

The background features a large, textured sphere on the left, resembling a planet or moon with various shades of brown and tan. Several smaller, similar spheres are floating in the air around it. The scene is set against a light blue sky with a few wispy clouds. The ground is a flat, light blue surface. The title text is centered in the upper half of the image.

# **The Search for a Title**

**A Profound Subtitle**

**Dr. John Smith**

Copyright © 2013 John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First printing, March 2013*

# Contents

I	Part One	
<b>1</b>	<b>Logika Matematika</b>	<b>9</b>
1.1	Pernyataan Berkuantor	9
1.2	Pernyataan Penyangkal (Lingkaran)	9
1.3	Penarikan Kesimpulan	10
1.3.1	Numbered List	10
1.3.2	Bullet Points	10
1.3.3	Descriptions and Definitions	10
<b>2</b>	<b>Induksi Matematika</b>	<b>11</b>
2.1	Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung	11
2.1.1	Several equations	11
2.1.2	Single Line	11
2.2	Kontradiksi	11
2.3	Induksi Matematis	12
2.4	Remarks	12
2.5	Corollaries	12
2.6	Kontradiksi	12
2.6.1	Several equations	12
2.6.2	Single Line	12
2.7	Examples	12
2.7.1	Equation and Text	12
2.7.2	Paragraph of Text	13

2.8	Exercises	13
2.9	Problems	13
2.10	Vocabulary	13
<b>3</b>	<b>Pertidaksamaan Linear Dua Variabel</b>	<b>15</b>
3.1	Pengertian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	15
3.2	Penerapan Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	15
<b>4</b>	<b>Program Linear Dua Variabel</b>	<b>17</b>
4.1	Pengertian Program Linear Dua Variabel	17
4.2	Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	17
4.3	Nilai Optimum Fungsi Objektif	17
4.3.1	Teorema	17
4.3.2	Contoh Soal	18
4.3.3	Soal Latihan	19
4.4	Penerapan Program Linier Dua Variabel	19
<b>5</b>	<b>Matriks</b>	<b>23</b>
5.1	Pengertian Matriks	23
5.2	Operasi Matriks	23
5.3	Determinan dan Invers Matriks Berorde 2x2 dan 3x3	23
5.4	Pemakaian Matriks Pada Pransformasi Geometri	23
<b>6</b>	<b>Barisan dan Deret</b>	<b>25</b>
6.1	Pola Bilangan	25
6.2	Barisan dan Deret Aritmatika	25
6.3	Barisan dan Deret Geometri	25

## II

## Part Two

<b>7</b>	<b>Limit Fungsi Aljabar</b>	<b>29</b>
7.1	Table	29
7.2	Figure	29
<b>8</b>	<b>Turunan Fungsi Aljabar</b>	<b>31</b>
8.1	Pengertian Turunan	31
8.2	Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar	31
8.3	Penerapan Turunan Fungsi Aljabar	31
8.4	Nilai-Nilai Stasioner	31
8.5	Aplikasi Turunan	31
8.5.1	Fungsi Naik dan Fungsi Turun	31
8.5.2	Aplikasi Turunan dalam Permasalahan Fungsi Naik dan Fungsi Turun	32

8.6	Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal	36
<b>9</b>	<b>Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar</b> .....	<b>37</b>
9.1	Pengertian Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	37
9.2	Sifat-Sifat Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	37
9.3	Penerapan Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	37
	<b>Bibliography</b> .....	<b>39</b>
	Books	39
	Articles	39



# Part One

<b>1</b>	<b>Logika Matematika</b> .....	<b>9</b>
1.1	Pernyataan Berkuantor	
1.2	Pernyataan Penyangkal (Lingkaran)	
1.3	Penarikan Kesimpulan	
<b>2</b>	<b>Induksi Matematika</b> .....	<b>11</b>
2.1	Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung	
2.2	Kontradiksi	
2.3	Induksi Matematis	
2.4	Remarks	
2.5	Corollaries	
2.6	Kontradiksi	
2.7	Examples	
2.8	Exercises	
2.9	Problems	
2.10	Vocabulary	
<b>3</b>	<b>Pertidaksamaan Linear Dua Variabel</b> .	<b>15</b>
3.1	Pengertian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	
3.2	Penerapan Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	
<b>4</b>	<b>Program Linear Dua Variabel</b> .....	<b>17</b>
4.1	Pengertian Program Linear Dua Variabel	
4.2	Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel	
4.3	Nilai Optimum Fungsi Objektif	
4.4	Penerapan Program Linier Dua Variabel	
<b>5</b>	<b>Matriks</b> .....	<b>23</b>
5.1	Pengertian Matriks	
5.2	Operasi Matriks	
5.3	Determinan dan Invers Matriks Berorde 2x2 dan 3x3	
5.4	Pemakaian Matriks Pada Pransformasi Geometri	
<b>6</b>	<b>Barisan dan Deret</b> .....	<b>25</b>
6.1	Pola Bilangan	
6.2	Barisan dan Deret Aritmatika	
6.3	Barisan dan Deret Geometri	





# 1. Logika Matematika

## 1.1 Pernyataan Berkuantor

Kuantor dari suatu pernyataan adalah istilah yang digunakan untuk menyatakan “berapa banyak” objek di dalam suatu kalimat atau pembicaraan. Selain untuk menyatakan kuantifikasi, kuantor juga biasa digunakan untuk mengubah kalimat terbuka menjadi suatu kalimat deklaratif.

