■ **Example 2.2 — Example name.** Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

■

## 2.8 Exercises

This is an example of an exercise.

**Exercise 2.1** This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds.

■

## 2.9 Problems

**Problem 2.1** What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

## 2.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.

**Vocabulary 2.1 — Word.** Definition of word.





### 3. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

- 3.1 Pengertian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel
- 3.2 Penerapan Pertidaksamaan Linear Dua Variabel







## 4. Program Linear Dua Variabel

### 4.1 Pengertian Program Linear Dua Variabel

### 4.2 Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

### 4.3 Nilai Optimum Fungsi Objektif

#### 4.3.1 Teorema

Fungsi dalam pembuatan model matematika dinyatakan dalam bentuk  $z = ax + by$ . Bentuk inilah yang akan dioptimumkan baik itu minimum ataupun maksimum yang disebut sebagai fungsi objektif. Jadi, fungsi Objektif dari program linear adalah fungsi  $z = ax + by$  yang akan ditentukan nilai optimumnya. Ada beberapa cara untuk mencari nilai optimum (maksimum atau minimum) fungsi objektif, di antaranya yaitu:

- Metode Uji Titik Pojok
- Metode Garis Selidik

Dari kedua metode tersebut, metode yang paling mudah dan sering diterapkan adalah metode uji titik pojok. Metode Uji Titik Pojok adalah suatu metode dengan mensubstitusikan titik-titik pojok pada suatu daerah himpunan penyelesaian (DHP) ke fungsi objektif. Nilai maksimum berarti nilai yang paling besar yang kita ambil, begitu juga sebaliknya untuk nilai minimum kita ambil paling kecil.

Untuk menentukan nilai optimum baik nilai minimum atau maksimum dengan metode uji titik pojok, kita bisa melakukan langkah-langkah di bawah ini:

1. Buatlah model matematikanya yang terdiri dari fungsi kendala dan fungsi tujuan.
2. Tentukan daerah himpunan penyelesaiannya (DHP) dan titik pojoknya.
3. Substitusikan semua titik pojok ke fungsi tujuannya (fungsi objektifnya), dan tentukan yang diminta apakah nilai maksimum atau minimum.

Misalnya untuk gambar DHP di bawah ini kita bisa lihat bahwa titik pojok terdapat pada titik A, titik B, dan titik C.

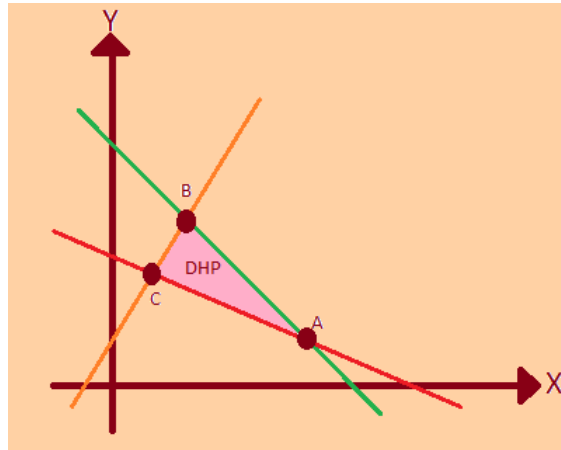
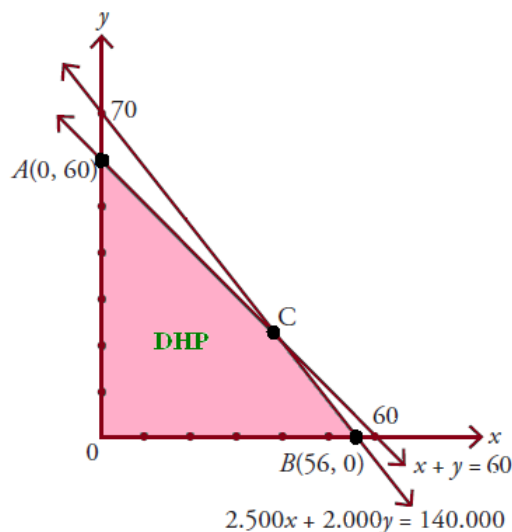


Figure 4.1: Daerah Hasil Penyelesaian (DHP)

### 4.3.2 Contoh Soal

■ **Example 4.1** Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum fungsi tujuan  $f(x,y) = 1500x + 1250y$  berdasarkan DHP berikut ini. ■



Jawab:

Diketahui bahwa titik pojok yang terdapat pada gambar di atas adalah titik A,b,C dan O. Titik C belum mempunyai titik koordinat sehingga kita harus mencari terlebih dahulu dengan cara eliminasi kedua persamaan garis.

Menentukan titik C:

$x + y = 60$	$\times 2.000$	$2.000x + 2.000y = 120.000$
$2.500x + 2.000y = 140.000$	$\times 1$	$2.500x + 2.000y = 140.000$
		$-500x = -20.000$
		$x = 40$

Substitusi  $x=40$  ke persamaan  $x + y = 60$

$$x + y = 60$$

$$40 + y = 60$$

$y = 20$ .

Sehingga titik C adalah  $C(40,20)$ .

Substitusi semua titik pojok ke fungsi tujuan :  $f(x,y) = 1500x + 1250y$ .

$$A(0,60) \quad f = 1500(0) + 1250(60) = 75000$$

$$B(56,0) \quad f = 1500(56) + 1250(0) = 84000$$

$$C(40,20) \quad f = 1500(40) + 1250(20) = 85000$$

$$D(0,0) \quad f = 1500(0) + 1250(0) = 0$$

Jadi fungsi  $f(x,y) = 1500x + 1250y$  di titik  $C(40,20)$  dengan nilai maksimumnya adalah  $f = 85000$ . Sedangkan untuk titik minimum  $f(x,y) = 1500x + 1250y$  di titik  $C(0,0)$  dengan nilai minimumnya adalah  $f = 0$ .

### 4.3.3 Soal Latihan

**Exercise 4.1** 1. Tentukan nilai maksimum  $f(x,y) = 3x + 4y$  pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut:  $x + 2y \leq 10, 4x + 3y \leq 24, x \geq 0, y \geq 0$ .

2. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi objektif  $z = 2x + 3y$  yang memenuhi  $x + y \leq 7, x \geq 0$ , dan  $y \geq 0, x, y \in R$ .

3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari  $Z = 5x + 3y$ , dengan syarat:

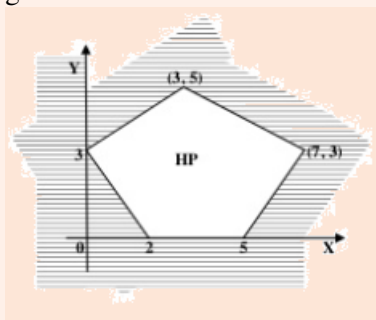
$$x + 2y \geq 8;$$

$$x + y \geq 6;$$

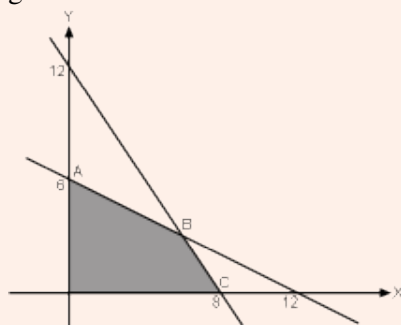
$$x \leq 0;$$

$$y \leq 0;$$

4. Tentukan nilai maksimum dan minimum  $Z = 2x + 3y$  dari daerah yang ditunjukkan pada grafik di bawah ini:



5. Tentukan nilai maksimum  $Z = 2x + 5y$  dari daerah penyelesaian (daerah yang diarsir) pada gambar di bawah ini:



#### 4.4 Penerapan Program Linier Dua Variabel

Program linear banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam bidang ekonomi, perdagangan, dan pertanian.

Misalkan dalam bidang perdagangan atau pengusaha, para pedagang atau pengusaha tentu ingin memperoleh keuntungan maksimum. Sebelum melakukan transaksi ataupun pengambilan keputusan dalam usahanya, mereka pasti membuat perhitungan yang matang tentang langkah apa yang harus dilakukan. Oleh karena itu, diperlukan metode yang tepat dalam pengambilan keputusan pedagang atau pengusaha tersebut untuk memperoleh keuntungan maksimum dan meminimumkan kerugian yang mungkin terjadi.

Adapun untuk contoh penerapan lain misalkan sebagai berikut:

- Penerapan dalam Dunia Kerja

Dalam dunia kerja, matematika telah digunakan sebagai salah satu alat penyaring atau seleksi bagi orang untuk memperoleh pekerjaan yang lebih baik dengan gaji yang lebih tinggi. Juga tidak sedikit yang melibatkan penggunaan matematika atau proses berpikir matematis, misalnya melakukan jual-beli, mengukur luas tanah pekarangan, areal sawah, menimbang beras, gula, dan sembako lainnya, menghitung pengeluaran kebutuhan rumah tangga, menghitung biaya pembayaran rekening listrik dan PDAM, membayar hutang, dan sebagainya.

- Penerapan dalam Dunia Rumah Tangga

Suatu saat ketika anda sudah menjadi seorang ibu rumah tangga, yang mengharuskan anda untuk terampil dalam mengelola keuangan rumah tangga, maka anda tidak akan lepas dari penggunaan ilmu matematika terutama bab aljabar. Mulai dari menganalisa pemasukan, mengatur pengeluaran untuk kebutuhan rumah tangga, uang saku anak, tabungan, sampai ke asuransi kesehatan.

- Penerapan dalam Bidang Perdagangan

Dalam hal perdagangan, ambil contoh yang paling sederhana, menjual buah-buahan, anda akan dituntut untuk punya kemampuan menganalisis laba rugi, berapa jumlah biaya yang harus dikeluarkan untuk "kulakan", berapa laba tiap kilogram buah dan buah apa saja yang memberi keuntungan maksimum. Semua itu sedikit banyak akan menggunakan ilmu matematika khususnya program linier.

Seperti yang telah disinggungkan pada section sebelumnya, ada beberapa metode untuk menyelesaikan masalah program linear dua variabel, di antaranya yang kita bahas adalah metode uji titik pojok. Nah untuk contoh soal yang diambil dari kehidupan sehari-hari sebagai berikut:

■ **Example 4.2** Ling ling membeli 240 ton beras untuk dijual lagi. Ia menyewa dua jenis truk untuk mengangkut beras tersebut. Truk jenis A memiliki kapasitas 6 ton dan truk jenis B memiliki kapasitas 4 ton. Sewa tiap truk jenis A adalah Rp 100.000,00 sekali jalan dan truk jenis B adalah Rp 50.000,00 sekali jalan. Maka Ling ling menyewa truk itu sekurang-kurangnya 48 buah. Berapa banyak jenis truk A dan B yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum? ■

Jawab:

Untuk menyelesaikan masalah ini kita akan menggunakan metode uji titik sudut yang telah kita pelajari pada section nilai optimum fungsi objektif.

Dari soal di atas dapat diperoleh bahwa:

Dan ketika kita ubah ke model matematika akan seperti berikut:

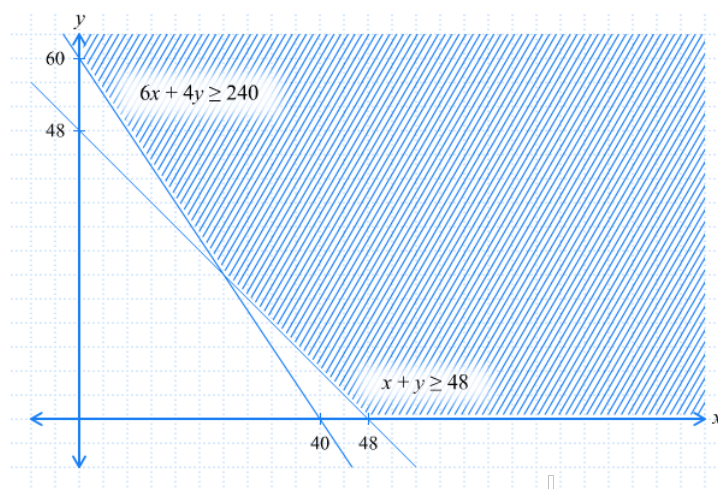
$$x + y \geq 48,$$

Jenis Truk	Banyak Truk	Kapasitas Truk	Fungsi Objektif
Truk A	$x$	$6x$	$100.000x$
Truk B	$y$	$4y$	$50.000y$
	$\geq 48$	$\geq 240$	

$$6x + 4y \geq 240,$$

$$x \geq 0, y \geq 0, x, y \text{ anggota bilangan cacah}$$

Dengan fungsi objektifnya yaitu  $f(x, y) = 100.000x + 50.000y$ .



Dari gambar di atas dapat kita ketahui bahwa titik pojok dari daerah penyelesaian di atas adalah titik potong garis  $6x + 4y = 240$  dengan sumbu- $y$ , titik potong garis  $x + y = 48$  dengan sumbu- $x$ , dan titik potong garis-garis  $x + y = 48$  dan  $6x + 4y = 240$ .

Titik potong garis  $6x + 4y = 240$  dengan sumbu- $y$  adalah titik  $(0, 60)$ . Titik potong garis  $x + y = 48$  dengan sumbu- $x$  adalah titik  $(48, 0)$ . Sedangkan titik potong garis-garis  $x + y = 48$  dan  $6x + 4y = 240$  dapat dicari dengan menggunakan cara eliminasi berikut ini.

Substitusi semua titik pojok ke fungsi tujuan :  $f(x, y) = 100000x + 50000y$ .

$$A(0,60) \quad f = 1500(0) + 1250(60) = 3000000$$

$$B(48,0) \quad f = 1500(48) + 1250(0) = 4800000$$

$$C(24,24) \quad f = 1500(24) + 1250(24) = 3600000$$

$$D(0,0) \quad f = 1500(0) + 1250(0) = 0$$

Jadi Dari ketiga hasil tersebut, dapat diperoleh bahwa agar biaya yang dikeluarkan minimum, Ling ling harus menyewa 60 truk jenis B dan tidak menyewa truk jenis A.

