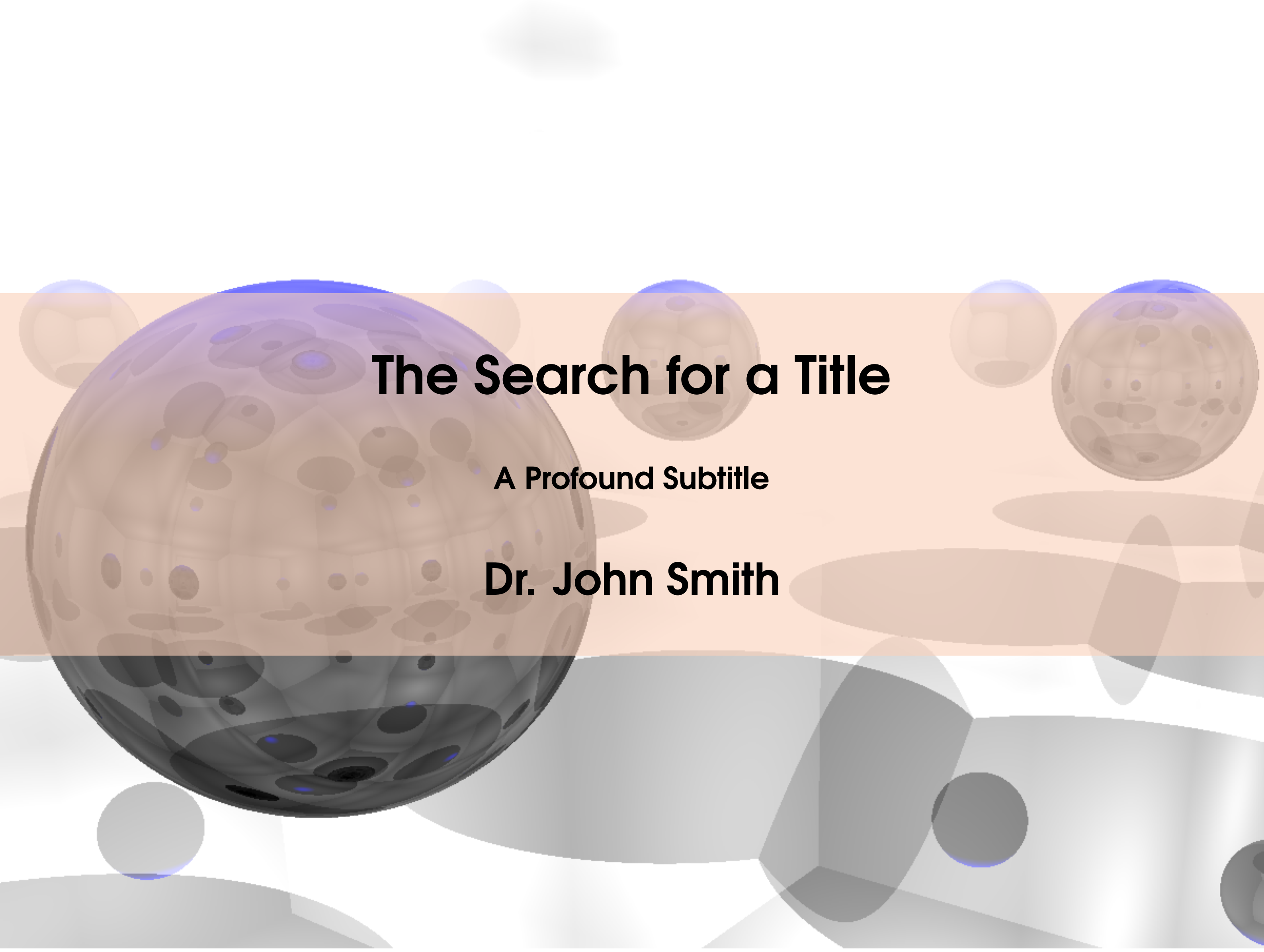


The Search for a Title

A Profound Subtitle

Dr. John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, March 2013

Contents

Part One

1. Logika Matematika

1.1 Pernyataan Berkuantor

Kuantor dari suatu pernyataan adalah istilah yang digunakan untuk menyatakan “berapa banyak” objek di dalam suatu kalimat atau pembicaraan. Selain untuk menyatakan kuantifikasi, kuantor juga biasa digunakan untuk mengubah kalimat terbuka menjadi suatu kalimat deklaratif.