Definisi : Suatu fungsi pernyataan adalah suatu kalimat terbuka di dalam semesta pembicaraan (semesta pembicaraan diberikan secara eksplisit atau implisit). Perhatikan dua pernyataan berikut: 1. Semua planet dalam sistem tata surya mengelilingi matahari. 2. Ada ikan di laut yang menyusui. Pernyataan yang mengandung kata semua atau setiap seperti pada pernyataan (1) disebut pernyataan berkuantor universal (kuantor umum). Ungkapan untuk semua atau untuk setiap, disebut kuantor universal atau kuantor umum. Sedangkan pernyataan yang mengandung kata ada atau beberapa seperti pada pernyataan (2) disebut pernyataan berkuantor eksistensial (kuantor khusus). Ungkapan beberapa atau ada disebut kuantor eksistensial atau kuantor khusus.

## 1.2 Pernyataan Penyangkal (Lingkaran)

Dari sebuah pernyataan tunggal (atau majemuk), kita bisa membuat sebuah pernyataan baru berupa “ingkaran” dari pernyataan itu. “ingkaran” disebut juga “negasi” atau “penyangkalan”. Ingkaran menggunakan operasi uner (monar) “ $\neg$ ” atau “ $\sim$ ”.

Jika suatu pernyataan  $p$  benar, maka negasinya  $\neg p$  salah, dan jika sebaliknya pernyataan  $p$  salah, maka negasinya  $\neg p$  benar.

Perhatikan cara membuat ingkaran dari sebuah pernyataan serta menentukan nilai kebenarannya!

1.  $p$  : kayu memuai bila dipanaskan (S)  
 $\neg p$  : kayu tidak memuai bila dipanaskan (B)
2.  $r$  : 3 bilangan positif (B)  
 $\neg r$  : (cara mengingkar seperti ini salah)  
3 bilangan negative  
(Seharusnya) 3 bukan bilangan positif (S)  
Nilai kebenaran

Jika  $p$  suatu pernyataan bernilai benar, maka  $\neg p$  bernilai salah dan sebaliknya jika  $p$  bernilai salah maka  $\neg p$  bernilai benar

Konjungsi

Gabungan dua pernyataan tunggal yang menggunakan kata penghubung “dan” sehingga terbentuk pernyataan majemuk disebut konjungsi. Konjungsi mempunyai kemiripan dengan operasi irisan ( $\cap$ ) pada himpunan. Sehingga sifat-sifat irisan dapat digunakan untuk mempelajari bagian ini.

### 1.3 Penarikan Kesimpulan

Lists are useful to present information in a concise and/or ordered way<sup>1</sup>.

#### 1.3.1 Numbered List

1. The first item
2. The second item
3. The third item

#### 1.3.2 Bullet Points

- The first item
- The second item
- The third item

#### 1.3.3 Descriptions and Definitions

**Name** Description

**Word** Definition

**Comment** Elaboration

---

<sup>1</sup>Footnote example...

## 2. Induksi Matematika

### 2.1 Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung

This is an example of theorems.

#### 2.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

**Theorem 2.1.1 — Name of the theorem.** In  $E = \mathbb{R}^n$  all norms are equivalent. It has the properties:

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (2.1)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

**Theorem 2.1.2** A set  $\mathcal{D}(G)$  is dense in  $L^2(G)$ ,  $|\cdot|_0$ .

### 2.2 Kontradiksi

This is an example of a definition. A definition could be mathematical or it could define a concept.

**Definition 2.2.1 — Definition name.** Given a vector space  $E$ , a norm on  $E$  is an application, denoted  $||\cdot||$ ,  $E$  in  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$  such that:

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

$$||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| \quad (2.4)$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \quad (2.5)$$

## 2.3 Induksi Matematis

**Notation 2.1.** Given an open subset  $G$  of  $\mathbb{R}^n$ , the set of functions  $\varphi$  are:

1. Bounded support  $G$ ;
2. Infinitely differentiable;

a vector space is denoted by  $\mathcal{D}(G)$ .

## 2.4 Remarks

This is an example of a remark.



The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , however, established properties are easily extended to  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## 2.5 Corollaries

This is an example of a corollary.

**Corollary 2.5.1 — Corollary name.** The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , however, established properties are easily extended to  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## 2.6 Kontradiksi

This is an example of propositions.

### 2.6.1 Several equations

**Proposition 2.6.1 — Proposition name.** It has the properties:

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (2.6)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (2.7)$$

### 2.6.2 Single Line

**Proposition 2.6.2** Let  $f, g \in L^2(G)$ ; if  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$ ,  $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$  then  $f = g$ .

## 2.7 Examples

This is an example of examples.

### 2.7.1 Equation and Text

■ **Example 2.1** Let  $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$  and denoted by:  $x^0 = (1, 1)$ ; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \quad (2.8)$$

The function  $f$  has bounded support, we can take  $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$  for all  $\varepsilon \in ]0; 5/2 - \sqrt{2}[$ . ■

### 2.7.2 Paragraph of Text

■ **Example 2.2 — Example name.** Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

■

## 2.8 Exercises

This is an example of an exercise.

