PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, March 2013

1.1 Pernyataan Berkuantor

Kuantor dari suatu pernyataan adalah istilah yang digunakan untuk menyatakan “berapa banyak” objek di dalam suatu kalimat atau pembicaraan. Selain untuk menyatakan kuantifikasi, kuantor juga biasa digunakan untuk mengubah kalimat terbuka menjadi suatu kalimat deklaratif.

Definisi : Suatu fungsi pernyataan adalah suatu kalimat terbuka di dalam semesta pembicaraan (semesta pembicaraan diberikan secara eksplisit atau implisit). Perhatikan dua pernyataan berikut: 1. Semua planet dalam sistem tata surya mengelilingi matahari. 2. Ada ikan di laut yang menyusui. Pernyataan yang mengandung kata semua atau setiap seperti pada pernyataan (1) disebut pernyataan berkuantor universal (kuantor umum). Ungkapan untuk semua atau untuk setiap, disebut kuantor universal atau kuantor umum. Sedangkan pernyataan yang mengandung kata ada atau beberapa seperti pada pernyataan (2) disebut pernyataan berkuantor eksistensial (kuantor khusus). Ungkapan beberapa atau ada disebut kuantor eksistensial atau kuantor khusus.

1.2 Pernyataan Penyangkal (Lingkaran)

Dari sebuah pernyataan tunggal (atau majemuk), kita bisa membuat sebuah pernyataan baru berupa “ingkaran” dari pernyataan itu. “ingkaran” disebut juga “negasi” atau “penyangkalan”. Ingkaran menggunakan operasi uner (monar) “” atau “”.

Jika suatu pernyataan p benar, maka negasinya p salah, dan jika sebaliknya pernyataan p salah, maka negasinya p benar.

Perhatikan cara membuat ingkaran dari sebuah pernyataan serta menentukan nilai kebenarannya!

1. p : kayu memuai bila dipanaskan (S)
   p : kayu tidak memuai bila dipanaskan (B)
2. r : 3 bilangan positif (B)
   r : (cara mengingkar seperti ini salah)

3 bilangan negative

(Seharusnya) 3 bukan bilangan positif (S)

Nilai kebenaran

Jika p suatu pernyataan benilai benar, maka p bernilai salah dan sebaliknya jika p bernilai salah maka p bernilai benar

Konjungsi

Gabungan dua pernyataan tunggal yang menggunakan kata penghubung “dan” sehingga terbentuk pernyataan majemuk disebut konjungsi. Konjungsi mempunyai kemiripan dengan operasi irisan () pada himpunan. Sehingga sifat-sifat irisan dapat digunakan untuk mempelajari bagian ini.

1.3 Penarikan Kesimpulan

Lists are useful to present information in a concise and/or ordered way[1].

1.3.1 Numbered List

1. The first item
2. The second item
3. The third item

1.3.2 Bullet Points

- The first item
- The second item
- The third item

1.3.3 Descriptions and Definitions

Name Description
Word Definition
Comment Elaboration

[1] Footnote example...

2.1 Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung

This is an example of theorems.

2.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

Theorem 2.1.1 — Name of the theorem. In $E = \mathbb{R}^n$ all norms are equivalent. It has the properties:

$$\big| ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \big| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \tag{2.1}$$

$$||\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{2.2}$$

2.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

Theorem 2.1.2 A set $\mathscr{D}(G)$ in dense in $L^2(G)$, $|\cdot|_0$.

2.2 Kontradiksi

This is an example of a definition. A definition could be mathematical or it could define a concept.

Definition 2.2.1 — Definition name. Given a vector space E, a norm on E is an application, denoted $||\cdot||$, E in $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ such that:

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

$$||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| \tag{2.4}$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \tag{2.5}$$

2.3 Induksi Matematis

Notation 2.1. *Given an open subset G of $\mathbb{R}^n$, the set of functions φ are:*

1. *Bounded support G;*
2. *Infinitely differentiable;*

a vector space is denoted by $\mathscr{D}(G)$.

2.4 Remarks

This is an example of a remark.

R The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.5 Corollaries

This is an example of a corollary.

Corollary 2.5.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.6 Kontradiksi

This is an example of propositions.

2.6.1 Several equations

Proposition 2.6.1 — Proposition name. It has the properties:

$$\big| ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \big| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \tag{2.6}$$

$$||\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{2.7}$$

2.6.2 Single Line

Proposition 2.6.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathscr{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

2.7 Examples

This is an example of examples.

2.7.1 Equation and Text

■ **Example 2.1** Let $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ and denoted by: $x^0 = (1, 1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \tag{2.8}$$

The function f has bounded support, we can take $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$ for all $\varepsilon \in]0; 5/2 - \sqrt{2}[$. ■

2.7.2 Paragraph of Text

■ **Example 2.2 — Example name.** Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. ■

2.8 Exercises

This is an example of an exercise.

Exercise 2.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

2.9 Problems

Problem 2.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

2.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.
Vocabulary 2.1 — Word. Definition of word.

4.1 Pengertian Program Linear Dua Variabel

4.2 Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

4.3 Nilai Optimum Fungsi Objektif

4.3.1 Teorema

Fungsi dalam pembuatan model matematika dinyatakan dalam bentuk z = ax + by. Bentuk inilah yang akan dioptimumkan baik itu minimum ataupun maksimum yang disebut sebagai fungsi objektif. Jadi, fungsi Objektif dari program linear adalah fungsi z = ax + by yang akan ditentukan nilai optimumnya. Ada beberapa cara untuk mencari nilai optimum (maksimum atau minimum) fungsi objektif, di antaranya yaitu:

- Metode Uji Titik Pojok
- Metode Garis Selidik

Dari kedua metode tersebut, metode yang paling mudah dan sering diterapkan adalah metode uji titik pojok. Metode Uji Titik Pojok adalah suatu metode dengan mensubstitusikan titik-titik pojok pada suatu daerah himpunan penyelesaian (DHP) ke fungsi objektif. Nilai maksimum berarti nilai yang paling besar yang kita ambil, begitu juga sebaliknya untuk nilai minimum kita ambil paling kecil.

Untuk menentukan nilai optimum baik nilai minimum atau maksimum dengan metode uji titik pojok, kita bisa melakukan langkah-langkah di bawah ini:

1. Buatlah model matematikanya yang terdiri dari fungsi kendala dan fungsi tujuan.
2. Tentukan daerah himpunan penyelesaiiannya (DHP) dan titik pojoknya.
3. Substitusikan semua titik pojok ke fungsi tujuannya (fungsi objektifnya), dan tentukan yang diminta apakah nilai maksimum atau minimum.

Misalnya untuk gambar DHP di bawah ini kita bisa lihat bahwa titik pojok terdapat pada titik A, titik B, dan titik C.

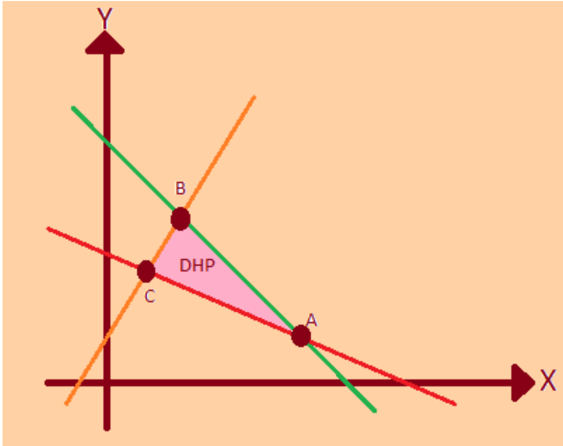
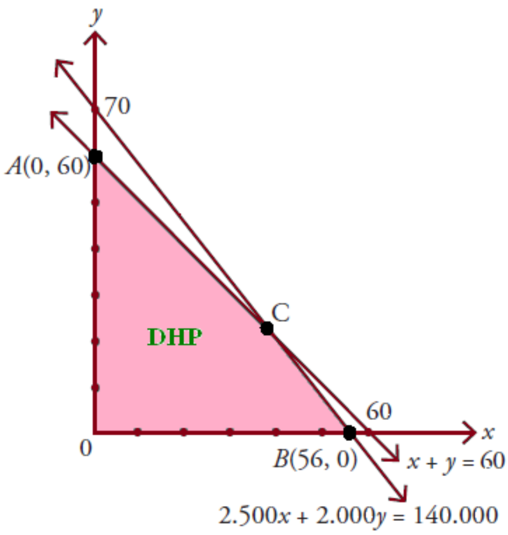


Figure 4.1: Daerah Hasil Penyelesaian (DHP)

4.3.2 Contoh Soal

■ **Example 4.1** Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum fungsi tujuan f(x,y) = 1500x + 1250y berdasarkan DHP berikut ini. ■



Jawab:
Diketahui bahwa titik pojok yang terdapat pada gambar di atas adalah titik A,b,C dan O. Titik C belum mempunyai titik koordinat sehingga kita harus mencari terlebih dahulu dengan cara eliminasi kedua persamaan garis.
Menentukan titik C:

$x + y = 60$	$\times 2.000$	$2.000x + 2.000y = 120.000$
$2.500x + 2.000y = 140.000$	$\times 1$	$2.500x + 2.000y = 140.000$ $-$
		$-500x = -20.000$
		$x = 40$

Substitusi x=40 ke persamaan x + y = 60
x + y = 60
40 + y = 60

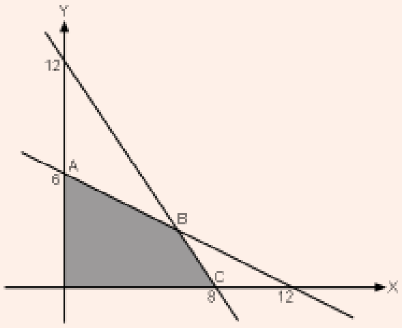
y = 20.
Sehingga titik C adalah C(40,20).
Substitusi semua titik pojok ke fungsi tujuan : f(x,y) = 1500x + 1250y.