■ **Example 4.3** Seorang pedagang menjual buah mangga dan pisang dengan menggunakan gerobak. Pedagang tersebut membeli magga dengan harga Rp.8.000,00/kg dan pisang Rp.6000,00/kg. Modal yang tersedia Rp. 1.200.000,00 dan gerobaknya hanya dapat menampung mangga dan pisang sebanyak 180 kg. jika harga jual mangga Rp.9.200,00/kg dan pisang Rp.7000,00/kg, maka

$$\begin{array}{rcl}
 x + y = 48 & \times 4 & 4x + 4y = 192 \\
 6x + 4y = 240 & \times 1 & 6x + 4y = 240 \\
 \hline
 & & -2y = -48 \\
 & \Leftrightarrow & y = \frac{-48}{-2} = 24
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{rcl}
 x + y = 48 & \times 6 & 6x + 6y = 288 \\
 6x + 4y = 240 & \times 1 & 6x + 4y = 240 \\
 \hline
 & & 2y = 48 \\
 & \Leftrightarrow & y = \frac{48}{2} = 24
 \end{array}$$

tentukanlah laba maksimum yang diperoleh pedagang tersebut!

■

Jawab:

Karena ditanya laba maksimum, maka fungsi tujuan/fungsi objektifnya adalah keuntungan dari menjual buah mangga dan buah pisang perkilonya.

Berikut untuk penjualan:

$$\text{mangga} = 9200 - 8000 = 1200$$

$$\text{pisang} = 7000 - 6000 = 1000$$

misalkan:

$$\text{mangga} = x$$

$$\text{pisang} = y$$

maka fungsi objektifnya adalah:

$$f(x,y) = 1200x + 1000y$$

Model matematika atau sistem pertidaksamaan yang memenuhi soal tersebut adalah:

$$x + y \leq 180$$

$$8000x + 6000y \leq 1200000 \rightarrow 4x + 3y \leq 600$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Titik potong masing-masing garis terhadap sumbu x dan sumbu y:

$$\text{Garis } x + y = 180$$

$$\text{untuk } x = 0, y = 180 \rightarrow (0, 180)$$

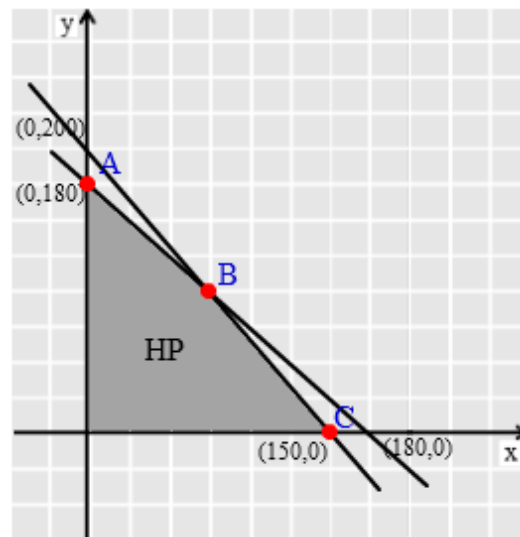
$$\text{untuk } y = 0, x = 180 \rightarrow (180, 0)$$

$$\text{Garis } 4x + 3y = 600$$

$$\text{untuk } x = 0, y = 200 \rightarrow (0, 200)$$

$$\text{untuk } y = 0, x = 150 \rightarrow (150, 0)$$

Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan adalah:



Dari grafik diketahui ada tiga titik pojok yaitu A, B dan C. Titik C merupakan perpotongan antara garis  $x + y = 180$  dengan  $4x + 3y = 600$ .

$$x + y = 180 \quad | \times 3 \quad | 3x + 3y = 540$$

$$4x + 3y = 600 \quad | \times 1 \quad | 4x + 3y = 600 \text{ dikurangi.}$$

$$\text{maka } -x = -60 \text{ maka } x = 60.$$

Maka  $x$  tersebut dimasukkan ke dalam persamaan  $x + y = 180$ .

$$x + y = 180$$

$$y = 180 - 60$$

$$y = 120$$

Kemudian substitusikan titik pojok pada fungsi objektif  $f(x,y) = 1200x + 1000y$ :

$$A(0,180) \quad f = 1000(180) = 180000$$

$$B(60,120) \quad f = 1200(60) + 1000(120) = 192000$$

$$C(150,0) \quad f = 1200(150) = 180000$$

$$D(0,0) \quad f = 1500(0) + 1250(0) = 0$$

Jadi laba maksimum yang diperoleh pedagang buah adalah Rp.192.000,00

#### 4.4.1 Soal Latihan Penerapan Program Linear Dua Variabel

- Exercise 4.2**
- Seorang pembuat kue mempunyai 8 kg tepung dan 2 kg gula pasir. Ia ingin membuat dua macam kue yaitu kue dadar dan kue apem. Untuk membuat kue dadar dibutuhkan 10gram gula pasir dan 20 gram tepung sedangkan untuk membuat sebuah kue apem dibutuhkan 5 gram gula pasir dan 50 gram tepung. Jika kue dadar dijual dengan harga Rp.300,00/buah dan kue apem dijual dengan harga Rp. 500,00/buah, tentukanlah pendapatan maksimum yang dapat diperoleh pembuat kue tersebut!
  - Menjelang hari raya Idul Adha, Pak Mahmud hendak menjual sapi dan kerbau. Harga seekor sapi dan kerbau di Medan berturut-turut Rp.9.000.000,00 dan Rp.8.000.000,00. Modal yang dimiliki pak Mahmud adalah Rp.124.000.000,00. Pak Mahmud menjual sapi dan kerbau di Aceh dengan harga berturut-turut Rp.10.300.000,00 dan Rp.9.200.000,00. Kandang yang ia miliki hanya dapat menampung tidak lebih dari 15 ekor. Agar menca-

pai keuntungan maksimum, tentukanlah banyak sapi dan kerbau yang harus dibeli pak Mahmud!





## 5. Matriks

### 5.1 Pengertian Matriks

### 5.2 Operasi Matriks

### 5.3 Determinan dan Invers Matriks Berorde 2x2 dan 3x3

### 5.4 Pemakaian Matriks Pada Transformasi Geometri

## Pemakaian Matriks pada Transformasi Geometri

### 1. Apa itu Transformasi Geometri?

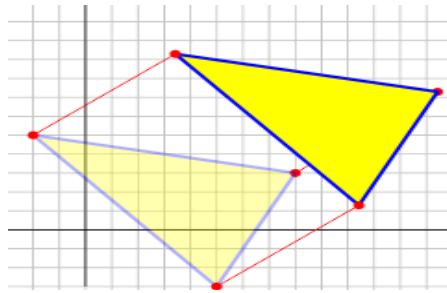
#### (a) Pengertian Transformasi Geometri?

Pengertian transformasi geometri adalah proses mengubah setiap titik koordinat menjadi titik koordinat lain pada bidang tertentu. Transformasi bisa juga dilakukan pada kumpulan titik yang membentuk bidang/bangun tertentu. Jika sobat punya sebuah titik A (x,y) kemudian ditransformasikan oleh transformasi T maka akan menghasilkan titik yang baru A' (x',y'). Secara matematis di tulis:

$$A(x,y) \xrightarrow{T} A'(x',y')$$

### 1. Jenis-Jenis Transformasi Geometri

Sebuah objek dapat diubah dengan melakukan berbagai perlakuan. Di dalam transformasi geometri dikenal adanya 4 jenis transformasi yang bisa dilakukan terhadap sebuah koordinat yaitu menggesernya, mencerminkannya, memutar, memperbesar, atau mengecilkan. Selain 4 transformasi tersebut masih ada yang namanya regangan dan gusuran. Yuk lihat ulasannya satu persatu di bawah ini.



**a. Translasi (Pergeseran)** Translasi atau pergeseran adalah transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang menurut jarak dan arah tertentu. Sifatnya bisa mengatakan kalau translasi hanya memindahkan tanpa mengubah ukuran tanpa memutar. Kata kuncinya transformasi ke arah yang sama dan ke jarak yang sama. Misalkan suatu titik  $T(x, y)$  yang ditranslasikan menurut  $(a, b)$  maka hasil setelah transformasi adalah:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} T' \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$$

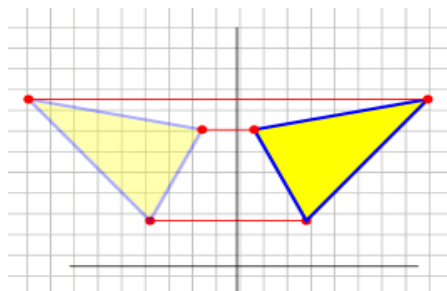
$$(x', y') = (x + a, y + b)$$

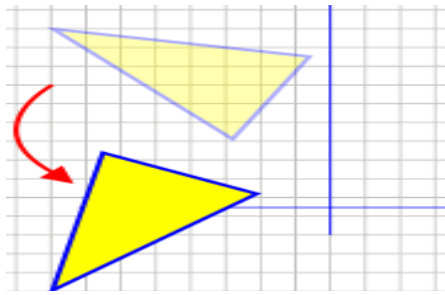
Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah menyukai atau menyenangi.

Dari contoh di atas, himpunan A tersebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut daerah tujuan (ko-domain). Sementara itu menyukai disebut relasi. Himpunan semua anggota ko-domain di sebut range (daerah hasil).

**b. Refleksi**

Refleksi atau sering disebut dengan istilah pencerminan adalah suatu transformasi dengan memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat-sifat pencerminan pada cermin datar. Berikut tabel transformasi pencerminan:



**c. rotasi**

Rotasi adalah memutar setiap titik pada bidang dengan menggunakan titik pusat tertentu yang memiliki jarak sama dengan setiap titik yang diputar (jari-jari). Rotasi tidak mengubah ukuran benda sama sekali. Ada dua macam rotasi, rotasi dengan titik pusat (0,0) dan rotasi dengan titik tertentu P (a,b).

**1. Rotasi dengan Titik Pusat (0,0) dengan Sudut Putar  $\alpha$** 

$$A(x, y) \xrightarrow{R[O, \alpha]} A'(x', y')$$

dimana

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

atau jika dibuat matriks transformasinya menjadi

$$A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

keterangan

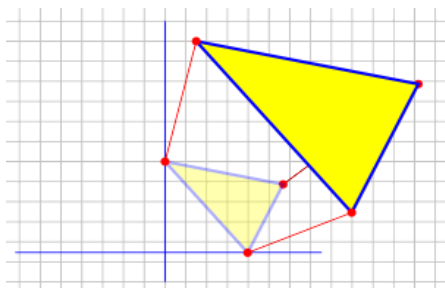
$\alpha$  bernilai + jika arah putaran berlawanan dengan arah jarum jam  $\alpha$  bernilai - jika araha putaran searah dengan arah jarum jam

**2. Rotasi dengan Titik Pusat (a,b) dengan Sudut Putar  $\alpha$** 

Jika sobat punya sebuah titik (x,y) yang diputar sebesar  $\alpha$  derajat dengan titik pusat P (a,b) maka:

$$A(x, y) \xrightarrow{R[P, \alpha]} A'(x', y')$$

$$\text{dimana } x' - a = (x-a) \cos \alpha - (y-b) \sin \alpha \quad y' - b = (x-a) \sin \alpha + (y-b) \cos \alpha$$

**d. Dilatasi (Perkalian)**

Selain dipindah, dicerminkan, dan diputar, transformasi juga bisa berbentuk pembesaran atau pengecilan yang disebut dilatasi. Faktor yang menyebabkan diperbesar atau diperkecilnya suatu bangun dinamakan faktor dilatasi. Faktor dilatis dilambangkan dengan k dimana

Jika  $k > 1$  atau  $k < -1$  maka diperbesar Jika  $-1 < k < 1$  maka diperkecil Jika  $k = 1$  atau  $k = -1$  maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran

1. Dilatasi terhadap titik pusat O (0,0) Dilatasi dengan pusat O (0,0) dan faktor dilatasi K maka

$$A(x, y) \xrightarrow{[0, k]} A'(kx, ky)$$

$$A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

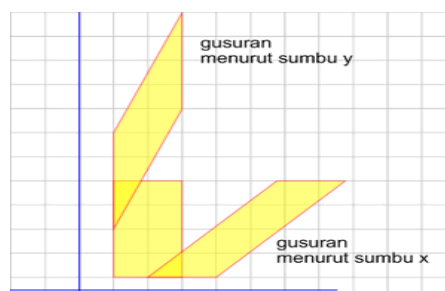
2. Dilatasi terhadap titik pusat P (a,b) Jika sebuah titik didilatasi dengan faktor dilatasi k dan titik pusat P (a,b) maka

$$A(x, y) \xrightarrow{[P, k]} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

dimana  $x' - a = k(x - a)$   $y' - b = k(y - b)$

**e. Gusuran (Shearing)** Gusuran artinya menggeser serah sumbu x atau sumbu y dengan faktor skala tertentu. Coba sobat perhatikan gambar di bawah ini:



Segi empat di atas dapat di gusur menurut sumbu x atau sumbu y dengan skala gusur k

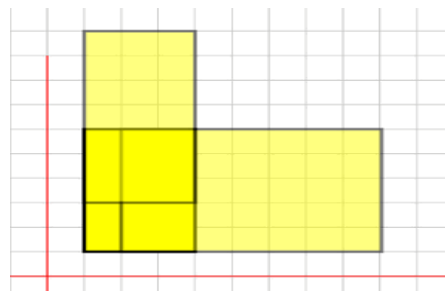
Untuk gusuran menurut sumbu x → Jika nilai k positif maka ke kanan, k negatif maka ke kiri

Untuk gusuran menurut sumbu y → Jika nilai k positif maka ke atas, k negatif maka ke bawah

Dari penjelasan di atas maka dapat disimpulkan rumus:

Gusuran	Pemetaan	Matriks Transformasi
Menurut Sumbu x	$(x', y') \rightarrow (x + ky, y)$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Menurut Sumbu y	$(x', y') \rightarrow (x, kx + y)$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

#### e. Gusuran (Shearing)



Regangan atau dalam bahasa inggris disebut stretching artinya transformasi dengan menarik sebuah benda searah sumbu x atau sumbu y dengan skala tertentu. Jika sobat punya sebuah titik  $(x,y)$  yang ditari ke arah sumbu x atau y dengan skala k maka hasil pemetaannya dapat dicari dengan rumus

Regangan	Pemetaan	Matriks Transformasi
Searah Sumbu x	$(x', y') \rightarrow (kx, y)$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Searah Sumbu y	$(x', y') \rightarrow (x, ky)$	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

#### 1. Komposisi Transformasi

Komposisi transformasi adalah gabungan dari dua atau lebih transformasi baik berbeda ataupun sama. Misalkan sebuah titik di transformasikan 2 kali oleh T1 dan T2 maka secara matematis dituliskan T1o T2 dengan matriks komposisi tersebut adalah perkalian dari matriks transformasi 2 dengan matriks transformasi 1 (dibalik).

$$\text{Untuk } T_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan } T_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \text{ maka } T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

### 1. Matriks Transformasi Khusus

Berikut kami rangkumkan matriks transformasi yang sering digunakan dalam soal-soal. Matriks di bawah ini juga akan memudahkan sobat untuk mencari matriks dari komposisi dua atau lebih transformasi.

