

The background features a large, dark sphere with numerous light-colored craters, resembling a celestial body like the Moon. This sphere is positioned on the left side of the frame. Several smaller, translucent spheres of varying sizes and colors (including shades of blue, purple, and orange) are scattered throughout the scene, some appearing to float in the air. The overall composition is set against a light, neutral background with soft, out-of-focus elements.

The Search for a Title

A Profound Subtitle

Dr. John Smith

Copyright © 2013 John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, March 2013

Contents

I	Part One	
1	Geometri Bidang Datar	9
1.1	Kesebangunan antar bangun datar	9
1.2	Kekongruenan Antar Bangun Datar	21
1.2.1	Pengertian Kesebangunan	22
1.2.2	Pengertian Kekongruenan	23
1.2.3	Foto Berskala	25
1.3	Contoh	27
1.3.1	Contoh Soal	28
1.4	Teorema	35
1.4.1	Postulat kekongruenan s.sd.s (sisi-sudut-sisi)	35
1.4.2	Teorema kekongruenan sd.s.sd (sudut-sisi-sudut)	35
1.4.3	Teorema Teorema kekongruenan s.s.s (sisi-sisi-sisi)	36
1.4.4	Teorema kekongruenan s.sd.sd (sisi-sudut-sudut)	36
1.5	Kekongruenan Segitiga	36
1.5.1	Sifat-Sifat Dua Segitiga yang Sebangun dan Kongruen	37
1.5.2	Contoh Soal 1	38
1.5.3	Contoh Soal 2	39
1.5.4	Latihan Soal 1	39
1.5.5	Latihan Soal 2	40
1.5.6	Latihan Soal 3	40
1.5.7	Latihan Soal 4	40
1.5.8	Latihan Soal 5	41
1.5.9	Pembahasan Latihan Soal 1	41
1.5.10	Pembahasan Latihan Soal 2	41

1.5.11	Pembahasan Latihan Soal 3	42
1.5.12	Pembahasan Latihan Soal 4	42
1.5.13	Pembahasan Latihan Soal 5	42
1.5.14	Soal Ujian Akhir Semester	43
1.5.15	Soal 1	43
1.5.16	Soal 2	43
1.5.17	Soal 3	43
1.5.18	Soal 4	44
1.5.19	Soal 5	44
1.5.20	Soal 6	45
1.5.21	Soal 7	45
1.5.22	Soal 8	45

2 Geometri Ruang 47

2.1 Jarak antar Titik 47

2.2 Jarak Titik Ke Garis 47

2.2.1 Menemukan Konsep Jarak, Titik dan Garis 47

2.2.2 Menemukan Rumus Jarak Titik dengan Garis 56

3 Kaidah Pencacahan 63

3.1 Aturan Penjumlahan 63

3.2 Aturan Perkalian 67

3.3 Permutasi 79

3.4 kombinasi 81

3.5 Notations 84

3.6 Remarks 85

3.7 Corollaries 85

3.8 Propositions 85

3.8.1 Several equations 85

3.8.2 Single Line 85

3.9 Examples 85

3.9.1 Equation and Text 85

3.9.2 Paragraph of Text 85

3.10 Exercises 86

3.11 Problems 86

3.12 Vocabulary 86

II

Part Two

4 Statistika 89

4.1 A. Penyajian Data Dalam Bentuk Diagram 89

4.2 B. Penyajian Data Dalam Bentuk Tabel distribusi Frekuensi 98

4.3 Ukuran Pemusatan Data 103

4.4	Mean	104
4.4.1	Rata-Rata Hitung (Mean/Arhitmetic Mean)	104
4.4.2	Rata-Rata Harmonik	106
4.4.3	Rata-Rata Ukur(Geometric Mean)	107
4.4.4	Distribusi frekuensi	108
4.5	Median	108
4.6	Modus	109
4.7	Ukuran Letak Data	110
4.8	CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN	111
5	Peluang kejadian majemuk	115
5.1	Kejadian Saling bebas	115
5.2	Penjelasan Kejadian Saling bebas	115
5.3	Contoh Soal	116
5.4	Kejadian Saling bebas	117
5.5	Contoh 1 Kejadian saling Bebas	117
5.6	Contoh 2 Kejadian saling Bebas	117
5.7	Contoh 3 Kejadian saling Bebas	118
5.8	Contoh 4 Kejadian saling Bebas	118
5.9	Contoh 5 Kejadian saling Bebas	119
5.10	Contoh 6 Kejadian saling Bebas	120
5.11	Contoh 7 Kejadian saling Bebas	120
5.12	Contoh 8 Kejadian saling Bebas	120
5.13	Contoh 9 Kejadian saling Bebas	120
5.14	Contoh 10 Kejadian saling Bebas	121
5.15	Contoh 11 Kejadian saling Bebas	121
5.16	Contoh 11 Kejadian saling Bebas	121
5.17	Contoh 12 Kejadian saling Bebas	121
5.18	Contoh 13 Kejadian saling Bebas	122
5.19	Contoh 14 Kejadian saling Bebas	122
5.20	Contoh 15 Kejadian saling Bebas	122
5.21	Contoh 16 Kejadian saling Bebas	122
5.22	Contoh 17 Kejadian saling Bebas	122
	Bibliography	123
	Books	123
	Articles	123

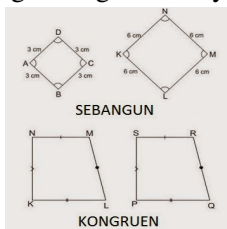
Part One

1	Geometri Bidang Datar	9
1.1	Kesebangunan antar bangun datar	
1.2	Kekongruenan Antar Bangun Datar	
1.3	Contoh	
1.4	Teorema	
1.5	Kekongruenan Segitiga	
2	Geometri Ruang	47
2.1	Jarak antar Titik	
2.2	Jarak Titik Ke Garis	
3	Kaidah Pencacahan	63
3.1	Aturan Penjumlahan	
3.2	Aturan Perkalian	
3.3	Permutasi	
3.4	kombinasi	
3.5	Notations	
3.6	Remarks	
3.7	Corollaries	
3.8	Propositions	
3.9	Examples	
3.10	Exercises	
3.11	Problems	
3.12	Vocabulary	

1. Geometri Bidang Datar

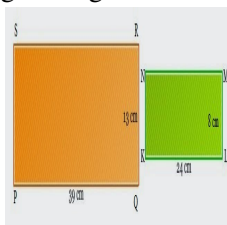
1.1 Kesebangunan antar bangun datar

Kesebangunan dan kekongruenan biasanya digunakan untuk membandingkan dua buah bangun datar (atau lebih) dengan bentuk yang sama. dua buah bangun datar dapat dikatakan sebangun apabila panjang setiap sisi pada kedua bangun datar tersebut memiliki nilai perbandingan yang sama. sedangkan kongruen memiliki konsep yang lebih mendetail, apabila dua buah (atau lebih) bangun datar memiliki bentuk, ukuran, serta besar sudut yang sama barulah mereka dapat disebut sebagai bangun datar yang kongruen. Perhatikan gambar berikut:



Kesebangunan Pada Persegi Panjang

Perhatikan gambar dua buah persegi panjang di bawah ini. keduanya merupakan bangun datar yang sebangun karena memiliki kesamaan sifat yang dapat dijelaskan sebagai berikut:



1. Perbandingan antara sisi terpanjang dengan sisi terpendek memiliki nilai yang sama.

Perbandingan sisi terpanjang PQ dengan sisi terpendek QR = $39 : 13 = 1 : 3$
Perbandingan sisi terpanjang KL dengan sisi terpendek LM = $24 : 8 = 1 : 3$
Perbandingan sisi terpanjang RS dengan sisi terpendek QP = $39 : 13 = 1 : 3$
Perbandingan sisi terpanjang MN dengan sisi terpendek NK = $24 : 8 = 1 : 3$

Dari perhitungan diatas dapat dilihat bahwa sisi terpanjang dan terpendek pada kedua persegi panjang diatas memiliki perbandingan yang sama yaitu 1 : 3.

2. Besar sudut pada kedua persegi panjang tersebut memiliki nilai yang sama besar.

Sudut P = Sudut K; Sudut Q = Sudut L; Sudut R = Sudut M; Sudut S = Sudut N

Karena kedua persegi panjang tersebut hanya memiliki bentuk dan sudut yang sama besar namun tidak memiliki ukuran yang sama, maka dua bangun datar tersebut tidak bisa disebut kongruen.

Contoh Soal Kesebangunan pada Persegi Panjang

Ada dua buah persegi panjang dengan ukuran yang berbeda ABCD dan KLMN. Persegi panjang ABCD memiliki panjang 16cm dan lebar 4cm. Bila persegi panjang ABCD sebangun dengan persegi panjang KLMN yang memiliki panjang 32cm, maka berapakah lebar dari persegi panjang KLMN?

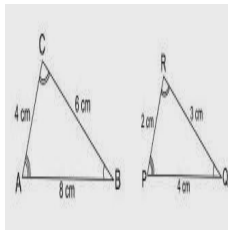
Karena kedua persegi panjang tersebut sebangun, maka berlaku rumus:

$$AB/KL = BC/LM \quad 16/32 = 4/LM \quad LM = 32 \times 4 / 16 \quad LM = 124 / 16 \quad LM = 8 \text{ cm}$$

Maka lebar dari persegi panjang KLMN adalah 8 cm.

Kesebangunan pada Segitiga Kesebangunan pada segitiga agak lebih sulit dicapai karena ada tiga buah sisi yang harus sama perbandingannya.

Contoh segitiga yang sebangun:



Segitiga tersebut dapat dikatakan sebangun karena perbandingan sisi-sisinya sama besar:

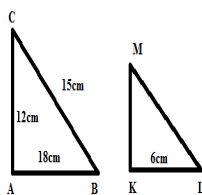
Sisi AC sesuai dengan sisi PR = $AC/PR = 4/2 = 2/1$ Sisi AB sesuai dengan sisi PQ = $AB/PQ = 8/4 = 2/1$ Sisi BC sesuai dengan sisi QR = $BC/QR = 6/3 = 2/1$

Maka $AC/PR = AB/PQ = BC/QR = 2/1$

Besar sudut yang bersesuaian memiliki besar yang sama:

Sudut A = sudut P; sudut B = sudut Q; sudut C = sudut R

Contoh Soal Kesebangunan pada Persegi Panjang



Diketahui segitiga ABC sebangun dengan segitiga KLM, maka berapakah panjang LM dan MK?

Jawab:

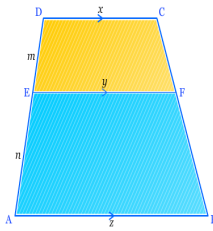
$$AB/KL = BC/LM \quad 18/6 = 15/LM \quad 3 = 15/LM \quad LM = 15/3 \quad LM = 5 \text{ cm}$$

Dari hasil tersebut kita dapat mengetahui bahwa perbandingan sisi pada kedua segitiga tersebut adalah:

$$18 : 6 = 3 : 1 \quad 15 : 5 = 3 : 1 \quad 12 : MK = 3 : 1 \quad MK = 12/3 \quad MK = 4 \text{ cm}$$

Contoh Kesebangunan pada Trapesium

Perhatikan gambar di bawah ini!



Buktikan bahwa,

Soal 6 Rumus

Jika $DC = 20$ cm, $AB = 34$ cm, $DE = 9$ cm dan $AE = 15$ cm, tentukan EF !

Pembahasan Untuk membuktikan rumus yang ditentukan, kita harus menggambar garis DH yang sejajar dengan garis BC , seperti berikut. Karena garis EG sejajar dengan garis AH , maka segitiga DEG sebangun dengan segitiga DAH . Akibatnya,

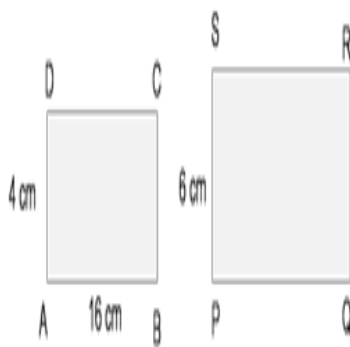
$$\begin{aligned} \frac{DE}{DA} &= \frac{EG}{AH} \\ \Leftrightarrow \frac{m}{m+n} &= \frac{y-x}{z-x} \\ \Leftrightarrow m(z-x) &= (m+n)(y-x) \\ \Leftrightarrow mz - mx &= my - mx + ny - nx \\ \Leftrightarrow mz &= (m+n)y - nx \\ \Leftrightarrow (m+n)y &= mz + nx \\ \Leftrightarrow y &= \frac{mz + nx}{m+n} \end{aligned}$$

Untuk $DC = 20$ cm, $AB = 34$ cm, $DE = 9$ cm dan $AE = 15$ cm, maka

$$EF = \frac{DE \cdot AB + AE \cdot DC}{DE + AE} = \frac{9 \cdot 34 + 15 \cdot 20}{9 + 15} = 25,25$$

Jadi, diperoleh panjang EF adalah 25,25 cm..

1. Diberikan dua buah persegipanjang ABCD dan persegipanjang PQRS seperti gambar berikut.



Kedua persegipanjang tersebut adalah sebangun. Tentukan:
a) panjang PQ b) luas dan keliling persegipanjang PQRS

Pembahasan a) Perbandingan panjang garis AB dengan AD bersesuaian dengan perbandingan

$$\frac{PQ}{PS} = \frac{AB}{AD}$$

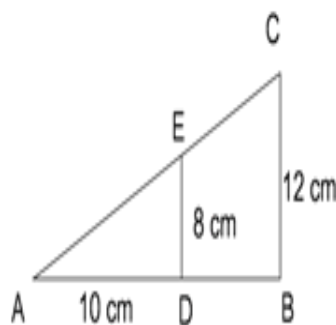
$$\frac{PQ}{6} = \frac{16}{4}$$

$$PQ = \frac{16 \times 6}{4} = \frac{96}{4} = 24 \text{ cm}$$

panjang garis PQ dengan PS. Sehingga

Panjang PQ = 24 cm b)

Luas persegipanjang PQRS = PQ x PS = 24 cm x 6 cm = 144 cm² Keliling persegipanjang PQRS = 2 x (PQ + PS) = 2 x (24 cm + 6 cm) = 60 cm



2. Perhatikan gambar berikut!

Tentukan panjang DB!

Pembahasan Soal ini tentang kesebangunan segitiga. Segitiga ABC yang lebih besar sebangun dengan segitiga kecil ADE sehingga perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian akan sama. Temukan dulu panjang sisi AB, ambil perbandingan alas dan tinggi dari kedua segitiga seperti

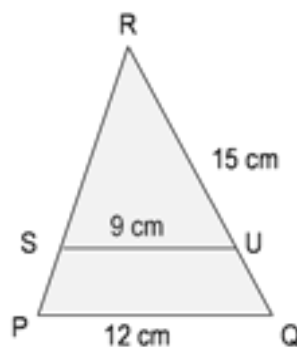
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

$$\frac{AB}{12} = \frac{10}{8}$$

$$AB = \frac{10 \times 12}{8} = 15 \text{ cm}$$

Dengan demikian DB = AB - AD = 15 cm - 10 cm = 5 cm

berikut ini:



3. Dari soal berikut, tentukan:

a) QR b) QU

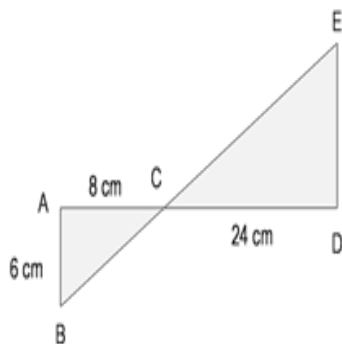
Pembahasan a) Penyelesaian seperti nomor 2, ambil perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dari segitiga PQR dan segitiga SUR.

$$\begin{aligned}\frac{QR}{PQ} &= \frac{UR}{SU} \\ \frac{QR}{15} &= \frac{9}{15} \\ QR &= \frac{15 \times 9}{15} = 9 \text{ cm}\end{aligned}$$

matematikastudycenter.com

$$b) QU = QR - UR = 20 \text{ cm} - 15 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

4. Perhatikan gambar berikut!

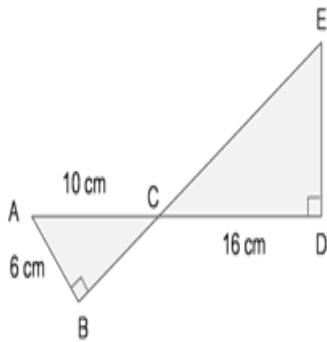


Tentukan panjang DE

$$\begin{aligned}\frac{DE}{DC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{DE}{24} &= \frac{6}{8} \\ DE &= \frac{6 \times 24}{8} = 18 \text{ cm}\end{aligned}$$

Pembahasan Kesebangunan dua segitiga siku-siku

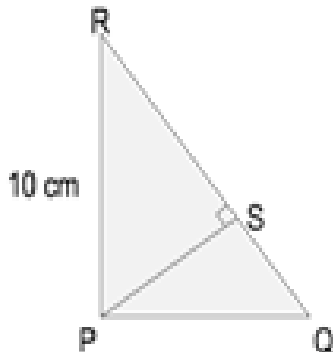
5. Dari soal berikut tentukan panjang DE!