**Exercise 2.1** This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds.

■

## 2.9 Problems

**Problem 2.1** What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

## 2.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.

**Vocabulary 2.1 — Word.** Definition of word.





### 3. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

- 3.1 Pengertian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel
- 3.2 Penerapan Pertidaksamaan Linear Dua Variabel







## 4. Program Linear Dua Variabel

### 4.1 Pengertian Program Linear Dua Variabel

### 4.2 Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

### 4.3 Nilai Optimum Fungsi Objektif

#### 4.3.1 Teorema

Fungsi dalam pembuatan model matematika dinyatakan dalam bentuk  $z = ax + by$ . Bentuk inilah yang akan dioptimumkan baik itu minimum ataupun maksimum yang disebut sebagai fungsi objektif. Jadi, fungsi Objektif dari program linear adalah fungsi  $z = ax + by$  yang akan ditentukan nilai optimumnya. Ada beberapa cara untuk mencari nilai optimum (maksimum atau minimum) fungsi objektif, di antaranya yaitu:

- Metode Uji Titik Pojok
- Metode Garis Selidik

Dari kedua metode tersebut, metode yang paling mudah dan sering diterapkan adalah metode uji titik pojok. Metode Uji Titik Pojok adalah suatu metode dengan mensubstitusikan titik-titik pojok pada suatu daerah himpunan penyelesaian (DHP) ke fungsi objektif. Nilai maksimum berarti nilai yang paling besar yang kita ambil, begitu juga sebaliknya untuk nilai minimum kita ambil paling kecil.

Untuk menentukan nilai optimum baik nilai minimum atau maksimum dengan metode uji titik pojok, kita bisa melakukan langkah-langkah di bawah ini:

1. Buatlah model matematikanya yang terdiri dari fungsi kendala dan fungsi tujuan.
2. Tentukan daerah himpunan penyelesaiannya (DHP) dan titik pojoknya.
3. Substitusikan semua titik pojok ke fungsi tujuannya (fungsi objektifnya), dan tentukan yang diminta apakah nilai maksimum atau minimum.

Misalnya untuk gambar DHP di bawah ini kita bisa lihat bahwa titik pojok terdapat pada titik A, titik B, dan titik C.

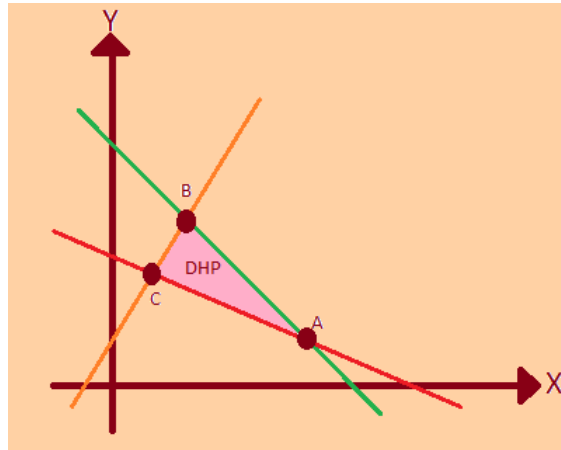
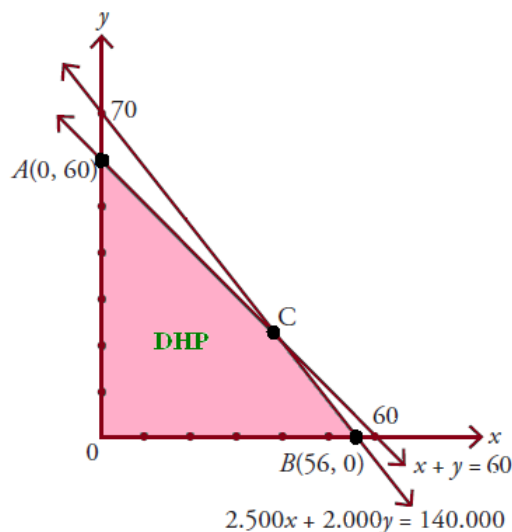


Figure 4.1: Daerah Hasil Penyelesaian (DHP)

### 4.3.2 Contoh Soal

■ **Example 4.1** Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum fungsi tujuan  $f(x,y) = 1500x + 1250y$  berdasarkan DHP berikut ini. ■



Jawab:

Diketahui bahwa titik pojok yang terdapat pada gambar di atas adalah titik A,b,C dan O. Titik C belum mempunyai titik koordinat sehingga kita harus mencari terlebih dahulu dengan cara eliminasi kedua persamaan garis.

Menentukan titik C:

$x + y = 60$	$\times 2.000$	$2.000x + 2.000y = 120.000$
$2.500x + 2.000y = 140.000$	$\times 1$	$2.500x + 2.000y = 140.000$
		$-500x = -20.000$
		$x = 40$

Substitusi  $x=40$  ke persamaan  $x + y = 60$

$$x + y = 60$$

$$40 + y = 60$$

$y = 20$ .

Sehingga titik C adalah  $C(40,20)$ .