No.	Jenis Transformasi	Simbol	Matriks Transformasi
1.	Identitas	I	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.	Pencerminan terhadap sumbu x	$M_x$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3.	Pencerminan terhadap sumbu y	$M_y$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4.	Pencerminan terhadap titik asal O atau rotasi setengah putaran	H	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
5.	Pencerminan terhadap garis $y = x$	$M_{y=x}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6.	Pencerminan terhadap garis $y = -x$	$M_{y=-x}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7.	Pemutaran $-90^\circ$ mengelilingi O	$R_{-90}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
8.	Pemutaran $+90^\circ$ mengelilingi O	$R_{+90}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9.	Dilatasi dengan pusat O (0, 0)	[0, k]	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
10.	Rotasi sebesar $\theta$ mengelilingi	$R_\theta$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

**Contoh Soal 1** Titik A(5,-2) ditranslasi oleh T (-3, 1). Tentukan koordinat bayangan titik A tersebut!

- A. A'(2,1)
- B. A'(1,1)
- C. A'(2,2)
- D. A'(2,-1)
- E. A'(-2,1)

Pembahasan :

Pembahasan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + -3 \\ -2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Contoh Soal 2** Tentukan bayangan garis  $y = 3x - 5$  oleh translasi  $T(-2, 1)$ !

A.  $y = 2x + 2$

B.  $y = 2x - 2$

C.  $y = 3x + 2$

D.  $y = 3x - 2$

E.  $y = 2x + 3$

$$\begin{aligned} y' - 1 &= 3(x' + 2) - 5 \\ y' - 1 &= 3x' + 6 - 5 \\ y' &= 3x' + 2 \end{aligned}$$

**Contoh Soal 3** Tentukan bayangan titik  $(5, -3)$  oleh rotasi  $R(P, 90)$  dengan koordinat titik  $P(-1, 2)$ !

A.  $(8, 4)$

B.  $(-8, 4)$

C.  $(8, -4)$

D.  $(-4, -8)$

E.  $(4, 8)$

Pembahasan :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 \\ \sin 90 & \cos 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ -3 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi bayangan  $(4, 8)$

**Contoh Soal 4** Tentukan bayangan titik (9, 3) oleh dilatasi [O, 1/3]!

- A. (1, 3)
- B. (3, 1)
- C. (-1, -3)
- D. (3, -1)
- E. (1, -3)

Pembahasan:

$$\begin{aligned} \text{P(a,b)} \\ x' &= a + k(x - a) \\ y' &= b + k(y - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= -2 + 2(x + 2) = 2x + 2 \\ y' &= 1 + 2(y - 1) = 2y - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' - 2}{2} \quad y = \frac{y' + 1}{2} \\ 3\left(\frac{x' - 2}{2}\right) + 4\left(\frac{y' + 1}{2}\right) - 5 &= 0 \\ 3(x' - 2) + 4(y' + 1) - 10 &= 0 \\ 3x' + 4y' - 12 &= 0 \\ \text{Jadi bayangan } 3x' + 4y' - 12 &= 0 \end{aligned}$$

**Contoh Soal 5** Tentukan bayangan garis  $3x + 4y - 5 = 0$  oleh dilatasi dengan pusat (-2, 1) dan faktor skala 2!

- A.  $3x + 4y + 12 = 0$
- B.  $3x + 4y - 12 = 0$
- C.  $3x - 4y + 12 = 0$
- D.  $-3x + 4y + 12 = 0$
- E.  $3x - 4y - 12 = 0$

Pembahasan :



$$\begin{array}{c}
 P(a,b) \\
 x' = a + k(x - a) \\
 y' = b + k(y - b)
 \end{array}$$

$$x' = -2 + 2(x + 2) = 2x + 2$$

$$y' = 1 + 2(y - 1) = 2y - 1$$

$$x = \frac{x' - 2}{2} \quad y = \frac{y' + 1}{2}$$

$$3\left(\frac{x' - 2}{2}\right) + 4\left(\frac{y' + 1}{2}\right) - 5 = 0$$

$$3(x' - 2) + 4(y' + 1) - 10 = 0$$

$$3x' + 4y' - 12 = 0$$

$$\text{Jadi bayangan } 3x' + 4y' - 12 = 0$$



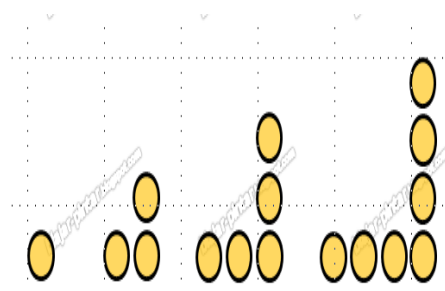
## 6. Barisan dan Deret

### 6.1 Pola Bilangan

#### Pola Bilangan

Berawal dari tugas matematika di sekolah oleh guru matematika yang memberi tugas untuk mencari pola – pola bilangan matematika, maka pada kesempatan kali ini saya akan membagikan beberapa jenis pola bilangan matematika. Tanpa panjang lebar, langsung saja kita ke pembahasannya.

##### 1. Pola bilangan ganjil



Pola bilangan ganjil memiliki pola 1, 3, 5, 7, 9 ....

bilangan ganjil adalah 1, 3, 5, 7, 9, ...

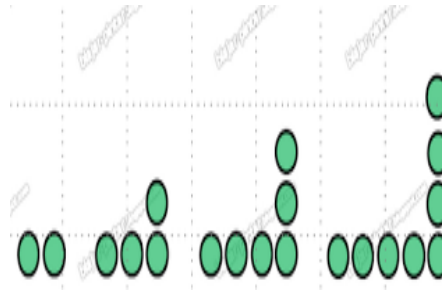
Deret bilangan ganjil adalah  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$

Rumus mencari suku ke ke-n adalah  $U_n = 2n - 1$

Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah  $S_n = n^2$

Berikut adalah gambar pola dari bilangan ganjil

##### 1. Pola bilangan genap



Pola bilangan genap adalah 2, 4, 6, 8, 10, ....

Barisan bilangan genap adalah 2, 4, 6, 8, 10, ....

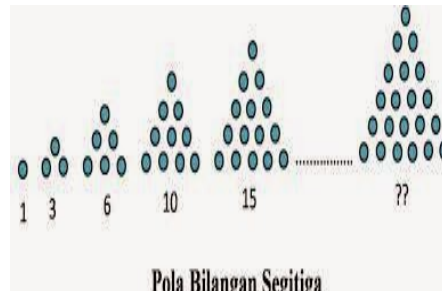
bilangan genap adalah  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots$

Rumus untuk mencari suku ke-n adalah  $U_n = 2n$

Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah  $S_n = n^2 + n$

Gambar pola bilangan genap adalah sebagai berikut

### 1. Pola bilangan segitiga



Pola bilangan segitiga adalah 1, 3, 6, 10, 15, 21, ....

Barisan bilangan segitiga adalah 1, 3, 6, 10, 15, 21, ....

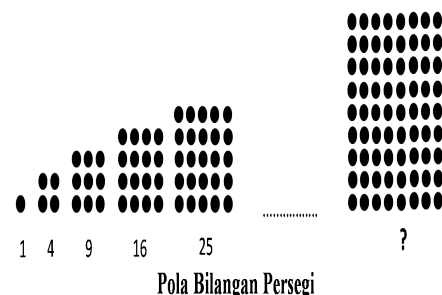
Deret bilangan segitiga adalah  $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \dots$

Rumus mencari suku ke-n adalah  $U_n = \frac{1}{2} n (n + 1)$ .

Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah  $S_n = \frac{1}{6} n (n + 1) (n + 2)$ .

Gambar pola bilangan segitiga adalah sebagai berikut.

### 1. Pola bilangan Persegi



• Pola bilangan persegi adalah 1, 4, 9, 16, 25, ....

• Barisan bilangan persegi adalah 1, 4, 9, 16, 25, ....

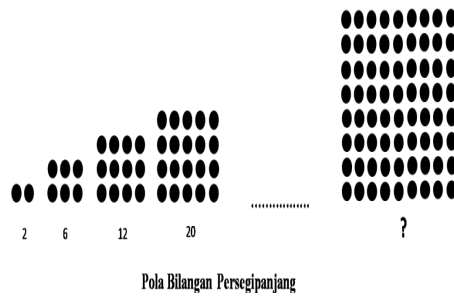
• Deret bilangan persegi adalah  $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots$

• Rumus mencari suku ke-n adalah  $U_n = n^2$ .

• Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah  $S_n = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$ .

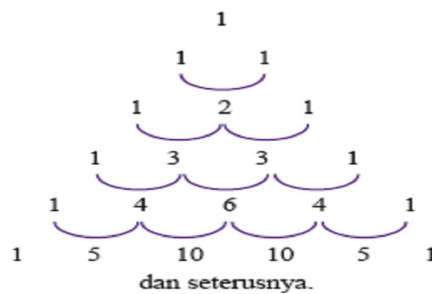
• Gambar pola bilangan persegi adalah sebagai berikut.

### 1. Pola bilangan persegi panjang



- Pola bilangan persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20, 30, .....
- Barisan bilangan persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20, 30, .....
- Deret bilangan persegi panjang adalah  $2 + 6 + 12 + 20 + 30 + \dots$
- Rumus mencari suku ke- $n$  adalah  $U_n = n(n + 1)$ .
- Rumus mencari jumlah  $n$  suku pertama adalah  $S_n = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$ .
- Gambar pola bilangan persegi panjang adalah sebagai berikut.

### 1. Pola bilangan segitiga pascal



Rumus mencari jumlah baris ke- $n$  adalah  $2n - 1$

### 1. Pola bilangan Fibonacci

- Pola bilangan fibanocci adalah pola bilangan dimana jumlah bilangan setelahnya merupakan hasil dari penjumlahan dari dua bilangan sebelumnya.
- Pola bilangan Fibonacci adalah 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, .....
- 2 diperoleh dari hasil  $1 + 1$  3 diperoleh dari hasil  $2 + 1$ , 5 diperoleh dari hasil  $3 + 2$  dan seterusnya.
- Rumus mencari suku ke- $n$  adalah  $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ .

### 1. Pola bilangan pangkat tiga

- Pola bilangan pangkat tiga adalah pola bilangan dimana bilangan setelahnya merupakan hasil dari pangkat tiga dari bilangan sebelumnya.
- Contoh pola bilangan pangkat tiga adalah 2, 8, 512, 134217728, .....
- Keterangan : 8 diperoleh dari hasil 2 pangkat tiga, 512 diperoleh dari hasil 8 pangkat tiga, dan seterusnya.

### 1. Pola bilangan aritmatika

- Pola bilangan aritmatika adalah pola bilangan dimana bilangan sebelum dan sesudahnya memiliki selisih yang sama.
- Contoh pola bilangan aritmatika adalah 2, 5, 8, 11, 14, 17, .....
- Suku pertama dalam bilangan aritmatika dapat disebut dengan awal ( $a$ ) atau  $U_1$ , sedangkan suku kedua adalah  $U_2$  dan seterusnya.

- Selisih dalam barisan aritmatika disebut dengan beda dan dilambangkan dengan  $b$ .
- Karena bilangan sebelum dan sesudahnya memiliki selisih yang sama, maka  $b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = U_5 - U_4 = U_6 - U_5 = 3$ .
- Rumus mencari suku ke- $n$  adalah  $U_n = a + (n - 1) b$ .
- Rumus mencari jumlah  $n$  suku pertama adalah  $S_n = n/2 (a + U_n)$  atau  $S_n = n/2 (2a + (n - 1) b)$ .

**Contoh soal :** Tentukanlah jumlah 7 bilangan asli ganjil yang pertama !

**jawab :** ketujuh bilangan tersebut adalah : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. jadi  $n=7$

► jumlah ke-7 bilangan tersebut adalah  $72=49$

► untuk membuktikan silahkan dihitung manual  $1+3+5+7+9+11+13=...$ ?

**Contoh 2 pola bilangan** Berapakah banya bilangan asli ganjil yang jumlahnya 81 ?

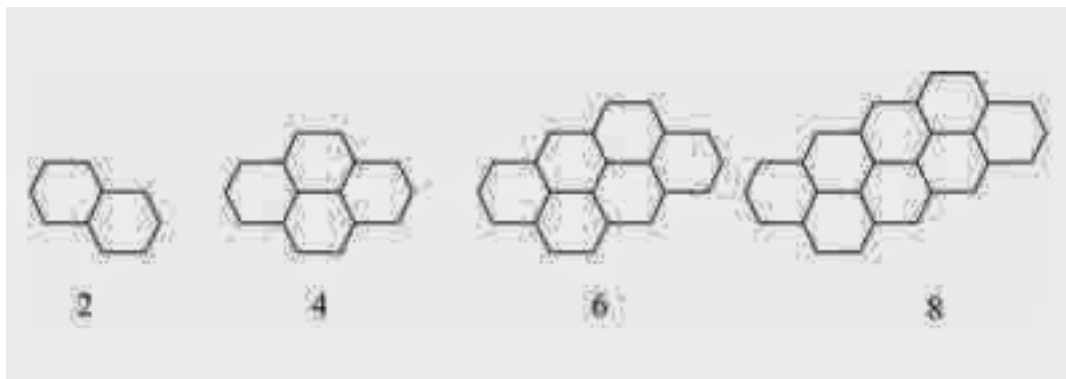
**jawab :** Kita telah mengetahui bahwa jumlah bilangan asli ganjil yaitu banyaknya bilangan asli ganjil dikuadratkan secara sederhana dapat kita tuliskan  $n^2$  dari pertanyaan diatas dapat kita simpulkan bahwa  $n^2=81$ , maka

$$n = \sqrt{81}$$

$n = 9$ , jadi banyaknya bilangan ganjil adalah 9.

**Contoh Soal Pola Bilangan Genap** Selain bilangan ganjil, bilangan genap juga termasuk anggota dari bilangan asli yaitu 2, 4, 6, 8, ...

Perhatikan susunan heksagonal seperti pada gambar berikut :



pola bilangan matematika - pola heksagonal

Gambar diatas menunjukkan bahwa heksagonal yang terdiri sebanyak bilangan genap dapat disusun membentuk pola tertentu. sehingga gambar diatas bisa disebut sebagai pola bilangan genap.