A(0,60)	f = 1500(0) + 1250(60) = 75000
B(56,0)	f = 1500(56) + 1250(0) = 84000
C(40,20)	f = 1500(40) + 1250(20) = 85000
D(0,0)	f = 1500(0) + 1250(0) = 0

Jadi fungsi f(x,y) = 1500x + 1250y di titik C(40,20) dengan nilai maksimumnya adalah f = 85000. Sedangkan untuk titik minimum f(x,y) = 1500x + 1250y di titik C(0,0) dengan nilai minimumnya adalah f = 0.

4.3.3 Soal Latihan

Exercise 4.1
1. Tentukan nilai maksimum f(x,y) = 3x + 4y pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut: $x+2y \leq 10, 4x+3y \leq 24, x \geq 0, y \geq 0$.
2. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi objektif z = 2x + 3y yang memenuhi $x+y \leq 7, x \geq 0$, dan $y \geq 0, x, y \in R$.
3. Tentuan nilai maksimum Z = 2x + 5y dari daerah penyelesaian (daerah yang diarsir) pada gambar di bawah ini:



4.4 Penerapan Program Linier Dua Variabel

Program linear banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam bidang ekonomi, perdagangan, dan pertanian.

Misalkan dalam bidang perdagangan atau pengusaha, para pedagang atau pengusaha tentu ingin memperoleh keuntungan maksimum. Sebelum melakukan transaksi ataupun pengambilan keputusan dalam usahanya, mereka pasti membuat perhitungan yang matang tentang langkah apa yang harus dilakukan. Oleh karena itu, diperlukan metode yang tepat dalam pengambilan keputusan pedagang atau pengusaha tersebut untuk memperoleh keuntungan maksimum dan meminimumkan kerugian yang mungkin terjadi.

Adapun untuk contoh penerapan lain misalkan sebagai berikut:

- Penerapan dalam Dunia Kerja
  Dalam dunia kerja, matematika telah digunakan sebagai salah satu alat penyaring atau seleksi bagi orang untuk memperoleh pekerjaan yang lebih baik dengan gaji yang lebih tinggi. Juga tidak sedikit yang melibatkan penggunaan matematika atau proses berpikir matematis, misalnya melakukan jual-beli, mengukur luas tanah pekarangan, areal sawah, menimbang beras,gula, dan sembako lainnya, menghitung pengeluaran kebutuhan rumah

tangga, menghitung biaya pembayaran rekening listrik dan PDAM, membayar hutang, dan sebagainya.

- Penerapan dalam Dunia Rumah Tangga
  Suatu saat ketika anda sudah menjadi seorang ibu rumah tangga, yang mengharuskan anda untuk terampil dalam mengelola keuangan rumah tangga, maka anda tidak akan lepas dari penggunaan ilmu matematika terutam bab aljabar. Mulai dari menganalisa pemasukan, mengatur pengeluaran untuk kebutuhan rumah tangga, uang saku anak, tabungan, sampai ke asuransi kesehatan.
- Penerapan dalam Bidang Perdagangan
  Dalam hal perdagangan, ambilah contoh yang paling sederhana, menjual buah-buahan, anda akan dituntut untuk punya kemampuan menganalisis laba rugi, berapa jumlah biaya yang harus dikeluarkan untuk "kulakan", berapa laba tiap kilogram buah dan buah apa saja yang memberi keuntungan maksimum. semua itu sedikit banyak akan menggunakan ilmu matematika khususnya program linier.

Seperti yang telah disinggungkan pada section sebelumnya, ada beberapa metode untuk menyelesaikan masalah program linear dua variabel, di antaranya yang kita bahas adalah metode uji titik pojok. Nah untuk contoh soal yang diambil dari kehidupan sehari-hari sebagai berikut:

■ **Example 4.2** Ling ling membeli 240 ton beras untuk dijual lagi. Ia menyewa dua jenis truk untuk mengangkut beras tersebut. Truk jenis A memiliki kapasitas 6 ton dan truk jenis B memiliki kapasitas 4 ton. Sewa tiap truk jenis A adalah Rp 100.000,00 sekali jalan dan truk jenis B adalah Rp 50.000,00 sekali jalan. Maka Ling ling menyewa truk itu sekurang-kurangnya 48 buah. Berapa banyak jenis truk A dan B yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum? ■

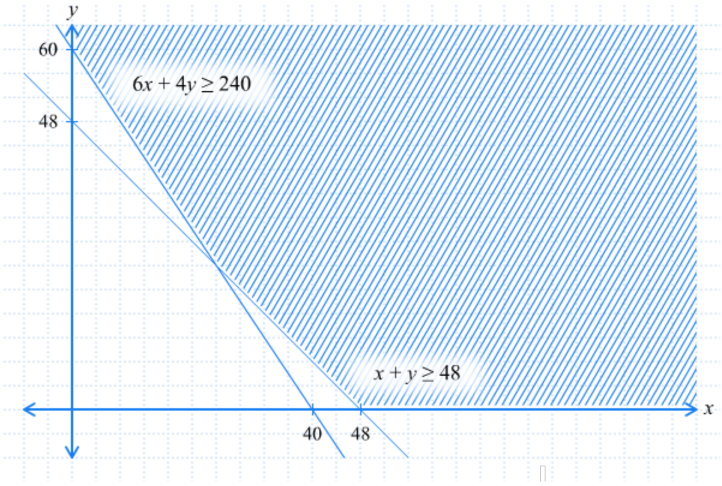
Jawab:
Untuk menyelesaikan masalah ini kita akan menggunakan metode uji titik sudut yang telah kita pelajari pada section nilai optimum fungsi objektif.
Dari soal di atas dapat diperoleh bahwa:

Jenis Truk	Banyak Truk	Kapasitas Truk	Fungsi Objektif
Truk A	x	$6x$	$100.000x$
Truk B	y	$4y$	$50.000y$
	≥ 48	≥ 240	

Dan ketika kita ubah ke model matematika akan seperti berikut:
$x+y \geq 48$,
$6x+4y \geq 240$,
$x \geq 0, y \geq 0$, x, y anggota bilangan cacah

Dengan fungsi objektifnya yaitu f(x, y) = 100.000x + 50.000y.

Dari gambar di atas dapat kita ketahui bahwa titik pojok dari daerah penyelesaian di atas adalah titik potong garis 6x + 4y = 240 dengan sumbu-y, titik potong garis x + y = 48 dengan sumbu-x, dan titik potong garis-garis x + y = 48 dan 6x + 4y = 240.
Titik potong garis 6x + 4y = 240 dengan sumbu-y adalah titik (0, 60). Titik potong garis x + y = 48 dengan sumbu-x adalah titik (48, 0). Sedangkan titik potong garis-garis x + y = 48 dan 6x + 4y =



240 dapat dicari dengan menggunakan cara eliminasi berikut ini.

$$
\begin{array}{rl|l|rl}
x+y & = 48 & \times 4 & 4x+4y & = 192 \\
6x+4y & = 240 & \times 1 & 6x+4y & = 240 \quad - \\
\hline
 & & & -2y & = -48 \\
 & & \Leftrightarrow & y & = \dfrac{-48}{-2} = 24
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l|rl}
x+y & = 48 & \times 6 & 6x+6y & = 288 \\
6x+4y & = 240 & \times 1 & 6x+4y & = 240 \quad - \\
\hline
 & & & 2y & = 48 \\
 & & \Leftrightarrow & y & = \dfrac{48}{2} = 24
\end{array}
$$

Substitusi semua titik pojok ke fungsi tujuan : f(x,y) = 100000x + 50000y.

A(0,60) f = 1500(0) + 1250(60) = 3000000
B(48,0) f = 1500(48) + 1250(0) = 4800000
C(24,24) f = 1500(24) + 1250(24) = 3600000
D(0,0) f = 1500(0) + 1250(0) = 0

Jadi Dari ketiga hasil tersebut, dapat diperoleh bahwa agar biaya yang dikeluarkan minimum, Ling ling harus menyewa 60 truk jenis B dan tidak menyewa truk jenis A.

■ **Example 4.3** Seorang pedagang menjual buah mangga dan pisang dengan menggunaknan gerobak. Pedagang tersebut membeli magga dengan harga Rp.8.000,00/kg dan pisang Rp.6000,00/kg. Modal yang tersedia Rp. 1.200.000,00 dan gerobaknya hanya dapat menampung mangga dan pisang sebanyak 180 kg. jika harga jual mangga Rp.9.200,00/kg dan pisang Rp.7000,00/kg, maka tentukanlah laba maksimum yang diperoleh pedagang tersebut!