Pembahasan Bedakan pengambilan sisi-sisi yang bersesuaian dari soal nomor sebelumnya.

$$\begin{aligned}\frac{DE}{DC} &= \frac{BA}{BC} \\ \frac{DE}{16} &= \frac{6}{8} \\ DE &= \frac{6 \times 16}{8} = 12 \text{ cm}\end{aligned}$$

6. Diketahui panjang SR adalah 8 cm.



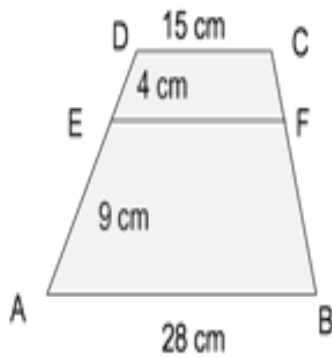
Tentukan panjang QS!

Pembahasan Kongruensi dua segitiga siku-siku, tentukan lebih dahulu panjang PS gunakan teorema pythagoras akan didapat angka 6 cm untuk panjang PS. Kemudian lakukan perbandingan

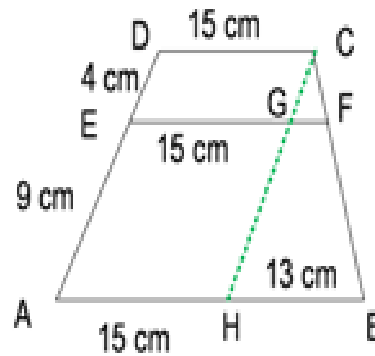
$$\begin{aligned}\frac{QS}{PS} &= \frac{PS}{SR} \\ \frac{QS}{6} &= \frac{6}{8} \\ QS &= \frac{6 \times 6}{8} = 4,5 \text{ cm}\end{aligned}$$

sisi yang sesuai:

7. Dari soal berikut ini tentukan panjang EF!



Pembahasan Buat satu garis yang sejajar dengan garis AD



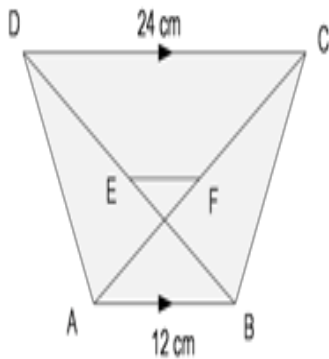
namakan CH seperti gambar berikut.

baru yaitu $EG = 15$ cm, $AH = 15$ cm dan $HB = 13$ cm. Ambil dua segitiga sebangun GFC dan HBC bandingkan sisi-sisi yang bersesuaian:

$$\begin{aligned} \frac{FG}{GC} &= \frac{BH}{HC} \\ \frac{FG}{4} &= \frac{13}{(9+4)} \\ FG &= \frac{4 \times 13}{13} = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dengan demikian panjang $EF = EG + GF = 15 + 4 = 19$ cm

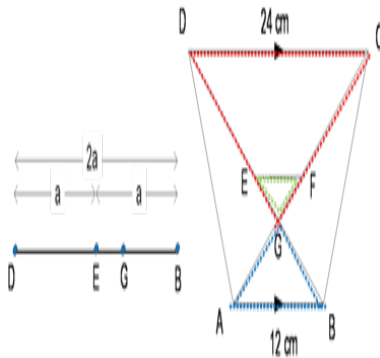
8. Perhatikan gambar berikut ini.



Tentukan panjang EF, jika titik E dan titik F berturut-turut adalah titik tengah diagonal DB dan diagonal CA!

Pembahasan Cara pertama, Perhatikan garis DB yang dibagi menjadi segmen-segmen DE, EG

dan GB. Misalkan panjang DB adalah $2a$ maka $DE = a$ $EB = a$



Dari kesebangunan segitiga DGC dan segitiga AGB didapatkan perbandingan panjang garis $DG : GB = 2 : 1$ didapatnya dari $24 \text{ cm} : 12 \text{ cm}$

Sehingga

$$DG = \frac{2}{3} \times 2a = \frac{4}{3}a$$

$$GB = \frac{1}{3} \times 2a = \frac{2}{3}a$$

Dari pembagian segmen garis DB terlihat bahwa $DG = DE + GE$ Sehingga

$$\frac{4}{3}a = a + GE$$

$$GE = \frac{1}{3}a$$

Akhirnya bandingkan sisi-sisi yang bersesuaian pada segitiga kongruen ABG dan EGF.

$$\frac{GE}{EF} = \frac{GB}{BA}$$

$$\frac{\frac{1}{3}a}{EF} = \frac{\frac{2}{3}a}{12}$$

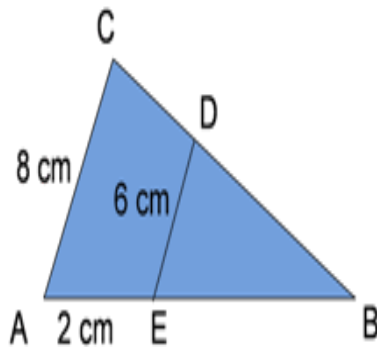
$$EF = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 12 = 6 \text{ cm}$$

Cara kedua, namun diingat hanya untuk tipe soal seperti ini saja, jadi titik E dan F nya di tengah-tengah, jangan gunakan untuk tipe soal yang lain:

$$EF = \frac{DC - AB}{2}$$

$$= \frac{24 - 12}{2} = 6 \text{ cm}$$

9. Perhatikan gambar berikut ini!



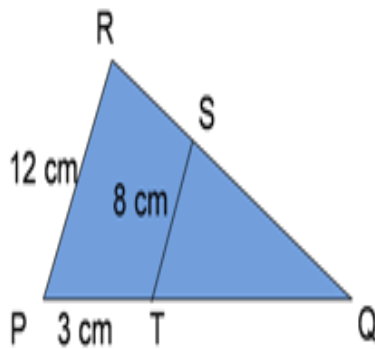
Jarak titik E ke B adalah.... A. 1,5 B. 6 C. 8 D. 10

Pembahasan Misalkan EB dinamakan x , maka AB nantinya akan sama dengan $(2 + x)$. Perbandingan sisi EB dengan ED pada segitiga kecil (segitiga BDE), harus sama dengan perbandingan AB dengan AC pada segitiga besar (segitiga BCA). Selanjutnya:

$$\begin{aligned} \frac{EB}{ED} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{x}{6} &= \frac{2 + x}{8} \\ 8x &= 12 + 6x \\ 8x - 6x &= 12 \\ 2x &= 12 \\ x &= \frac{12}{2} = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi panjang EB adalah 6 cm.

10. Perhatikan gambar berikut ini!



Panjang TQ adalah... A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

(UN 2007)

Pembahasan Dengan cara yang sama dengan nomor 9 diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{TQ}{TS} &= \frac{PQ}{PR} \\ \frac{TQ}{TS} &= \frac{PT + TQ}{PR} \\ \frac{x}{8} &= \frac{3 + x}{12} \\ 12x &= 24 + 8x \\ 12x - 8x &= 24 \\ 4x &= 24 \\ x &= \frac{24}{4} = 6 \text{ cm}\end{aligned}$$

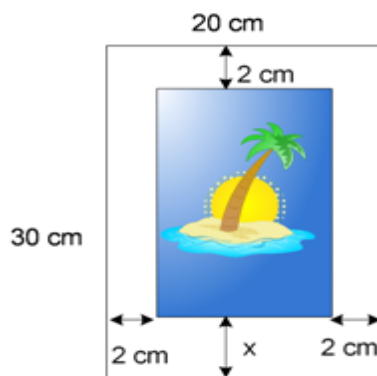
11. Sebuah karton berukuran tinggi 30 cm dan lebar 20 cm. Budi menempelkan sebuah foto sehingga sisa karton di sebelah kiri, kanan, atas foto adalah 2 cm.



Jika foto dan karton sebangun, sisa karton di bawah foto adalah... A. 5 cm B. 4 cm C. 3 cm D. 2 cm

(Modifikasi Soal Kesebangunan - UN 2010)

Pembahasan Perhatikan ilustrasi foto dan karton tempat menempel berikut, misalkan sisa panjang karton namakan sebagai x .



Perbandingan panjang dengan lebar foto harus sama dengan perbandingan panjang dengan lebar dari karton, karena sebangun.

$$\frac{\text{panjang foto}}{\text{lebar foto}} = \frac{\text{panjang karton}}{\text{lebar karton}}$$

$$\frac{30 - 2 - x}{20 - 2 - 2} = \frac{30}{20}$$

$$\frac{28 - x}{16} = \frac{30}{20}$$

$$56 - 2x = 48$$

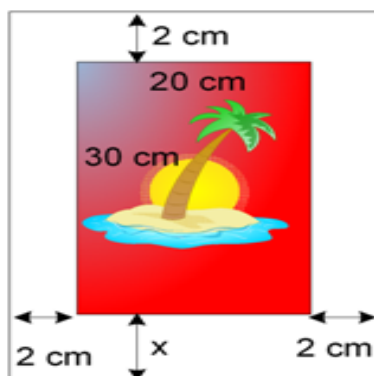
$$56 - 48 = 2x$$

$$8 = 2x$$

$$x = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

12. Sebuah foto berukuran tinggi 30 cm dan lebar 20 cm ditempel pada sebuah karton. Sisa karton di sebelah kiri, kanan, atas foto 2 cm. Jika foto dan karton sebangun, sisa karton di bawah foto adalah... A. 5 cm B. 4 cm C. 3 cm D. 2 cm (Soal Kesebangunan - Soal UN Matematika 2010)

Pembahasan Perhatikan ilustrasi foto dan karton tempat menempel berikut,



Perbandingan panjang dengan lebar foto harus sama dengan perbandingan panjang dengan lebar dari karton, karena sebangun. Perhatikan perbedaannya dengan nomor sebelumnya dalam menempatkan x.

$$\frac{\text{panjang foto}}{\text{lebar foto}} = \frac{\text{panjang karton}}{\text{lebar karton}}$$

$$\frac{30}{20} = \frac{30 + 2 + x}{20 + 2 + 2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{32 + x}{24}$$

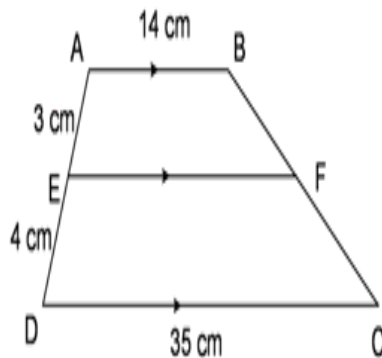
$$36 = 32 + x$$

$$36 - 32 = x$$

$$4 = x$$

$$x = 4 \text{ cm}$$

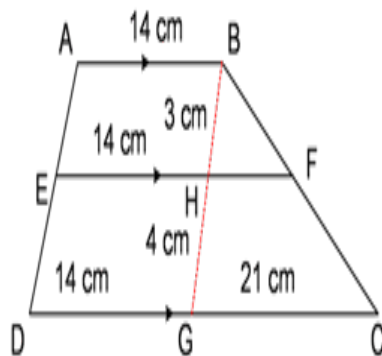
13. Perhatikan gambar!



Panjang EF adalah... A. 20 cm B. 21 cm C. 23 cm D. 26 cm

(UN SMP 2013)

Pembahasan Tambahaan garis bantu, beri nama BG.



Panjang DG jadi 14 cm, dan GC 21 cm karena tadinya DC = 35 cm. Bandingkan sisi segitiga besar BGC dan segitiga kecil BHF yang bersesuaian hingga diperoleh panjang HF dulu.

$$\frac{BG}{GC} = \frac{BH}{HF}$$

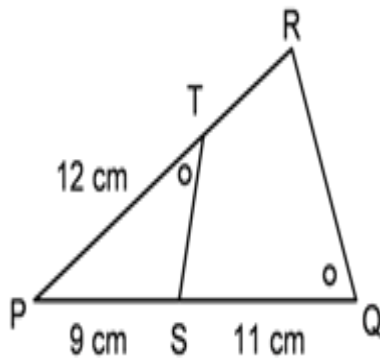
$$\frac{14}{21} = \frac{3}{HF}$$

$$HF = \frac{3 \times 21}{14} = 9 \text{ cm}$$

$$EF = EH + HF$$

$$= 14 + 9 = 23 \text{ cm}$$

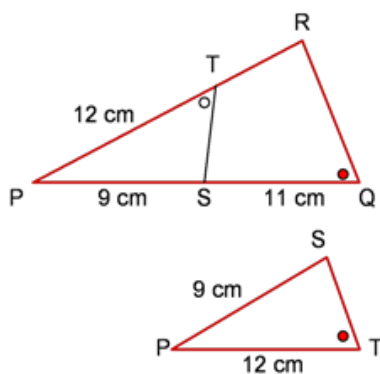
Soal No. 14 Perhatikan gambar di samping!



Panjang TR adalah... A. 2 cm B. 3 cm C. 4 cm D. 6 cm
(UN Matematika SMP/MTs tahun 2014)

Pembahasan

Dicoba dulu, petunjuknya, $\triangle PQR$ sebangun dengan $\triangle PTS$, dengan $\angle T$ bersesuaian dengan $\angle Q$, dan $\angle S$ bersesuaian dengan $\angle R$. Sementara $\angle P$ sama-sama dipakai kedua segitiga. Bandingkan sisi-sisi yang diketahui dan bersesuaian, biar lebih mudah dilihat bisa digambar dulu kedua segitiga secara terpisah.



1.2 Kekongruenan Antar Bangun Datar

Definisi kekongruenan tidak lepas dari kesebangunan karena kekongruenan merupakan kasus khusus kesebangunan. Jadi definisinya sebagai berikut. Dua segibanyak (polygon) dikatakan kongruen jika ada korespondensi satu-satu antara titik-titik sudut kedua segi banyak tersebut sedemikian hingga berlaku:

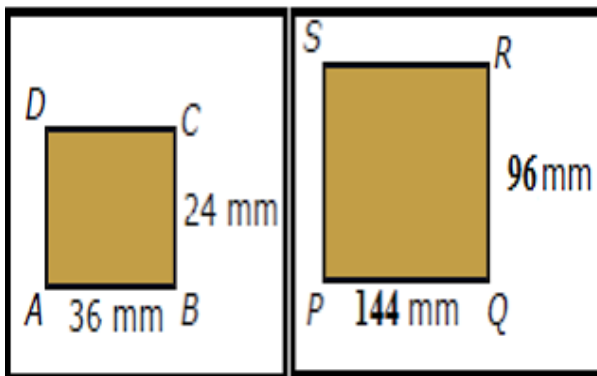
1. sudut-sudut yang bersesuaian sama besar, dan

2. semua perbandingan panjang sisi-sisi yang bersesuaian adalah satu.

Syarat kedua ini dapat diringkas menjadi 2'. sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang.

1.2.1 Pengertian Kesebangunan

Perhatikan gambar persegi panjang ABCD dan PQRS di bawah ini! Pada persegi panjang ABCD memiliki panjang dan lebar yaitu 36 mm dan 24 mm, serta persegi panjang PQRS memiliki panjang dan lebar yaitu 144 mm dan 96 mm.



Perbandingan antara panjang persegipanjang ABCD dan panjang persegipanjang PQRS adalah $36 : 144$ atau $1 : 4$. Demikian pula dengan lebarnya, perbandingannya $24 : 96$ atau $1 : 4$. Dengan demikian, sisi-sisi yang bersesuaian dari kedua persegipanjang itu memiliki perbandingan senilai (sebanding). Perbandingan sisi yang bersesuaian dari kedua persegipanjang tersebut, yaitu sebagai berikut.

$$AB/PQ = BC/QR = CD/RS = AD/PS = 1/4$$

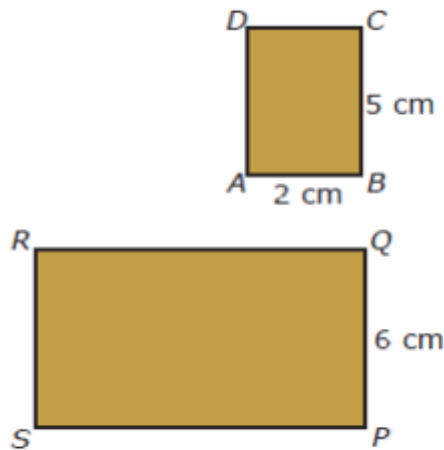
Oleh karena semua sudut persegipanjang besarnya 90 derajat (siku-siku) maka sudut-sudut yang bersesuaian dari kedua persegipanjang itu besarnya sama. Dalam hal ini, persegipanjang ABCD dan persegipanjang PQRS memiliki sisi-sisi bersesuaian yang sebanding dan sudut-sudut bersesuaian yang sama besar. Selanjutnya, kedua persegipanjang tersebut dikatakan sebangun. Jadi, persegipanjang ABCD sebangun dengan persegipanjang PQRS.

Pengertian kesebangunan seperti ini berlaku umum untuk setiap bangun datar. Dua bangun datar dikatakan sebangun jika memenuhi dua syarat berikut.

Panjang sisi-sisi yang bersesuaian dari kedua bangun itu memiliki perbandingan senilai. Sudut-sudut yang bersesuaian dari kedua bangun itu sama besar.

Contoh Soal 1

Jika persegipanjang ABCD sebangun dengan persegipanjang PQRS, hitung panjang QR.