Untuk lebih memahami perhatikan uraian penjumlahan bilangan asli genap berikut :

Penjumlahan dari 2 bilangan genap :  $2 + 4 = 6$ ,  $n=2$  dapat ditulis  $6 = 2 (2+1)$

penjumlahan 3 bilangan genap :  $2 + 4 + 6 = 12$ ,  $n=3$  dapat ditulis  $12 = 3 (3+1)$

penjumlahan 4 bilangan genap :  $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ ,  $n=4$  dapat ditulis  $20 = 4 (4+1)$

dari pola di atas seharusnya anda sudah dapat menarik kesimpulan rumus jumlah pola bilangan genap, ya benar rumusnya adalah  $n_s = n (n + 1)$

## 6.2 Barisan dan Deret Aritmatika

Pengertian Barisan Aritmatika Sebelum memahami pengertian barisan aritmatika kita harus mengetahui terlebih dahulu mengenai pengertian barisan bilangan. Barisan bilangan merupakan sebuah urutan dari bilangan yang dibentuk dengan berdasarkan kepada aturan-aturan tertentu. Sedangkan barisan aritmatika dapat didefinisikan sebagai suatu barisan bilangan yang tiap-tiap pasangan suku yang berurutan mengandung nilai selisih yang sama persis, contohnya adalah barisan bilangan: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

Barisan bilangan tersebut dapat disebut sebagai barisan aritmatika karena masing-masing suku memiliki selisih yang sama yaitu 2. Nilai selisih yang muncul pada barisan aritmatika biasa dilambangkan dengan menggunakan huruf  $b$ . Setiap bilangan yang membentuk urutan suatu barisan aritmatika disebut dengan suku. Suku ke  $n$  dari sebuah barisan aritmatika dapat disimbolkan dengan lambang  $U_n$  jadi untuk menuliskan suku ke 3 dari sebuah barisan kita dapat menulis  $U_3$ . Namun, ada pengecualian khusus untuk suku pertama di dalam sebuah barisan bilangan, suku pertama disimbolkan dengan menggunakan huruf  $a$ .

Maka, secara umum suatu barisan aritmatika memiliki bentuk :

$$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, \dots U_{n-1} \quad a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b, \dots a+(n-1)b$$

Cara Menentukan Rumus suku ke- $n$  dari Sebuah Barisan Pada barisan aritmatika, mencari rumus suku ke- $n$  menjadi lebih mudah karena memiliki nilai selisih yang sama, sehingga rumusnya adalah:

$$\begin{aligned} U_2 &= a + b & U_3 &= u_2 + b = (a + b) + b = a + 2b & U_4 &= u_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b & U_5 &= u_4 + b \\ & & & & & & & = (a + 3b) + b = a + 4b & U_6 &= u_5 + b = (a + 4b) + b = a + 5b & U_7 &= u_6 + b = (a + 5b) + b = a + 6b \end{aligned}$$

## 6.3 Barisan dan Deret Geometri

### Pengertian dan Rumus Geometri

Barisan Geometri dapat didefinisikan sebagai barisan yang tiap-tiap sukunya didapatkan dari hasil perkalian suku sebelumnya dengan sebuah konstanta tertentu.

#### Contoh Barisan Geometri

untuk lebih memahami apa yang dimaksud dengan barisan geometri perhatikan contoh berikut:

**3, 9, 27, 81, 243, ...**

Barisan di atas adalah contoh barisan geometri dimana setiap suku pada barisan tersebut merupakan hasil dari perkalian suku sebelumnya dengan konstanta 3. maka bisa disimpulkan bahwa rasio pada barisan di atas adalah 3. rasio pada suatu barisan dapat dirumuskan menjadi:

$$r = \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Dimana  $a_k$  adalah sembarang suku dari barisan geometri yang ada. sementara  $a_{k+1}$  adalah suku selanjutnya setelah  $a_k$ .

Untuk menentukan suku ke- $n$  dari sebuah barisan geometri, kita dapat menggunakan rumus:

$$U_n = ar^{n-1}$$

### Pengertian dan Rumus deret Geometri

Deret geometri dapat diartikan sebagai jumlah dari  $n$  suku pertama pada sebuah barisan geometri. apabila suku ke- $n$  dari suatu barisan geometri digambarkan dengan rumus:  $a_n = ar^{n-1}$ , maka deret geometrinya dapat dijabarkan menjadi:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

Apabila kita mengalikan deret geometri di atas dengan  $-r$ , lalu kita jumlahkan hasilnya dengan deret aslinya, maka kita akan memperoleh:

$$-rS_n = -a_1r - a_1r^2 - a_1r^3 - \cdots - a_1r^{n-1} - a_1r^n$$

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}$$

$$\begin{array}{r} S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n \end{array} \quad +$$



# Part Two

<b>7</b>	<b>Limit Fungsi Aljabar .....</b>	<b>43</b>
7.1	Table	
7.2	Figure	
<b>8</b>	<b>Turunan Fungsi Aljabar .....</b>	<b>45</b>
8.1	Pengertian Turunan	
8.2	Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar	
8.3	Penerapan Turunan Fungsi Aljabar	
8.4	Nilai-Nilai Stasioner	
8.5	Aplikasi Turunan	
8.6	Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal	
<b>9</b>	<b>Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar .....</b>	<b>67</b>
9.1	Pengertian Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	
9.2	Sifat-Sifat Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	
9.3	Penerapan Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	
	<b>Bibliography .....</b>	<b>69</b>
	Books	
	Articles	



# 7. Limit Fungsi Aljabar

## 7.1 Table

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 7.1: Table caption

## 7.2 Figure

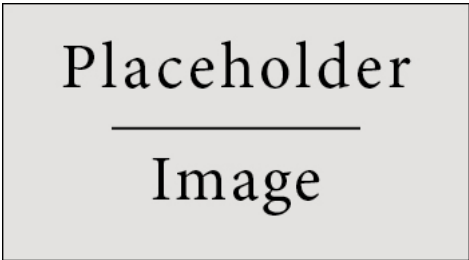



Figure 7.1: Figure caption





## 8. Turunan Fungsi Aljabar

### 8.1 Pengertian Turunan

#### Turunan

Secara umum turunan banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari atau dalam bidang ilmu lainnya. Karena setiap bidang ilmu pasti saling terkait atau saling membutuhkan. Kegunaan yang sering kita ketahui itu menghitung garis singgung suatu kurva atau fungsi dan kecepatan sesaat. Selain itu juga digunakan untuk laju pertumbuhan organisme (biologi), keuntungan marjinal (ekonomi), kepadatan kawat (fisika) dan laju pemisahan (kimia). Kegunaan semua yang telah disebut diatas adalah memiliki konsep yang sama, yaitu konsep turunan.

##### 1. Pengertian Turunan

Turunan merupakan salah satu dasar atau fundasi dalam analisis sehingga penguasaan kamu terhadap berbagai konsep dan prinsip turunan fungsi membantu kamu memecahkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Suatu fungsi dapat dianalisis berdasarkan ide naik/turun, keoptimalan dan titik beloknya dengan menggunakan konsep turunan. Pada bagian berikut, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contoh untuk menemukan konsep turunan. Kita memulainya dengan menemukan konsep persamaan garis tangen/singgung.

##### 1. Menemukan Konsep Garis Sekan dan Garis Tangen

Coba kamu amati dan cermati berbagai masalah nyata yang diajukan, bermanfaat sebagai sumber abstraksi kita dalam menemukan konsep dan hubungan antara garis sekan atau tali busur dan garis singgung.

##### Masalah:

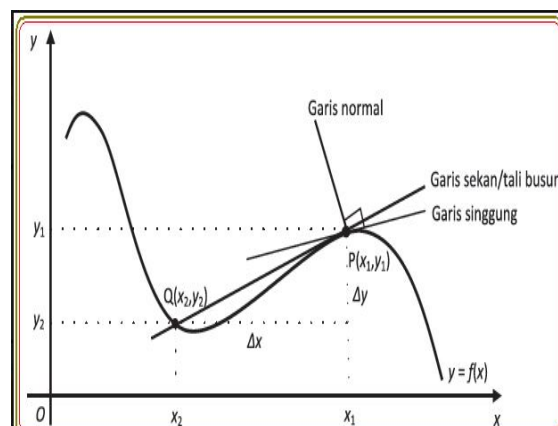
Seorang pemain ski meluncur kencang di permukaan es yang bergelombang. Dia meluncur turun kemudian naik mengikuti lekukan permukaan es sehingga di suatu saat, dia melayang ke udara dan turun kembali ke permukaan. Perhatikan Gambar di bawah ini.



Secara analitik, misalkan bahwa bukit es disketsa pada bidang (dimensi dua) dengan sudut pandang tegak lurus ke depan sehingga terdapat garis dan papan ski adalah sebuah garis lurus. Dapatkah kamu tunjukkan hubungan kedua garis tersebut?

### Alternatif Penyelesaian

Coba kamu amati gambar di bawah ini. Misalkan deskripsi permasalahan di atas ditampilkan dalam bentuk gambar berikut.

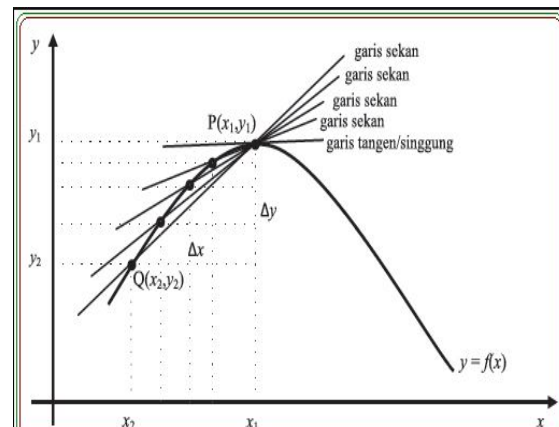


Posisi tegak pemain terhadap papan ski adalah sebuah garis yang disebut garis normal. Papan ski yang menyinggung permukaan bukit es di saat melayang ke udara adalah sebuah garis yang menyinggung kurva disebut garis singgung. Jadi, garis singgung tegak lurus dengan garis normal. Tujuan kita adalah mendapatkan persamaan garis singgung (PGS).

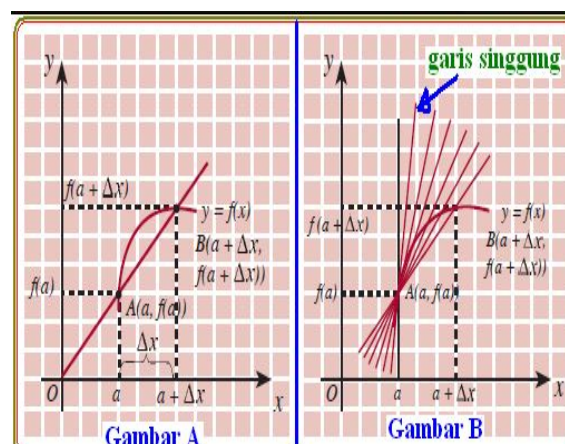
Misalkan pemain ski mulai bergerak dari titik  $Q(x_2, y_2)$  dan melayang ke udara pada saat titik  $P(x_1, y_1)$  sehingga ia akan bergerak dari titik  $Q$  mendekati titik  $P$ . Garis yang menghubungkan kedua titik disebut garis tali busur atau garis sekan.

Sepanjang pergerakan tersebut, terdapat banyak garis sekan yang dapat dibentuk dari titik  $Q$  menuju titik  $P$  dengan gradient awal.

Perhatikan gambar di bawah. Gradient garis sekan mendekati gradient garis singgung.



Perhatikan gambar garis sekan dan garis tangen(singgung) berikut ini.



Pada gambar A, garis sekan yang melalui titik A dan titik B memiliki gradient (kemiringan garis) yang disimbolkan m.

Jika  $\Delta x$  nilainya semakin kecil, maka garis sekan (gambar A) akan membentuk garis singgung seperti gambar B, sehingga diperoleh gradien garis singgung di titik A dengan syarat nilai limitnya ada.

#### Definisi :

Turunan fungsi  $f$  adalah fungsi lain  $f'$  (dibaca :  $f$  aksen) yang nilainya pada sebarang bilangan  $c$  adalah :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ jika limitnya ada}$$

#### 1. Menemukan Konsep Garis Sekan dan Garis Tangen

Kita telah menemukan konsep garis singgung grafik suatu fungsi dan hubungannya dengan garis sekan dan garis normal. Berikutnya, kita akan mempelajari lebih dalam lagi konsep garis singgung grafik suatu fungsi tersebut untuk mendapatkan konsep turunan.

Coba kamu perhatikan dan amati kembali sketsa kurva pada Gambar gradien garis sekan mendekati gradient garis singgung, maka titik Q akan bergerak mendekati P untuk  $\Delta x$  makin kecil. Gradien garis singgung di titik P disebut turunan fungsi pada titik P.

Perlu diinformasikan, penulisan simbol turunan dapat berbeda-beda. Beberapa symbol turunan yang sering dituliskan adalah:

Notasi Newton =  $f'(x)$  atau  $y'$  turunan pertama fungsi

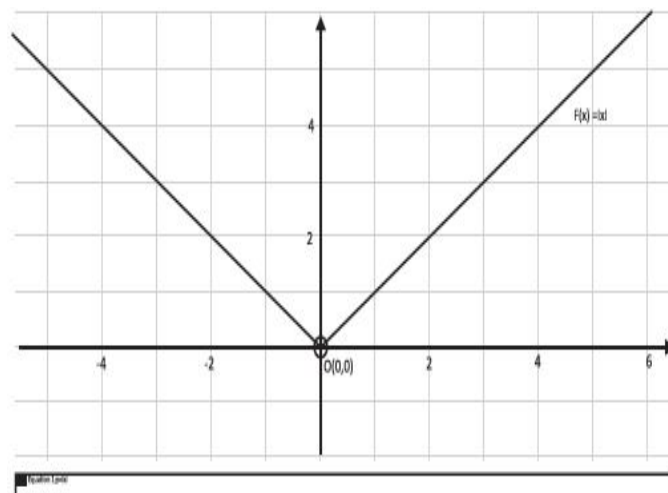
Notasi Leibniz =  $df(x)/dx$  atau  $dy/dx$  turunan pertama fungsi

### Masalah:

Seekor burung camar terbang melayang di udara dan melihat seekor ikan di permukaan laut. Burung tersebut terbang menikik dan menyambar ikan kemudian langsung terbang ke udara. Lintasan burung mengikuti pola fungsi  $f(x) = |x|$ . Dapatkah kamu sketsa grafik tersebut. Coba amati dan teliti dengan cermat turunan fungsi tersebut pada titik  $O(0,0)$ .