■

Jawab:
Karena ditanya laba maksimum, maka fungsi tujuan/fungsi objektifnya adalah keuntungan dari menjual buah mangga dan buah pisang perkilonya.
Berikut untuk penjualan:
mangga = 9200 - 8000 = 1200
pisang = 7000 - 6000 = 1000

misalkan:
mangga = x
pisang = y

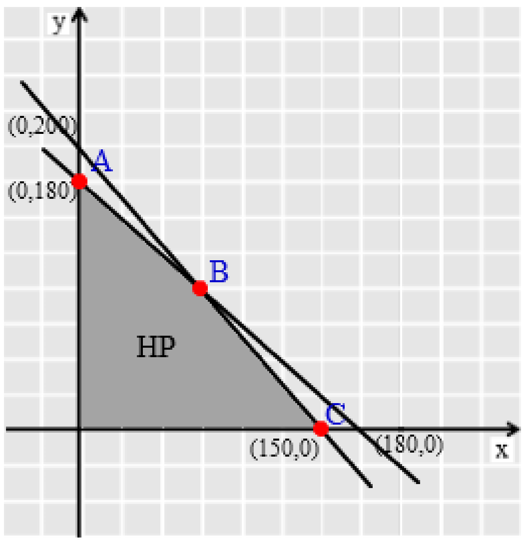
maka fungsi objektifnya adalah:
f(x,y)=1200x + 1000y

Model matematika atau sistem pertidaksamaan yang memenuhi soal tersebut adalah:
x + y <= 180
8000x + 6000y <= 1200000 –> 4x + 3y <=600
x>=0
y>=0

Titik potong masing-masing garis terhadap sumbu x dan sumbuy:
Garis x + y = 180
untuk x = 0, y = 180 –> (0,180)
untuk y = 0, x = 180 –> (180,0)

Garis 4x + 3y = 600
untuk x = 0, y = 200 –> (0,200)
untuk y = 0, x = 150 –> (150,0)

Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan adalah:



Dari grafik diketahui ada tiga titik pojok yaitu A, B dan C. Titik C merupakan perpotongan antara garis x + y = 180 dengan 4x + 3y = 600.

x + y = 180 | x3 | 3x + 3y = 540
4x + 3y = 600 | x1 | 4x + 3y = 600 dikurangi.
maka -x = -60 maka x = 60.

Maka x tersebut dimasukan ke dalam persamaan x + y = 180.

x + y = 180
y = 180-60
y = 120

Kemudian substitusikan titik pojok pada fungsi objektif f(x,y) 1200x + 1000y:

A(0,180)	f = 1000(180) = 180000
B(60,120)	f = 1200(60) + 1000(120) = 192000
C(150,0)	f = 1200(150)= 180000
D(0,0)	f = 1500(0) + 1250(0) = 0

Jadi laba maksimum yang diperoleh pedagang buah adalah Rp.192.000,00

4.4.1 Soal Latihan Penerapan Program Linear Dua Variabel

Exercise 4.2

1. Seorang pembuat kue mempunyai 8 kg tepung dan 2 kg gula pasir. Ia ingin membuat dua macam kue yaitu kue dadar dan kue apem. Untuk membuat kue dadar dibutuhkan 10gram gula pasir dan 20 gram tepung sedangkan untuk membuat sebuahkue apem dibutuhkan 5 gram gula pasir dan 50 gram tepung. Jika kue dadar dijual dengan harga Rp.300,00/buah dan kue apem dijual dengan harga Rp. 500,00/buah, tentukanlah pendapatan maksimum yang dapat diperoleh pembuat kue tersebut!
2. Menjelang hari raya Idul Adha, Pak Mahmud hendak menjual sapi dan kerbau. Harga seekor sapi dan kerbau di Medan berturut-turut Rp.9.000.000,00 dan Rp.8.000.000,00. Modal yang dimiliki pak Mahmud adalah Rp.124.000.000,00. Pak Mahmud menjual sapi dan kerbau di Aceh dengan harga berturut-turut Rp.10.300.000,00 dan Rp.9.200.000,00. Kandang yang ia miliki hanya dapat menampung tidak lebih dari 15 ekor. Agar mencapai keuntungan maksimum, tentukanlah banyak sapi dan kerbau yang harus dibeli pak Mahmud!

Pemakaian Matriks pada Transformasi Geometri

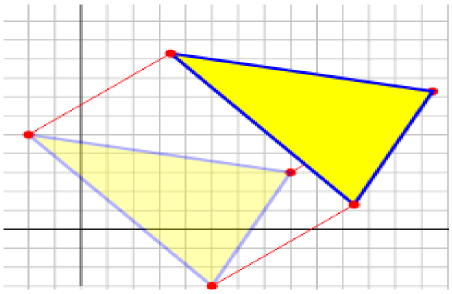
1. **Apa itu Transformasi Geometri?**
   (a) **Pengertian Transformasi Geometri?**

Pengertian transformasi geometri adalah proses mengubah setiap titik koordinat menjadi titik koordinat lain pada bidang tertentu. Transformasi bisa juga dilakukan pada kumpulan titik yang membentuk bidang/bangun tertentu. Jika sobat punya sebuah titik A (x,y) kemudian ditransformasikan oleh transformasi T maka akan menghasilkan titik yang baru A' (x',y'). Secara matematis di tulis:

$$A(x,y) \xrightarrow{t} A'(x',y')$$

1. **Jenis-Jenis Transformasi Geometri**

Sebuah objek dapat diubah dengan melakukan berbagai perlakuan. Di dalam transformasi geometri dikenal adanya 4 jenis transformasi yang bisa dilakukan terdapat sebuah koordinat yaitu menggesernya, mencerminkannya, memutar, memperbesar, atau mengecilkan. Selain 4 transformasi tersebut masih ada yang namanya regangan dan gusuran. Yuk lihat ulasannya satu persatu di bawah ini.



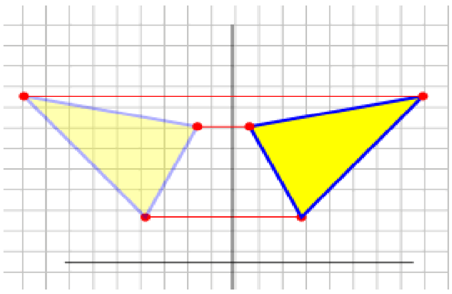
a. Translasi (Pergeseran) Translasi atau pergeseran adalah transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang menurut jarak dan arah tertentu. Sobat bisa mengatakan kalau translasi hanya memindahkan tanpa mengubah ukuran tanpa memutar. Kata kuncinya transformasik ke arah yang sama dan ke jarak yang sama. Misalkan sobat punya sebuah titik T (x,y) yang ditranslasikan menurut (a,b) maka hasil setelah transfromasi adalah:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} T'\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

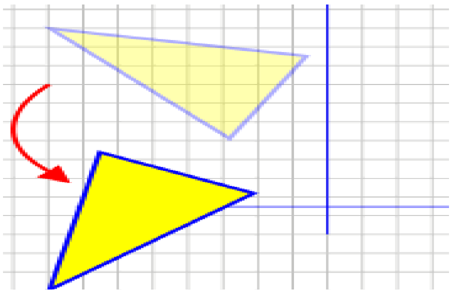
(x’,y’) = (x+a, y+b)
Relasi antara anggota himpunan A ke himpunan B yang mungkin adalah menyukasi atau menyenangi.
Dari contoh di atas, himpunan A tersebut domain (daerah asal) dan himpunan B disebut daerah tujuan (ko-domain) . Sementara itu menyukasi disebut relasi. Himpunan semua anggota ko-domain di sebut range (daerah hasil).

b. Refleksi

Refleksi atau sering disebut dengan istilah pencerminan adalah suatu transformasi dengan memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat-sifat pencerminan pada cermin datar. Berikut tabel transformasi pencerminan:



c. rotasi



Rotasi adalah memutar setiap titik pada bidang dengan menggunakan titik pusat tertentuk yang memiliki jarak sama dengan setiap titik yang diputar (jari-jari). Rotasi tidak mengubah ukuran benda sama sekali. Ada dua macam rotasi, rotasi dengan titik pusat (0,0) dan rotasi dengan titik tertentu P (a,b).

1. Rotasi dengan Titik Pusat (0,0) dengan Sudut Putar α

$$A(x,y) \xrightarrow{R[O,\alpha]} A'(x',y')$$

dimana

x' = x cos α – y sin y' = x sin α + y cos α

atau jika dibuat matriks transformasinya menjadi

$$A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

keterangan

α bernilai + jika arah putaran berlawanan dengan arah jarum jam α bernilai – jika araha putaran searah dengan arah jarum jam

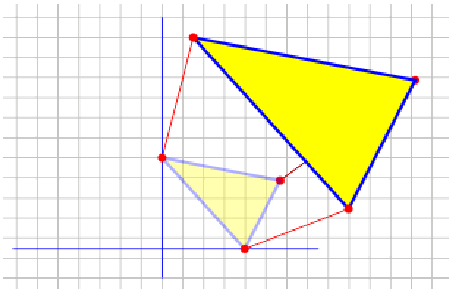
2.Rotasi dengan Titik Pusat (a,b) dengan Sudut Putar α

Jika sobat punya sebuah titik (x,y) yang diputar sebesar α derajat dengant titik pusat P (a,b) maka:

$$A(x,y) \xrightarrow{R[P,\alpha]} A'(x',y')$$

dimana x' – a = (x-a) cos α – (y-b) sin α y' – b = (x-a) sin α + (y-b) cos α

d. Dilatasi (Perkalian)