Penyelesaian: Salah satu syarat dua bangun dikatakan sebangun adalah sisi-sisi yang bersesuaian sebanding. Oleh karena itu,

$$AB/PQ = BC/QR$$

$$2/6 = 5/QR$$

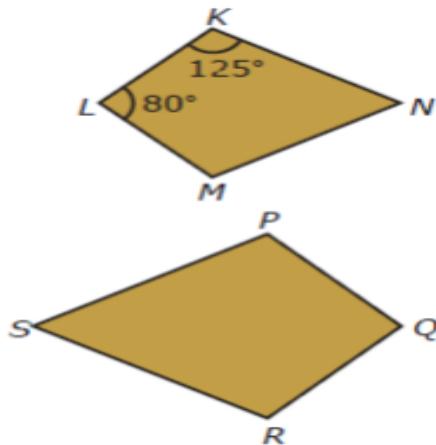
$$2QR = 30$$

$$QR = 15$$

Jadi, panjang QR adalah 15 cm.

Contoh Soal 2

Jika layang-layang KLMN dan layang-layang PQRS pada gambar di bawah ini sebangun, tentukan besar sudut R dan sudut S.



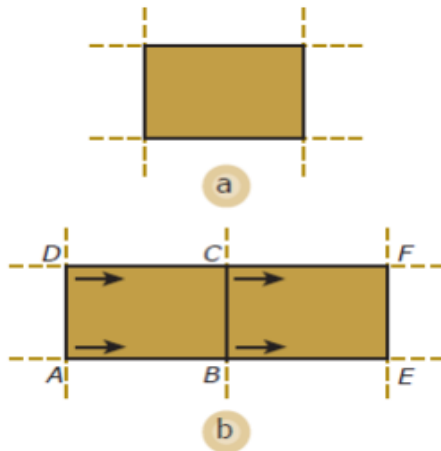
Penyelesaian: Salah satu syarat dua bangun dikatakan sebangun adalah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar sehingga sudut P = 125derajat dan sudut Q = 80derajat. Amati layang-layang PQRS, menurut sifat layang-layang, sepasang sudut yang berhadapan sama besar sehingga sudut R = sudut P = 125derajat. Oleh karena sudut dalam layang-layang berjumlah 360derajat maka $P + Q + R + S = 360$ derajat 125 derajat + 80 derajat + 125 derajat + $S = 360$ derajat

$$S = 360\text{derajat} - 330\text{derajat} = 30\text{derajat}$$

1.2.2 Pengertian Kekongruenan

Pernahkah kamu melihat seorang tukang bangunan yang sedang memasang ubin? Sebelum ubin-ubin itu dipasang, biasanya tukang tersebut memasang benang-benang sebagai tanda agar pemasan-

gan ubin tersebut terlihat rapi, seperti tampak pada gambar di bawah ini. Cara pemasangan ubin tersebut dapat diterangkan secara geometri seperti berikut.



Gambar di atas adalah gambar permukaan lantai yang akan dipasang ubin persegipanjang. Pada permukaannya diberi garis-garis sejajar. Jika ubin ABCD digeser searah AB (tanpa dibalik), diperoleh $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow E$, $D \Rightarrow C$, dan $C \Rightarrow F$ sehingga ubin ABCD akan menempati ubin BEFC. Akibatnya,

$AB \Rightarrow BE$ sehingga $AB = BE$

$BC \Rightarrow EF$ sehingga $BC = EF$

$DC \Rightarrow CF$ sehingga $DC = CF$

$AD \Rightarrow BC$ sehingga $AD = BC$

$\angle DAB \Rightarrow \angle CBE$ sehingga $\angle DAB = \angle CBE$

$\angle ABC \Rightarrow \angle BEF$ sehingga $\angle ABC = \angle BEF$

$\angle BCD \Rightarrow \angle EFC$ sehingga $\angle BCD = \angle EFC$

$\angle ADC \Rightarrow \angle BCF$ sehingga $\angle ADC = \angle BCF$

Berdasarkan uraian tersebut, diperoleh

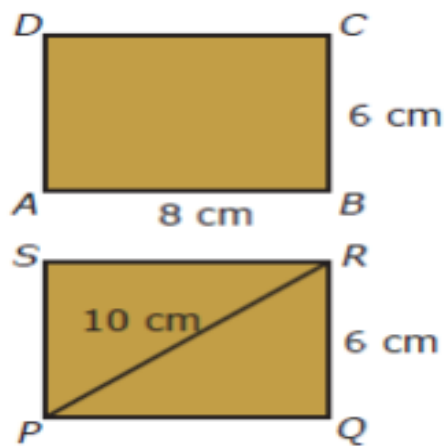
sisi-sisi yang bersesuaian dari persegipanjang ABCD dan persegipanjang BEFC sama panjang, dan sudut-sudut yang bersesuaian dari persegi panjang ABCD dan persegipanjang BEFC sama besar.

Hal tersebut menunjukkan bahwa persegipanjang ABCD dan persegipanjang BEFC memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Dua persegi panjang yang demikian dikatakan kongruen.

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh gambaran bahwa dua bangun yang kongruen pasti sebangun, tetapi dua bangun yang sebangun belum tentu kongruen. Bangun-bangun yang memiliki bentuk dan ukuran yang sama dikatakan bangun-bangun yang kongruen. Pengertian kekongruenan tersebut berlaku juga untuk setiap bangun datar.

Contoh Soal 1

Perhatikan gambar di bawah ini! Apakah persegipanjang ABCD kongruen dengan persegi panjang PQRS dan apakah persegipanjang ABCD sebangun dengan persegi panjang PQRS? buktikan!



Penyelesaian: Unsur-unsur persegipanjang ABCD adalah $AB = DC = 8$ cm, $AD = BC = 6$ cm, dan sudut $A = \text{sudut } B = \text{sudut } C = \text{sudut } D = 90^\circ$. Amati persegipanjang PQRS dengan diagonal PR. Panjang PQ dapat ditentukan dengan menggunakan Dalil Pythagoras seperti berikut.

$$PQ = \sqrt{PR^2 - (QR)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(10)^2 - (6)^2}$$

$$PQ = \sqrt{64}$$

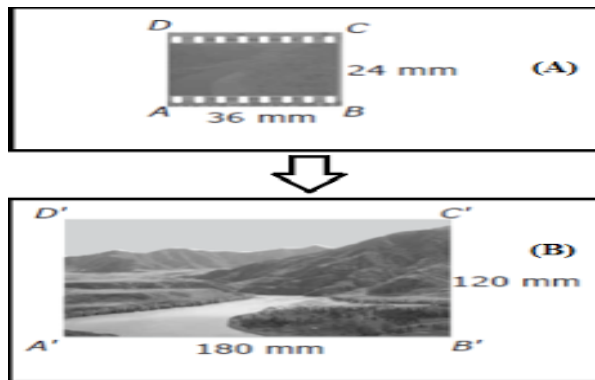
$$PQ = 8$$

Jadi, unsur-unsur persegipanjang PQRS adalah $PQ = SR = 8$ cm, $PS = QR = 6$ cm, dan sudut $P = \text{sudut } Q = \text{sudut } R = \text{sudut } S = 90^\circ$. Dari uraian tersebut tampak bahwa sisi-sisi yang bersesuaian dari persegipanjang ABCD dan persegipanjang PQRS sama panjang. Selain itu, sudut-sudut yang bersesuaian dari kedua persegipanjang itu sama besar. Jadi, persegipanjang ABCD kongruen dengan persegipanjang PQRS. Dua bangun datar yang kongruen pasti sebangun. Jadi, persegipanjang ABCD sebangun dengan persegipanjang PQRS.

1.2.3 Foto Berskala

Pernahkan Anda melihat film negatif? Sekarang orang jarang kamera menggunakan film negatif, karena selain proses mencetaknya yang sungguh ribet juga tidak praktis. Jika anda membeli kamera yang menggunakan film negatif jika sudah habis film negatifnya digunakan maka anda harus membelinya yang baru lagi. Jadi kamera dengan film negatif lebih ribet dibandingkan dengan kamera digital yang sangat canggih seperti yang beredar sekarang ini. Apa hubungannya materi yang akan dibahas ini dengan film negatif?

Sekarang coba anda perhatikan gambar di bawah ini. Setelah film negatif itu dicetak maka foto yang dihasilkan lebih besar dari ukuran yang ada pada film negatif. Walaupun ukurannya berbeda tetapi memiliki panjang dan lebar dengan perbandingan yang sama antara panjang dan lebar. Jadi foto berskala merupakan contoh kesebangunan yang sering kamu jumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah foto berskala. Selain itu konsep foto berskala juga dimanfaatkan pada pembuatan desain bangunan yang sering dibuat oleh para arsitektur.



Perhatikan gambar foto berskala di atas! Gambar (A) memperlihatkan sebuah film negatif ABCD berukuran panjang 36 mm dan lebar 24 mm. Setelah dicetak, film negatif tersebut menjadi foto A' B' C' D' berukuran panjang 180 mm dan lebar 120 mm.

Pada dasarnya, pengertian skala pada foto sama dengan skala pada peta. Hanya saja, perbandingan antara ukuran pada foto dan ukuran sebenarnya tidak sebesar perbandingan antara ukuran pada peta dan ukuran sebenarnya. Satu sentimeter pada peta bisa mewakili beberapa kilometer pada ukuran sebenarnya, sedangkan satu sentimeter pada foto biasanya mewakili beberapa sentimeter atau beberapa meter saja dari ukuran sebenarnya.

Konsep perhitungan foto skala dengan skala pada peta caranya sama bahkan pengertian antara foto berskala hampir sama dengan skala pada peta. Kita ketahui bahwa definisi skala pada peta ialah perbandingan antara ukuran pada peta dan ukuran sebenarnya. Jadi skala pada peta dan foto berskala menggunakan konsep perbandingan senilai. Jika ditulis secara matematis maka, jarak sebenarnya = jarak pada peta/skala

Contoh Soal 1

Amati gambar dari foto sebuah mobil seperti gambar di bawah ini. Jika panjang mobil sebenarnya 3,5 m, berapa tinggi mobil sebenarnya?



Penyelesaian:

Cara 1:

Untuk menentukan tinggi mobil sebenarnya, langkah pertama yang harus kamu lakukan adalah menentukan skala foto tersebut. Perbandingan antara panjang dalam foto dan panjang sebenarnya adalah:

$$= 7 \text{ cm} : 3,5 \text{ m}$$

$$= 7 \text{ cm} : 350 \text{ cm}$$

$$= 1 \text{ cm} : 50 \text{ cm.}$$

Jadi, skala dari foto tersebut adalah 1 : 50. Oleh karena tinggi mobil dalam foto 2,5 cm maka tinggi

mobil sebenarnya adalah $2,5 \text{ cm} \times 50 = 125 \text{ cm}$. Jadi, tinggi mobil sebenarnya adalah $1,25 \text{ m}$.

Cara 2:

$$p.\text{foto}/t.\text{foto} = P.\text{mobil}/t.\text{mobil}$$

$$7 \text{ cm}/2,5 \text{ cm} = 3,5 \text{ m}/t.\text{mobil}$$

$$7 \text{ cm} \times t.\text{mobil} = 2,5 \text{ cm} \times 3,5 \text{ m}$$

$$t.\text{mobil} = 2,5 \text{ cm} \times 3,5 \text{ m}/7 \text{ cm}$$

$$t.\text{mobil} = 1,25 \text{ m}$$

Jadi, tinggi mobil sebenarnya adalah $1,25 \text{ m}$.

Contoh Soal 2

Seorang anak yang tingginya $1,5 \text{ m}$ berfoto. Jika skala foto tersebut adalah $1 : 20$, berapa sentimeter tinggi anak dalam foto?

Penyelesaian:

$$\text{jarak foto} = \text{jarak sebenarnya} \times \text{skala}$$

$$\text{jarak foto} = 1,5 \text{ m} \times 1:20$$

$$\text{jarak foto} = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$$

Jadi tinggi anak di dalam foto adalah $7,5 \text{ cm}$

Contoh Soal 3

Lebar sebuah rumah dalam foto adalah 5 cm . Jika skala foto tersebut $1 : 160$, berapa meter lebar rumah sebenarnya?

Penyelesaian:

$$\text{jarak sebenarnya} = \text{jarak pada foto}/\text{skala}$$

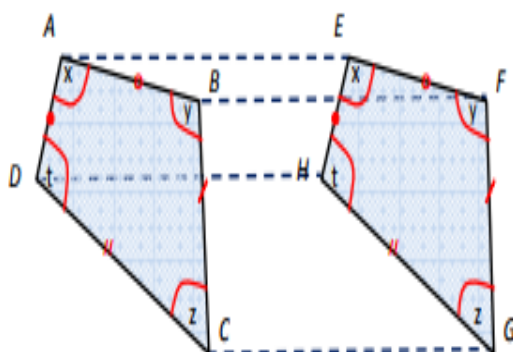
$$\text{jarak sebenarnya} = 5 \text{ cm}/(1:160)$$

$$\text{jarak sebenarnya} = 5 \text{ cm} \times 160$$

$$\text{jarak sebenarnya} = 800 \text{ cm} = 8 \text{ m}$$

Jadi lebar rumah sebenarnya adalah 8 m .

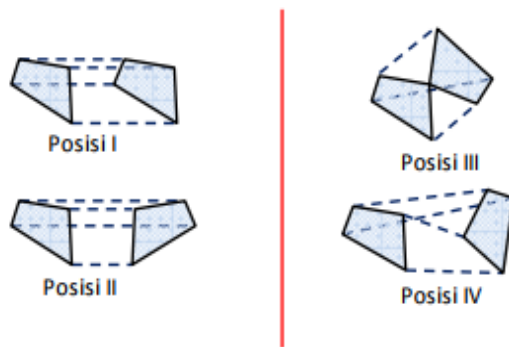
1.3 Contoh



Pada gambar di atas telah dibuat korespondensi satu-satu antar titik-titik sudut pada kedua bangun sehingga sudut-sudut yang bersesuaian sama besar dan sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang. Berarti (sesuai definisi) dapat disimpulkan segiempat ABCD kongruen dengan segiempat EFGH atau ditulis segiempat ABCD \cong EFGH.

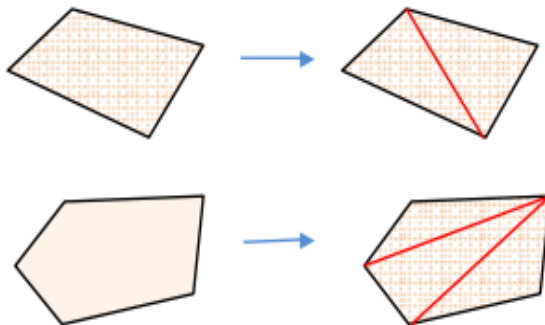
Sekali lagi, perhatikan bahwa korespondensi yang menjadikan dua bangun datar kongruen tidak

terpengaruh oleh posisi kedua bangun. Jadi sekali telah ditemukan korespondensi satu-satu antar kedua bangun maka posisi apapun tetap kongruen.



Perhatikan gambar di atas. Kedua bangun pada posisi I, II, III, maupun IV tetap kongruen walaupun posisi kedua bangun tersebut berubah-ubah. Jika dicermati lebih lanjut, keempat posisi itu mewakili proses translasi, refleksi, rotasi, dan kombinasi dari ketiganya. Secara bahasa sederhana, dua bangun dikatakan kongruen jika kedua bangun tersebut sama dalam hal bentuk dan ukurannya.

Selanjutnya perhatikan segiempat dan segilima berikut.

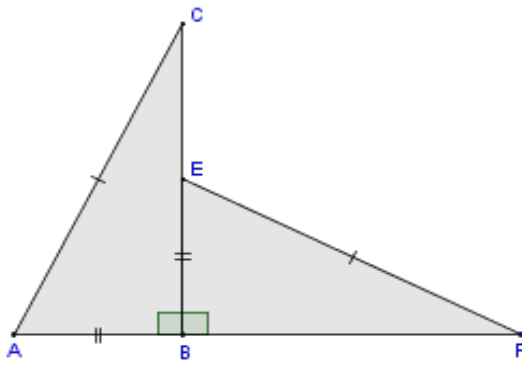


Berdasar gambar di atas, segiempat dapat disusun dari dua segitiga dan segilima dapat disusun dari tiga segitiga. Secara umum segi- n dapat disusun dari $n - 2$ segitiga. Hal tersebut merupakan gambaran bahwa setiap segibanyak dapat disusun dari segitiga-segitiga. Oleh karena itu sifat-sifat kesebangunan dan kekongruenan pada segitiga perlu untuk dibicarakan secara khusus.

1.3.1 Contoh Soal

Berikut ini ada delapan contoh soal mengenai segitiga kongruen.

1. Perhatikan gambar berikut ini



Soal Segitiga Kongruen dengan 2 sisi dan 1 sudut
 A. Buktikan bahwa $\triangle ABC$ dan $\triangle EBF$ kongruen !
 B. Sebutkan pasangan sudut yang sama besar !