### Alternatif Penyelesaian

Ingat kembali pelajaran nilai mutlak pada kelas X Misalkan posisi ikan di permukaan laut adalah titik  $O(0,0)$  sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut (ingat cara meng-gambar kurva  $f(x) = |x|$  di kelas X):



## 8.2 Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar

### 1. Turunan Fungsi Aljabar

Turunan fungsi aljabar merupakan pembahasan lebih jauh dari limit fungsi. Dengan kata lain turunan fungsi merupakan fungsi tertentu dimana nilai fungsi di setiap titik ditentukan dengan limit selisih fungsi.

Secara umum dijelaskan sebagai berikut. Jika dipunyai fungsi  $f(x)$  dan turunan  $f'(x)$ , kedua fungsi tersebut mempunyai hubungan, jika dipunyai fungsi  $f(x)$  fungsi aljabar diperoleh dasar turunan sebagai berikut.

$f(x) = x(n)$ , maka  $f'(x) = nx(n-1)$   $f(x) = ax(n)$ , maka  $f'(x) = anx(n-1)$

#### 1. Turunan Fungsi Aljabar

##### a. Turunan fungsi konstan

Fungsi konstan adalah fungsi dengan bentuk  $f(x) = n$  dengan  $n = \text{bilangan real}$ . Turunan fungsi konstan menggunakan limit fungsi adalah sebagai berikut.



$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n - n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan fungsi yang berbentuk nilai konstan adalah 0.

Jika diketahui  $f(x) = n$ , dengan  $n$  bilangan real, maka  $f'(x) = 0$

### b. Turunan fungsi identitas

Fungsi identitas adalah fungsi dengan bentuk  $f(x) = x$ . Turunan fungsi identitas menggunakan limit fungsi adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Jadi, turunan fungsi identitas adalah 1.

Jika diketahui  $f(x)$  adalah sebuah fungsi identitas atau  $f(x) = x$ , maka  $f'(x) = 1$

### c. Turunan fungsi pangkat

Misalkan diketahui fungsi pangkat dengan bentuk  $f(x) = x^n$  dengan  $n$  bilangan bulat positif. Untuk menentukan rumus umumnya, kita dapat mencari pola dari hasil yang diperoleh melalui tabel berikut.

$f(x)$	1	$x$	$x^2$	...	$x^n$
$f'(x)$	0	1	...	...	...

Sekarang, kita tentukan dahulu turunan fungsi untuk  $n = 2$ .

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

Kita masukkan hasilnya ke dalam tabel berikut ini.

$f(x)$	1	$x$	$x^2$	...	$x^n$
$f'(x)$	0	1	$2x$	...	$nx^{n-1}$

Coba kalian perhatikan tabel di atas. Dari tabel tersebut, dapat terlihat pola yang terbentuk sehingga diperoleh kesimpulan.

**d. Turunan fungsi kelipatan konstan**

Jika  $k$  suatu konstanta dan  $f$  suatu fungsi yang terdiferensial maka  $(kf)' = k f'(x)$  yakni  $Dx[k f(x)] = k Dx[f(x)]$

**e. Turunan fungsi jumlah**

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensial maka

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ yakni } Dx[f(x)+g(x)] = Dx[f(x)] + Dx[g(x)]$$

**f. Turunan fungsi selisih**

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensial maka

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \text{ yaitu } Dx[f(x) - g(x)] = Dx[f(x)] - Dx[g(x)]$$

**g. Turunan fungsi hasil kali**

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensial maka

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ yakni } Dx[f(x)g(x)] = Dx[f(x)]g(x) + f(x)Dx[g(x)]$$

**h. Turunan fungsi hasil bagi**

Jika  $f$  dan  $g$  fungsi-fungsi yang terdiferensial maka turunan dari  $f(x)$  adalah :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

**1. Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar**

Jika diketahui  $k$  suatu konstanta,  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  dan masing-masing mempunyai turunan  $u'(x)$  dan  $v'(x)$ , maka berlaku:

$$f(x) = u + v, \text{ maka } f'(x) = u' + v'$$

$$f(x) = u - v, \text{ maka } f'(x) = u' - v'$$

$$f(x) = uv, \text{ maka } f'(x) = u'v + uv'$$

$$f(x) = f(u), \text{ maka } f'(x) = f'(u) \cdot u'$$

$f(x) = u/v$ , maka  $f'(x) = (u'v - uv')/v^2$

Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa contoh berikut.

**Contoh 1 :**

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

$$1. f(x) = x^3 + x^2$$

$$2. f(x) = 4x^2 + 5x$$

$$3. f(x) = 3x^5 + 4x^3 - 7x^2$$

$$4. f(x) = 2x^4 + 8x^3 - x^2 - 9x + 1$$

$$5. f(x) = x^7 + 2x^5 - 6x^4 - 9x^2 + 11x$$

**Jawaban:**

$$1. f'(x) = 3x^{3-1} + 2x^{2-1} \\ = 3x^2 + 2x$$

$$2. f'(x) = 4 \cdot 2x^{2-1} + 5x^{1-1} \\ = 8x + 5$$

$$3. f'(x) = 3 \cdot 5x^{5-1} + 4 \cdot 3x^{3-1} - 7 \cdot 2x^{2-1} \\ = 15x^4 + 12x^2 - 14x$$

$$4. f'(x) = 2 \cdot 4x^{4-1} + 8 \cdot 3x^{3-1} - 2x^{2-1} - 9 \\ = 8x^3 + 24x^2 - 2x - 9$$

$$5. f'(x) = 7 \cdot x^{7-1} + 2 \cdot 5x^{5-1} - 6 \cdot 4x^{4-1} - 9 \cdot 2x^{2-1} + 11x^{1-1} \\ = 7x^6 + 10x^4 - 24x^3 - 18x + 11$$

Contoh di atas merupakan contoh turunan fungsi dari operasi suku-suku aljabar.

Nah, bagaimana turunan dari operasi dua fungsi aljabar ( $f(x)$  dan  $g(x)$ ). Misalnya operasi perkalian dan pembagian. Mengapa hanya perkalian dan pembagian?

Perlu diketahui bahwa pada operasi penjumlahan dan pengurangan pada hakikatnya sama saja dengan operasi di atas.

### 8.3 Penerapan Turunan Fungsi Aljabar

### 8.4 Nilai-Nilai Stasioner

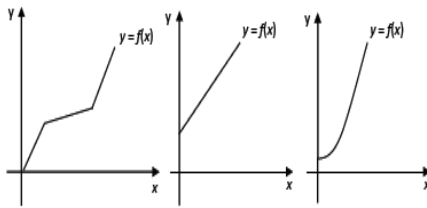
### 8.5 Aplikasi Turunan

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva.

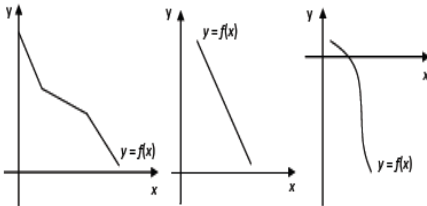
#### 8.5.1 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Coba bayangkan ketika kamu pergi ke plaza atau mall, di sana kita temukan eskalator atau lift. Gerakan lift dan eskalator saat naik dapat diilustrasikan sebagai fungsi naik. Demikian juga gerakan lift dan eskalator saat turun dapat diilustrasikan sebagai fungsi turun. Amatilah beberapa grafik fungsi naik dan turun di bawah ini dan coba tuliskan ciri-ciri fungsi naik dan fungsi turun sebagai ide untuk mendefinisikan fungsi naik dan turun.

Beberapa grafik fungsi turun dari kiri ke kanan



Beberapa grafik fungsi naik dari kiri ke kanan



Dari beberapa contoh grafik fungsi naik dan turun di atas, mari kita definisikan fungsi naik dan turun sebagai berikut.

Misalkan fungsi,

- Fungsi  $f$  dikatakan naik jika  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi  $f$  dikatakan turun jika  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Tunjukkan grafik fungsi  $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$  dan  $x > 0$  adalah fungsi naik.

#### Alternatif Penyelesaian

$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$  dan  $x > 0$  Ambil sebarang  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  dengan  $0 < x_1 < x_2$

$$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^3$$

$$x = x_2 \Rightarrow f(x_2) = x_2^3$$

Karena  $0 < x_1 < x_2$  maka  $x_1^3 < x_2^3$

Karena  $x_1^3 < x_2^3$  maka  $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Dapat disimpulkan  $f$  adalah fungsi naik. Bagaimana jika  $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$  dan  $x < 0$ , apakah grafik fungsi  $f$  adalah fungsi naik? Selidiki!

### 8.5.2 Aplikasi Turunan dalam Permasalahan Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Mari kita bahas aplikasi turunan dalam permasalahan fungsi naik dan fungsi turun dengan memperhatikan dan mengamati permasalahan berikut.

#### Masalah 1

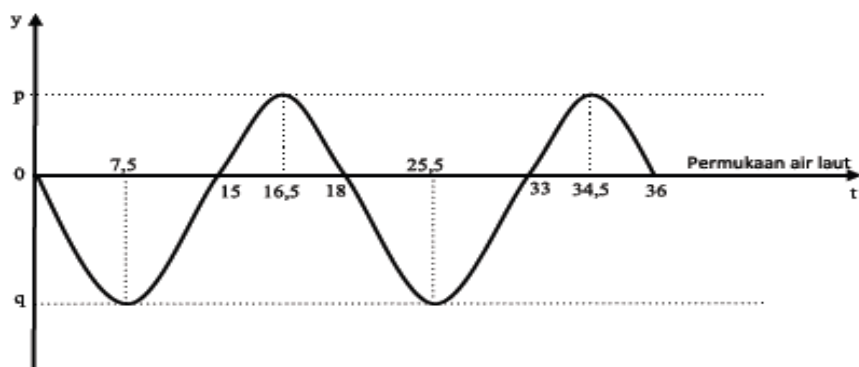
Seorang nelayan melihat seekor lumba-lumba sedang berenang mengikuti kecepatan perahu mereka. Lumba-lumba tersebut berenang cepat, terkadang menyelam dan tiba-tiba melayang ke permukaan air laut. Pada saat nelayan tersebut melihat lumba-lumba menyelam maka ia akan melihatnya melayang ke permukaan 15 detik kemudian dan kembali ke permukaan air laut setelah 3 detik di udara. Demikian pergerakan lumba-lumba tersebut diamati berperiode dalam beberapa

interval waktu pengamatan.

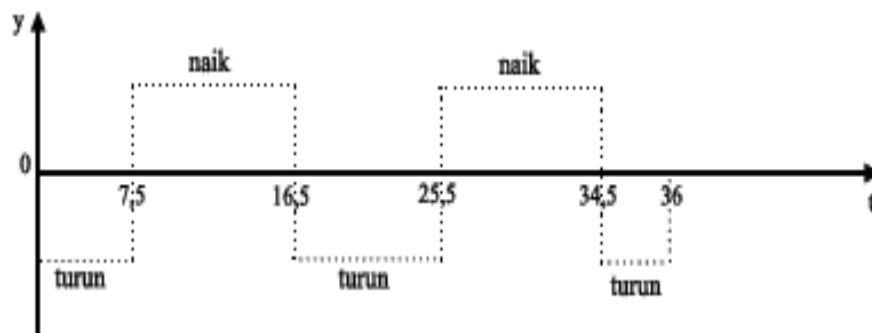
Dari ilustrasi diatas, dapatkah kamu sketsa pergerakan lumba-lumba tersebut dalam 2 periode? Ingat pengertian periode pada pelajaran trigonometri di kelas X. Dapatkah kamu tentukan pada interval waktu berapakah lumbalumba tersebut bergerak naik atau turun? Dapatkah kamu temukan konsep fungsi naik/turun?

### Alternatif Penyelesaian:

Sketsa pergerakan lumba-lumba dalam pengamatan tertentu

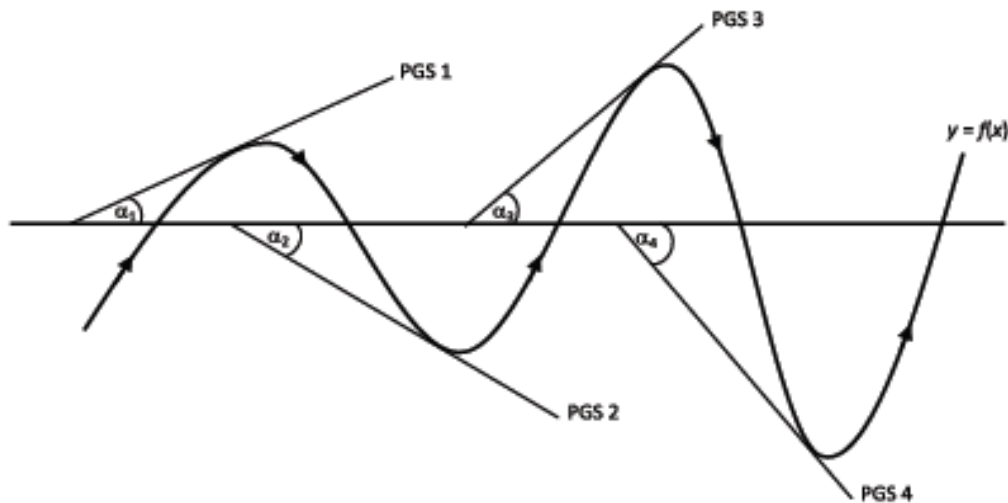


Sketsa pergerakan naik/turun lumba-lumba dalam pengamatan tertentu



Secara geometri pada sketsa di atas, lumba-lumba bergerak turun di interval  $0 < t < 7,5$  atau  $16,5 < t < 25,5$  atau  $34,5 < t < 36$  dan disebut bergerak naik di interval  $7,5 < t < 16,5$  atau  $25,5 < t < 34,5$ . Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.