Substitusi semua titik pojok ke fungsi tujuan :  $f(x,y) = 1500x + 1250y$ .

$$A(0,60) \quad f = 1500(0) + 1250(60) = 75000$$

$$B(56,0) \quad f = 1500(56) + 1250(0) = 84000$$

$$C(40,20) \quad f = 1500(40) + 1250(20) = 85000$$

$$D(0,0) \quad f = 1500(0) + 1250(0) = 0$$

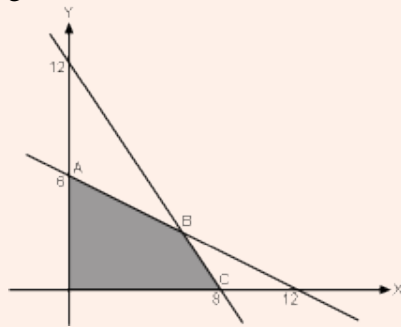
Jadi fungsi  $f(x,y) = 1500x + 1250y$  di titik  $C(40,20)$  dengan nilai maksimumnya adalah  $f = 85000$ . Sedangkan untuk titik minimum  $f(x,y) = 1500x + 1250y$  di titik  $C(0,0)$  dengan nilai minimumnya adalah  $f = 0$ .

### 4.3.3 Soal Latihan

**Exercise 4.1** 1. Tentukan nilai maksimum  $f(x,y) = 3x + 4y$  pada himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut:  $x + 2y \leq 10, 4x + 3y \leq 24, x \geq 0, y \geq 0$ .

2. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi objektif  $z = 2x + 3y$  yang memenuhi  $x + y \leq 7, x \geq 0$ , dan  $y \geq 0, x, y \in R$ .

3. Tentukan nilai maksimum  $Z = 2x + 5y$  dari daerah penyelesaian (daerah yang diarsir) pada gambar di bawah ini:



## 4.4 Penerapan Program Linier Dua Variabel

Program linear banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam bidang ekonomi, perdagangan, dan pertanian.

Misalkan dalam bidang perdagangan atau pengusaha, para pedagang atau pengusaha tentu ingin memperoleh keuntungan maksimum. Sebelum melakukan transaksi ataupun pengambilan keputusan dalam usahanya, mereka pasti membuat perhitungan yang matang tentang langkah apa yang harus dilakukan. Oleh karena itu, diperlukan metode yang tepat dalam pengambilan keputusan pedagang atau pengusaha tersebut untuk memperoleh keuntungan maksimum dan meminimumkan kerugian yang mungkin terjadi.

Seperti yang telah disinggungkan pada section sebelumnya, ada beberapa metode untuk menyelesaikan masalah program linear dua variabel, di antaranya yang kita bahas adalah metode uji titik pojok. Nah untuk contoh soal yang diambil dari kehidupan sehari-hari sebagai berikut:

■ **Example 4.2** Ling ling membeli 240 ton beras untuk dijual lagi. Ia menyewa dua jenis truk untuk mengangkut beras tersebut. Truk jenis A memiliki kapasitas 6 ton dan truk jenis B memiliki

kapasitas 4 ton. Sewa tiap truk jenis A adalah Rp 100.000,00 sekali jalan dan truk jenis B adalah Rp 50.000,00 sekali jalan. Maka Ling ling menyewa truk itu sekurang-kurangnya 48 buah. Berapa banyak jenis truk A dan B yang harus disewa agar biaya yang dikeluarkan minimum? ■

Jawab:

Untuk menyelesaikan masalah ini kita akan menggunakan metode uji titik sudut yang telah kita pelajari pada section nilai optimum fungsi objektif.

Dari soal di atas dapat diperoleh bahwa:

Jenis Truk	Banyak Truk	Kapasitas Truk	Fungsi Objektif
Truk A	$x$	$6x$	$100.000x$
Truk B	$y$	$4y$	$50.000y$
	$\geq 48$	$\geq 240$	

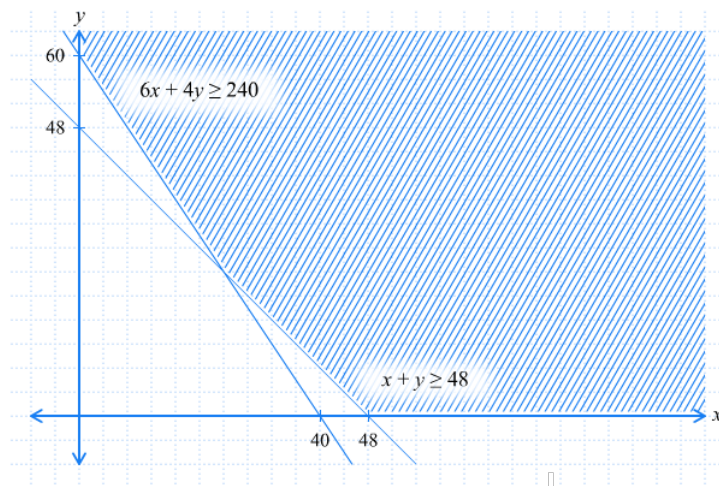
Dan ketika kita ubah ke model matematika akan seperti berikut:

$$x + y \geq 48,$$

$$6x + 4y \geq 240,$$

$$x \geq 0, y \geq 0, x, y \text{ anggota bilangan cacah}$$

Dengan fungsi objektifnya yaitu  $f(x, y) = 100.000x + 50.000y$ .