Definisi : Suatu fungsi pernyataan adalah suatu kalimat terbuka di dalam semesta pembicaraan (semesta pembicaraan diberikan secara eksplisit atau implisit). Perhatikan dua pernyataan berikut: 1. Semua planet dalam sistem tata surya mengelilingi matahari. 2. Ada ikan di laut yang menyusui. Pernyataan yang mengandung kata semua atau setiap seperti pada pernyataan (1) disebut pernyataan berkuantor universal (kuantor umum). Ungkapan untuk semua atau untuk setiap, disebut kuantor universal atau kuantor umum. Sedangkan pernyataan yang mengandung kata ada atau beberapa seperti pada pernyataan (2) disebut pernyataan berkuantor eksistensial (kuantor khusus). Ungkapan beberapa atau ada disebut kuantor eksistensial atau kuantor khusus.

1.2 Pernyataan Penyangkal (Lingkaran)

Dari sebuah pernyataan tunggal (atau majemuk), kita bisa membuat sebuah pernyataan baru berupa “ingkaran” dari pernyataan itu. “ingkaran” disebut juga “negasi” atau “penyangkalan”. Ingkaran menggunakan operasi uner (monar) “” atau “”.

Jika suatu pernyataan p benar, maka negasinya p salah, dan jika sebaliknya pernyataan p salah, maka negasinya p benar.

Perhatikan cara membuat ingkaran dari sebuah pernyataan serta menentukan nilai kebenarannya!

1. p : kayu memuai bila dipanaskan (S)
   p : kayu tidak memuai bila dipanaskan (B)
2. r : 3 bilangan positif (B)
   r : (cara mengingkar seperti ini salah)

3 bilangan negative

(Seharusnya) 3 bukan bilangan positif (S)

Nilai kebenaran

Jika p suatu pernyataan benilai benar, maka p bernilai salah dan sebaliknya jika p bernilai salah maka p bernilai benar

Konjungsi

Gabungan dua pernyataan tunggal yang menggunakan kata penghubung "dan" sehingga terbentuk pernyataan majemuk disebut konjungsi. Konjungsi mempunyai kemiripan dengan operasi irisan () pada himpunan. Sehingga sifat-sifat irisan dapat digunakan untuk mempelajari bagian ini.

1.3 Penarikan Kesimpulan

Lists are useful to present information in a concise and/or ordered way[1].

1.3.1 Numbered List

1. The first item
2. The second item
3. The third item

1.3.2 Bullet Points

- The first item
- The second item
- The third item

1.3.3 Descriptions and Definitions

Name Description
Word Definition
Comment Elaboration

[1] Footnote example...

2. Induksi Matematika

2.1 Metode Pembuktian Langsung dan Tidak Langsung

This is an example of theorems.

2.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

Theorem 2.1.1 — Name of the theorem. In $E = \mathbb{R}^n$ all norms are equivalent. It has the properties:

$$\big| ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \big| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \tag{2.1}$$

$$||\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{2.2}$$

2.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

Theorem 2.1.2 A set $\mathscr{D}(G)$ in dense in $L^2(G)$, $|\cdot|_0$.

2.2 Kontradiksi

This is an example of a definition. A definition could be mathematical or it could define a concept.

Definition 2.2.1 — Definition name. Given a vector space E, a norm on E is an application, denoted $||\cdot||$, E in $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ such that:

$$||\mathbf{x}|| = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

$$||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| \tag{2.4}$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \tag{2.5}$$

2.3 Induksi Matematis

Notation 2.1. *Given an open subset G of $\mathbb{R}^n$, the set of functions φ are:*

1. *Bounded support G;*
2. *Infinitely differentiable;*

a vector space is denoted by $\mathscr{D}(G)$.

2.4 Remarks

This is an example of a remark.

> **R** The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.5 Corollaries

This is an example of a corollary.

Corollary 2.5.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.6 Kontradiksi

This is an example of propositions.

2.6.1 Several equations

Proposition 2.6.1 — Proposition name. It has the properties:

$$\big| ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \big| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \tag{2.6}$$

$$|| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i || \leq \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{2.7}$$

2.6.2 Single Line

Proposition 2.6.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathscr{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

2.7 Examples

This is an example of examples.