Selain dipindah, dicerminkan, dan diputar, transformasi juga bisa berbentuk pembesaran atau pengecilan yang disebut dilatasi. Faktor yang menyebabkan diperbesar atau diperkecilnya suatu bangun dinamakan faktor dilatasi. Faktor dilatis dilambangkan dengan k dimana
Jika k > 1 atau k <-1 maka diperbesar Jika -1 < k < 1 maka diperkecil Jika k = 1 atau k = -1 maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran
1. Dilatasi terhadap titik pusat O (0,0)Dilatasi dengan pusat O (0,0) dan faktor dilatasi K maka

$$A(x,y) \xrightarrow{[O,k]} A'(kx,ky)$$

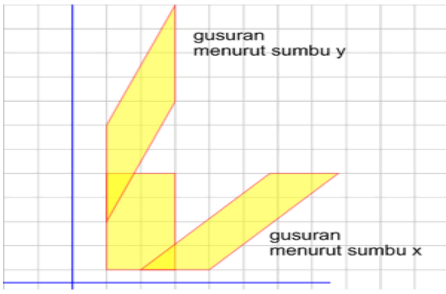
$$A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Dilatasi terhadap titik pusat P (a,b)Jika sebuah titik didilatasi dengan faktor dilatasi k dan titik pust P (a,b) maka

$$A(x,y) \xrightarrow{[P,k]} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

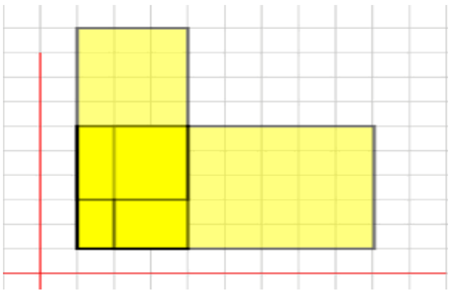
dimana x’-a = k (x-a) y’-b = k (y-b)
e. Gusuran (Shearing) Gusuran artinya menggeser serah sumbu x atau sumbu y dengan faktor skala tertentu. Coba sobat perhatikan gambar di bawah ini:



Segi empat di atas dapat di gusur menurut sumbu x atau sumbu y dengan skala gusur k
Untuk gusuran menurut sumbu x —> Jika nilai k positif maka ke kanan, k negatif maka ke kiri
Untuk gusuran menurut sumbu y —> Jika nilai k positif maka ke atas, k kengatif maka k bawah
Dari penjelasan di atas maka dapat disimpulkan rumus:

Gusuran	Pemetaan	Matriks Transformasi
Menurut Sumbu x	(x', y') → (x + ky, y)	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Menurut Sumbu y	(x',y') → (x, kx + y)	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

e. Gusuran (Shearing)



Regangan atau dalam bahasa inggris disebut streching artinya transformasi dengan menarik sebuah benda searah sumbu x atau sumbu y dengan skala tertentu. Jika sobat punya sebuah titik (x,y) yang ditari ke arah sumbu x atau y dengan skala k maka hasil pemetaannya dapat dicari dengan rumus

Regangan	Pemetaan	Matriks Transformasi
Searah Sumbu x	(x', y') → (kx, y)	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
Searah Sumbu y	(x',y') → (x, ky)	$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

1. **Komposisi Transformasi**

Komposisi transformasi adalah gabungan dari dua atau lebih transformasi baik berbeda ataupun sama. Misalkan sebuah titik di transformasikan 2 kali oleh T1 dan T2 maka secara matematis dituliskan T1o T2 dengan matriks komposisi tersebut adalah perkalian dari matriks transformasi 2 dengan matriks transformasi 1 (dibalik).

1. **Matriks Transformasi Khusus**

Berikut kami rangkumkan matriks tansformasi yang sering digunakan dalam soal-soal. Matriks di bawah ini juga akan memudahkan sobat untuk mencari matriks dari komposisi dua atau lebih transformasi.

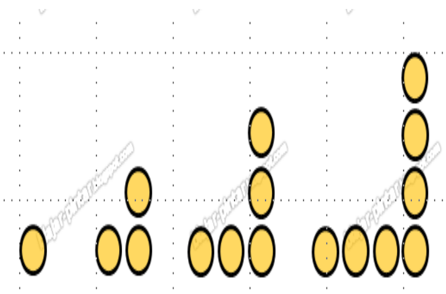
No.	Jenis Transformasi	Simbol	Matriks Transformasi
1.	Identitas	I	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.	Pencerminan terhadap sumbu x	M_x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3.	Pencerminan terhadap sumbu y	M_Y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4.	Pencerminan terhadap titik asal O atau rotasi setengah putaran	H	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
5.	Pencerminan terhadap garis y = x	$M_Y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6.	Pencerminan terhadap garis y = −x	$M_Y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7.	Pemutaran −90° mengelilingi O	R_{-90}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
8.	Pemutaran +90° mengelilingi O	R_{+90}	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9.	Dilatasi dengan pusat O (0, 0)	[0, k]	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
10.	Rotasi sebesar θ mengelilingi	R_θ	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

6.1 Pola Bilangan

Pola Bilangan

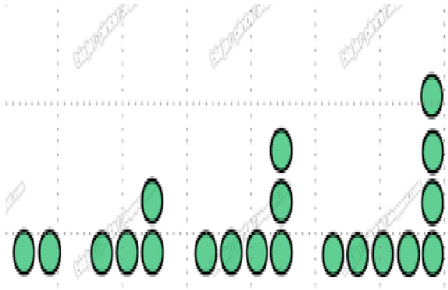
Berawal dari tugas matematika di sekolah oleh guru matemtika yang memberi tugas untuk mencari pola – pola bilangan matematika, maka pada kesempatan kali ini saya akan membagikan beberapa jenis pola bilangan matematika. Tanpa panjang lebar, langsung saja kita ke pembahasannya.

1. **Pola bilangan ganjil**



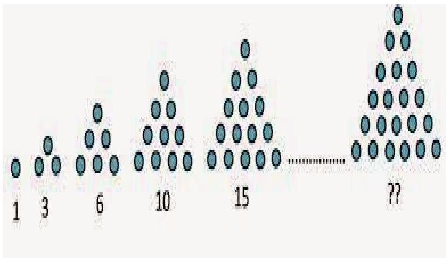
Pola bilangan ganjil memiliki pola 1, 3, 5, 7, 9 . . . . bilangan ganjil adalah 1,3, 5, 7, 9, . . . Deret bilangan ganjil adalah 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... Rumus mencari suku ke ke-n adalah Un = 2n – 1 Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah Sn = n2 Berikut adalah gambar pola dari bilangan ganjil

1. **Pola bilangan genap**



Pola bilangan genap adalah 2, 4, 6, 8, 10, ... Barisan bilangan genap adalah 2, 4, 6, 8, 10, ... bilangan genap adalah 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... Rumus untuk mencari suku ke-n adalah Un = 2n Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah Sn = n2 + n Gambar pola bilangan genap adalah sebagai berikut

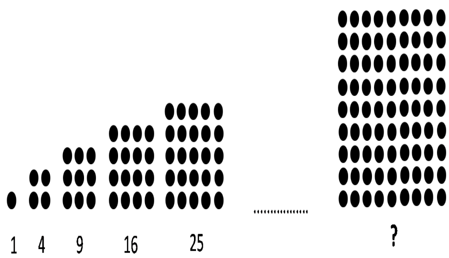
1. **Pola bilangan segitiga**



Pola Bilangan Segitiga

Pola bilangan segitiga adalah 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Barisan bilangan segitiga adalah 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Deret bilangan segitiga adalah 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + ... Rumus mencari suku ke-n adalah Un = 1/2 n (n + 1) Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah Sn = 1/6 n (n + 1) (n + 2) Gambar pola bilangan segitiga adalah sebagai berikut

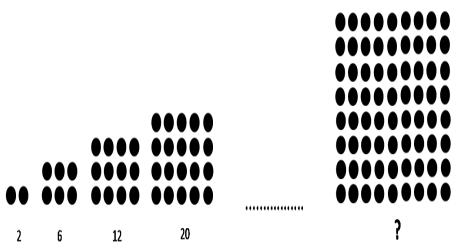
1. **Pola bilangan Persegi**



Pola Bilangan Persegi

Pola bilangan persegi adalah 1, 4, 9, 16, 25, ... Barisan bilangan persegi adalah 1, 4, 9, 16, 25, ... Deret bilangan persegi adalah 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + ... Rumus mencari suku ke-n adalah Un = n2 Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah Sn = 1/6 n (n + 1) (2n + 1) Gambar pola bilangan persegi adalah sebagai berikut

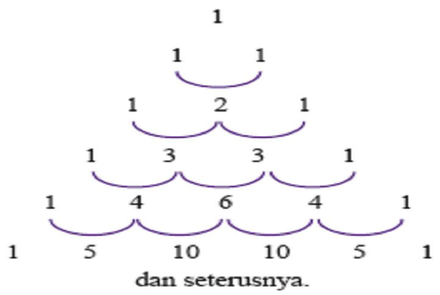
1. **Pola bilangan persegi panjang**



Pola Bilangan Persegipanjang

Pola bilangan persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20, 30, ... Barisan bilangan persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20, 30, ... Deret bilangan persegi panjang adalah 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + ... Rumus mencari suku ke-n adalah Un = n (n + 1) Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah Sn = 1/3 n (n + 1) (n + 2) Gambar pola bilangan persegi panjang adalah sebagai berikut

1. **Pola bilangan segitiga pascal**



Rumus mencari jumlah baris ke-n adalah 2n – 1

1. **Pola bilangan Fibonacci**

Pola bilangan fibanocci adalah pola bilangan dimana jumlah bilangan setelahnya merupakan hasil dari penjumlahan dari dua bilangan sebelumnya. Pola bilangan Fibonacci adalah 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... 2 diperoleh dari hasil 1 + 1 3 diperoleh dari hasil 2 + 1, 5 diperoleh dari hasil 3 + 2 dan seterusnya Rumus mencari suku ke-n adalah Un = Un – 1 + Un - 2