Dari gambar di atas dapat kita ketahui bahwa titik pojok dari daerah penyelesaian di atas adalah titik potong garis  $6x + 4y = 240$  dengan sumbu-y, titik potong garis  $x + y = 48$  dengan sumbu-x, dan titik potong garis-garis  $x + y = 48$  dan  $6x + 4y = 240$ .

Titik potong garis  $6x + 4y = 240$  dengan sumbu-y adalah titik  $(0, 60)$ . Titik potong garis  $x + y = 48$  dengan sumbu-x adalah titik  $(48, 0)$ . Sedangkan titik potong garis-garis  $x + y = 48$  dan  $6x + 4y = 240$  dapat dicari dengan menggunakan cara eliminasi berikut ini.

Substitusi semua titik pojok ke fungsi tujuan :  $f(x,y) = 100000x + 50000y$ .

$$\begin{array}{rcl}
 x + y = 48 & \times 4 & 4x + 4y = 192 \\
 6x + 4y = 240 & \times 1 & 6x + 4y = 240 \\
 \hline
 & & -2y = -48 \\
 \Leftrightarrow & & y = \frac{-48}{-2} = 24
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{rcl}
 x + y = 48 & \times 6 & 6x + 6y = 288 \\
 6x + 4y = 240 & \times 1 & 6x + 4y = 240 \\
 \hline
 & & 2y = 48 \\
 \Leftrightarrow & & y = \frac{48}{2} = 24
 \end{array}$$

$$A(0,60) \quad f = 1500(0) + 1250(60) = 3000000$$

$$B(48,0) \quad f = 1500(48) + 1250(0) = 4800000$$

$$C(24,24) \quad f = 1500(24) + 1250(24) = 3600000$$

$$D(0,0) \quad f = 1500(0) + 1250(0) = 0$$

Jadi Dari ketiga hasil tersebut, dapat diperoleh bahwa agar biaya yang dikeluarkan minimum, Ling ling harus menyewa 60 truk jenis B dan tidak menyewa truk jenis A.






## 5. Matriks

- 5.1 Pengertian Matriks
- 5.2 Operasi Matriks
- 5.3 Determinan dan Invers Matriks Berorde 2x2 dan 3x3
- 5.4 Pemakaian Matriks Pada Pransformasi Geometri







## 6. Barisan dan Deret

### 6.1 Pola Bilangan

### 6.2 Barisan dan Deret Aritmatika

Pengertian Barisan Aritmatika Sebelum memahami pengertian barisan aritmatika kita harus mengetahui terlebih dahulu mengenai pengertian barisan bilangan. Barisan bilangan merupakan sebuah urutan dari bilangan yang dibentuk dengan berdasarkan kepada aturan-aturan tertentu. Sedangkan barisan aritmatika dapat didefinisikan sebagai suatu barisan bilangan yang tiap-tiap pasangan suku yang berurutan mengandung nilai selisih yang sama persis, contohnya adalah barisan bilangan: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

Barisan bilangan tersebut dapat disebut sebagai barisan aritmatika karena masing-masing suku memiliki selisih yang sama yaitu 2. Nilai selisih yang muncul pada barisan aritmatika biasa dilambangkan dengan menggunakan huruf  $b$ . Setiap bilangan yang membentuk urutan suatu barisan aritmatika disebut dengan suku. Suku ke  $n$  dari sebuah barisan aritmatika dapat disimbolkan dengan lambang  $U_n$  jadi untuk menuliskan suku ke 3 dari sebuah barisan kita dapat menulis  $U_3$ . Namun, ada pengecualian khusus untuk suku pertama di dalam sebuah barisan bilangan, suku pertama disimbolkan dengan menggunakan huruf  $a$ .

Maka, secara umum suatu barisan aritmatika memiliki bentuk :

$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, \dots U_n$   $a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b, \dots a+(n-1)b$

Cara Menentukan Rumus suku ke- $n$  dari Sebuah Barisan Pada barisan aritmatika, mencari rumus suku ke- $n$  menjadi lebih mudah karena memiliki nilai selisih yang sama, sehingga rumusnya adalah:

$U_2 = a + b$   $U_3 = u_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$   $U_4 = u_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$   $U_5 = u_4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b$   $U_6 = u_5 + b = (a + 4b) + b = a + 5b$   $U_7 = u_6 + b = (a + 5b) + b = a + 6b$  .

### 6.3 Barisan dan Deret Geometri



# Part Two

<b>7</b>	<b>Limit Fungsi Aljabar</b> .....	<b>29</b>
7.1	Table	
7.2	Figure	
<b>8</b>	<b>Turunan Fungsi Aljabar</b> .....	<b>31</b>
8.1	Pengertian Turunan	
8.2	Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar	
8.3	Penerapan Turunan Fungsi Aljabar	
8.4	Nilai-Nilai Stasioner	
8.5	Aplikasi Turunan	
8.6	Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal	
<b>9</b>	<b>Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar</b> .....	<b>37</b>
9.1	Pengertian Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	
9.2	Sifat-Sifat Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	
9.3	Penerapan Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar	
	<b>Bibliography</b> .....	<b>39</b>
	Books	
	Articles	