2.7.1 Equation and Text

■ **Example 2.1** Let $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ and denoted by: $x^0 = (1,1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \tag{2.8}$$

The function f has bounded support, we can take $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$ for all $\varepsilon \in]0; 5/2 - \sqrt{2}[$. ■

2.7.2 Paragraph of Text

■ **Example 2.2 — Example name.** Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. ■

2.8 Exercises

This is an example of an exercise.

> **Exercise 2.1** This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

2.9 Problems

Problem 2.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

2.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.
Vocabulary 2.1 — Word. Definition of word.

3. Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

4. Program Linear Dua Variabel

5. Matriks

6. Barisan dan Deret

6.1 Pola Bilangan

6.2 Barisan dan Deret Aritmatika

Pengertian Barisan Aritmatika Sebelum memahami pengertian barisan aritmatika kita harus mengetahui terlebih dahulumengenai pengertian basiran bilangan. Barisan bilangan merupakan sebuah urutan dari bilangan yang dibentuk dengan berdasarkan kepada aturan-aturan tertentu. Edangkan barisan aritmetika dapat didefinisikan sebagai suatu barisan bilangan yang tiap-tiap pasangan suku yang berurutan mengandung nilai selisih yang sama persis, contohnya adalah barisan bilangan: 2, 4 , 6, 8, 10, 12, 14, . . .

Barisan bilangan tersebut dapat disebut sebagai barisana aritmatika karena masing-masing suku memiliki selisih yang sama yaitu 2. Nilai selisih yang muncul pada barisan aritmatika biasa dilambangkan dengan menggunakan huruf b. Setiap bilangan yang membentuk urutan suatu barisan aritmatika disebut dengan suku. Suku ke n dari sebuah barisan aritmatika dapat disimbolkan dengan lambang Un jadi untuk menuliskan suku ke 3 dari sebuah barisan kita dapat menulis U3. Namun, ada pengecualian khusus untuk suku pertama di dalam sebuah barisan bilangan, suku pertama disimbolkan dengan menggunakan huruf a.

Maka, secara umum suatu barian aritmatika memiliki bentuk :

U1,U2,U3,U4,U5,. . . Un-1 a, atb, a+2b, a+3b, a+4b,. . . a+(n-1)b

Cara Menentukan Rumus suku ke-n dari Sebuah Barisan Pada barisan aritmatika, mencaru rumus suku ke-n menjadi lebih mudah karena memiliki nilai selisih yang sama, sehingga rumusnya adalah:

U2 = a + b U3 = u2 + b = (a + b) + b = a + 2b U4 = u3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b U5 = u4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b U6 = u5 + b = (a + 4b) + b = a + 5b U7 = u6 + b = (a + 5b) + b = a + 6b .

6.3 Barisan dan Deret Geometri

Part Two

7. Limit Fungsi Aljabar

7.1 Table

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table 7.1: Table caption

7.2 Figure

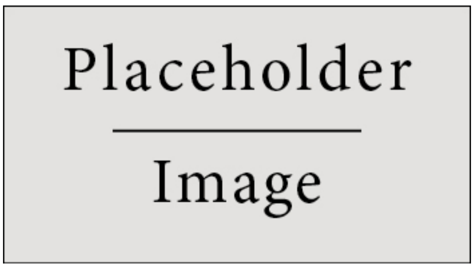


Figure 7.1: Figure caption

8. Turunan Fungsi Aljabar

8.1 Pengertian Turunan

8.2 Sifat-Sifat Turunan Fungsi Aljabar

8.3 Penerapan Turunan Fungsi Aljabar

8.4 Nilai-Nilai Stasioner

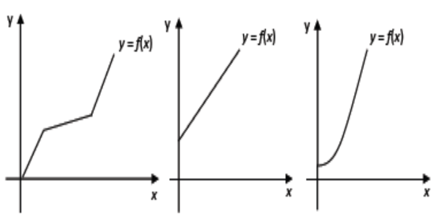
8.5 Aplikasi Turunan

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva.

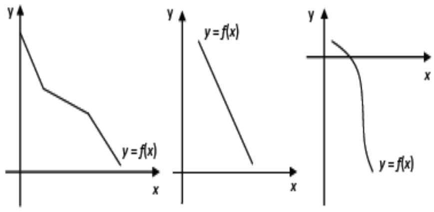
8.5.1 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Coba bayangkan ketika kamu pergi ke plaza atau mall, di sana kita temukan ekskalator atau lift. Gerakan lift dan ekskalator saat naik dapat diilustrasikan sebagai fungsi naik. Demikian juga gerakan lift dan ekskalator saat turun dapat diilustrasikan sebagai fungsi turun. Amatilah beberapa grafik fungsi naik dan turun di bawah ini dan coba tuliskan cirri-ciri fungsi naik dan fungsi turun sebagai ide untuk mendefinisikan fungsi naik dan turun.