Jawaban:

A. Perhatikan $\triangle ABC$ dan $\triangle EBF$

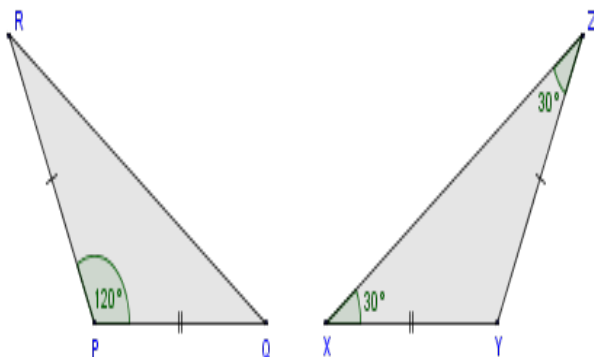
$$\begin{aligned} AC &= EF \\ AB &= EB \\ \angle ABC &= \angle EBF (= 90^\circ) \end{aligned}$$

Jadi $\triangle ABC$ dan $\triangle EBF$ kongruen (sisi, sisi, sudut).

B. Pasangan sudut yang sama besar adalah :

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle EBF = 90^\circ \\ \angle CAB &= \angle FEB \\ \angle ACB &= \angle EFB \end{aligned}$$

2. Berikut ini adalah gambar dua segitiga



Soal Segitiga Kongruen dengan 2 sisi dan 1 sudut dengan sudut yang berbeda yang diketahui
 Apakah kedua segitiga tersebut kongruen ? Buktikan !

Jawaban:

Perhatikan $\triangle PQR$ dan $\triangle XYZ$

$$PQ = YX$$

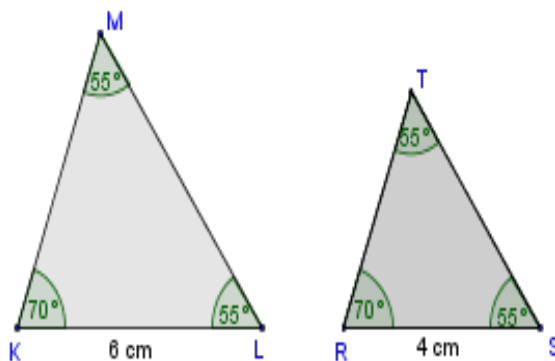
$$\begin{aligned}\angle Y &= 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

$$\angle P = \angle Y$$

$$PR = YZ$$

Jadi, ΔPQR dan ΔXYZ kongruen karena mempunyai dua sisi yang sama, yaitu $PQ=YX$ dan $PR=YZ$, serta 1 sudut yang sama yaitu $\angle P = \angle Y$ (sisi, sudut, sisi)

3. Lihatlah gambar di bawah ini !



Soal Segitiga Tidak Kongruen

Apakah kedua segitiga di atas kongruen ? Buktikan !

Jawaban:

Lihat ΔMKL dan ΔTRS

$$\angle K = \angle R$$

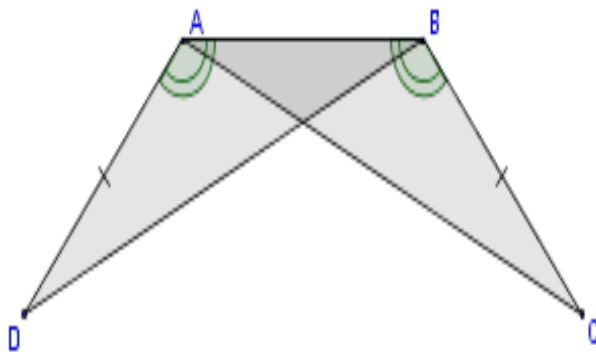
$$\angle L = \angle S$$

$$\angle M = \angle T$$

$$KL \neq RS$$

Walaupun ketiga sudut kedua segitiga tersebut sama, tetapi tidak menjamin kedua segitiga tersebut kongruen. Oleh karena itu kita perlu memeriksa minimal 1 sisi yang bersesuaian, yaitu sisi KL dengan RS . Ternyata panjang $KL \neq RS$ sehingga bisa disimpulkan bahwa kedua segitiga tersebut TIDAK kongruen.

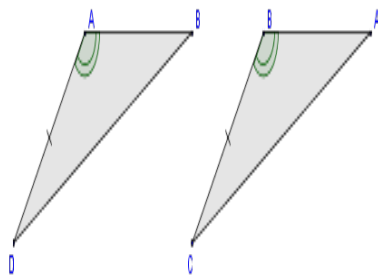
4. Coba perhatikan gambar di bawah ini !



Soal kongruen dua segitiga yang dijadikan satu bangun
ABC dan $BC=AD$. Buktikan bahwa DAB dan CAB kongruen !

Jawaban:

Pisahkan bangun diatas dan putar agar menjadi dua segitiga yang terlihat sebangun, yaitu $\triangle DAB$ dan $\triangle CBA$



Perhatikan $\triangle DAB$ dan $\triangle CBA$

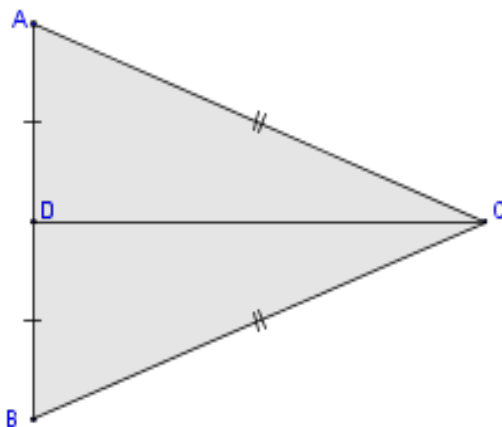
$$DA = CB$$

$$\angle DAB = \angle CBA$$

$$AB = BA(\text{berhimpit})$$

Jadi $\triangle DAB$ dan $\triangle CBA$ kongruen (sisi, sudut, sisi).

5. Perhatikan gambar berikut !



Soal kongruen segitiga sama kaki

Buktikan bahwa $\triangle ADC$ dan $\triangle DBC$ kongruen !

Jawaban:

Perhatikan $\triangle ADC$ dan $\triangle DBC$

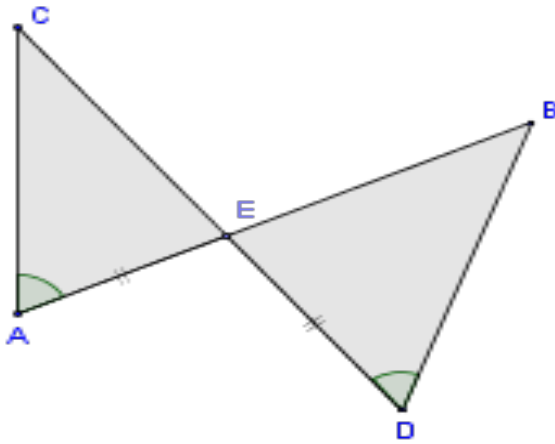
$$AD = DB$$

$$AC = BC$$

$$DC = DC$$

Jadi kedua segitiga tersebut adalah kongruen karena ketiga sisinya sama panjang (sisi, sisi, sisi).

6. Periksa apakah $\triangle AEC$ dan $\triangle DEB$ dibawah ini kongruen !



Soal kongruen sudut-sudut-sisi

Jawaban:

Lihat $\triangle AEC$ dengan $\triangle DEB$

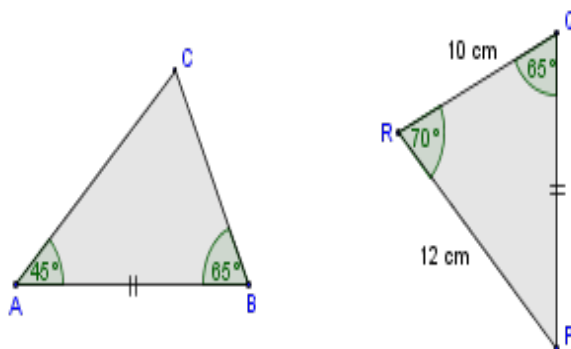
$$\angle A = \angle D$$

$$AE = DE$$

$$\angle AEC = \angle DEB \text{ (bertolak belakang)}$$

Jadi $\triangle AEC$ kongruen dengan $\triangle DEB$ (sudut, sisi, sudut)

7. Pada gambar berikut ini, panjang $PR = 12$ cm dan $QR = 10$ cm.



2 segitiga dengan kesamaan sisi dan sudut

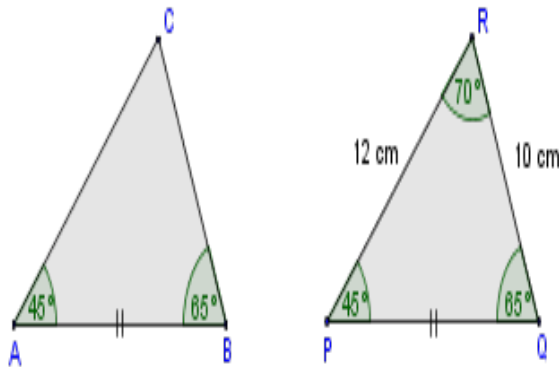
- A. Buktikan bahwa ABC dan PQR adalah kongruen !
 B. Tentukan Panjang AC !

Jawaban:

A. Cari $\angle P$ dahulu

$$\begin{aligned}\angle P &= 180^\circ - 65^\circ - 70^\circ \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

Setelah itu, putar ΔPQR agar sudutnya bersesuaian seperti gambar di bawah ini

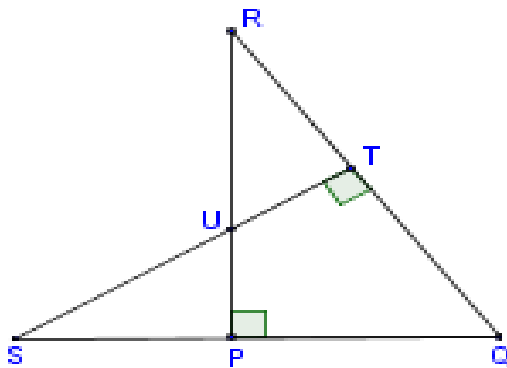


$$\begin{aligned}\angle A &= \angle P \\ AB &= PQ (\text{diketahui}) \\ \angle B &= \angle Q\end{aligned}$$

Jadi ΔABC kongruen dengan ΔPQR (sudut, sisi, sudut)

B. Panjang AC adalah sama dengan panjang PR, yaitu 12 cm.

8. Lihatlah gambar di bawah ini.



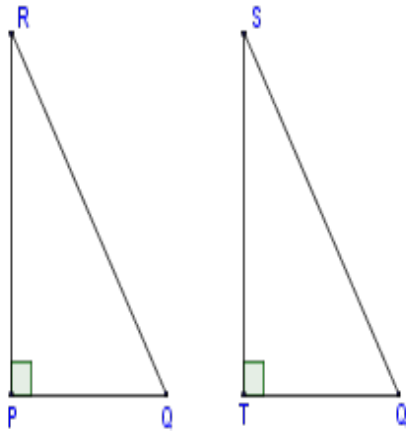
dua segitiga siku-siku yang digabung menjadi satu

Pada gambar di atas, $QR = QS$, $PQ = QT$. Buktikan bahwa :

- A. ΔPQR dan ΔTQS kongruen !
 B. ΔPSU dan ΔTRU kongruen !

Jawaban:

A. Pisahkan ΔPQR dan ΔTQS seperti gambar di bawah



$$QR = QS \text{ (diketahui)}$$

$$PQ = QT \text{ (diketahui)}$$

$$\angle P = \angle T$$

Jadi, kedua segitiga tersebut kongruen (sisi, sisi, sudut).

B. Perhatikan potongan ΔPSU dan ΔTRU berikut:
Perhatikan bahwa

$$SP = QS - PQ$$

$$RT = QR - QT$$

sedangkan

$$QR = QS \text{ (diketahui)}$$

$$PQ = QT \text{ (diketahui)}$$

dapat disimpulkan bahwa

$$SP = RT$$

Selanjutnya periksa sudut-sudutnya

$$\angle SUP = \angle TUR$$

$$\angle UPS = \angle RTU$$

Jadi, ΔPSU dan ΔTRU adalah kongruen (sisi, sudut, sudut)

8. Perhatikan gambar di bawah ini!



Jika persegi panjang ABCD sebangun dengan persegi panjang PQRS, maka keliling persegi panjang PQRS adalah?

Jawaban:

Karena sebangun, maka perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian pada kedua persegi panjang tersebut adalah sama. Dengan demikian berlaku perbandingan berikut:

$$\Rightarrow PS/BC = PQ/AB$$

$$\Rightarrow PS/12 = 15/18$$

$$\Rightarrow PS = 10 \text{ cm}$$

Dengan demikian, keliling PQRS adalah:

$$\Rightarrow K = PQ + QR + RS + PS$$

$$\Rightarrow K = 15 + 10 + 15 + 10$$

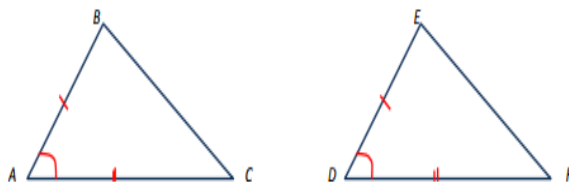
$$\Rightarrow K = 50 \text{ cm}$$

1.4 Teorema

Secara sederhana sesuai dengan pengertian kekongruenan, dua segitiga dikatakan kongruen jika sudut-sudut yang bersesuaian sama besar dan sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang. Ada satu postulat dan tiga teorema yang terkait dengan kekongruenan segitiga. Kita ingat bahwa postulat tidak dibuktikan sedangkan teorema perlu dibuktikan. Tetapi pada modul ini kita tidak membahas bukti teorema karena telah dibahas pada modul BERMUTU tahun sebelumnya.

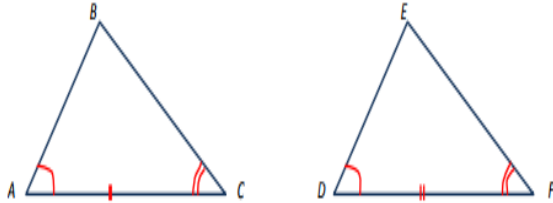
1.4.1 Postulat kekongruenan s.sd.s (sisi-sudut-sisi)

Theorem 1.4.1 — Postulat kekongruenan s.sd.s (sisi-sudut-sisi). Diberikan dua segitiga $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ dimana $m\angle A = m\angle D$, $AB = DE$ maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



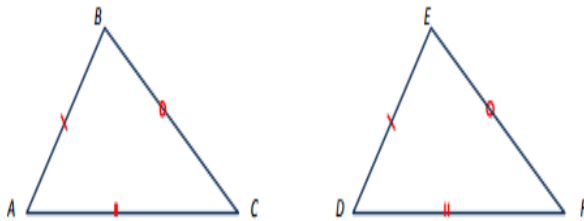
1.4.2 Teorema kekongruenan sd.s.sd (sudut-sisi-sudut)

Theorem 1.4.2 Diberikan dua segitiga $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ dimana $m\angle A = m\angle D$, $AC = DF$, $m\angle C = m\angle F$ maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



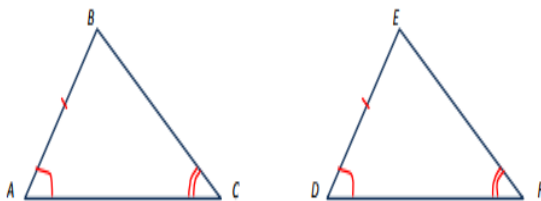
1.4.3 Teorema Teorema kekongruenan s.s.s (sisi-sisi-sisi)

Theorem 1.4.3 Diberikan dua segitiga $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ dimana, $AB = DE$, $m\angle A = m\angle D$, dan $m\angle C = m\angle F$, $BC = EF$ maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



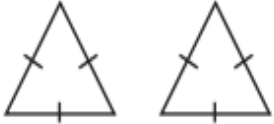

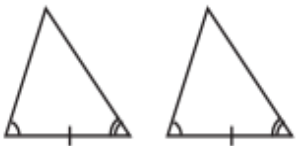

1.4.4 Teorema kekongruenan s.sd.sd (sisi-sudut-sudut)

Theorem 1.4.4 Diberikan dua segitiga $\triangle ABC$ dan $\triangle DEF$ dimana, $AB = DE$, $AC = DF$, dan $m\angle A = m\angle D$ maka $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

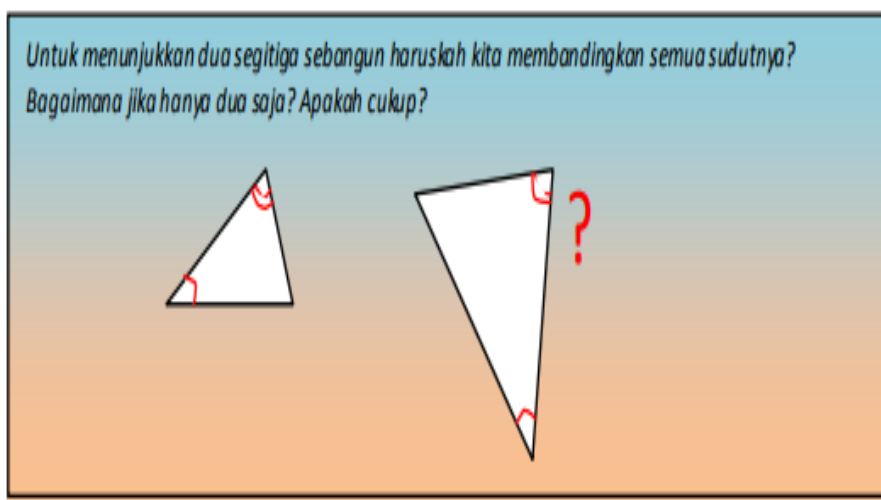


1.5 Kekongruenan Segitiga

Pada bagian ini, pembahasan bangun-bangun yang kongruen difokuskan pada bangun segitiga. Untuk menunjukkan apakah dua segitiga kongruen atau tidak, cukup ukur setiap sisi dan sudut pada segitiga. Kemudian, bandingkan sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian. Perhatikan tabel syarat kekongruenan dua segitiga berikut.