Garis singgung di interval fungsi naik/turun



Selanjutnya, mari kita bahas hubungan persamaan garis singgung dengan fungsi naik atau turun. Pada konsep persamaan garis lurus, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif. Pada persamaan garis singgung, gradien adalah tangen sudut garis tersebut dengan sumbu positif sama dengan nilai turunan pertama di titik singgungnya. Pada gambar di atas, misalkan besar masing-masing sudut adalah  $0 < \alpha_1 < 900 < \alpha_2 < 900 < \alpha_3 < 900 < \alpha_4 < 900$  sehingga nilai gradien atau tangen sudut setiap garis singgung ditunjukkan pada tabel berikut:

PGS	Sudut	Nilai tangen	Menyinggung di
PGS 1	$\alpha_1$	$m = \tan(\alpha_1) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	$360^\circ - \alpha_2$	$m = \tan(360^\circ - \alpha_2) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun
PGS 3	$\alpha_3$	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 4	$360^\circ - \alpha_4$	$m = \tan(360^\circ - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun

Coba kamu amati Gambar diatas dan Tabel sebelumnya Apakah kamu melihat konsep fungsi naik/turun. Coba kamu perhatikan kesimpulan berikut:

Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi naik maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran I. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah positif atau  $m = f'(x) > 0$ .

Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi turun maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran IV. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah negatif atau  $m = f'(x) < 0$ .

Dengan demikian, dapat kita simpulkan bahwa fungsi  $f(x)$  yang dapat diturunkan pada interval I, akan mempunyai kondisi sebagai berikut:

No.	Nilai turunan pertama	Keterangan
1	$f'(x) > 0$	Fungsi selalu naik
2	$f'(x) < 0$	Fungsi selalu turun
3	$f'(x) \geq 0$	Fungsi tidak pernah turun
4	$f'(x) \leq 0$	Fungsi tidak pernah naik

Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap  $x \in I$  maka

1. Jika  $f'(x) > 0$  maka fungsi selalu naik pada interval  $I$ .
2. Jika  $f'(x) < 0$  maka fungsi selalu turun pada interval  $I$ .
3. Jika  $f'(x) \geq 0$  maka fungsi tidak pernah turun pada interval  $I$ .
4. Jika  $f'(x) \leq 0$  maka fungsi tidak pernah naik pada interval  $I$ .

Konsep di atas dapat digunakan jika kita sudah memiliki fungsi yang akan dianalisis. Tetapi banyak kasus sehari-hari harus dimodelkan terlebih dahulu sebelum dianalisis. Perhatikan kembali permasalahan berikut!

#### Masalah:

Tiga orang anak sedang berlomba melempar buah mangga di ketinggian 10 meter. Mereka berbaris menghadap pohon mangga sejauh 5 meter. Anak pertama akan melempar buah mangga tersebut kemudian akan dilanjutkan dengan anak kedua bila tidak mengenai sasaran. Lintasan lemparan setiap anak membentuk kurva parabola. Lemparan anak pertama mencapai ketinggian 9 meter dan batu jatuh 12 meter dari mereka. Lemparan anak kedua melintas di atas sasaran setinggi 5 meter. Anak ketiga berhasil mengenai sasaran. Tentu saja pemenangnya anak ketiga, bukan?

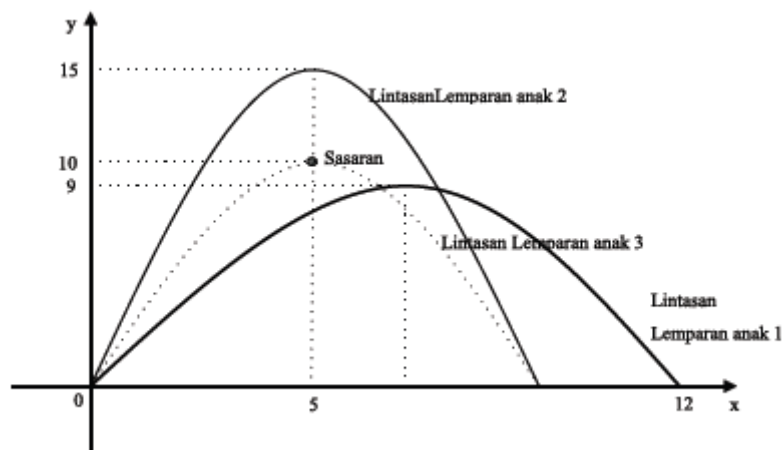
#### Permasalahan!

Dapatkah kamu mensketsa lintasan lemparan ketiga anak tersebut? Dapatkah kamu membuat model matematika lintasan lemparan? Dapatkah kamu menentukan interval jarak agar masing-masing lemparan naik atau turun berdasarkan konsep turunan?

#### Alternatif Penyelesaian

##### a. Sketsa Lintasan Lemparan

Permasalahan di atas dapat kita analisis setelah kita modelkan fungsinya. Misalkan posisi awal mereka melempar adalah posisi titik asal  $O(0,0)$  pada koordinat kartesius, sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut.



##### b. Model Lintasan Lemparan

Kamu masih ingat konsep fungsi kuadrat, bukan? Ingat kembali konsep fungsi kuadrat yang melalui titik puncak  $P(x_p, y_p)$  dan titik sembarang  $P(x, y)$  adalah  $y - y_p = a(x - x_p)^2$  sementara fungsi kuadrat yang melalui akar-akar  $x_1, x_2$  dan titik sembarang  $P(x, y)$  adalah  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ , dengan  $x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}$  dan  $a \neq 0$ ,  $a$  bilangan real. Jadi, model lintasan lemparan setiap anak tersebut adalah:

##### Lintasan lemparan anak pertama

Lintasan melalui titik  $O(0,0)$  dan puncak  $p_1(6,9)$ .

$$\begin{aligned} y - 0 &= a(x - 5)^2 & \Leftrightarrow 0 - 10 &= a(0 - 5)^2 \\ & & \Leftrightarrow a &= -0,4 \end{aligned}$$

Fungsi lintasan lemparan anak pertama adalah  $y = -0,25x^2 + 3x$ .

#### Lintasan lemparan anak kedua

Lintasan melalui titik  $O(0,0)$  dan puncak  $P_2(5,15)$ .

$$\begin{aligned} y - 15 &= a(x - 5)^2 & \Leftrightarrow 0 - 15 &= a(0 - 5)^2 \\ & & \Leftrightarrow a &= -0,6 \end{aligned}$$

Fungsi lintasan lemparan anak kedua adalah  $y = -0,6x^2 + 6x$ .

#### Lintasan lemparan anak ketiga

Lintasan melalui titik  $O(0,0)$  dan puncak  $P_3(5,10)$ .

$$\begin{aligned} y - 0 &= a(x - 5)^2 & \Leftrightarrow 0 - 10 &= a(0 - 5)^2 \\ & & \Leftrightarrow a &= -0,4 \end{aligned}$$

Fungsi lintasan lemparan anak ketiga adalah  $y = -0,4x^2 + 4x$ .

«««< HEAD =====

#### c. Interval Fungsi Naik/Turun Fungsi Lintasan

Coba kamu amati kembali Gambar seketsa lintasan lemparan Secara geometri, jelas kita lihat interval fungsi naik/turun pada masing-masing lintasan, seperti pada tabel berikut:

Lintasan ke	Fungsi	Secara Geometri	
		Interval Naik	Interval Turun
1	$y = -0,25x^2 + 3x$	$0 < x < 6$	$6 < x < 12$
2	$y = -0,6x^2 + 6x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$
3	$y = -0,4x^2 + 4x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$

Mari kita tunjukkan kembali interval fungsi naik/turun dengan menggunakan konsep turunan yang telah kita pelajari sebelumnya.

#### Fungsi naik/turun pada lintasan lemparan anak 1

Fungsi yang telah diperoleh adalah  $y = -0,25x^2 + 3x$  sehingga  $y' = -0,5x + 3$ . Jadi,

fungsi akan naik:  $y' = -0,5x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 6$

fungsi akan turun:  $y' = -0,5x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > 6$

Menurut ilustrasi, batu dilempar dari posisi awal  $O(0,0)$  dan jatuh pada posisi akhir  $Q(12,0)$  sehingga lintasan lemparan akan naik pada  $0 < x < 6$  dan turun pada  $6 < x < 12$ .

Bagaimana menunjukkan interval fungsi naik/turun dengan konsep turunan pada fungsi lintasan lemparan anak 2 dan anak 3 diserahkan kepadamu.

**Contoh Soal:** Tentukanlah interval fungsi naik/turun fungsi  $f(x) = x^4 - 2x^2$

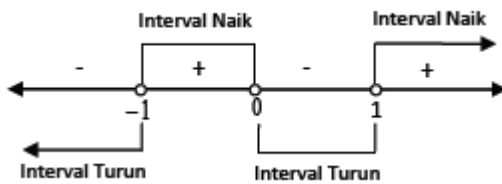
#### Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan konsep, sebuah fungsi akan naik jika  $f'(x) > 0$  sehingga:

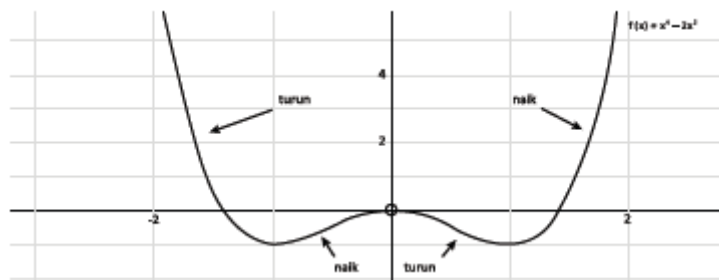
$$f'(x) = 4x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x - 1)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ atau } x = 1 \text{ atau } x > 1$$

Dengan menggunakan interval.





Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval  $-1 < x < 0$  atau  $x > 1$  tetapi turun pada interval  $x < -1$  atau  $0 < x < 1$ . Perhatikan sketsa kurva  $f(x) = x^4 - 2x^2$  tersebut.



Gambar Fungsi naik/turun kurva  $f(x) = x^4 - 2x^2$

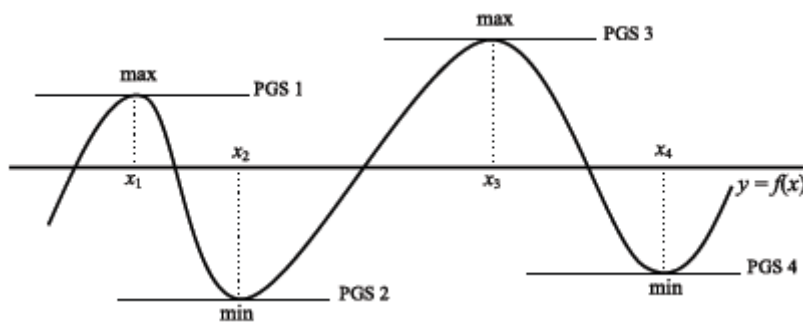
### 8.5.3 Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Maksimum dan Minimum

Setelah menemukan konsep fungsi naik dan turun, kita akan melanjutkan pembelajaran ke permasalahan maksimum dan minimum serta titik belok suatu fungsi. Tentu saja, kita masih melakukan pengamatan terhadap garis singgung kurva. Aplikasi yang akan dibahas adalah permasalahan titik optimal fungsi dalam interval terbuka dan tertutup, titik belok, dan permasalahan kecepatan maupun percepatan.

#### 1. Menemukan konsep maksimum dan minimum di interval terbuka

**Masalah:** Seorang anak menarik sebuah tali yang cukup panjang. Kemudian dia membuat gelombang dari tali dengan menghentakkan tali tersebut ke atas dan ke bawah sehingga terbentuk sebuah gelombang berjalan. Dia terus mengamati gelombang tali yang dia buat. Dia melihat bahwa gelombang tali memiliki puncak maksimum maupun minimum. Dapatkah kamu menemukan konsep nilai maksimum ataupun minimum dari sebuah fungsi?

**Penyelesaian :** Gradien garis singgung adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu  $x$  positif atau turunan pertama dari titik singgungnya.

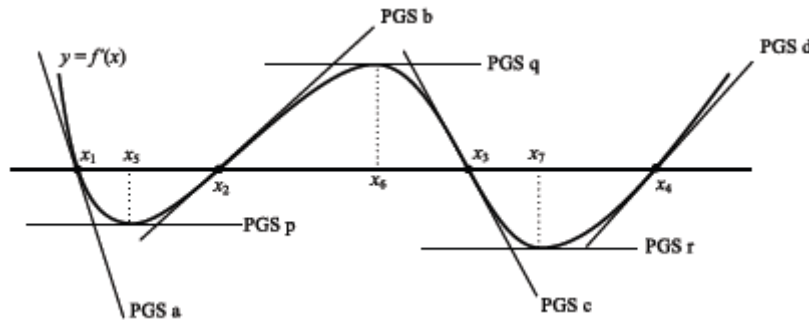


Gambar Sketsa gelombang tali

Coba kamu amati gambar di atas. Garis singgung (PGS 1, PGS 2, PGS 3 dan PGS 4) adalah garis horizontal atau  $y = c$ ,  $c$  konstan, sehingga gradiennya adalah  $m = 0$ . Keempat garis singgung

tersebut menyinggung kurva di titik puncak/optimal, di absis  $x = x_1, x = x_2, x = x_3, \text{ dan } x = x_4$ . Dari pengamatan, dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi akan mencapai optimal (maksimum/minimum) pada suatu daerah jika  $m = f'(x) = 0$ . Titik yang memenuhi  $f'(x) = 0$  disebut titik stasioner. Berikutnya, kita akan mencoba menemukan hubungan antara titik stasioner dengan turunan kedua fungsi. Pada Gambar sketsa gelombang tali,  $f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0, f'(x_3) = 0 \text{ dan } f'(x_4) = 0$ . Artinya kurva turunan pertama fungsi melalui sumbu  $x$  di titik  $A(x_1, 0), B(x_2, 0), C(x_3, 0) \text{ dan } D(x_4, 0)$ .

Coba kamu amati kurva turunan pertama fungsi dan garis singgungnya sebagai berikut. Kesimpulan apa yang kamu dapat berikan?



Gambar Hubungan garis singgung kurva  $m = f'(x)$  dengan titik stasioner

Titik  $A(x_1, y_1)$  adalah titik maksimum pada Gambar sketsa gelombang tali sehingga titik dengan absis  $x = x_1$  adalah titik stasioner karena  $f'(x_1) = 0$ . Per-samaan garis singgung kurva dengan gradien  $M$  pada fungsi  $m = f'(x)$  menyinggung di titik  $x = x_1$  membentuk sudut di kuadran IV sehingga nilai tangen sudut bernilai negatif. Hal ini mengakibatkan  $M = m' = f''(x_1) < 0$ . Dengan kata lain, titik  $A(x_1, y_1)$  adalah titik maksimum jika  $f'(x_1) = 0 \text{ dan } f''(x_1) < 0$ .