Beberapa grafik fungsi turun dari kiri ke kanan



Beberapa grafik fungsi naik dari kiri ke kanan



Dari beberapa contoh grafik fungsi naik dan turun di atas,mari kita definisikan fungsi naik dan turun sebagai berikut.

Misalkan fungsi,

- Fungsi f dikatakan naik jika $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi f dikatakan turun jika $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Tunjukkan grafik fungsi $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ adalah fungsi naik.

lternatif Penyelesaian

$f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$ dengan $0 < x_1 < x_2$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^3$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_2) = x_2^3$

Karena $0 < x_1 < x_2$ maka $x_1^3 < x_2^3$

Karena $x_1^3 < x_2^3$ maka $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Dapat disimpulkan f adalah fungsi naik. Bagaimana jika $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x < 0$, apakah grafik fungsi f adalah fungsi naik? Selidiki!

8.5.2 Aplikasi Turunan dalam Permasalahan Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Mari kita bahas aplikasi turunan dalam permasalahan fungsi naik dan fungsi turun dengan memperhatikan dan mengamati permasalahan berikut.

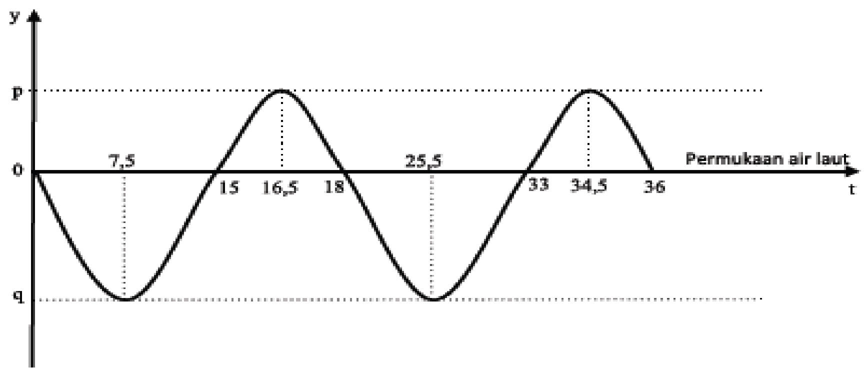
Masalah 1

Seorang nelayan melihat seekor lumba-lumba sedang berenang mengikuti kecepatan perahu mereka. Lumba-lumba tersebut berenang cepat, terkadang menyelam dan tiba-tiba melayang ke permukakaan air laut. Pada saat nelayan tersebut melihat lumba-lumba menyelam maka ia akan melihatnya melayang ke permukaan 15 detik kemudian dan kembali ke permukaan air laut setelah 3 detik di udara. Demikan pergerakan lumba-lumba tersebut diamati berperiode dalam beberapa interval waktu pengamatan.

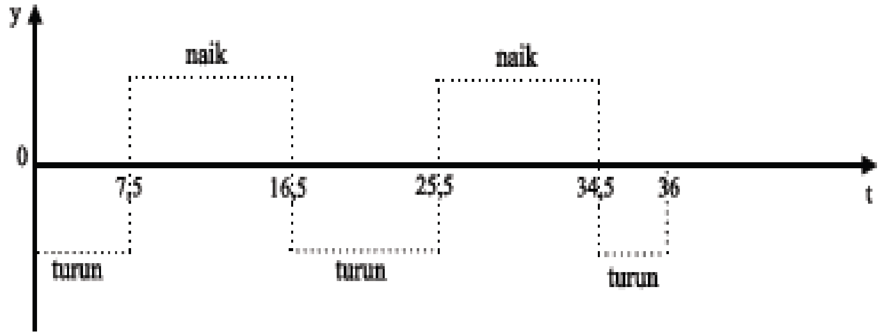
Dari ilustrasi diatas, dapatkah kamu sketsa pergerakan lumba-lumba tersebut dalam 2 periode? Ingat pengertian periode pada pelajaran trigonometri di kelas X. Dapatkah kamu tentukan pada interval waktu berapakah lumbalumba tersebut bergerak naik atau turun? Dapatkah kamu temukan konsep fungsi naik/turun?