# 7. Limit Fungsi Aljabar

## 7.1 Table

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 7.1: Table caption

## 7.2 Figure

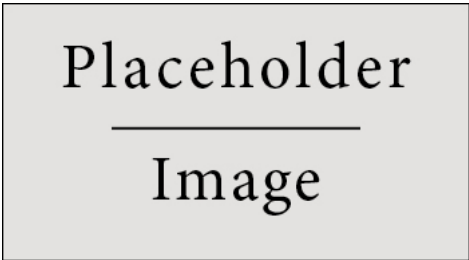


Figure 7.1: Figure caption



## 8. Turunan Fungsi Aljabar

### 8.1 Pengertian Turunan

### 8.2 Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar

### 8.3 Penerapan Turunan Fungsi Aljabar

### 8.4 Nilai-Nilai Stasioner

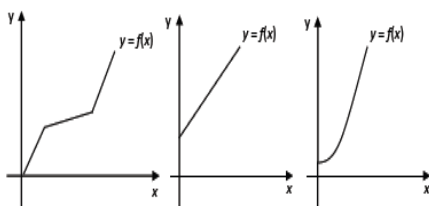
### 8.5 Aplikasi Turunan

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva.

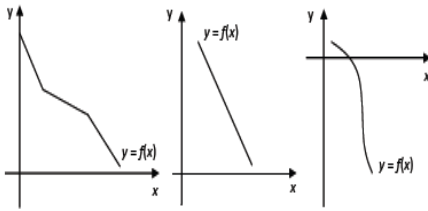
#### 8.5.1 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Coba bayangkan ketika kamu pergi ke plaza atau mall, di sana kita temukan eskalator atau lift. Gerakan lift dan eskalator saat naik dapat diilustrasikan sebagai fungsi naik. Demikian juga gerakan lift dan eskalator saat turun dapat diilustrasikan sebagai fungsi turun. Amatilah beberapa grafik fungsi naik dan turun di bawah ini dan coba tuliskan ciri-ciri fungsi naik dan fungsi turun sebagai ide untuk mendefinisikan fungsi naik dan turun.

Beberapa grafik fungsi turun dari kiri ke kanan



Beberapa grafik fungsi naik dari kiri ke kanan



Dari beberapa contoh grafik fungsi naik dan turun di atas, mari kita definisikan fungsi naik dan turun sebagai berikut.

Misalkan fungsi,

- Fungsi  $f$  dikatakan naik jika  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi  $f$  dikatakan turun jika  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Tunjukkan grafik fungsi  $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$  dan  $x > 0$  adalah fungsi naik.

#### Alternatif Penyelesaian

$f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$  dan  $x > 0$  Ambil sebarang  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  dengan  $0 < x_1 < x_2$

$$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^3$$

$$x = x_2 \Rightarrow f(x_2) = x_2^3$$

Karena  $0 < x_1 < x_2$  maka  $x_1^3 < x_2^3$

Karena  $x_1^3 < x_2^3$  maka  $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Dapat disimpulkan  $f$  adalah fungsi naik. Bagaimana jika  $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$  dan  $x < 0$ , apakah grafik fungsi  $f$  adalah fungsi naik? Selidiki!

### 8.5.2 Aplikasi Turunan dalam Permasalahan Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Mari kita bahas aplikasi turunan dalam permasalahan fungsi naik dan fungsi turun dengan memperhatikan dan mengamati permasalahan berikut.

#### Masalah 1

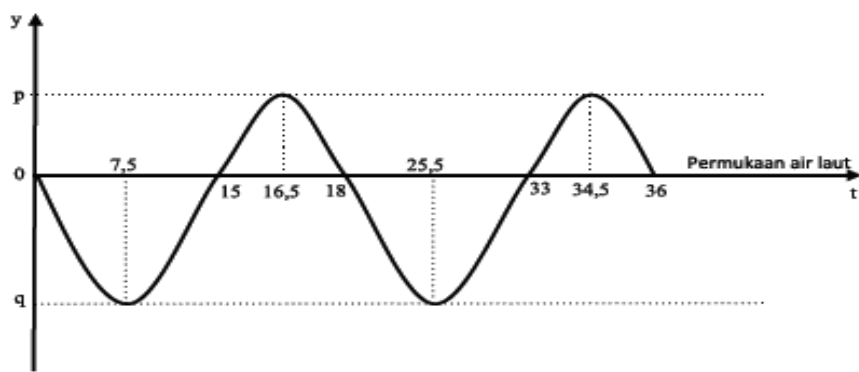
Seorang nelayan melihat seekor lumba-lumba sedang berenang mengikuti kecepatan perahu mereka. Lumba-lumba tersebut berenang cepat, terkadang menyelam dan tiba-tiba melayang ke permukaan air laut. Pada saat nelayan tersebut melihat lumba-lumba menyelam maka ia akan melihatnya melayang ke permukaan 15 detik kemudian dan kembali ke permukaan air laut setelah 3 detik di udara. Demikian pergerakan lumba-lumba tersebut diamati berperiode dalam beberapa interval waktu pengamatan.

Dari ilustrasi diatas, dapatkah kamu sketsa pergerakan lumba-lumba tersebut dalam 2 periode? Ingat pengertian periode pada pelajaran trigonometri di kelas X. Dapatkah kamu tentukan pada interval waktu berapakah lumbalumba tersebut bergerak naik atau turun? Dapatkah kamu temukan konsep fungsi naik/turun?