1. **Pola bilangan pangkat tiga**

Pola bilangan pangkat tiga adalah pola bilangan dimana bilangan setelahnya merupakan hasil dari pangkat tiga dari bilangan sebelumnya Contoh pola bilangan pangkat tiga adalah 2, 8, 512, 134217728, ... Keterangan : 8 diperoleh dari hasil 2 pangkat tiga, 512 diperoleh dari hasil 8 pangkat tiga, dan seterusnya

1. **Pola bilangan aritmatika**

Pola bilangan aritmatika adalah pola bilangan dimana bilangan sebelum dan sesudahnya memiliki selisih yang sama. Contoh pola bilangan aritmatika adalah 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... Suku pertama dalam bilangan aritmatika dapat disebut dengan awal (a) atau U1, sedangkan suku kedua adalah U2 dan seterusnya. Selisih dalam barisan aritmatika disebut dengan beda dan dilambangkan dengan b. Karena bilangan sebelum dan sesudahnya memiliki selisih yang sama, maka b = U2 - U1 = U3 – U2 = U4 – U3 = U5 – U4 = U6 – U5 = 3 Rumus mencari suku ke-n adalah Un = a + (n – 1) b Rumus mencari jumlah n suku pertama adalah Sn = n/2 (a + Un) atau Sn = n/2 (2 a + (n – 1) b)

6.2 Barisan dan Deret Aritmatika

Pengertian Barisan Aritmatika Sebelum memahami pengertian barisan aritmatika kita harus mengetahui terlebih dahulumengenai pengertian basiran bilangan. Barisan bilangan merupakan sebuah urutan dari bilangan yang dibentuk dengan berdasarkan kepada aturan-aturan tertentu. Edangkan barisan aritmetika dapat didefinisikan sebagai suatu barisan bilangan yang tiap-tiap pasangan suku yang berurutan mengandung nilai selisih yang sama persis, contohnya adalah barisan bilangan: 2, 4 , 6, 8, 10, 12, 14, . . .

Barisan bilangan tersebut dapat disebut sebagai barisana aritmatika karena masing-masing suku memiliki selisih yang sama yaitu 2. Nilai selisih yang muncul pada barisan aritmatika biasa dilambangkan dengan menggunakan huruf b. Setiap bilangan yang membentuk urutan suatu barisan aritmatika disebut dengan suku. Suku ke n dari sebuah barisan aritmatika dapat disimbolkan dengan lambang Un jadi untuk menuliskan suku ke 3 dari sebuah barisan kita dapat menulis U3. Namun, ada pengecualian khusus untuk suku pertama di dalam sebuah barisan bilangan, suku pertama disimbolkan dengan menggunakan huruf a.

Maka, secara umum suatu barian aritmatika memiliki bentuk :

U1,U2,U3,U4,U5,. . . Un-1 a, atb, a+2b, a+3b, a+4b,. . . a+(n-1)b

Cara Menentukan Rumus suku ke-n dari Sebuah Barisan Pada barisan aritmatika, mencaru rumus suku ke-n menjadi lebih mudah karena memiliki nilai selisih yang sama, sehingga rumusnya adalah:

U2 = a + b U3 = u2 + b = (a + b) + b = a + 2b U4 = u3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b U5 = u4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b U6 = u5 + b = (a + 4b) + b = a + 5b U7 = u6 + b = (a + 5b) + b = a + 6b .

6.3 Barisan dan Deret Geometri

Pengertian dan Rumus Geometri

Barisan Geometri dapat didefinisikan sebagai barisan yang tiap-tiap sukunya didapatkan dari hasil perkalian suku sebelumnya dengan sebuah konstanta tertentu.

Contoh Barisan Geometri

untuk lebih memahami apa yang dimaksud dengan barisan geometri perhatikan contoh berikut:

3, 9, 27 , 81, 243, ...

Barisan di atas adalah contoh barisan geometri dimana setiap suku pada barisan tersebut merupakan hasil dari perkalian suku sebelumnya dengan konstanta 3. maka bisa disimpulkan bahwa rasio pada barisan di atas adalah 3. rasio pada suatu barisan dapat dirumuskan menjadi:

r = ak+1/ak

Dimana ak adalah sembarang suku dari barisan geometri yang ada. sementara ak+1 adalah suku selanjutnya setelah ak.

Untuk menentukan suku ke-n dari sebuah barisan geometri, kita dapat menggunakan rumus:

$Un = ar^n - 1$

Dimana a merupakan suku awal dan r adalah nilai rasio dari sebuah barisan geometri.

Maka, secara umum suatu barian aritmatika memiliki bentuk :

U1,U2,U3,U4,U5,...Un-1 a, atb, a+2b, a+3b, a+4b,...a+(n-1)b

Cara Menentukan Rumus suku ke-n dari Sebuah Barisan Pada barisan aritmatika, mencaru rumus suku ke-n menjadi lebih mudah karena memiliki nilai selisih yang sama, sehingga rumusnya adalah:

U2 = a + b U3 = u2 + b = (a + b) + b = a + 2b U4 = u3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b U5 = u4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b U6 = u5 + b = (a + 4b) + b = a + 5b U7 = u6 + b = (a + 5b) + b = a + 6b . . . U68 = u67+b = (a + 66b) + b = a + 67b U87 = u86+b = (a + 85b) + b = a + 86b

Berdasarkan kepada pola urutan diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa rumus ke-n dari sebuah barisan aritmatika adalah:

Un = a + (n – 1)b dimana n merupakan bilangan asli

Pengertian Deret Aritmatika Deret aritmatika dapat didefinisikan sebagai jumlah keseluruhan dari anggota barisan aritmatika yang dihitung secara berurutan. Sebagai contoh kita ambil sebuah barisan aritmatika 8,12,16,20,24 maka deret aritmatikanya adalah 8+12+16+20+24

Untuk menghitung deret aritmatika tersebut masih terbilang mudah kaerna jumlah sukunya masih sedikit:

8+12+16+20+24 = 80

Namun, bayangkan jika deret aritmatika tersebut terdiri dari ratusan suku, tentu akan sulit untuk menghitungnya, bukan? Oleh karenanya, kita harus mengetahui rumus untuk menghitung jumlah deret aritmatika. Rumus yang biasa digunakan adalah:

Sn = (a + Un) x n : 2

Sebelumnya kita sudah mengetahui rumus untuk menghitung Un, maka rumus tersebut dapat dimodifikasi menjadi:

Sn = (a + a + (n – 1)b) x n : 2

Sisipan pada Deret Aritmatika Sisipan pada deret aritmatika dapat diperoleh dengan cara menambahkan deret kecil aritmatika lainnya diantara dua buah suku yang berurutan di dalam sebuah deret aritmatika. Untuk memahaminya dengan lebih mudah perhatikan saja contoh berikut ini:

Deret aritmatika awal: 2+8+14+20+26+32 Deret aritmatika setelah diberi sisipan: 2+4+6+8+10+12+14++16+18+20

Nilai selisih pada deret aritmatika yang telah diberi sisipan (b1) dapat diketahui dengan menggunakan rumus:

b1 = b/(k+1)

b1 = selisih pada deret yang telah diberi sisipan b = selisih pada deret aritmatika awal k = banyaknya bilangan yang disisipkan

sebagai contoh untuk menghitung selisih deret baru pada deret aritmatika yang telah saya tuliskan diatas adalah:

Deret awal: 2+8+14+20+26+32 Deret baru: 2+4+6+8+10+12+14++16+18+20+22+24+26+28+30+32

Rumus: b1 = b/(k+1)

Diketahui:

b = 8 – 2 = 6 k = 2

Maka: b1 = 6/(2+1) b1 = 6/3 b1 = 2

Demikianlah penjelasan mengenai pengertian barisan dan deret aritmatika. Sebenarnya materi ini tidak terlalu sulit untuk dipelajari, kita hanya harus lebih teliti dan berhati-hati dalam menghitung setiap suku yang ada agar hasilnya menjadi benar. Untuk memperdalam pemahaman mengenai barisan dan deret aritmatika, sebaiknya kalian terus berlatih dengan mencoba memecahkan soal-soal yang berkaitan dengan materi di atas.

Macam-macam barisan bilangan :

1. Barisan dan Deret Aritmetika

a. Barisan Aritmetika

Barisan Aritmetika adalah suatu barisan bilangan dengan pola tertentu berupa penjumlahan yang mempunyai beda (selisih) yang sama/tetap.

Suku-sukunya dinyatakan dengan rumus :

U1, U2, U3, ...Un a, a+ b, a+2b, a + 3b, ..., a + (n-1) b

Selisih (beda) dinyatakan dengan b b = U2 – U1 = U3 – U2 = Un – Un – 1

Suku ke n barisan aritmetika (Un) dinyatakan dengan rumus: Un = a + (n-1) b

Keterangan:

Un = suku ke n dengan n = 1,2,3, ... a = suku pertama ->U1 = a b = selisih/beda

Contoh soal :

1. Tentukan suku ke 15 barisan 2, 6, 10,14,...

Jawab:

n = 15 b = 6-2 = 10 – 6 = 4 U1 = a = 2

Un = a + (n-1) b U15 = 2 + (15-1)4 = 2 + 14.4 = 2 + 56 = 58

b. Deret Aritmetika

Deret Aritmetika adalah jumlah suku-suku pada barisan aritmetika.