Unsur-Unsur yang Diketahui Pada Segitiga	Syarat Kekongruenan
(i) Sisi-sisi-sisi (s.s.s) 	Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang.
(ii) Sisi-sudut-sisi (s.sd.s) 	Dua sisi yang bersesuaian sama panjang dan satu sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut sama besar.
(iii) Sudut-sisi-sudut (sd.s.sd) atau  Sudut-sudut-sisi (sd.sd.s) 	Dua sudut yang bersesuaian sama besar dan satu sisi yang bersesuaian sama panjang.

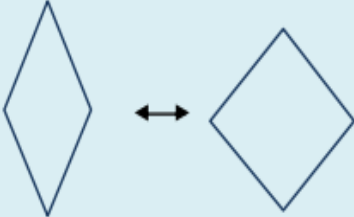

1.5.1 Sifat-Sifat Dua Segitiga yang Sebangun dan Kongruen



Setelah kita memahami pengertian kesebangunan dan kekongruenan secara umum, sekarang kita akan mendalami sifat-sifat kesebangunan dan kekongruenan, khusus mengenai segitiga. Namun sebelumnya perlu diingat bahwa dua bangun yang kongruen pasti sebangun sementara dua bangun yang sebangun belum tentu kongruen. Oleh karena itu dalam pembahasan ini akan dimulai dari sifat kekongruenan.

Secara sederhana sesuai dengan pengertian kekongruenan, dua segitiga dikatakan kongruen jika sudut-sudut yang bersesuaian sama besar dan sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang. Ada satu postulat dan tiga teorema yang terkait dengan kekongruenan segitiga. Kita ingat bahwa postulat tidak dibuktikan sedangkan teorema perlu dibuktikan. Tetapi pada modul ini kita tidak membahas bukti teorema karena telah dibahas pada modul BERMUTU tahun sebelumnya.

Contoh :

Bangun	sama ukuran sisi	Sama bentuk	hubungan
	✓	✗	✗
	✗	✓	sebangun
	✓	✓	kongruen

1.5.2 Contoh Soal 1



Gambar di samping merupakan gambar segitiga samasisi STU . Jika SO tegak lurus TU dan panjang sisi-sisinya 3 cm, buktikan bahwa $\triangle STO \cong \triangle SUO$.

Jawab:

- $\triangle STO$ merupakan segitiga samasisi sehingga $ST = TU = US = 3$ cm dan $\angle STU = \angle TUS = \angle UST = 60^\circ$.
- SO tegak lurus TU maka $\angle SOT = \angle SOU = 90^\circ$ dan $TO = OU$ sehingga
 - $\angle OST = 180^\circ - (\angle SOT + \angle TOS)$
 $= 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$
 - $\angle USO = 180^\circ - (\angle SOU + \angle OUS)$
 $= 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

Oleh karena (i) $\angle T = \angle U = 60^\circ$

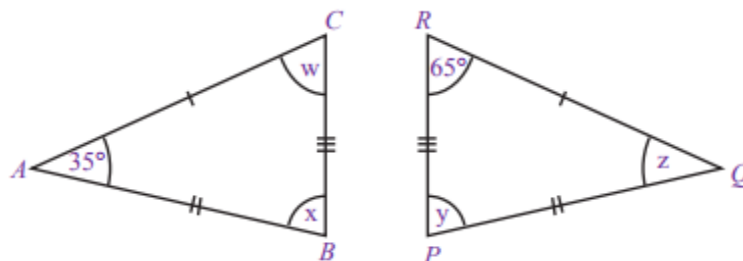
(ii) $ST = US = 3$ cm

(iii) $\angle OST = \angle USO = 60^\circ$

terbukti bahwa $\triangle STO \cong \triangle SUO$ ■

1.5.3 Contoh Soal 2

Perhatikan dua segitiga yang kongruen berikut.



Tentukan nilai w , x , y , dan z .

Jawab:

Oleh karena $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, sudut-sudut yang bersesuaian sama besar, yaitu

$$\angle A = \angle Q = z = 35^\circ$$

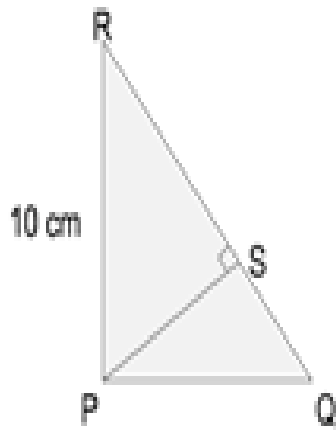
$$\angle C = \angle R = w = 65^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle B = \angle P = x = y &= 180^\circ - (35^\circ + 65^\circ) \\ &= 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \end{aligned}$$

Jadi, $w = 65^\circ$, $x = y = 80^\circ$, dan $z = 35^\circ$.

1.5.4 Latihan Soal 1

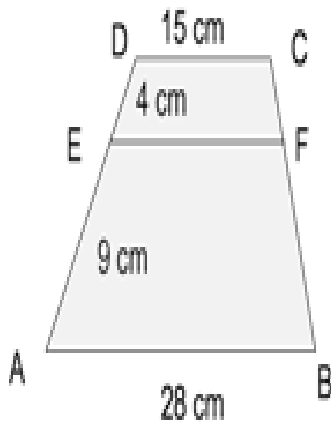
Diketahui panjang SR adalah 8 cm.



Tentukan panjang QS!

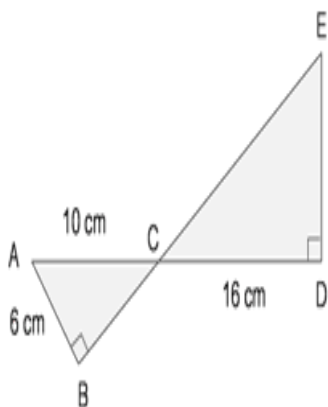
1.5.5 Latihan Soal 2

Dari soal berikut ini tentukan panjang EF!



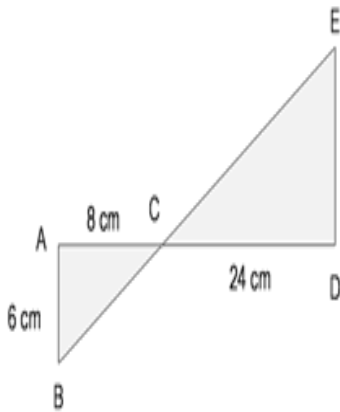
1.5.6 Latihan Soal 3

Dari soal berikut tentukan panjang DE!



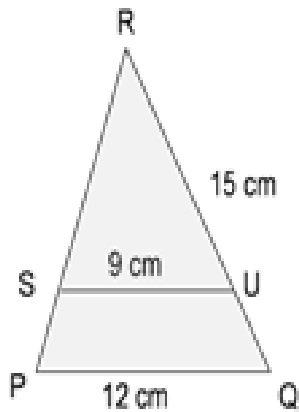
1.5.7 Latihan Soal 4

Dari soal berikut tentukan panjang DE!



1.5.8 Latihan Soal 5

Dari soal berikut, tentukan:



- a) QR
- b) QU

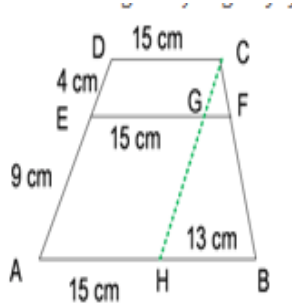
1.5.9 Pembahasan Latihan Soal 1

Kongruensi dua segitiga siku-siku, tentukan lebih dahulu panjang PS gunakan teorema pythagoras akan didapat angka 6 cm untuk panjang PS. Kemudian lakukan perbandingan sisi yang sesuai:

$$\begin{aligned} \frac{QS}{PS} &= \frac{PS}{SR} \\ \frac{QS}{6} &= \frac{6}{8} \\ QS &= \frac{6 \times 6}{8} = 4,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

1.5.10 Pembahasan Latihan Soal 2

Buat satu garis yang sejajar dengan garis AD namakan CH seperti gambar berikut.



Terlihat muncul data-data baru yaitu $EG = 15$ cm, $AH = 15$ cm dan $HB = 13$ cm. Ambil dua segitiga sebangun GFC dan HBC bandingkan sisi-sisi yang bersesuaian:

$$\begin{aligned} \frac{FG}{GC} &= \frac{BH}{HC} \\ \frac{FG}{4} &= \frac{13}{(9+4)} \\ FG &= \frac{4 \times 13}{13} = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dengan demikian panjang $EF = EG + GF = 15 + 4 = 19$ cm

1.5.11 Pembahasan Latihan Soal 3

Bedakan pengambilan sisi-sisi yang bersesuaian dari soal nomor sebelumnya.

$$\begin{aligned} \frac{DE}{DC} &= \frac{BA}{BC} \\ \frac{DE}{16} &= \frac{6}{8} \\ DE &= \frac{6 \times 16}{8} = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

1.5.12 Pembahasan Latihan Soal 4

Kesebangunan dua segitiga siku-siku

$$\begin{aligned} \frac{DE}{DC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{DE}{24} &= \frac{6}{8} \\ DE &= \frac{6 \times 24}{8} = 18 \text{ cm} \end{aligned}$$

1.5.13 Pembahasan Latihan Soal 5

a) Penyelesaian seperti nomor 2, ambil perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dari segitiga PQR dan segitiga SUR.

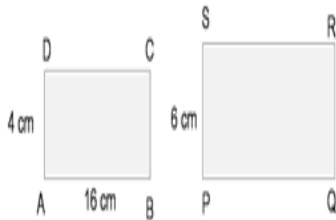
$$\begin{aligned}\frac{QR}{PQ} &= \frac{UR}{SU} \\ \frac{QR}{15} &= \frac{15}{9} \\ QR &= \frac{15 \times 12}{9} = 20 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\text{b) } QU = QR - UR = 20 \text{ cm} - 15 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

1.5.14 Soal Ujian Akhir Semester

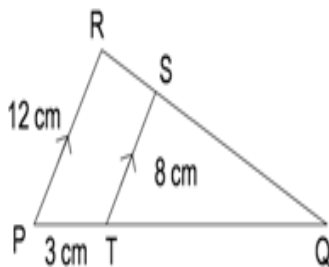
1.5.15 Soal 1

Diberikan dua buah persegipanjang ABCD dan persegipanjang PQRS seperti gambar berikut.



1.5.16 Soal 2

Perhatikan gambar berikut !

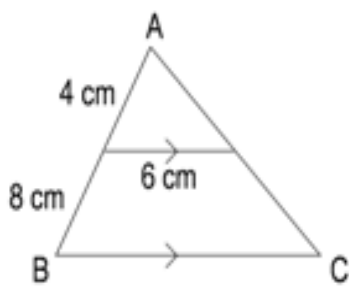


Panjang TQ adalah ...

- a. 4 cm
- b. 5 cm
- c. 6 cm
- d. 7 cm

1.5.17 Soal 3

Perhatikan gambar berikut !

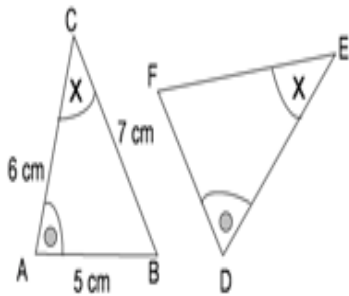


Panjang BC adalah ...

- A. 24 cm
- B. 18 cm
- C. 12 cm
- D. 9 cm

1.5.18 Soal 4

Pada gambar di samping, segitiga ABC kongruen dengan segitiga DEF.

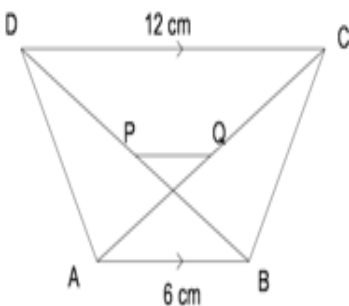


Panjang EF adalah ...

- A. 5 cm
- B. 6 cm
- C. 6,5 cm
- D. 7 cm

1.5.19 Soal 5

Perhatikan gambar!

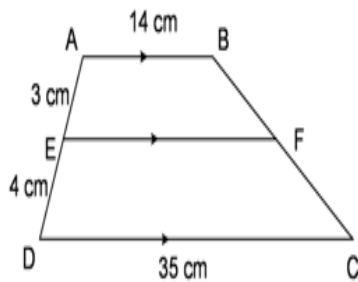


P dan Q adalah titik tengah diagonal BD dan AC. Panjang PQ adalah ...

- A. 5 cm
- B. 4 cm
- C. 3 cm
- D. 2 cm

1.5.20 Soal 6

Perhatikan gambar berikut

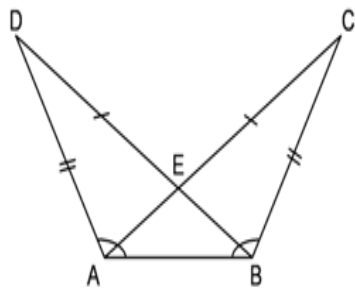


Panjang EF adalah...

- A. 20 cm
- B. 21 cm
- C. 23 cm
- D. 26 cm

1.5.21 Soal 7

Perhatikan gambar berikut

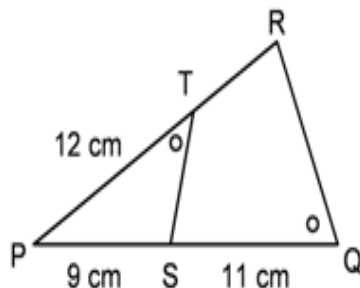


Banyak pasangan segitiga yang kongruen adalah....

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

1.5.22 Soal 8

Perhatikan gambar berikut



Panjang TR adalah....

- A. 2 cm
- B. 3 cm
- C. 4 cm
- D. 5 cm

2. Geometri Ruang

2.1 Jarak antar Titik

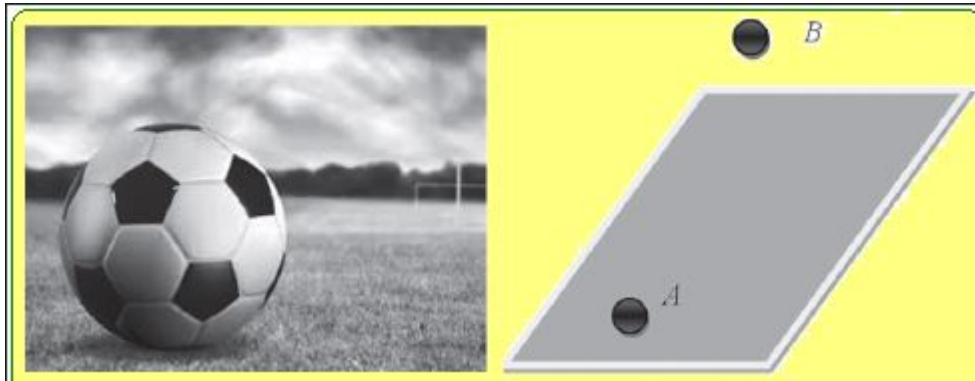
2.2 Jarak Titik Ke Garis

2.2.1 Menemukan Konsep Jarak, Titik dan Garis

1. Kedudukan Titik



Jika dimisalkan jembatan penyeberangan merupakan suatu garis dan lokomotif kereta adalah suatu titik. Kita dapat melihat bahwa lokomotif tidak terletak atau melalui jembatan penyeberangan. Artinya jika dihubungkan dengan garis dan titik maka dapat disebut bahwa contoh di atas merupakan suatu titik yang tidak terletak pada garis.



Gambar di atas merupakan contoh kedudukan titik terhadap bidang, dengan bola sebagai titik dan lapangan sebagai bidang. Sebuah titik dikatakan terletak pada sebuah bidang jika titik itu dapat dilalui bidang seperti terlihat pada titik A pada gambar dan sebuah titik dikatakan terletak di luar bidang jika titik itu tidak dapat dilalui bidang.

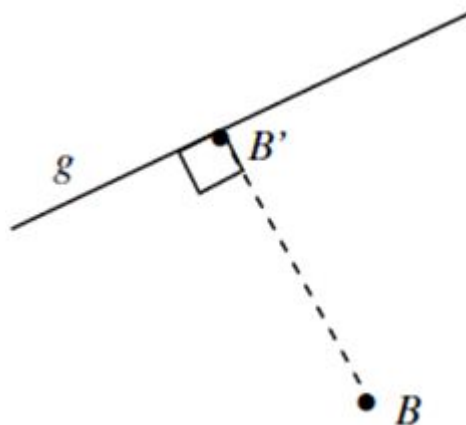
DEFINISI

- (a) Jika suatu titik dilalui garis, maka dikatakan titik terletak pada garis tersebut.
- (b) Jika suatu titik tidak dilalui garis, maka dikatakan titik tersebut berada di luar garis.
- (c) Jika suatu titik dilewati suatu bidang, maka dikatakan titik itu terletak pada bidang.
- (d) Jika titik tidak dilewati suatu bidang, maka titik itu berada di luar bidang.