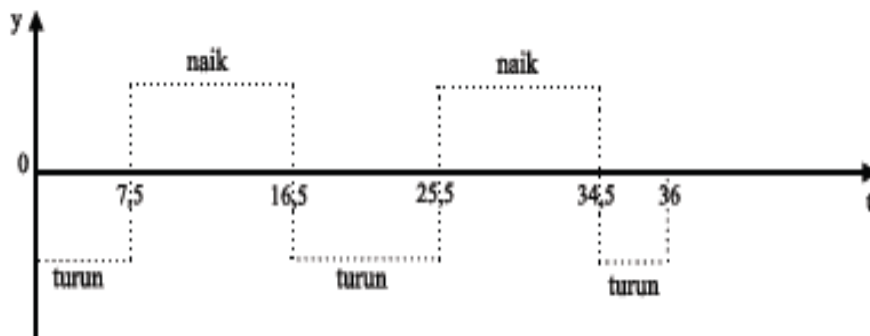
#### Alternatif Penyelesaian:

Sketsa pergerakan lumba-lumba dalam pengamatan tertentu



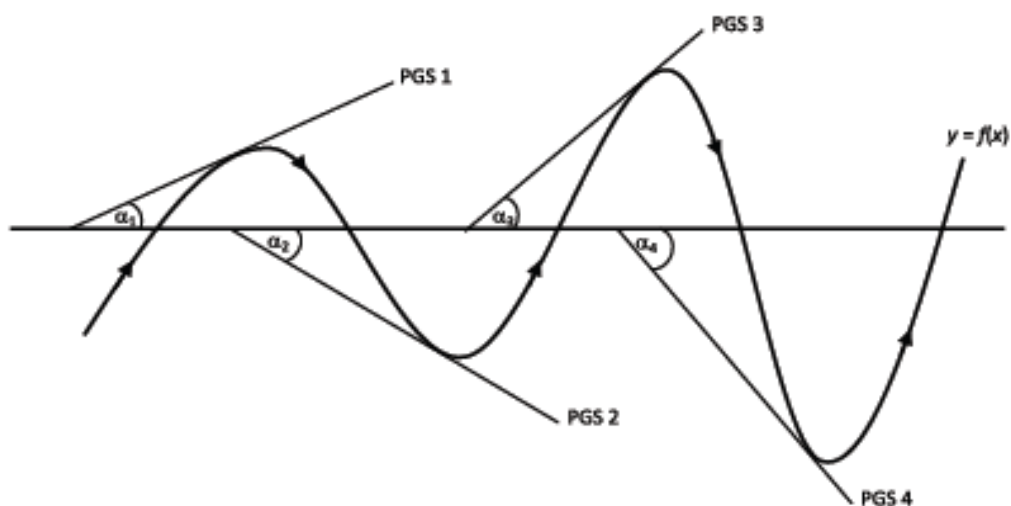


Sketsa pergerakan naik/turun lumba-lumba dalam pengamatan tertentu



Secara geometri pada sketsa di atas, lumba-lumba bergerak turun di interval  $0 < t < 7,5$  atau  $16,5 < t < 25,5$  atau  $34,5 < t < 36$  dan disebut bergerak naik di interval  $7,5 < t < 16,5$  atau  $25,5 < t < 34,5$ . Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.

Garis singgung di interval fungsi naik/turun



Selanjutnya, mari kita bahas hubungan persamaan garis singgung dengan fungsi naik atau turun. Pada konsep persamaan garis lurus, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif. Pada persamaan garis singgung, gradien adalah tangen sudut garis tersebut dengan sumbu positif sama dengan nilai turunan pertama di titik singgungnya. Pada gambar di atas, misalkan besar masing-masing sudut adalah  $0 < \alpha_1 < 900 < \alpha_2 < 900 < \alpha_3 < 900 < \alpha_4 < 900$  sehingga nilai gradien atau tangen sudut setiap garis singgung ditunjukkan pada tabel

berikut:

PGS	Sudut	Nilai tangen	Menyinggung di
PGS 1	$\alpha_1$	$m = \tan(\alpha_1) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	$360^\circ - \alpha_2$	$m = \tan(360^\circ - \alpha_2) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun
PGS 3	$\alpha_3$	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 4	$360^\circ - \alpha_4$	$m = \tan(360^\circ - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun

Coba kamu amati Gambar diatas dan Tabel sebelumnya Apakah kamu melihat konsep fungsi naik/turun. Coba kamu perhatikan kesimpulan berikut:

Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi naik maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran I. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah positif atau  $m = f'(x) > 0$ .

Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi turun maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran IV. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah negatif atau  $m = f'(x) < 0$ .

Dengan demikian, dapat kita simpulkan bahwa fungsi  $f(x)$  yang dapat diturunkan pada interval I, akan mempunyai kondisi sebagai berikut:

No.	Nilai turunan pertama	Keterangan
1	$f'(x) > 0$	Fungsi selalu naik
2	$f'(x) < 0$	Fungsi selalu turun
3	$f'(x) \geq 0$	Fungsi tidak pernah turun
4	$f'(x) \leq 0$	Fungsi tidak pernah naik

Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap  $x \in I$  maka

1. Jika  $f'(x) > 0$  maka fungsi selalu naik pada interval I.
2. Jika  $f'(x) < 0$  maka fungsi selalu turun pada interval I.
3. Jika  $f'(x) \geq 0$  maka fungsi tidak pernah turun pada interval I.
4. Jika  $f'(x) \leq 0$  maka fungsi tidak pernah naik pada interval I.