Alternatif Penyelesaian:

Sketsa pergerakan lumba-lumba dalam pengamatan tertentu

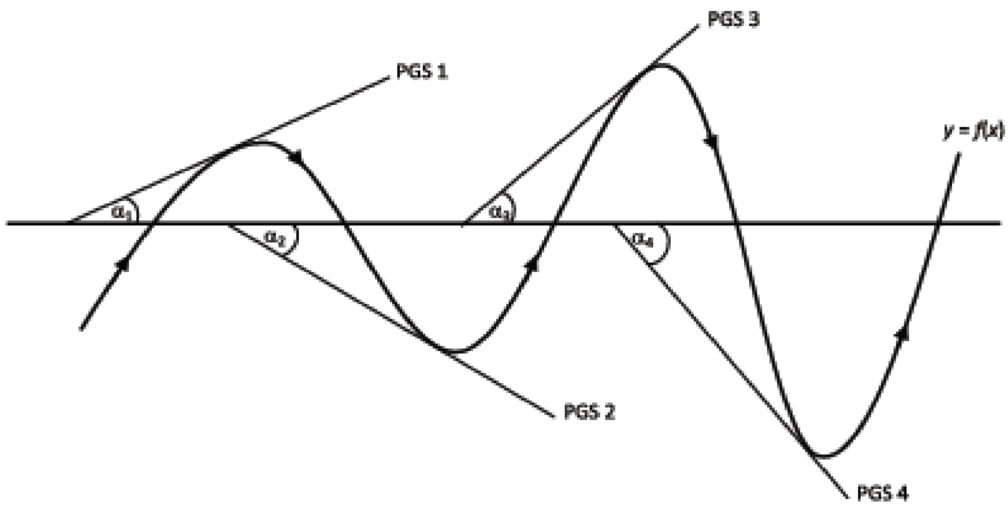


Sketsa pergerakan naik/turun lumba-lumba dalam pengamatan tertentu



Secara geometri pada sketsa di atas, lumba-lumba bergerak turun di interval 0 < t < 7,5 atau 16,5 < t < 25,5 atau 34,5 < t < 36 dan disebut bergerak naik di interval 7,5 < t < 16,5 atau 25,5 < t < 34,5. Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.

Garis singgung di interval fungsi naik/turun



Selanjutnya, mari kita bahas hubungan persamaan garis singgung dengan fungsi naik atau turun. Pada konsep persamaan garis lurus, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif.Pada persamaan garis singgung, gradien adalah tangen sudut garis tersebut dengan sumbu positif sama dengan nilai turunan pertama di titik singgungnya. Pada gambar di atas, misalkan besar masing-masing sudut adalah 0 < ∝1 < 900 < ∝2 < 900 < ∝3 < 900 < ∝4 < 900 sehingga nilai gradien atau tangen sudut setiap garis singgung ditunjukkan pada tabel berikut:

PGS	Sudut	Nilai tangen	Menyinggung di
PGS 1	α_1	$m = \tan(\alpha_1) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	$360^0 - \alpha_2$	$m = \tan(360^0 - \alpha_2) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun
PGS 3	α_3	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 4	$360^0 - \alpha_4$	$m = \tan(360^0 - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun

Coba kamu amati Gambar diatas dan Tabel sebelumnya Apakah kamu melihat konsep fungsi naik/turun. Coba kamu perhatikan kesimpulan berikut:

Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi naik maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran I. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah positif atau m = f '(x) > 0.

Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi turunmaka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran IV. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah negatif atau m = f '(x) < 0.

Dengan demikian, dapat kita simpulkan bahwa fungsi f(x) yang dapat diturunkan pada interval I, akan mempunyai kondisi sebagai berikut:

No.	Nilai turunan pertama	Keterangan
1	$f'(x) > 0$	Fungsi selalu naik
2	$f'(x) < 0$	Fungsi selalu turun
3	$f'(x) \geq 0$	Fungsi tidak pernah turun
4	$f'(x) \leq 0$	Fungsi tidak pernah naik

Misalkan f adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap x $\in$I maka
1. Jika f '(x) > 0 maka fungsi selalu naik pada interval I.
2. Jika f '(x) < 0 maka fungsi selalu turun pada interval I.
3. Jika f '(x) $\geqslant$0 maka fungsi tidak pernah turun pada interval I.
4. Jika f '(x) $\leqslant$0 maka fungsi tidak pernah naik pada interval I.