2. Jarak titik ke garis

Jarak merupakan salah satu permasalahan matematika yang sering dijumpai di sekitar kita. Jarak dapat diukur di antara dua objek, seperti rumah dengan kantor pos, rumah sakit dengan jalan raya, dan jalan raya dengan jalan raya lainnya. Pada pembahasan ini hanya akan dibahas mengenai jarak antara dua objek yang berupa titik dan garis lurus.

Jarak titik ke garis adalah jarak terdekat sebuah titik ke garis, jarak terdekat diperoleh dengan menarik garis yang tegak lurus dengan garis yang dimaksud. Jarak titik B dengan garis g adalah panjang garis BB' .



Perhatikan contoh permasalahan berikut:

Vihara Dharma Agung terletak pada koordinat (71, 76) dan Jalan Sungai Kelara berupa garis lurus dengan persamaan

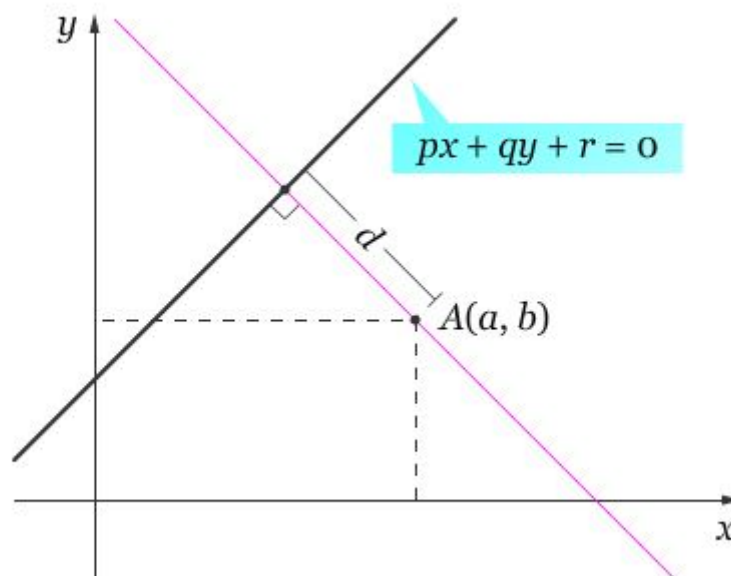
$$5x - 8y - 280 = 0$$

(satuan dalam meter). Bagaimana cara mengukur jarak antara vihara dengan jalan tersebut? Salah satunya adalah dengan menggunakan rumus jarak antara titik dengan garis lurus.

Misalkan akan ditentukan jarak antara titik $A(a, b)$ dengan garis lurus yang memiliki persamaan

$$px + qy + r = 0.$$

Perhatikan gambar berikut.



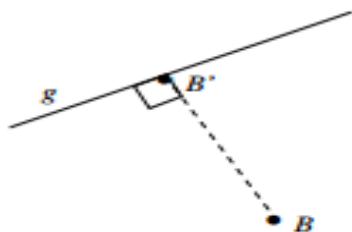
Perlu diingat bahwa jarak dua objek adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua objek tersebut. Karena ruas garis yang tegak lurus dengan garis

$$px + qy + r = 0$$

dan memiliki ujung di titik A dan ujung satunya di garis tersebut merupakan lintasan terpendek yang menghubungkan titik dan garis tersebut, maka panjang dari ruas garis tersebut, yaitu d , adalah jarak titik A terhadap garis

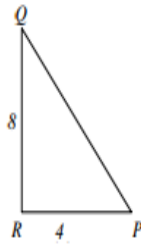
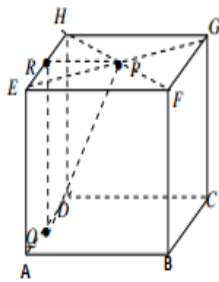
$$px + qy + r = 0$$

Jarak titik ke garis adalah jarak terdekat sebuah titik ke garis, jarak terdekat diperoleh dengan menarik garis yang tegak lurus dengan garis yang dimaksud. Jarak titik B dengan garis g adalah panjang garis BB'



Contoh : 1. Kubus ABCDEFGH memiliki panjang rusuk 8 cm, titik P merupakan perpotongan diagonal bidang atas, hitunglah jarak titik P dengan garis AD

Penyelesaian

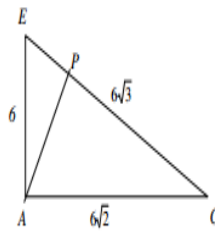
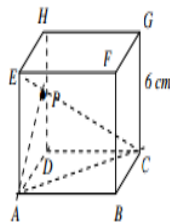


$$\begin{aligned}
 PQ &= \sqrt{PR^2 + RQ^2} \\
 &= \sqrt{4^2 + 8^2} \\
 &= \sqrt{16 + 64} \\
 &= \sqrt{80} \\
 &= 4\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Jadi jarak titik P ke garis AD adalah $4\sqrt{5}$ cm

2. Sebuah kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. tentukan jarak titik A ke garis CE adalah...

Penyelesaian



Jarak titik A pada garis CE adalah garis AP

$$\begin{aligned}
 6^2 &= (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2(6\sqrt{2})(6\sqrt{3})\cos C \\
 \cos C &= \frac{72 + 108 - 36}{72\sqrt{6}} \\
 \cos C &= \frac{\sqrt{6}}{3} \\
 \text{maka } \sin C &= \frac{1}{3}\sqrt{3} \\
 \sin C &= \frac{AP}{AC} \\
 \frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{AP}{6\sqrt{2}} \\
 AP &= 2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

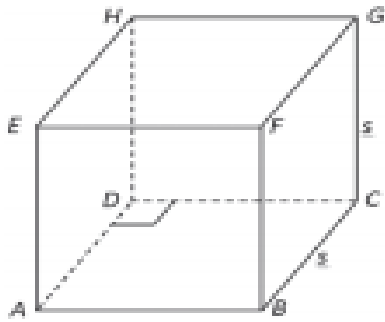
Jadi jarak titik A ke garis CE adalah $2\sqrt{6}$

Contoh Soal

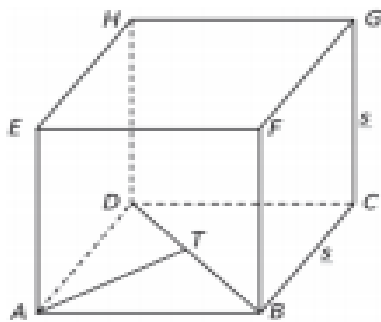
Diketahui kubus ABCD.EFGH. Tentukan proyeksi titik A pada garis

a. CD!

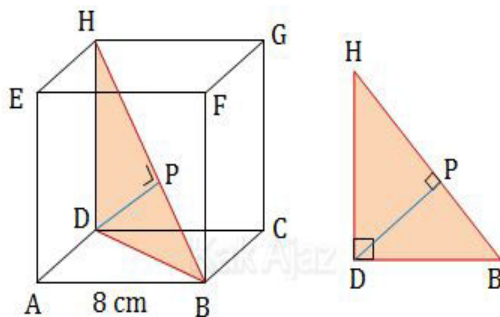
b. BD! . Jika dari titik A ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis CD maka diperoleh titik D sebagai hasil proyeksinya (AD CD).



b. Proyeksi titik A pada garis BD Jika dari titik A ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis BD maka diperoleh titik T sebagai hasil proyeksinya (AT \perp BD).



Contoh Soal Kubus ABCD.EFGH memiliki rusuk 8 cm. Jarak titik D ke garis HB adalah ...



Pandanglah segitiga BDH yang terdapat dalam kubus. Segitiga BDH adalah segitiga siku-siku di D.

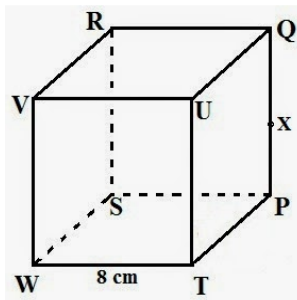
DH adalah salah satu rusuk kubus.

DH = 8 cm

BD adalah diagonal bidang atau diagonal sisi.

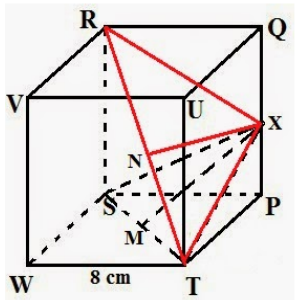
$$\begin{aligned} BD &= a\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

Contoh Soal 2 Perhatikan gambar kubus PQRS.TUVW di bawah ini.

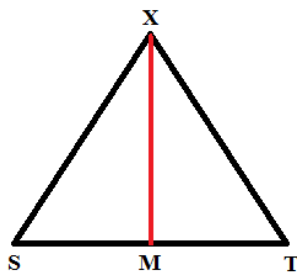


Jika panjang rusuk kubus di atas adalah 8 cm dan titik X merupakan pertengahan antara rusuk PQ. Maka hitung jarak: a) titik X ke garis ST b) titik X ke garis RT

Penyelesaian: Perhatikan gambar di bawah ini



a) titik X ke garis ST merupakan panjang garis dari titik X ke titik M (garis MX) yang tegak lurus dengan garis ST, seperti gambar berikut.



$$ST = PW \text{ dan } MT = \frac{1}{2} ST = \frac{1}{2} PW = 4\sqrt{2}$$

Dengan menggunakan teorema Pythagoras:

$$MX = \sqrt{(TX^2 - MT^2)}$$

$$MX = \sqrt{((4\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{2})^2)}$$

$$MX = \sqrt{(80 - 32)}$$

$$MX = \sqrt{48}$$

$$MX = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

b) titik X ke garis RT merupakan panjang garis dari titik X ke titik N (garis NX) yang tegak lurus dengan garis RT, seperti gambar berikut.

$$RT = QW \text{ dan } NT = \frac{1}{2} RT = \frac{1}{2} QW = 4\sqrt{3}$$

Dengan menggunakan teorema Pythagoras:

$$NX = \sqrt{(TX^2 - NT^2)}$$

$$NX = \sqrt{((4\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{3})^2)}$$

$$NX = \sqrt{(80 - 48)}$$

$$NX = \sqrt{32}$$

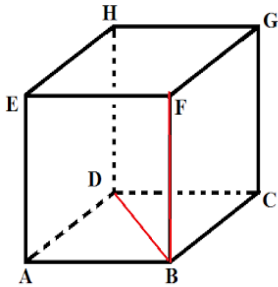
$$NX = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Contoh soal 3 Diketahui panjang rusuk sebuah kubus ABCD.EFGH adalah 6cm. Maka hitunglah jarak:

- a).titik D ke garis BF b).titik B ke garis EG

Penyelesaiannya:

- a).Agar lebih mudah dalam menjawabnya, mari kita perhatikan gambar di bawah ini:



Dari gambar di atas kita bisa melihat bahwa jarak titik D ke garis BF adalah panjang diagonal BD yang dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras ataupun dengan rumus. Mari kita selesaikan dengan teorema Pythagoras terlebih dahulu:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = 6^2 + 6^2$$

$$BD^2 = 72$$

$$BD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

berikut bila kita mencarinya dengan menggunakan rumus:

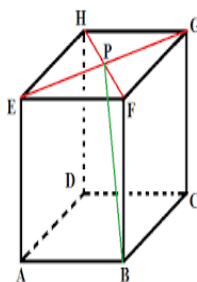
$$d = s\sqrt{2}$$

$$BD = AB\sqrt{2}$$

$$BD = (6 \text{ cm})\sqrt{2}$$

$$BD = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

b). Sama halnya dengan soal a) kita juga harus membuat gambarnya terlebih dahulu agar lebih mudah mengerjakannya



Dari perhitungan pada soal a) diketahui bahwa panjang diagonal sisi kubus $FH = BD$ adalah $6\sqrt{2}$ cm

Untuk mengetahui panjang BP , kita gunakan teorema Pythagoras untuk segitiga siku-siku BFP :

$$FP = \frac{1}{2} FH = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

maka:

$$BP^2 = FP^2 + BF^2$$

$$BP^2 = (3\sqrt{2})^2 + 6^2$$

$$BP^2 = 18 + 36$$

$$BP^2 = 54$$

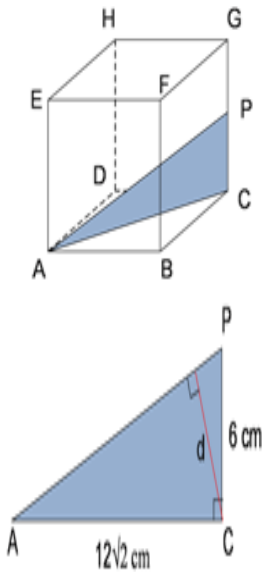
$$BP = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

Maka jarak titik B ke garis EG adalah $3\sqrt{6}$ cm

Contoh soal no 4.

Pada kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 12 cm, titik P adalah tepat ditengah CG, tentukan jarak titik C ke garis AP!

Pembahasan Posisi titik C dan garis AP pada kubus sebagai berikut:



Cari panjang AP terlebih dahulu,

$$AP = \sqrt{AC^2 + CP^2} = \sqrt{(12\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{324} = 18 \text{ cm}$$

dilanjutkan menentukan jarak C ke AP,

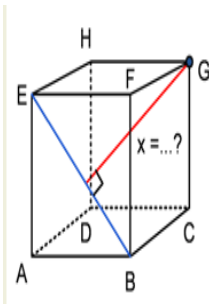
$$AP \times d = AC \times CP$$

$$d = \frac{AC \times CP}{AP} = \frac{12\sqrt{2} \times 6}{18} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

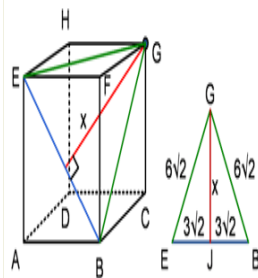
Contoh Soal No. 5

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Jarak titik G ke diagonal BE adalah...

Pembahasan Sketsa kubusnya dulu, beri nama titik-titik sudutnya. Diberi tanda titik dan garis yang hendak dicari jaraknya.



Tambahkan 2 garis lagi, hingga muncul segitiga BGE.



$$x = \sqrt{(GB)^2 - (BE)^2}$$

$$x = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2}$$

$$x = \sqrt{72 - 18} = \sqrt{54}$$

$$x = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$BG \times GE \times \sin 60^\circ = BE \times x$$

$$6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{2} \times x$$

$$x = \frac{6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}$$

2.2.2 Menemukan Rumus Jarak Titik dengan Garis

Karena $px+qy+r=0$ $y=-(p/q)x-(r/q)$ maka gradien garis yang tegak lurus dengan garis $px+qy+r=0$ adalah q/p , karena $-(p/q) \times q/p = -1$. Selain tegak lurus dengan garis $px+qy+r=0$, garis tersebut juga melalui titik $A(a,b)$, sehingga:

$$y = \frac{q}{p}x + c \implies b = \frac{q}{p} \cdot a + c$$

$$\Leftrightarrow c = b - \frac{aq}{p}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{bp - aq}{p}$$

Diperoleh, persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $px + qy + r = 0$ dan melalui titik $A(a,b)$ adalah

$$y = \frac{q}{p}x + \frac{bp - aq}{p} \Leftrightarrow qx - py + bp - aq = 0.$$

Setelah persamaan garisnya diperoleh, titik potong garis $px + qy + r = 0$ dan garis tersebut dapat ditentukan. Pertama, tentukan nilai absisnya, x_2 , terlebih dahulu.

$$px_2 + q\left(\frac{q}{p}x_2 + \frac{bp - aq}{p}\right) + r = 0$$

$$\Leftrightarrow px_2 + \frac{q^2}{p}x_2 + \frac{bpq - aq^2}{p} + r = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(p + \frac{q^2}{p}\right)x_2 = -\frac{bpq - aq^2}{p} - r$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p^2 + q^2}{p}\right)x_2 = \frac{aq^2 - bpq - pr}{p}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{aq^2 - bpq - pr}{p} \times \frac{p}{p^2 + q^2}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{aq^2 - bpq - pr}{p^2 + q^2}$$

Selanjutnya, kita tentukan nilai dari ordinatnya (y_2).

$$y_2 = \frac{q}{p} \left(\frac{aq^2 - bpq - pr}{p^2 + q^2} \right) + \frac{bp - aq}{p}$$

Setelah koordinat (x_2, y_2) sudah ditemukan, maka selanjutnya kita tentukan jarak antara titik tersebut dengan titik $A(a, b)$, dengan menggunakan rumus jarak antara dua titik,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Agar lebih sederhana, kita tentukan $x_2 - x_1$ dan $y_2 - y_1$ terlebih dahulu, yaitu