Konsep di atas dapat digunakan jika kita sudah memiliki fungsi yang akan dianalisis. Tetapi banyak kasus sehari-hari harus dimodelkan terlebih dahulu sebelum dianalisis. Perhatikan kembali permasalahan berikut!

#### Masalah:

Tiga orang anak sedang berlomba melempar buah mangga di ketinggian 10 meter. Mereka berbaris menghadap pohon mangga sejauh 5 meter. Anak pertama akan melempar buah mangga tersebut kemudian akan dilanjutkan dengan anak kedua bila tidak mengenai sasaran. Lintasan lemparan setiap anak membentuk kurva parabola. Lemparan anak pertama mencapai ketinggian 9 meter dan batu jatuh 12 meter dari mereka. Lemparan anak kedua melintas di atas sasaran setinggi 5 meter. Anak ketiga berhasil mengenai sasaran. Tentu saja pemenangnya anak ketiga, bukan?

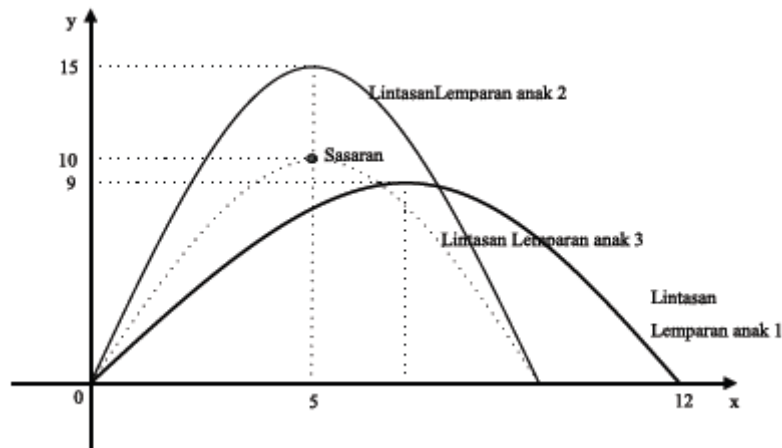
#### Permasalahan!

Dapatkan kamu mensketsa lintasan lemparan ketiga anak tersebut? Dapatkan kamu membuat model matematika lintasan lemparan? Dapatkan kamu menentukan interval jarak agar masing-masing lemparan naik atau turun berdasarkan konsep turunan?

### Alternatif Penyelesaian

#### a. Sketsa Lintasan Lemparan

Permasalahan di atas dapat kita analisis setelah kita modelkan fungsinya. Misalkan posisi awal mereka melempar adalah posisi titik asal  $O(0,0)$  pada koordinat kartesius, sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut.



#### b. Model Lintasan Lemparan

Kamu masih ingat konsep fungsi kuadrat, bukan? Ingat kembali konsep fungsi kuadrat yang melalui titik puncak  $P(x_p, y_p)$  dan titik sembarang  $P(x, y)$  adalah  $y - y_p = a(x - x_p)^2$  sementara fungsi kuadrat yang melalui akar-akar  $x_1, x_2$  dan titik sembarang  $P(x, y)$  adalah  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ , dengan  $x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}$  dan  $a \neq 0$ ,  $a$  bilangan real. Jadi, model lintasan lemparan setiap anak tersebut adalah:

##### Lintasan lemparan anak pertama

Lintasan melalui titik  $O(0,0)$  dan puncak  $P_1(6,9)$ .

$$\begin{aligned} y - 0 &= a(x - 5)^2 & \Leftrightarrow 0 - 10 &= a(0 - 5)^2 \\ & & \Leftrightarrow a &= -0,4 \end{aligned}$$

Fungsi lintasan lemparan anak pertama adalah  $y = -0,25x^2 + 3x$ .

##### Lintasan lemparan anak kedua

Lintasan melalui titik  $O(0,0)$  dan puncak  $P_2(5,15)$ .

$$\begin{aligned} y - 15 &= a(x - 5)^2 & \Leftrightarrow 0 - 15 &= a(0 - 5)^2 \\ & & \Leftrightarrow a &= -0,6 \end{aligned}$$

Fungsi lintasan lemparan anak kedua adalah  $y = -0,6x^2 + 6x$ .

##### Lintasan lemparan anak ketiga

Lintasan melalui titik  $O(0,0)$  dan puncak  $P_3(5,10)$ .

$$\begin{aligned} y - 0 &= a(x - 5)^2 & \Leftrightarrow 0 - 10 &= a(0 - 5)^2 \\ & & \Leftrightarrow a &= -0,4 \end{aligned}$$

Fungsi lintasan lemparan anak ketiga adalah  $y = -0,4x^2 + 4x$ .

## **8.6 Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal**



## 9. Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

- 9.1 Pengertian Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar
- 9.2 Sifat-Sifat Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar
- 9.3 Penerapan Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar





## **Bibliography**

**Books**

**Articles**