Bentuk umum deret aritmetika:

a + (a + b) + (a+2b) + (a+3b) + ... + (a+(n-1)b)

Jumlah suku sampai suku ke n pada barisan aritmetika dirumuskan dengan:

Sn = (2a + (n-1) b) atau Sn = (a + Un)

Contoh soal Deret Aritmetika :

Suatu deret aritmetika 5, 15, 25, 35, ... Berapa jumlah 10 suku pertama dari deret aritmetika tersebut?

Jawab:

n = 10 U1 = a = 5 b = 15 – 5 = 25 – 15 = 10

Sn = (2a + (n-1) b) S10 = (2. 5 + (10 -1) 10) = 5 (10 + 9.10) = 5 . 100 = 500

2. Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan Geometri

Barisan Geometri adalah suatu barisan bilangan dengan pola tertentu berupa perkalian yang mempunyai rasio yang sama/tetap.

Suku-sukunya dinyatakan dengan:

U1, U2, U3, ...Un

a, ar, ar2, ar3, ..., arn – 1

Rasio dinyatakan dengan r :

r = Un/Un-1

Suku ke n barisan Geometri (Un) dinyatakan dengan rumus:

Un = a . r n – 1

Keterangan:

Un = suku ke n dengan n = 1,2,3, . . . a = suku pertama->U1 = a r = rasio

Contoh soal Barisan Geometri :

Suku ke 10 dari barisan 2, 4, 8, 16, 32, . . . adalah. . . .

Jawab:

n = 10 a = 2 r = 2

Un = a . r n – 1 U10 = 2 . 210 – 1 = 2 . 29 = 210 = 1.024

b. Deret Geometri

Deret Geometri adalah jumlah suku-suku pada barisan geometri.

Jika U1, U2, U3, ... Un merupakan barisan geometri maka U1 + U2 + U3 + ... + Un adalah deret geometri dengan Un = arn–1. Rumus umum untuk menentukan jumlah n suku pertama dari deret geometri dapat diturunkan sebagai berikut.

Misalkan Sn notasi dari jumlah n suku pertama.

Sn = U1 + U2 + ... + Un Sn = a + ar + ... + arn–2 + arn–1 .... (1)

7.1 Table

Treatments	**Response 1**	**Response 2**
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 7.1: Table caption

7.2 Figure

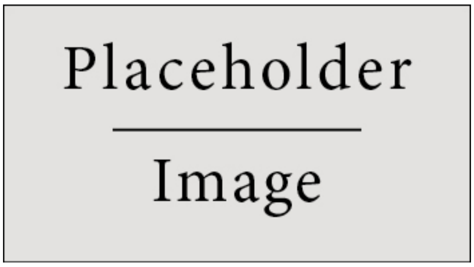


Figure 7.1: Figure caption

8.1 Pengertian Turunan

8.2 Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar

8.3 Penerapan Turunan Fungsi Aljabar

8.4 Nilai-Nilai Stasioner

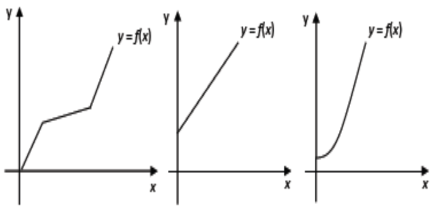
8.5 Aplikasi Turunan

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva.

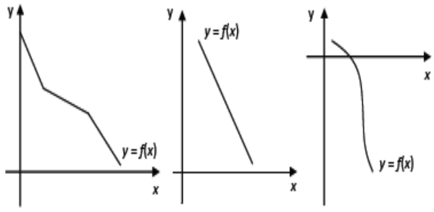
8.5.1 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Coba bayangkan ketika kamu pergi ke plaza atau mall, di sana kita temukan ekskalator atau lift. Gerakan lift dan ekskalator saat naik dapat diilustrasikan sebagai fungsi naik. Demikian juga gerakan lift dan ekskalator saat turun dapat diilustrasikan sebagai fungsi turun. Amatilah beberapa grafik fungsi naik dan turun di bawah ini dan coba tuliskan cirri-ciri fungsi naik dan fungsi turun sebagai ide untuk mendefinisikan fungsi naik dan turun.

Beberapa grafik fungsi turun dari kiri ke kanan



Beberapa grafik fungsi naik dari kiri ke kanan



Dari beberapa contoh grafik fungsi naik dan turun di atas,mari kita definisikan fungsi naik dan turun sebagai berikut.

Misalkan fungsi,

- Fungsi f dikatakan naik jika $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi f dikatakan turun jika $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Tunjukkan grafik fungsi $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ adalah fungsi naik.

lternatif Penyelesaian

$f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$ dengan $0 < x_1 < x_2$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^3$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_2) = x_2^3$

Karena $0 < x_1 < x_2$ maka $x_1^3 < x_2^3$

Karena $x_1^3 < x_2^3$ maka $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Dapat disimpulkan f adalah fungsi naik. Bagaimana jika $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x < 0$, apakah grafik fungsi f adalah fungsi naik? Selidiki!

8.5.2 Aplikasi Turunan dalam Permasalahan Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Mari kita bahas aplikasi turunan dalam permasalahan fungsi naik dan fungsi turun dengan memperhatikan dan mengamati permasalahan berikut.

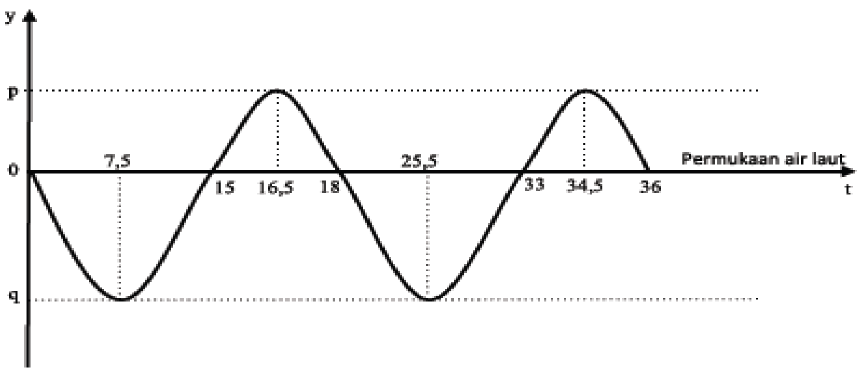
Masalah 1

Seorang nelayan melihat seekor lumba-lumba sedang berenang mengikuti kecepatan perahu mereka. Lumba-lumba tersebut berenang cepat, terkadang menyelam dan tiba-tiba melayang ke permukakaan air laut. Pada saat nelayan tersebut melihat lumba-lumba menyelam maka ia akan melihatnya melayang ke permukaan 15 detik kemudian dan kembali ke permukaan air laut setelah 3 detik di udara. Demikan pergerakan lumba-lumba tersebut diamati berperiode dalam beberapa interval waktu pengamatan.

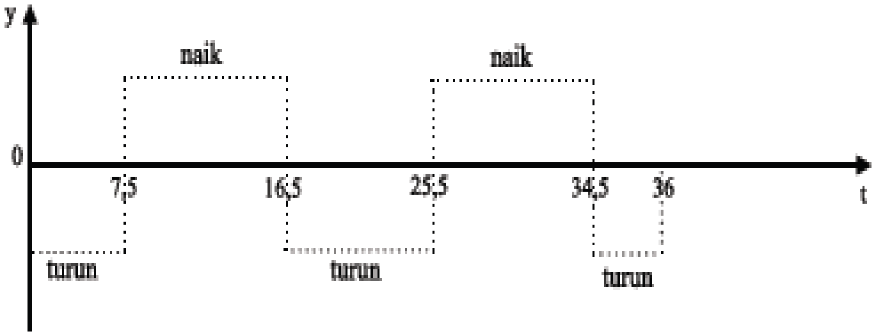
Dari ilustrasi diatas, dapatkah kamu sketsa pergerakan lumba-lumba tersebut dalam 2 periode? Ingat pengertian periode pada pelajaran trigonometri di kelas X. Dapatkah kamu tentukan pada interval waktu berapakah lumbalumba tersebut bergerak naik atau turun? Dapatkah kamu temukan konsep fungsi naik/turun?

Alternatif Penyelesaian:

Sketsa pergerakan lumba-lumba dalam pengamatan tertentu

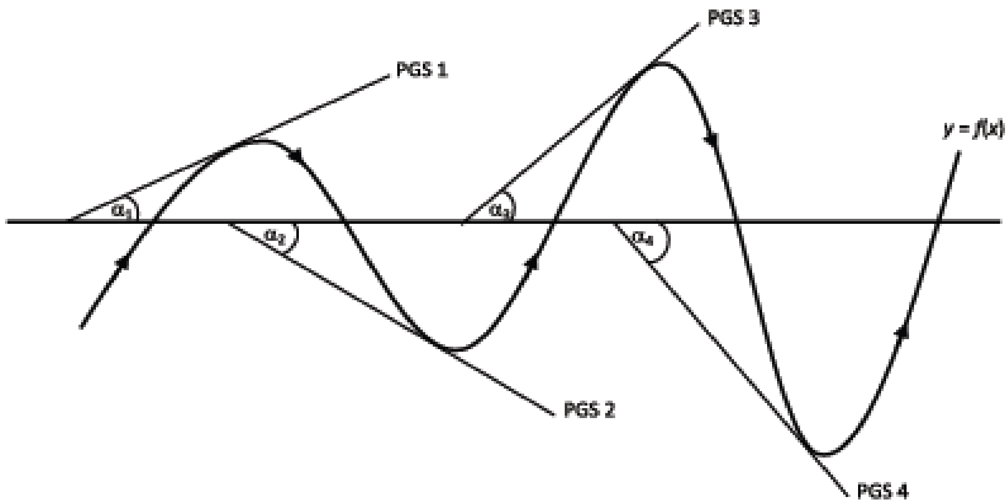


Sketsa pergerakan naik/turun lumba-lumba dalam pengamatan tertentu



Secara geometri pada sketsa di atas, lumba-lumba bergerak turun di interval 0 < t < 7,5 atau 16,5 < t < 25,5 atau 34,5 < t < 36 dan disebut bergerak naik di interval 7,5 < t < 16,5 atau 25,5 < t < 34,5. Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.