Kesimpulan: Lihat Gambar hubungan garis singgung kurva, misalkan gradien persamaan garis singgung kurva  $m = f'(x)$  adalah  $M$  sehingga  $M = m' = f''(x)$  maka hubungan turunan kedua dengan titik stasioner adalah:

PGS	Gradien $M = m' = f''(x)$	Jenis Titik	Pergerakan kurva
a	$M_a = f''(x_1) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
b	$M_b = f''(x_2) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
c	$M_c = f''(x_3) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
d	$M_d = f''(x_4) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
p	$M_p = f''(x_5) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun
q	$M_q = f''(x_6) = 0$	T. Belok	Naik-Belok-Naik
r	$M_r = f''(x_7) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun

Tabel Hubungan turunan kedua fungsi dengan titik optimal (stasioner)

**Sifat:** Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan memiliki turunan pertama dan kedua pada  $x_1 \in I$  sehingga:

1. Jika  $f'(x_1) = 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut stasioner/ kritis
2. Jika  $f'(x_1) = 0 \text{ dan } f''(x_1) > 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik balik minimum fungsi
3. Jika  $f'(x_1) = 0 \text{ dan } f''(x_1) < 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik balik maksimum fungsi
4. Jika  $f''(x_1) = 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik belok

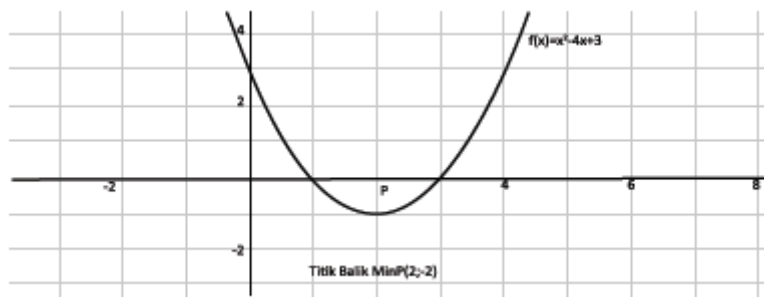
**Contoh Soal:** Tentukanlah titik balik fungsi kuadrat  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

**Penyelesaian 1 (Berdasarkan Konsep Fungsi Kuadrat)**

Dengan mengingat kembali pelajaran fungsi kuadrat. Sebuah fungsi  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mempunyai titik balik  $B(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  dimana fungsi mencapai maksimum untuk  $a < 0$  dan mencapai minimum untuk  $a > 0$  sehingga fungsi  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  mempunyai titik balik minimum pada  $B(-\frac{-4}{2(1)}, -\frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{4(1)}) = B(2, -1)$ .

**Penyelesaian 2 (Berdasarkan Konsep Turunan)**

Dengan menggunakan konsep turunan di atas maka fungsi  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  mempunyai stasioner:  $f'(x) = 2x - 4 = 0$  atau  $x = 2$  dan dengan mensubstitusi nilai  $x = 2$  ke fungsi  $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$  diperoleh  $y = -1$  sehingga titik stasioner adalah  $B(2, -1)$ . Mari kita periksa jenis keoptimalan fungsi tersebut dengan melihat nilai turunan keduanya pada titik tersebut.  $f''(x) = 2$  atau  $f''(2) = 2 > 0$ . Berdasarkan konsep, titik tersebut adalah titik minimum. Jadi, titik balik fungsi kuadrat  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  adalah minimum di  $B(2, -1)$ .



Gambar Titik balik fungsi kuadrat  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

»»»» d6303637439e249c7e86b5a3a3b60fea7578a1c9

**c. Interval Fungsi Naik/Turun Fungsi Lintasan**

Coba kamu amati kembali Gambar seketsa lintasan lemparan Secara geometri, jelas kita lihat interval fungsi naik/turun pada masing-masing lintasan, seperti pada tabel berikut:

Lintasan ke	Fungsi	Secara Geometri	
		Interval Naik	Interval Turun
1	$y = -0,25x^2 + 3x$	$0 < x < 6$	$6 < x < 12$
2	$y = -0,6x^2 + 6x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$
3	$y = -0,4x^2 + 4x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$

Mari kita tunjukkan kembali interval fungsi naik/turun dengan menggunakan konsep turunan yang telah kita pelajari sebelumnya.

**Fungsi naik/turun pada lintasan lemparan anak 1**

Fungsi yang telah diperoleh adalah  $y = -0,25x^2 + 3x$  sehingga  $y = -0,5x^2 + 3x$ . Jadi,

fungsi akan naik:  $y = -0,5x^2 + 3x \Leftrightarrow x < 6$

fungsi akan turun:  $y = -0,5x^2 + 3x < 0 \Leftrightarrow x > 6$

Menurut ilustrasi, batu dilempar dari posisi awal  $O(0,0)$  dan jatuh pada posisi akhir  $Q(12,0)$  sehingga lintasan lemparan akan naik pada  $0 < x < 6$  dan turun pada  $6 < x < 12$ .

Bagaimana menunjukkan interval fungsi naik/turun dengan konsep turunan pada fungsi lintasan lemparan anak 2 dan anak 3 diserahkan kepadamu.

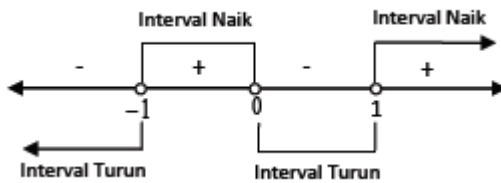
**Contoh Soal:** Tentukanlah interval fungsi naik/turun fungsi  $f(x) = x^4 - 2x^2$

**Alternatif Penyelesaian**

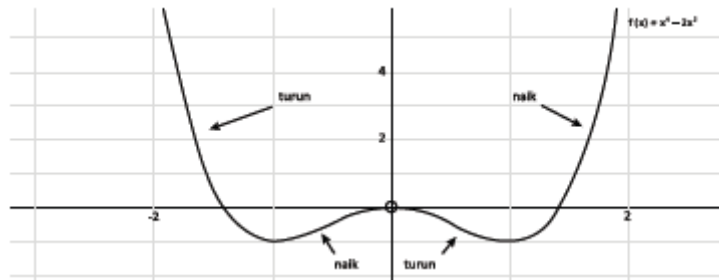
Berdasarkan konsep, sebuah fungsi akan naik jika  $f'(x) > 0$  sehingga:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 1 \text{ atau } x = -1$$

Dengan menggunakan interval.



Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval  $-1 < x < 0$  atau  $x > 1$  tetapi turun pada interval  $x < -1$  atau  $0 < x < 1$ . Perhatikan sketsa kurva  $f(x) = x^4 - 2x^2$  tersebut.



Gambar Fungsi naik/turun kurva  $f(x) = x^4 - 2x^2$

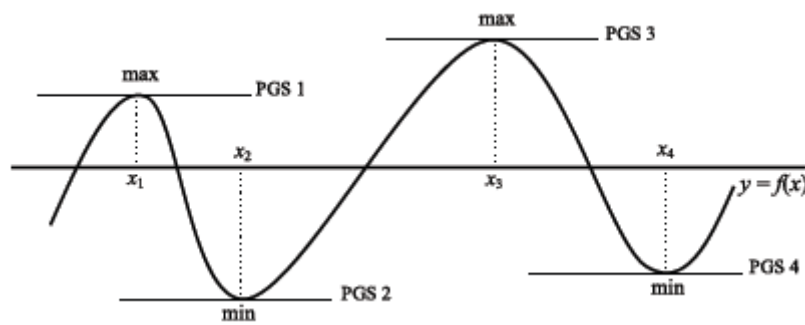
#### 8.5.4 Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Maksimum dan Minimum

Setelah menemukan konsep fungsi naik dan turun, kita akan melanjutkan pembelajaran ke permasalahan maksimum dan minimum serta titik belok suatu fungsi. Tentu saja, kita masih melakukan pengamatan terhadap garis singgung kurva. Aplikasi yang akan dibahas adalah permasalahan titik optimal fungsi dalam interval terbuka dan tertutup, titik belok, dan permasalahan kecepatan maupun percepatan.

##### 1. Menemukan konsep maksimum dan minimum di interval terbuka

**Masalah:** Seorang anak menarik sebuah tali yang cukup panjang. Kemudian dia membuat gelombang dari tali dengan menghentakkan tali tersebut ke atas dan ke bawah sehingga terbentuk sebuah gelombang berjalan. Dia terus mengamati gelombang tali yang dia buat. Dia melihat bahwa gelombang tali memiliki puncak maksimum maupun minimum. Dapatkah kamu menemukan konsep nilai maksimum ataupun minimum dari sebuah fungsi?

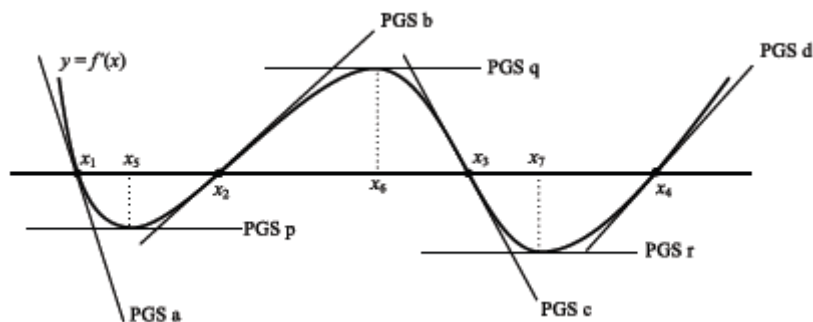
**Penyelesaian :** Gradien garis singgung adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif atau turunan pertama dari titik singgungnya.



Gambar Sketsa gelombang tali

Coba kamu amati gambar di atas. Garis singgung (PGS 1, PGS 2, PGS 3 dan PGS 4) adalah garis horizontal atau  $y = c$ ,  $c$  konstan, sehingga gradiennya adalah  $m = 0$ . Keempat garis singgung tersebut menyinggung kurva di titik puncak/optimal, di absis  $x = x_1, x = x_2, x = x_3$ , dan  $x = x_4$ . Dari pengamatan, dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi akan mencapai optimal (maksimum/minimum) pada suatu daerah jika  $m = f'(x) = 0$ . Titik yang memenuhi  $f'(x) = 0$  disebut titik stasioner. Berikutnya, kita akan mencoba menemukan hubungan antara titik stasioner dengan turunan kedua fungsi. Pada Gambar sketsa gelombang tali,  $f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0, f'(x_3) = 0$  dan  $f'(x_4) = 0$ . Artinya kurva turunan pertama fungsi melalui sumbu  $x$  di titik  $A(x_1, 0), B(x_2, 0), C(x_3, 0)$  dan  $D(x_4, 0)$ .

Coba kamu amati kurva turunan pertama fungsi dan garis singgungnya sebagai berikut. Kesimpulan apa yang kamu dapat berikan?

Gambar Hubungan garis singgung kurva  $m = f'(x)$  dengan titik stasioner

Titik  $A(x_1, y_1)$  adalah titik maksimum pada Gambar sketsa gelombang tali sehingga titik dengan absis  $x = x_1$  adalah titik stasioner karena  $f'(x_1) = 0$ . Per-samaan garis singgung kurva dengan gradien  $M$  pada fungsi  $m = f'(x)$  menyinggung di titik  $x = x_1$  membentuk sudut di kuadran IV sehingga nilai tangen sudut bernilai negatif. Hal ini mengakibatkan  $M = m' = f''(x_1) < 0$ . Dengan kata lain, titik  $A(x_1, y_1)$  adalah titik maksimum jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) < 0$ .

Kesimpulan: Lihat Gambar hubungan garis singgung kurva, misalkan gradien persamaan garis singgung kurva  $m = f'(x)$  adalah  $M$  sehingga  $M = m' = f''(x)$  maka hubungan turunan kedua dengan titik stasioner adalah:

PGS	Gradien $M = m' = f''(x)$	Jenis Titik	Pergerakan kurva
a	$M_a = f''(x_1) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
b	$M_b = f''(x_2) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
c	$M_c = f''(x_3) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
d	$M_d = f''(x_4) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
p	$M_p = f''(x_5) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun
q	$M_q = f''(x_6) = 0$	T. Belok	Naik-Belok-Naik
r	$M_r = f''(x_7) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun

Tabel Hubungan turunan kedua fungsi dengan titik optimal (stasioner)

**Sifat:** Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan memiliki turunan pertama dan kedua pada  $x_1 \in I$  sehingga:

1. Jika  $f'(x_1) = 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut stasioner/ kritis
2. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) > 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik balik minimum fungsi
3. Jika  $f'(x_1) = 0$  dan  $f''(x_1) < 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik balik maksimum fungsi
4. Jika  $f''(x_1) = 0$  maka titik  $(x_1, f(x_1))$  disebut titik belok

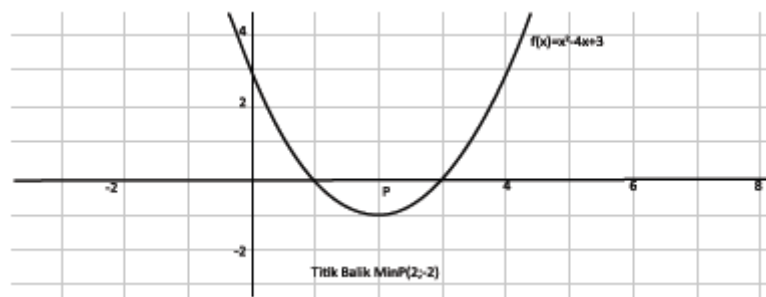
**Contoh Soal:** Tentukanlah titik balik fungsi kuadrat  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

**Penyelesaian 1 (Berdasarkan Konsep Fungsi Kuadrat)**

Dengan mengingat kembali pelajaran fungsi kuadrat. Sebuah fungsi  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mempunyai titik balik  $B(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$  dimana fungsi mencapai maksimum untuk  $a < 0$  dan mencapai minimum untuk  $a > 0$  sehingga fungsi  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  mempunyai titik balik minimum pada  $B(-\frac{-4}{2(1)}, -\frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{4(1)}) = B(2, -1)$ .