Konsep di atas dapat digunakan jika kita sudah memiliki fungsi yang akan dianalisis. Tetapi banyak kasus seharihari harus dimodelkan terlebih dahulu sebelum dianalisis. Perhatikan kembali permasalahan berikut!

Masalah:

Tiga orang anak sedang berlomba melempar buah mangga di ketinggian 10 meter. Mereka berbaris menghadap pohon mangga sejauh 5 meter. Anak pertama akan melempar buah mangga tersebut kemudian akan dilanjutkan dengan anak kedua bila tidak mengenai sasaran. Lintasan lemparan setiap anak membentuk kurva parabola. Lemparan anak pertama mencapai ketinggian 9 meter dan batu jatuh 12 meter dari mereka. Lemparan anak kedua melintas di atas sasaran setinggi 5 meter. Anak ketiga berhasil mengenai sasaran. Tentu saja pemenangnya anak ketiga, bukan?

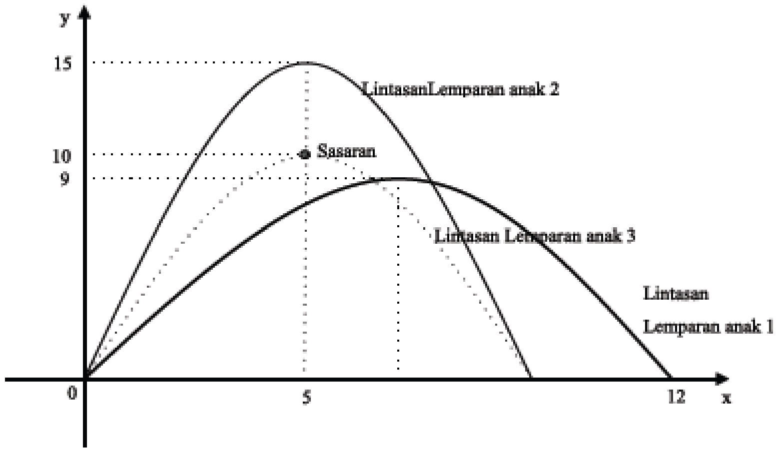
Permasalahan!

Dapatkah kamu mensketsa lintasan lemparan ketiga anak tersebut? Dapatkah kamu membuat model matematika lintasan lemparan? Dapatkah kamu menentukan interval jarak agar masing-masing lemparan naik atau turun berdasarkan konsep turunan?

Alternatif Penyelesaian

a. Sketsa Lintasan Lemparan

Permasalahan di atas dapat kita analisis setelah kita modelkan fungsinya. Misalkan posisi awal mereka melempar adalah posisi titik asal O(0,0) pada koordinat kartesius, sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut.



b. Model Lintasan Lemparan

Kamu masih ingat konsep fungsi kuadrat, bukan? Ingat kembali konsep fungsi kuadrat yang melalui titik puncak P(x_p, y_p)dan titik sembarang P(x, y) adalah y – $y_p = a(x\text{–}\ x_p)^2$sementara fungsi kuadrat yang melalui akar-akar x1, x2 dan titik sembarang P(x, y) adalah y = a(x – $x_1)(x\text{–}$ $x_2)$,dengan $x_p = \frac{x_1 - x_2}{2}$dan a $\neq$0, a bilangan real. Jadi, model lintasan lemparan setiap anak tersebut adalah:

Lintasan lemparan anak pertama

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak p_1(6,9).

$$y - 0 = a(x - 5)^2 \quad \Leftrightarrow 0 - 10 = a(0 - 5)^2$$
$$\Leftrightarrow a = -0{,}4$$

Fungsi lintasan lemparan anak pertama adalah y = –0,25x^2+ 3x.

Lintasan lemparan anak kedua

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak P_2(5,15).

$$y - 15 = a(x - 5)^2 \quad \Leftrightarrow 0 - 15 = a(0 - 5)^2$$
$$\Leftrightarrow a = -0{,}6$$

Fungsi lintasan lemparan anak kedua adalah y = –0,6x^2+ 6x.

Lintasan lemparan anak ketiga

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak P3(5,10).

$$y - 0 = a(x - 5)^2 \quad \Leftrightarrow 0 - 10 = a(0 - 5)^2$$
$$\Leftrightarrow a = -0{,}4$$

Fungsi lintasan lemparan anak ketiga adalah y = –0,4x2 + 4x.

8.6 Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal

9. Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar

Bibliography