Garis singgung di interval fungsi naik/turun



Selanjutnya, mari kita bahas hubungan persamaan garis singgung dengan fungsi naik atau turun. Pada konsep persamaan garis lurus, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif.Pada persamaan garis singgung, gradien adalah tangen sudut garis tersebut dengan sumbu positif sama dengan nilai turunan pertama di titik singgungnya. Pada gambar di atas, misalkan besar masing-masing sudut adalah 0 < ∝1 < 900 < ∝2 < 900 < ∝3 < 900 < ∝4 < 900 sehingga nilai gradien atau tangen sudut setiap garis singgung ditunjukkan pada tabel berikut:

PGS	Sudut	Nilai tangen	Menyinggung di
PGS 1	α_1	$m = \tan(\alpha_1) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	$360^0 - \alpha_2$	$m = \tan(360^0 - \alpha_2) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun
PGS 3	α_3	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 4	$360^0 - \alpha_4$	$m = \tan(360^0 - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun

Coba kamu amati Gambar diatas dan Tabel sebelumnya Apakah kamu melihat konsep fungsi naik/turun. Coba kamu perhatikan kesimpulan berikut:

Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi naik maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran I. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah positif atau m = f '(x) > 0.

Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi turunmaka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran IV. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah negatif atau m = f '(x) < 0.

Dengan demikian, dapat kita simpulkan bahwa fungsi f(x) yang dapat diturunkan pada interval I, akan mempunyai kondisi sebagai berikut:

No.	Nilai turunan pertama	Keterangan
1	$f'(x) > 0$	Fungsi selalu naik
2	$f'(x) < 0$	Fungsi selalu turun
3	$f'(x) \geq 0$	Fungsi tidak pernah turun
4	$f'(x) \leq 0$	Fungsi tidak pernah naik

Misalkan f adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap x $\in$I maka

1. Jika f '(x) > 0 maka fungsi selalu naik pada interval I.
2. Jika f '(x) < 0 maka fungsi selalu turun pada interval I.
3. Jika f '(x) $\geqslant$0 maka fungsi tidak pernah turun pada interval I.
4. Jika f '(x) $\leqslant$0 maka fungsi tidak pernah naik pada interval I.

Konsep di atas dapat digunakan jika kita sudah memiliki fungsi yang akan dianalisis. Tetapi banyak kasus seharihari harus dimodelkan terlebih dahulu sebelum dianalisis. Perhatikan kembali permasalahan berikut!

Masalah:

Tiga orang anak sedang berlomba melempar buah mangga di ketinggian 10 meter. Mereka berbaris menghadap pohon mangga sejauh 5 meter. Anak pertama akan melempar buah mangga tersebut kemudian akan dilanjutkan dengan anak kedua bila tidak mengenai sasaran. Lintasan lemparan setiap anak membentuk kurva parabola. Lemparan anak pertama mencapai ketinggian 9 meter dan batu jatuh 12 meter dari mereka. Lemparan anak kedua melintas di atas sasaran setinggi 5 meter. Anak ketiga berhasil mengenai sasaran. Tentu saja pemenangnya anak ketiga, bukan?

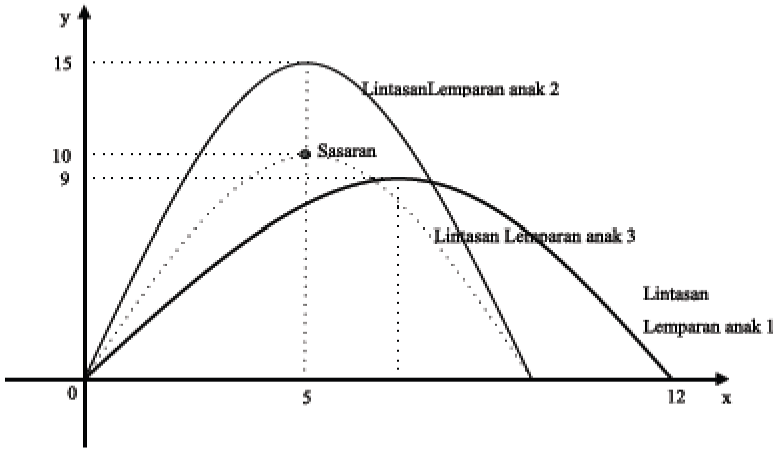
Permasalahan!

Dapatkah kamu mensketsa lintasan lemparan ketiga anak tersebut? Dapatkah kamu membuat model matematika lintasan lemparan? Dapatkah kamu menentukan interval jarak agar masing-masing lemparan naik atau turun berdasarkan konsep turunan?

Alternatif Penyelesaian

a. Sketsa Lintasan Lemparan

Permasalahan di atas dapat kita analisis setelah kita modelkan fungsinya. Misalkan posisi awal mereka melempar adalah posisi titik asal O(0,0) pada koordinat kartesius, sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut.



b. Model Lintasan Lemparan

Kamu masih ingat konsep fungsi kuadrat, bukan? Ingat kembali konsep fungsi kuadrat yang melalui titik puncak P(x_p, y_p)dan titik sembarang P(x, y) adalah y – $y_p = a(x\text{–}\ x_p)^2$sementara fungsi kuadrat yang melalui akar-akar x1, x2 dan titik sembarang P(x, y) adalah y = a(x – $x_1)(x$– $x_2)$,dengan $x_p = \frac{x_1 - x_2}{2}$dan a $\neq$0, a bilangan real. Jadi, model lintasan lemparan setiap anak tersebut adalah:

Lintasan lemparan anak pertama

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak p_1(6,9).

$$y - 0 = a(x-5)^2 \qquad \Leftrightarrow 0 - 10 = a(0-5)^2$$
$$\Leftrightarrow a = -0{,}4$$

Fungsi lintasan lemparan anak pertama adalah y = –0,25x^2+ 3x.

Lintasan lemparan anak kedua

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak P_2(5,15).

$$y - 15 = a(x-5)^2 \qquad \Leftrightarrow 0 - 15 = a(0-5)^2$$
$$\Leftrightarrow a = -0{,}6$$

Fungsi lintasan lemparan anak kedua adalah y = –0,6x^2+ 6x.

Lintasan lemparan anak ketiga

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak P3(5,10).

$$y - 0 = a(x-5)^2 \qquad \Leftrightarrow 0 - 10 = a(0-5)^2$$
$$\Leftrightarrow a = -0{,}4$$

Fungsi lintasan lemparan anak ketiga adalah y = –0,4x2 + 4x.

c. Interval Fungsi Naik/Turun Fungsi Lintasan

Coba kamu amati kembali Gambar seketsa lintasan lemparan Secara geometri,jelas kita lihat interval fungsi naik/turun pada masingmasing lintasan, seperti pada tabel berikut:

Lintasan ke	Fungsi	Secara Geometri	
		Interval Naik	Interval Turun
1	$y = -0{,}25x^2 + 3x$	$0 < x < 6$	$6 < x < 12$
2	$y = -0{,}6x^2 + 6x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$
3	$y = -0{,}4x^2 + 4x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$

Mari kita tunjukkan kembali interval fungsi naik/turun dengan meng-gunakan konsep turunan yang telah kita pelajari sebelumnya.

Fungsi naik/turun pada lintasan lemparan anak 1

Fungsi yang telah diperoleh adalah $y = -0{,}25x^2 + 3x$ sehingga $y = -0{,}5x^2 + 3x$. Jadi,

fungsi akan naik: $y = -0{,}5x^2 + 3x \Leftrightarrow x < 6$

fungsi akan turun: $y = -0{,}5x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > 6$

Menurut ilustrasi, batu dilempar dari posisi awal O(0,0) dan jatuh pada posisi akhir Q(12,0) sehingga lintasan lemparan akan naik pada $0 < x < 6$ dan turun pada $6 < x < 12$.

Bagaimana menunjukkan interval fungsi naik/turun dengan konsep turunan pada fungsi lintasan lemparan anak 2 dan anak 3 diserahkan kepadamu.

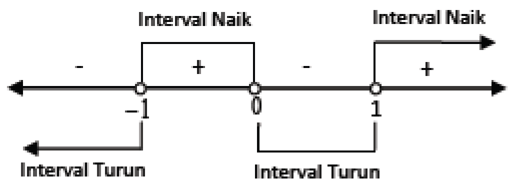
Contoh Soal: Tentukanlah interval fungsi naik/turun fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2$

Alternatif Penyelesaian

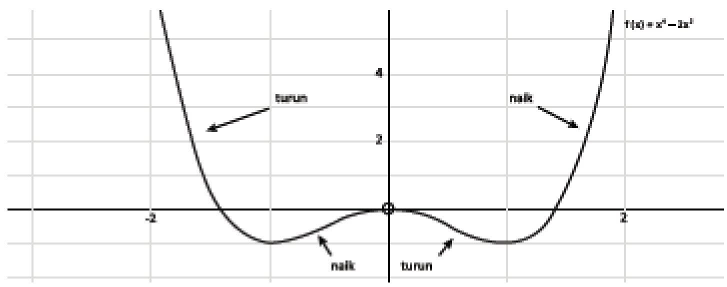
Berdasarkan konsep, sebuah fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$ sehingga:

$f'(x) = 4x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x - 1)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 1$ atau $x = -1$

Dengan menggunakan interval.



Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval l $-1 < x < 0$ atau $x > 1$ tetapi turun pada interval $x < -1$ atau $0 < x < 1$. Perhatikan sketsa kurva $f(x) = x^4 - 2x^2$tersebut.



Gambar Fungsi naik/turun kurva f(x) = x4 – 2x2

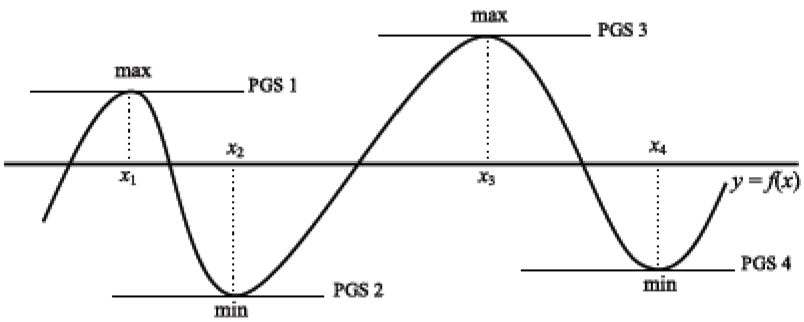
8.5.3 Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Maksimum dan Minimum

Setelah menemukan konsep fungsi naik dan turun, kita akan melanjutkan pembelajaran ke permasalahan maksimum dan minimum serta titik belok suatu fungsi. Tentu saja, kita masih melakukan pengamatan terhadap garis singgung kurva. Aplikasi yang akan dibahas adalah permasalahan titik optimal fungsi dalam interval terbuka dan tertutup, titik belok, dan permasalahan kecepatan maupun percepatan.

1.Menemukan konsep maksimum dan minimum di interval terbuka

Masalah: Seorang anak menarik sebuah tali yang cukup panjang. Kemudian dia membuat gelombang dari tali dengan menghentakkan tali tersebut ke atas dan ke bawah sehingga terbentuk sebuah gelombang berjalan. Dia terus mengamati gelombang tali yang dia buat. Dia melihat bahwa gelombang tali memiliki puncak maksimum maupun minimum. Dapatkah kamu menemukan konsep nilai maksimum ataupun minimum dari sebuah fungsi?

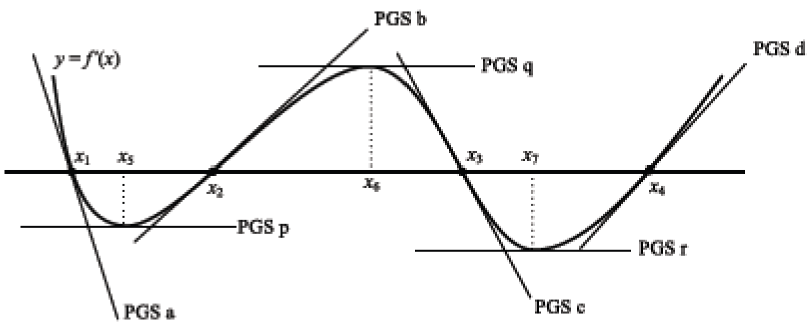
Penyelesaian : Gradien garis singgung adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif atau turunan pertama dari titik singgungnya.



Gambar Sketsa gelombang tali

Coba kamu amati gambar di atas. Garis singgung (PGS 1, PGS 2, PGS 3 dan PGS 4) adalah garis horizontal atau y = c, c konstan, sehingga gradiennya adalah m = 0. Keempat garis singgung tersebut menyinggung kurva di titik puncak/optimal, di absis x =$x_1, x = x_2, x = x_3, danx = x_4$. Dari pengamatan, dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi akan mencapai optimal(maksimum/minimum) pada suatu daerah jika m = f '(x) = 0. Titik yang memenuhi f '(x) = 0 disebut titik stasioner. Berikutnya, kita akan mencoba menemukan hubungan antara titik stasioner dengan turunan kedua fungsi. Pada Gambar sketsa gelombang tali, f '$(x_1) = 0, f'(x_2) = 0, f'(x_3) = 0danf'(x_4)$= 0. Artinya kurva turunan pertama fungsi melalui sumbu x di titik A$(x_1, 0), B(x_2, 0), C(x_3, 0)danD(x_4,$ 0).

Coba kamu amati kurva turunan pertama fungsi dan garis singgungnya sebagai berikut. Kesimpulan apa yang kamu dapat berikan?



Gambar Hubungan garis singgung kurva m = f '(x) dengan titik stasioner

Titik A(x_1, y_1) adalah titik maksimum pada Gambar sketsa gelombang tali sehingga titik dengan absis x = x1 adalah titik stasioner karena f '(x_1) = 0. Per-samaan garis singgung kurva dengan gradien M pada fungsi m = f '(x) menyinggung di titik x = x_1 membentuk sudut di kuadran IV sehingga nilai tangen sudut bernilai negatif. Hal ini mengakibatkan M = m ' = f "(x_1)< 0. Dengan kata lain, titik A(x_1, y_1) adalah titik maksimum jika f '$(x_1) = 0 dan f"(x_1)$ < 0.

Kesimpulan: Lihat Gambar hubungan garis singgung kurva, misalkan gradien persamaan garis singgung kurva m = f '(x) adalah M sehingga M = m ' = f "(x) maka hubungan turunan kedua dengan titik stasioner adalah:

PGS	Gradien $M = m' = f''(x)$	Jenis Titik	Pergerakan kurva
a	$M_a = f''(x_1) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
b	$M_b = f''(x_2) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
c	$M_c = f''(x_3) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
d	$M_d = f''(x_4) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
p	$M_p = f''(x_5) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun
q	$M_q = f''(x_6) = 0$	T. Belok	Naik-Belok-Naik
r	$M_r = f''(x_7) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun

Tabel Hubungan turunan kedua fungsi dengan titik optimal (stasioner)

Sifat: Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan memiliki turunan pertama dan kedua pada $x_1 \in I$ sehingga:

1. Jika f '$(x_1) = 0 maka titik (x_1, f(x_1))$disebut stasioner/ kritis
2. Jika f '$(x_1) = 0 dan f"(x_1) > 0 maka titk (x1, f(x_1))$disebut titik balik minimum fungsi
3. Jika f '$(x_1) = 0 dan f"(x_1) < 0 maka titik (x1, f(x_1))$disebut titik balik maksimum fungsi
4. Jika f "$(x_1) = 0 maka titik (x_1, f(x_1))$disebut titik belok

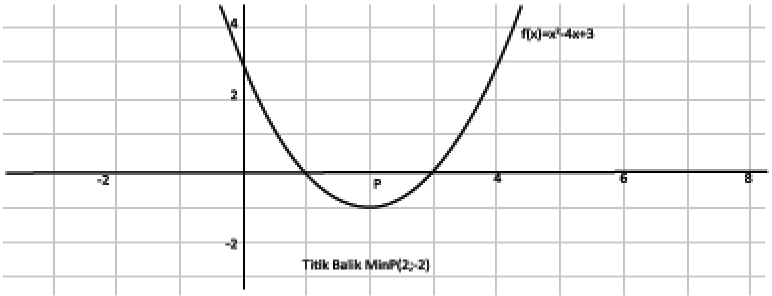
Contoh Soal: Tentukanlah titik balik fungsi kuadrat f(x) = x^2– 4x + 3

Penyelesaian 1 (Berdasarkan Konsep Fungsi Kuadrat)

Dengan mengingat kembali pelajaran fungsi kuadrat. Sebuah fungsi f(x) = ax^2+ bx + c mempunyai titik balik B(-$\frac{b}{2a}$,-$\frac{D}{4a}$) dimana fungsi mencapai maksimum untuk a < 0 dan mencapai minimum untuk a > 0 sehingga fungsi f(x) = x^2 – 4x + 3 mempunyai titik balik minimum pada B(-$\frac{-4}{2(1)}$,-$\frac{(-4)^2-4(1)(3)}{4(1)}$=B(2,-1).

Penyelesaian 2 (Berdasarkan Konsep Turunan)

Dengan menggunakan konsep turunan di atas maka fungsi f(x) = x^2– 4x + 3 mempunyai stasioner: f '(x) = 2x – 4 = 0 atau x = 2 dan dengan mensubstitusi nilai x = 2 ke fungsi y = f(x) = x^2– 4x + 3 diperoleh y = –1 sehingga titik stasioner adalah B(2, –1). Mari kita periksa jenis keoptimalan fungsi tersebut dengan melihat nilai turunan keduanya pada titik tersebut. f "(x) = 2 atau f "(2) = 2 > 0. Berdasarkan konsep, titik tersebut adalah titik minimum. Jadi, titik balik fungsi kuadrat f(x) = x^2– 4x + 3 adalah minimum di B(2, –1).



Gambar Titik balik fungsi kuadrat f(x) = x^2 – 4x + 3

8.6 Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal

9.1 Pengertian Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

9.2 Sifat-Sifat Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

9.3 Penerapan Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

Books

Articles