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \left[\frac{aq^2 - bpq - pr}{p^2 + q^2} \right] - a \\ &= \frac{aq^2 - bpq - pr}{p^2 + q^2} - \frac{a(p^2 + q^2)}{p^2 + q^2} \\ &= \frac{aq^2 - bpq - pr - ap^2 - aq^2}{p^2 + q^2} \\ &= \frac{-p(bq + r + ap)}{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

dan,

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \left[\frac{q}{p} \left(\frac{aq^2 - bpq - pr}{p^2 + q^2} \right) + \frac{bp - aq}{p} \right] - b \\ &= \frac{aq^3 - bpq^2 - pqr}{p(p^2 + q^2)} + \frac{(bp - aq)(p^2 + q^2)}{p(p^2 + q^2)} - \frac{bp(p^2 + q^2)}{p(p^2 + q^2)} \\ &= \frac{aq^3 - bpq^2 - pqr + bp^3 + bpq^2 - ap^2q - aq^3 - bp^3 - bpq^2}{p(p^2 + q^2)} \\ &= \frac{-bpq^2 - pqr - ap^2q}{p(p^2 + q^2)} \\ &= \frac{-pq(bq + r + ap)}{p(p^2 + q^2)} = \frac{-q(bq + r + ap)}{p^2 + q^2}. \end{aligned}$$

Sehingga jarak antara titik (x_2, y_2) dan $A(a, b)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{\left(\frac{-p(bq + r + ap)}{p^2 + q^2}\right)^2 + \left(\frac{-q(bq + r + ap)}{p^2 + q^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{p^2(bq + r + ap)^2 + q^2(bq + r + ap)^2}{(p^2 + q^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(p^2 + q^2)(bq + r + ap)^2}{(p^2 + q^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(bq + r + ap)^2}{p^2 + q^2}} \\
 &= \frac{|bq + r + ap|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{|pa + qb + r|}{\sqrt{p^2 + q^2}}
 \end{aligned}$$

Sehingga jarak antara titik (x_2, y_2) dan $A(a, b)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{\left(\frac{-p(bq + r + ap)}{p^2 + q^2}\right)^2 + \left(\frac{-q(bq + r + ap)}{p^2 + q^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{p^2(bq + r + ap)^2 + q^2(bq + r + ap)^2}{(p^2 + q^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(p^2 + q^2)(bq + r + ap)^2}{(p^2 + q^2)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{(bq + r + ap)^2}{p^2 + q^2}} \\
 &= \frac{|bq + r + ap|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{|pa + qb + r|}{\sqrt{p^2 + q^2}}
 \end{aligned}$$

Sehingga kita telah memperoleh rumus untuk menentukan jarak antara suatu titik dengan garis lurus, yang dapat dituliskan seperti berikut. Jarak antara titik yang memiliki koordinat (a, b) dengan garis lurus yang persamaannya $px + qy + r = 0$, adalah

$$d = \frac{|pa + qb + r|}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Setelah kita menentukan rumusnya, sekarang kita akan coba untuk menghitung jarak antara Vihara Dharma Agung dan Jalan Sungan Kelara pada permasalahan di awal.

$$d = \frac{|5 \cdot 71 - 8 \cdot 76 - 280|}{\sqrt{5^2 + (-8)^2}} \approx 56,5.$$

Jadi, jarak antara Vihara Dharma Agung dan Jalan Sungan Kelara adalah sekitar 56,5 meter. Selanjutnya perhatikan contoh soal berikut.

Contoh Soal: Menentukan Jarak antara Titik dan Garis Lurus

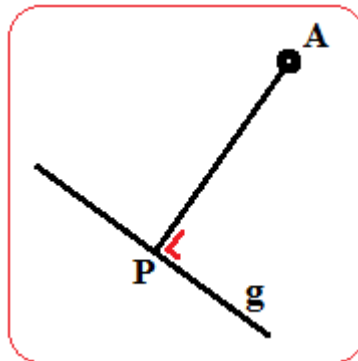
Tentukan jarak antara titik yang memiliki koordinat $(-2, 3)$ dan garis yang memiliki persamaan $3x - 4y - 7 = 0$.

Pembahasan Substitusi $a = -2$, $b = 3$, $p = 3$, $q = -4$, dan $r = -7$ ke rumus jarak titik dan garis.

$$d = \frac{|pa + qb + r|}{\sqrt{p^2 + q^2}} \Rightarrow d = \frac{|3(-2) - 4(3) - 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \\ = \frac{25}{5} = 5$$

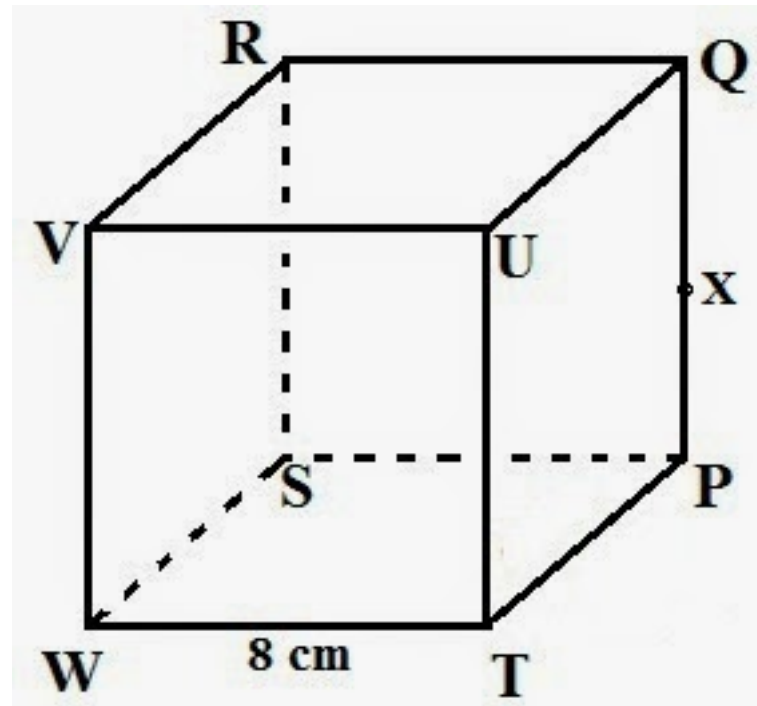
Jadi, jarak antara titik yang memiliki koordinat $(-2, 3)$ dan garis yang memiliki persamaan $3x - 4y - 7 = 0$ adalah 5 satuan panjang.

1. Jarak Titik ke Garis Perhatikan gambar di bawah ini.

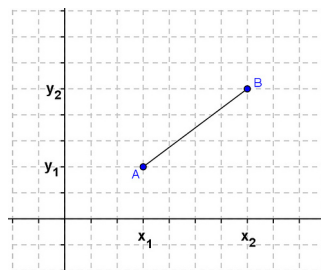


Pada gambar di atas merupakan sebuah titik A dan sebuah garis g. Jarak antara titik A dan garis g dapat dengan membuat garis dari titik A ke garis g, memotong garis di titik P sehingga terjadi garis AP yang tegak lurus garis g. Jarak titik A ke garis g adalah panjang dari AP. Jadi, jarak antara titik dengan garis merupakan panjang ruas garis yang ditarik dari titik tersebut tegak lurus terhadap garis itu.

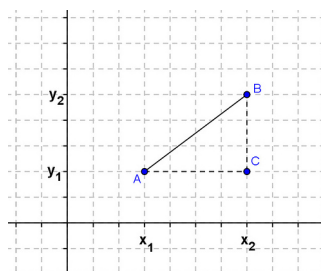
Untuk memantapkan pemahaman Anda tentang jarak titik ke garis pada bangun ruang dimensi tiga, silahkan perhatikan contoh soal berikut ini. Contoh Soal 2 Perhatikan gambar kubus PQRS.TUVW di bawah ini.



2. Jarak Antara Titik dan Garis pada Bangun Ruang Konsep jarak antara titik dan garis pada pembahasan geometri umumnya dan pada pembahasan ruang khususnya didasari oleh konsep jarak antara dua titik. Misalkan diketahui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, pada koordinat cartesius digambarkan sebagai berikut.



Jarak kedua titik ini sama dengan panjang ruas garis AB. Untuk mendapatkannya kita memerlukan bantuan ruas garis lain. Pada contoh ini kita gunakan ruas garis AC dan BC sehingga ABC membentuk segitiga siku-siku. Berarti sisi AB merupakan hipotenusa dan segitiga siku-siku tersebut. Apa yang kamu pikirkan mungkin sama dengan gambar di bawah ini atau mungkin beda. Tapi yang pasti kita akan mendapatkan hasil akhir yang sama.



This is an example of a definition. A definition could be mathematical or it could define a concept.

Definition 2.2.1 — Definition name. Given a vector space E , a norm on E is an application, denoted $|| \cdot ||$, E in $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ such that:

$$||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}|| \quad (2.2)$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \quad (2.3)$$

3. Kaidah Pencacahan

Pengertian Kaidah Pencacahan (Caunting Slots)

Kaidah pencacahan atau Caunting Slots adalah suatu kaidah yang digunakan untuk menentukan atau menghitung berapa banyak cara yang terjadi dari suatu peristiwa. Kaidah pencacahan terdiri atas :

3.1 Aturan Penjumlahan

1. Aturan penjumlahan Aturan Penjumlahan digunakan untuk mengetahui banyaknya cara yang dapat digunakan jika terdapat banyak n_1 cara pada kejadian pertama dan n_2 cara pada kejadian kedua . Banyaknya cara keseluruhan adalah $n_1 + n_2$.

Jika terdapat n peristiwa yang saling lepas,
 k_1 = banyak cara pada peristiwa pertama
 k_2 = banyak cara pada peristiwa kedua
 k_3 = banyak cara pada peristiwa ketiga
dan seterusnya sampai
 k_n = banyak cara pada peristiwa ke- n
Maka banyak cara untuk n buah peristiwa secara keseluruhan adalah:
 $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$

Catatan :

Aturan penjumlahan biasanya digunakan untuk beberapa kejadian yang "TIDAK SEKALIGUS TERJADI" artinya yang terjadi hanya salah satu saja atau bisa dibilang "PILIHAN" dan biasanya menggunakan kata penghubung "ATAU"

Contoh soal aturan penjumlahan :

■ Di rumahnya Wati terdapat 3 jenis sepeda berbeda, 2 jenis sepeda motor berbeda, dan 2 mobil yang berbeda. Jika Wati ingin berpergian, ada berapa cara Wati menggunakan kendaraan yang ada di rumahnya?

Penyelesaian :

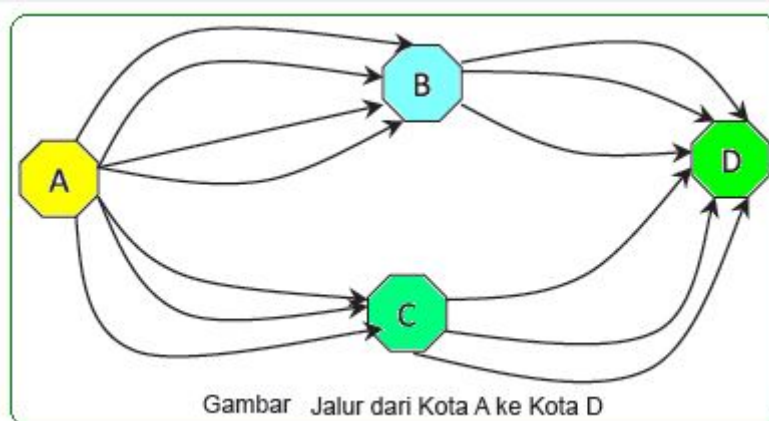
Pada kasus ini, ada tiga pilihan kendaraan yaitu sepeda, sepeda motor, dan mobil. Wati tidak mungkin menggunakan SEKALIGUS ketiga jenis kendaraan tersebut yang artinya Wati harus memilih salah satu jenis kendaraan saja. Sehingga kita bisa menggunakan aturan penjumlahan pada kasus ini.

*) Menentukan banyak cara menggunakan kendaraan

Total cara = $3 + 2 + 2 = 7$ cara.

Jadi, ada 7 cara pilihan kendaraan yang bisa digunakan oleh Wati.

■ Dari Kota A menuju kota D dapat melalui beberapa jalur pada gambar di bawah ini. Berapa banyak kemungkinan jalur yang dapat dilalui dari Kota A ke Kota D?



Contoh Penerapan Aturan Perkalian adalah: Berapa banyak cara keseluruhan jika akan menggunakan baju jika mempunyai 8 buah baju jenis lengan pendek dan 17 baju lengan panjang. Banyak cara menggunakan baju adalah $8 + 17 = 25$ cara. Jika ada A dan B yang merupakan himpunan saling lepas dengan banyak anggota himpunannya adalah x dan y, maka banyaknya cara mengambil satu anggota dari gabungan keduanya akan sama dengan $x+y$, dinotasikan:

$$A \cap B = 0; A \cup B = x + y$$

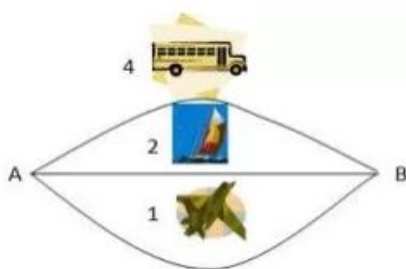
Gambar. Notasi aturan penjumlahan

Atau secara sederhana digunakan saat ada sejumlah kejadian yang tidak saling berhubungan (saling lepas). Dalam kondisi ini kejadian-kejadian tersebut dijumlahkan untuk mendapatkan total kejadian yang mungkin terjadi.

Contoh 1:

Dari kota A ke kota B ada beberapa jenis angkutan yang dapat digunakan. Ada 4 travel, 2 kapal laut, dan 1 pesawat terbang yang dapat dipilih. Ada berapa total cara berbeda untuk berangkat dari kota A menuju kota B?

Pembahasan:



Dalam soal di atas ketika kita memilih travel, kapal laut, maupun pesawat terbang tidak berpengaruh satu sama lain, ketiganya merupakan himpunan yang saling lepas. Sehingga ada $4+2+1 = 7$ cara berbeda untuk berangkat dari kota A menuju kota B. []

Definisi 1 Jika suatu kejadian dapat dikerjakan dengan beberapa cara, tetapi cara-cara ini tidak dapat dikerjakan pada waktu yang sama. Jika kejadian tersebut dapat terjadi dengan n_1 cara, atau kejadian tersebut terjadi dengan n_2 cara, atau kejadian tersebut dapat terjadi dengan n_3 cara, atau kejadian tersebut dapat terjadi dengan n_p cara, maka kejadian dengan ciri yang demikian dapat terjadi dengan $(n_1+n_2+n_3+...+n_p)$ cara.

Contoh 1

Dalam sebuah panitia, wakil dari sebuah jurusan dapat dipilih dari dosen, atau mahasiswa. Jika pada jurusan tersebut memiliki 37 dosen dan 83 mahasiswa, Berapa banyak cara memilih wakil dari jurusan tersebut?

Jawab:

Ada 37 cara untuk memilih wakil dari sebuah jurusan yang berasal dari kalangan dosen dan ada 83 cara memilih wakil dari sebuah jurusan yang berasal dari kalangan mahasiswa. Karena pada jurusan tersebut tidak ada dosen yang berstatus mahasiswa ataupun mahasiswa yang berstatus dosen, maka berdasarkan aturan penjumlahan, ada $37+83=120$ cara untuk memilih wakil dari sebuah jurusan.

Contoh 2

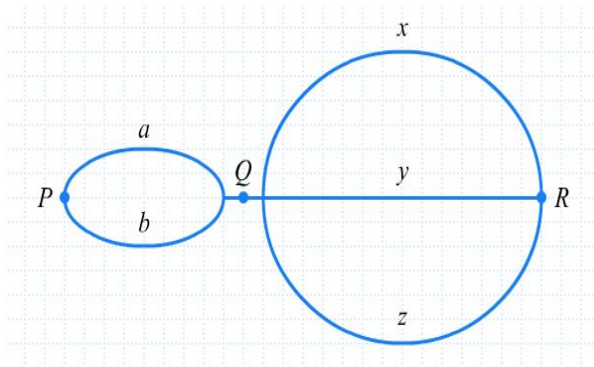
Seorang pelajar dapat memilih sebuah proyek komputer dari salah satu diantara tiga daftar yang tersedia. ketiga daftar tersebut terdiri atas 23, 15, dan 19 kemungkinan proyek. Proyek - proyek komputer yang ada pada ketiga daftar tersebut semuanya berbeda. Berapa banyak kemungkinan siswa tersebut memilih proyek komputer?