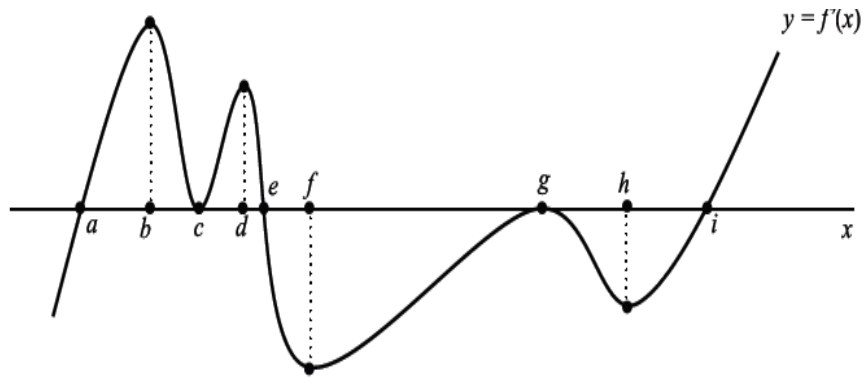
**Penyelesaian 2 (Berdasarkan Konsep Turunan)**

Dengan menggunakan konsep turunan di atas maka fungsi  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  mempunyai stasioner:  $f'(x) = 2x - 4 = 0$  atau  $x = 2$  dan dengan mensubstitusi nilai  $x = 2$  ke fungsi  $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$  diperoleh  $y = -1$  sehingga titik stasioner adalah  $B(2, -1)$ . Mari kita periksa jenis keoptimalan fungsi tersebut dengan melihat nilai turunan keduanya pada titik tersebut.  $f''(x) = 2$  atau  $f''(2) = 2 > 0$ . Berdasarkan konsep, titik tersebut adalah titik minimum. Jadi, titik balik fungsi kuadrat  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  adalah minimum di  $B(2, -1)$ .

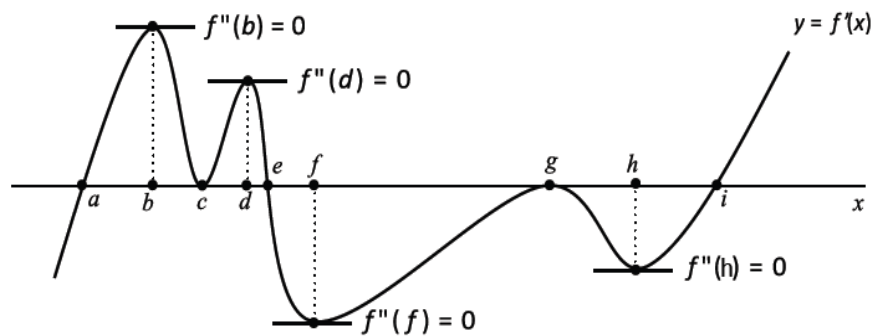
Gambar Titik balik fungsi kuadrat  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 

**Contoh Soal:**

Analisislah kurva fungsi  $y = f(x)$  berdasarkan sketsa kurva turunan pertamanya berikut.

Gambar Sketsa turunan pertama suatu fungsi  $y = f(x)$ **Alternatif Penyelesaian**

Secara geometri sketsa turunan pertama fungsi di atas, nilai setiap fungsi di bawah sumbu  $x$  adalah negatif dan bernilai positif untuk setiap fungsi di atas sumbu  $x$ .

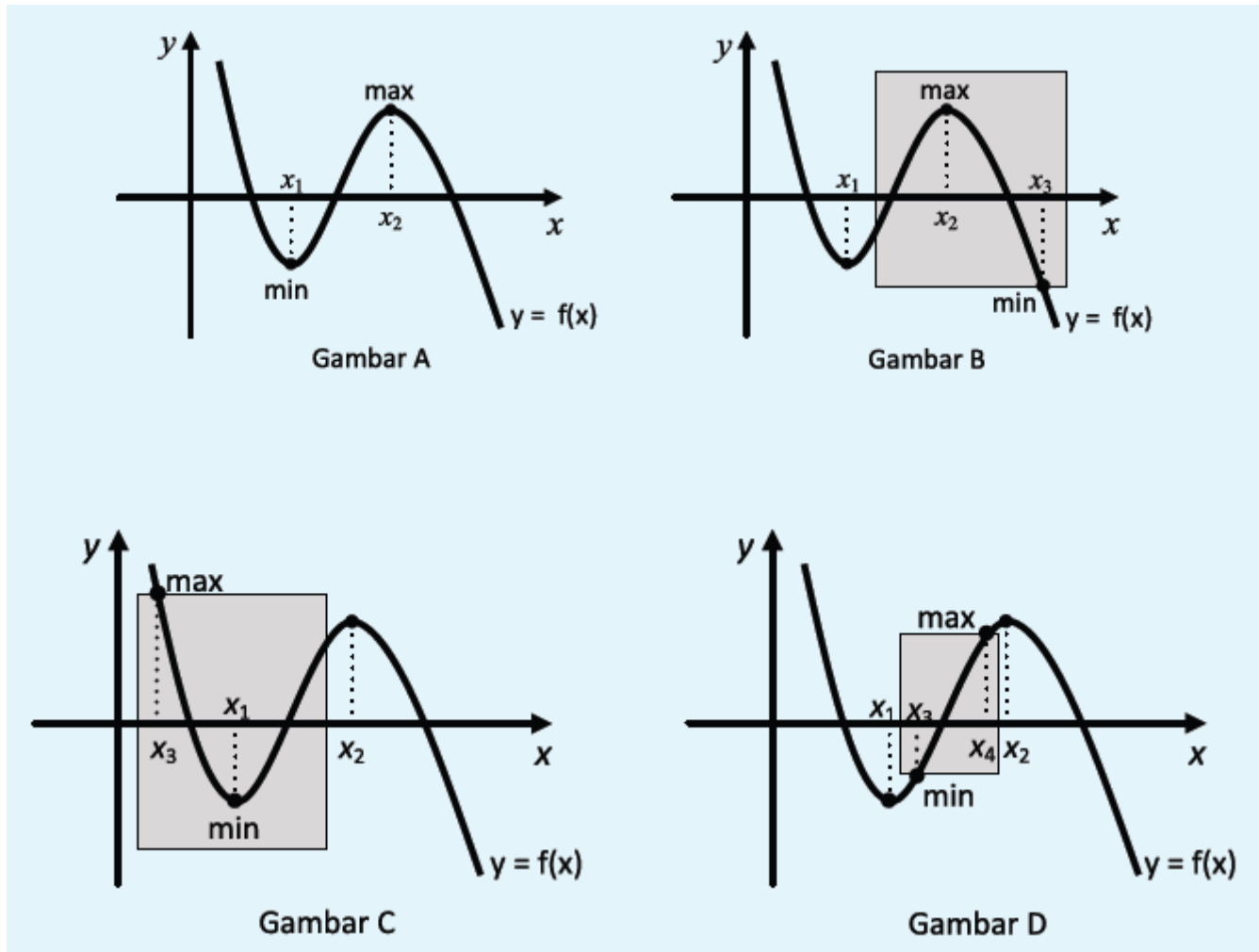
Gambar Sketsa turunan pertama suatu fungsi  $y = f(x)$ 

Dengan demikian, melalui pengamatan dan terhadap grafik turunan pertama dan konsep turunan maka fungsi  $y = f(x)$  akan:

- Naik ( $f'(x) > 0$ ) pada  $a < x < c$ ,  $c < x < e$  dan  $x > i$
- Turun ( $f'(x) < 0$ ) pada  $x < a$ ,  $e < x < g$  dan  $g < x < i$
- Stasioner ( $f'(x) = 0$ ) pada absis  $x = a$ ,  $x = c$ ,  $x = e$ ,  $x = g$  dan  $x = i$
- Optimal maksimum ( $f'(x) = 0$  dan  $f''(x) < 0$ ) pada absis  $x = e$
- Optimal minimum ( $f'(x) = 0$  dan  $f''(x) > 0$ ) pada absis  $x = a$  dan  $x = i$ .
- Titik belok ( $f''(x) = 0$ ) pada absis  $x = b$ ,  $x = c$ ,  $x = d$ ,  $x = f$ ,  $x = g$  dan  $x = h$

**2. Menemukan konsep maksimum dan minimum di interval terbuka****Contoh Masalah :**

Coba kamu amati posisi titik maksimum dan minimum dari beberapa gambar berikut.



Gambar Titik maksimum dan minimum suatu fungsi

Kesimpulan apa yang kamu peroleh?

#### Alternatif Penyelesaian :

Gambar A di atas telah kita bahas pada permasalahan sebelumnya. Jika kamu amati dengan teliti, perbedaan antara gambar A dengan ketiga gambar lainnya (B, C dan D) adalah terdapat sebuah daerah yang membatasi kurva. Dengan demikian, gambar A adalah posisi titik maksimum/minimum sebuah fungsi pada daerah terbuka dan ketiga gambar lainnya adalah posisi titik maksimum/minimum sebuah fungsi pada daerah tertutup. Nilai maksimum dan minimum fungsi tidak hanya bergantung pada titik stasioner fungsi tersebut tetapi bergantung juga pada daerah asal fungsi.

#### Contoh Soal :

Sebuah partikel diamati pada interval waktu (dalam menit) tertentu berbentuk kurva  $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$  pada  $0 \leq t \leq 6$ . Tentukanlah nilai optimal pergerakan partikel tersebut.

#### Alternatif Penyelesaian :

Daerah asal fungsi adalah  $t \mid 0 \leq t \leq 6$  Titik stasioner  $f'(t) = 0$   
 $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$  sehingga  $f'(t) = 3(t^2 - 6t + 8)$  dan  
 $f''(t) = 6t - 18$



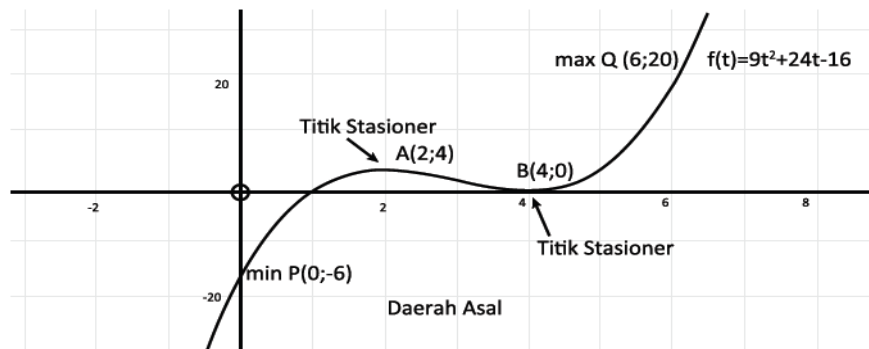
$$f'(t) = 3(t-2)(t-4) = 0$$

$$t = 2 \rightarrow f(2) = -16 \text{ dan } t = 4 \rightarrow f(4) = 20$$

Karena daerah asal  $t \mid 0 \leq t \leq 6$  dan absis  $t = 2, t = 4$  ada dalam daerah asal sehingga:

$$t = 0 \rightarrow f(0) = -16 \text{ dan } t = 6 \rightarrow f(6) = 20$$

Nilai minimum keempat titik adalah -16 sehingga titik minimum kurva pada daerah asal adalah A(0,-16) dan nilai maksimum keempat titik adalah 20 sehingga titik maksimum kurva pada daerah asal adalah B(6,20). Perhatikan gambar.



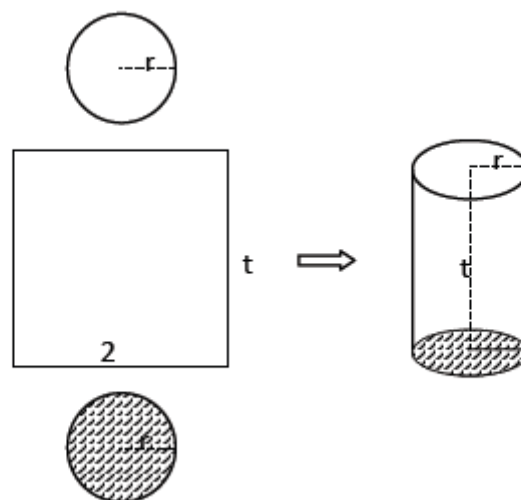
Gambar Titik optimal kurva  $f(t) = 9t^2 + 24t - 16$  untuk  $0 \leq t \leq 6$ .

### Contoh Masalah :

Seorang anak berencana membuat sebuah tabung dengan alas berbentuk lingkaran tetapi terbuat dari bahan yang berbeda. Tabung yang akan dibuat harus mempunyai volume 43.120 cm<sup>3</sup>. Biaya pembuatan alas adalah Rp150,- per cm<sup>2</sup>, biaya pembuatan selimut tabung adalah Rp80,- per cm<sup>2</sup> sementara biaya pembuatan atap adalah Rp50,- per cm<sup>2</sup>. Berapakah biaya minimal yang harus disediakan anak tersebut?

### Alternatif Penyelesaian :

Mari kita sketsa tabung yang akan dibuat. Misal-kan  $r$  adalah radius alas dan atap tabung,  $t$  adalah tinggi tabung  $\Pi = \frac{22}{7}$ .



Gambar Tabung

$$V = \frac{22}{7}r^2t = 43120 \Leftrightarrow t = \frac{7}{22} \times \frac{43120}{r^2}$$

$$\text{Biaya} = (\text{Luas alas} \times \text{biaya alas}) + (\text{Luas selimut} \times \text{biaya selimut}) + (\text{Luas atap} \times \text{biaya atap})$$

$$\text{Biaya} = \frac{22}{7}r^2 \times 50 + \frac{22}{7}rt \times 80 + \frac{22}{7}r^2 \times 50$$

$$\text{Biaya} = \frac{22}{7}r^2 \times 150 + \frac{22}{7}r \times \frac{7}{22} \times \frac{43120}{r^2} \times 80 + \frac{22}{7}r^2 \times 50$$

$$\text{Biaya} = \frac{22}{7}r^2 \times 200 + \frac{43120}{r} \times 80$$

**Biaya B(r) adalah fungsi atas radius r (dalam Rupiah).**

$$B(r) = \frac{4400}{7}r^2 + \frac{3449600}{r}$$

$$B'(r) = \frac{8800}{7}r - \frac{3449600}{r^2} = 0$$

$$\frac{88}{7}r^3 = \frac{34496}{r^2}$$

$$r^3 = 2744 = 14^3 \Leftrightarrow r = 14$$

Jadi biaya minimum

$$= \frac{22}{7} \times 14^2 \times 200 + \frac{43120}{14} \times 80$$

$$= 616 \times 200 + 3080 \times 80$$

$$= 123200 + 246400$$

$$= 369.600$$

Biaya minimum adalah Rp369.600,-

## 8.6 Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal



## 9. Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

- 9.1 Pengertian Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar
- 9.2 Sifat-Sifat Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar
- 9.3 Penerapan Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar





## **Bibliography**

**Books**

**Articles**