Jawab:

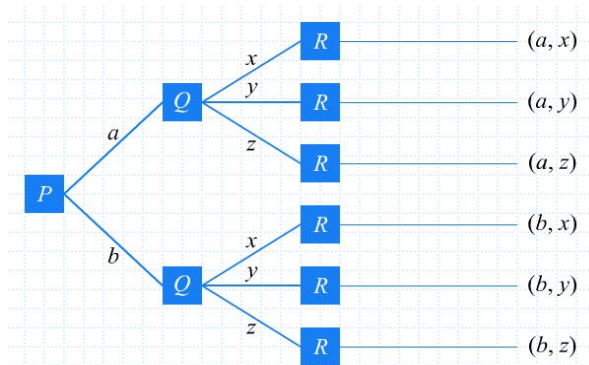
karena dari ketiga daftar tersebut semua proyek berbeda, dimana pada daftar pertama ada 23 proyek, daftar kedua ada 15 proyek, dan daftar ketiga ada 19 proyek Maka berdasarkan aturan penjumlahan ada $23+15+19 = 57$ kemungkinan siswa tersebut memilih proyek komputer. []

Contoh 3

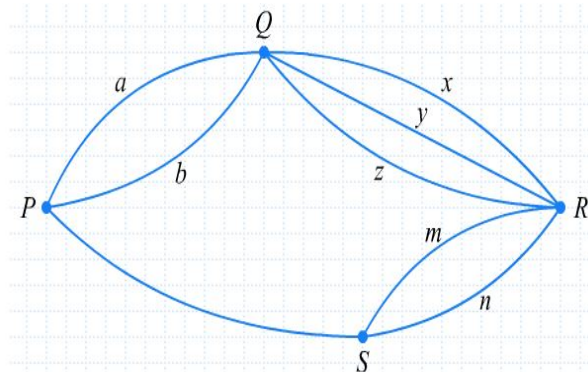
Misalkan Andi akan berangkat sekolah bersama dengan teman sekelasnya, Amir. Rumah Andi terletak pada titik P dan rumah Amir terletak pada titik Q (lihat gambar). Sehingga, dalam perjalanan ke sekolah Andi akan menuju rumah Amir terlebih dahulu, kemudian bersama-sama dengan Amir ia akan berangkat ke sekolah. Ada berapa cara yang dapat ditempuh Andi untuk berangkat ke sekolah apabila ia harus melalui rumah Amir terlebih dahulu?



Banyaknya cara perjalanan dari titik P ke titik Q dilanjutkan ke titik R dapat digambarkan dengan diagram pohon seperti pada gambar berikut.



Dari diagram pohon tersebut terlihat rute perjalanan dari titik P ke titik R melalui titik Q ada 6 cara yang dapat ditulis dalam bentuk himpunan pasangan berurutan (a, x) , (a, y) , (a, z) , (b, x) , (b, y) , (b, z) .



Dalil 1. Kaidah Penjumlahan Peluang Kejadian Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ atau $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$A \cup B$ = kejadian A atau B $A \cap B$ = kejadian A dan B

Contoh 1: Menurut catatan sebuah Bank, peluang Industri Manufaktur memperoleh kredit adalah 0.35. Sedangkan peluang Industri yang Padat Karya = 0.45. Peluang Industri yang tergolong Manufaktur atau Padat Karya = 0.25. Berapakah Peluang Industri Manufaktur dan Padat Karya memperoleh Kredit? $(0.35 + 0.45 - 0.25 = 0.55)$

Konsekuensi 1. Kaidah Penjumlahan Peluang Bila A dan B adalah kejadian Saling Terpisah ($A \cap B = \emptyset$), maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh 2: Berapakah peluang munculnya kartu bernilai 7 berwarna merah (A) atau bernilai 7 dengan hitam (B) pada pengambilan sebuah kartu secara acak dari seperangkat kartu bridge? Pada pengambilan sebuah kartu tidaklah mungkin mendapatkan kartu bernilai 7 berwarna merah

sekaligus berwarna hitam ($A \cap B = \emptyset$) $P(A \cap B) = 2/52 + 2/52 = 4/52 = 1/13$

Konsekuensi 2. Kaidah Penjumlahan Peluang

Bila A_1, A_2, \dots, A_k saling terpisah, maka : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$

Dalil 2. Kaidah Penjumlahan Peluang Kejadian Berkomplemen Jika A dan A' adalah 2 kejadian yang berkomplemen, maka : $P(A) + P(A') = 1$

Contoh 3: Peluang seorang mahasiswa tidak lulus ujian = 0.30, Peluang seorang mahasiswa lulus ujian = $1 - 0.30 = 0.70$ karena: Jika kejadian $A = \text{TIDAK lulus ujian}$ dan $P(A) = 0.30$ maka kejadian $A' = \text{LULUS}$ sehingga $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.30 = 0.70$

3.2 Aturan Perkalian

1. Aturan perkalian

1. Aturan perkalian

Kaidah Pencacahan adalah istilah dalam bahasan PELUANG. Kaidah pencacahan merupakan cara atau aturan untuk menghitung semua kemungkinan yang dapat terjadi dalam suatu percobaan tertentu. Metode yang dapat digunakan antara lain metode pengisian tempat (filling slot), Permutasi, dan Kombinasi.

Dalam kehidupan sehari-hari sering dihadapkan pada pemecahan masalah yang berkaitan dengan menentukan banyak cara yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan, misalnya jika sebuah uang logam dilemparkan, akan tampak permukaan gambar atau angka.

1. Aturan Perkalian $n_1 = \text{banyak cara unsur pertama}$ $n_2 = \text{banyak cara unsur kedua}$

$\dots \dots n_k = \text{banyak cara unsur ke-} k$ Maka banyak cara untuk menyusun k unsur yang tersedia adalah : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

Aturan Perkalian:

Jika terdapat k unsur yang tersedia, dengan:

$n_1 = \text{banyak cara untuk menyusun unsur pertama,}$

$n_2 = \text{banyak cara untuk menyusun unsur kedua setelah unsur pertama tersusun,}$

$n_3 = \text{banyak cara untuk menyusun unsur ketiga setelah unsur kedua tersusun,}$

.

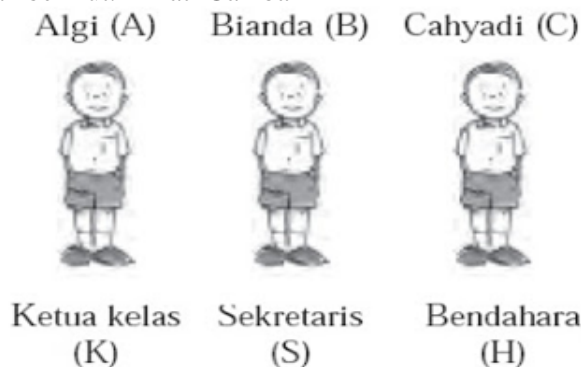
.

$n_k = \text{banyak cara untuk menyusun unsur ke-} k \text{ setelah unsur sebelumnya tersusun,}$

Maka banyak cara untuk menyusun k unsur yang tersedia adalah:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$$

Misalkan, dari 3 orang siswa, yaitu Algi, Bianda, dan Cahyadi akan dipilih untuk menjadi ketua kelas, sekretaris, dan bendahara dengan aturan bahwa seseorang tidak boleh merangkap jabatan pengurus kelas. Banyak cara 3 orang dipilih menjadi pengurus kelas tersebut akan dipelajari melalui uraian berikut. Amati Gambar



Gambar Aturan perkalian pemilihan pengurus kelas. a. Untuk ketua kelas (K) Posisi ketua kelas dapat dipilih dari 3 orang, yaitu Algi (A),

Bianda (B), atau Cahyadi (C).

Jadi, posisi ketua kelas dapat dipilih dengan 3 cara. b. Untuk sekretaris (S) Jika posisi ketua kelas sudah terisi oleh seseorang maka posisi sekretaris hanya dapat dipilih dari 2 orang yang belum terpilih menjadi pengurus kelas.

Jadi, posisi sekretaris dapat dipilih dengan 2 cara. c. Untuk bendahara (A)

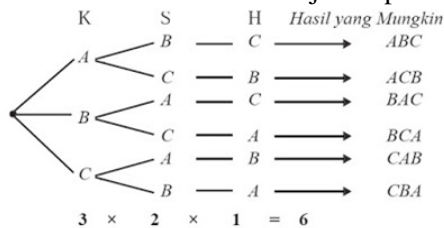
Jika posisi ketua kelas dan sekretaris sudah terisi maka posisi bendahara hanya ada satu pilihan, yaitu dijabat oleh orang yang belum terpilih menjadi pengurus kelas.

Jadi, posisi bendahara dapat dipilih dengan 1 cara.

Dengan demikian, banyak cara yang dilakukan untuk memilih 3 orang pengurus kelas dari 3 orang kandidat adalah :

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ cara.}$$

Uraian tersebut akan lebih jelas apabila mengamati skema berikut.



Dari uraian tersebut, dapatkah Anda menyatakan aturan perkalian? Cobalah nyatakan aturan perkalian itu dengan kata-kata Anda sendiri.

Aturan Perkalian :

Misalkan,

• operasi 1 dapat dilaksanakan dalam n_1 cara; • operasi 2 dapat dilaksanakan dalam n_2 cara; • operasi k dapat dilaksanakan dalam n_k cara.

Banyak cara k operasi dapat dilaksanakan secara berurutan adalah $n = n_1 \times n_2 \times n_3 \dots \times n_k$.

Contoh Soal 1 :

Berapa cara yang dapat diperoleh untuk memilih posisi seorang tekong, apit kiri, dan apit kanan dari 15 atlet sepak takraw pelatnas SEA GAMES jika tidak ada posisi yang rangkap? (Tekong adalah pemain sepak takraw yang melakukan sepak permulaan).

Jawaban :

• Untuk posisi tekong.

Posisi tekong dapat dipilih dengan 15 cara dari 15 atlet pelatnas yang tersedia.

• Untuk posisi apit kiri.

Dapat dipilih dengan 14 cara dari 14 atlet yang ada (1 atlet lagi tidak terpilih karena menjadi tekong).

• Untuk posisi apit kanan.

Cara untuk memilih apit kanan hanya dengan 13 cara dari 13 atlet yang ada (2 atlet tidak dapat dipilih karena telah menjadi tekong dan apit kiri).

Dengan demikian, banyak cara yang dilakukan untuk memilih posisi dalam regu sepak takraw adalah $15 \times 14 \times 13 = 2.730$ cara. Ingatlah :

Apabila terdapat n buah tempat yang akan diduduki oleh n orang, terdapat :

$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ cara orang menduduki tempat tersebut. 2. Faktorial

Anda telah mempelajari, banyak cara yang dilakukan untuk memilih 3 orang pengurus kelas dari 3 orang kandidat adalah $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara.

Selanjutnya, $3 \times 2 \times 1$ dapat dinyatakan dengan $3!$ (dibaca 3 faktorial). Jadi,

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Dengan penalaran yang sama,

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24 \quad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120 \quad 6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$$

Uraian tersebut memperjelas definisi berikut.

Definisi :

a. $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$, dengan n bilangan asli, untuk $n \geq 2$. b. $1! = 1$ c. $0! = 1$

Contoh Soal 2 :

Hitunglah :

a. $7!$ b. $17! / 0!16!$ c. $12! / 2!8!$ d. $8! / 5!$

Penyelesaian :

$$\text{a. } 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$$

$$\text{b. } \frac{17!}{0!16!} = \frac{17 \cdot 16!}{1 \cdot 16!} = 17$$

$$\text{c. } \frac{12!}{2!8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{2!8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \cdot 2} = 5.940$$

$$\text{d. } \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Contoh Soal 3 :

Nyatakan bentuk-bentuk berikut ke dalam faktorial:

$$\text{a. } 157 \times 156 \times 155 \times \dots \times 1 \quad \text{b. } 8!(9 \times 10) \quad \text{c. } n(n-1)(n-2)$$

$$\text{a. } 157 \times 156 \times 155 \times \dots \times 1 = \frac{157 \times 156 \times 155 \times \dots \times 1}{154 \times 153 \times \dots \times 1} = \frac{157!}{154!}$$

$$\text{b. } 8!(9 \times 10) = (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)(9 \times 10) = 10!$$

$$\text{c. } n(n-1)(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 1}{(n-3)(n-4) \dots 1} = \frac{n!}{(n-3)!}$$

Penyelesaian :

Contoh Soal 4 :

3. Tentukan nilai n dari $(n+3)! = 10(n+2)!$

Pembahasan :

$$\begin{aligned} (n+3)! &= 10(n+2)! & \Leftrightarrow (n+3)(n+2)! &= 10(n+2)! \\ & & \Leftrightarrow n+3 &= 10 \\ & & \Leftrightarrow n &= 7 \end{aligned}$$

Contoh Soal 5 :

Berapa banyak bilangan yang terdiri dari 3 angka dapat dibentuk dari angka-angka 1,2,3,4,5,6,7, dan 8 jika tiap-tiap angka boleh diulang?

Pembahasan :

Unsur pertama ada 8 pilihan, kedua ada 8, ketiga 8 (karena tiap angka boleh diulang. 8 8 8
Tinggal dikalikan $8 \times 8 \times 8 = 512$

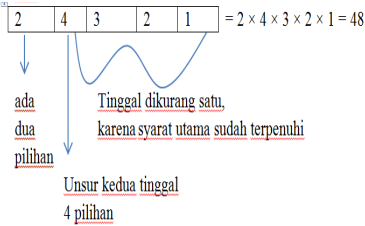
Contoh Soal 6 :

Berapa banyak susunan huruf yang dapat dibentuk oleh huruf-huruf pada kata “GARDU” tanpa ada pengulangan kata :

a. Huruf pertama adalah huruf hidup

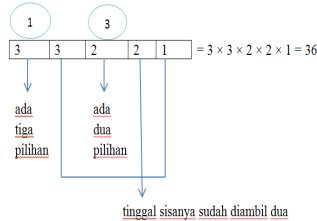
Jawab : maka, huruf konsonan 3 buah dan huruf vokal ada 2 buah.

Jadi



b. Huruf pertama huruf mati dan huruf ketiga huruf hidup

Jawab :



Contoh Soal 7 :

Jika diperlukan 5 orang laki-laki dan 4 orang perempuan untuk membentuk suatu barisan sedemikian rupa hingga yang perempuan menempati posisi genap, berapa banyak kemungkinan susunan barisan itu?

Jawab :

buatlah susunan dengan memenuhi syarat terlebih dahulu

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	4	4	3	3	2	2	1	1

Dikali = 2000

Contoh Soal 8:

Ana mempunyai baju merah, hijau, biru, dan ungu. Ana juga memiliki rok hitam, putih, dan coklat. Berapa banyak pasangan baju dan rok yang dapat dipakai Ana?

Jawaban:

Jumlah baju = 4. Jumlah rok = 3. Jadi $3 \times 4 = 12$. Maksudnya Ana bisa memakai baju dan rok dengan warna : merah hitam, hijau hitam, biru hitam, dan seterusnya sampai 12 pasang.

Contoh Soal 9:

Terdapat angka 3, 4, 5, 6, 7 yang hendak disusun menjadi suatu bilangan dengan tiga digit. Berapa banyak bilangan yang dapat disusun bila angka boleh berulang?

Jawaban:

Angka terdiri dari 3, 4, 5, 6, 7 dengan total ada lima angka. Dan membutuhkan tiga digit angka dari kombinasi lima angka tersebut secara acak. Tiga digit terdiri dari angka ratusan, puluhan dan satuan. Karena angka boleh berulang maka angka ratusan, puluhan dan satuan dapat diisi dengan kelima angka tersebut sehingga :

$$5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ kombinasi angka.}$$

Contoh Soal UN Tahun 2014:

Budi mempunyai koleksi 3 pasang sepatu dengan merk yang berbeda, dan 4 baju yang berlainan coraknya, serta 3 celana yang berbeda warna. Banyak cara berpakaian Budi dengan penampilan yang berbeda adalah

A. 10 B. 12 C. 22 D. 41 E. 36

Pembahasan :

3 pasang sepatu masing-masing bisa dipadukan dengan 4 corak baju dan 3 celana yang berbeda. Banyak cara yang mungkin adalah:

$$3 \times 4 \times 3 = 36$$

Jadi, banyak cara Budi berpakaian dengan penampilan berbeda adalah 36 cara (E).

Contoh Soal UN Tahun 2013 Empat siswa dan dua siswi akan duduk berdampingan. Apabila siswi selalu duduk paling pinggir, banyak cara mereka duduk adalah

A. 24 B. 48 C. 56 D. 64 E. 72

Pembahasan Banyak cara 2 siswi duduk di pinggir:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

Di antara kedua siswi tersebut ada 4 siswa. Banyak cara mereka duduk adalah:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Dengan demikian, banyak cara siswa dan siswi tersebut duduk adalah:

$$2 \times 24 = 48$$

Jadi, banyak cara duduk empat siswa dan dua siswa tersebut adalah 48 cara (B).

Contoh Soal UN Tahun 2013 Dua keluarga yang masing-masing terdiri dari 2 orang dan 3 orang ingin foto bersama. Banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah

A. 24 B. 36 C. 48 D. 72 E. 96

Pembahasan Pertama, anggaplah dua keluarga tersebut masing-masing merupakan dua kesatuan. Banyak posisi dua keluarga berfoto adalah:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

Selanjutnya masing-masing keluarga melakukan tukar posisi antaranggota keluarga. Banyak posisi foto keluarga yang beranggotakan 2 orang adalah:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

Banyak posisi foto keluarga yang beranggotakan 3 orang adalah:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Dengan demikian, banyak seluruh posisi foto dua keluarga tersebut adalah:

$$2 \times 2 \times 6 = 24$$

Jadi, banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah 24 posisi (A).

Contoh Soal UN Tahun 2014 Pada suatu rapat terdapat 10 orang yang saling berjabat tangan. Banyak jabatan tangan tersebut adalah

A. 90 B. 50 C. 45 D. 25 E. 20

Pembahasan Setiap orang akan berjabat tangan sebanyak 9 kali. Karena ada 10 orang, banyak jabatan yang terjadi adalah:

$$9 \times 10 = 90$$

Jadi, banyak jabatan tangan yang terjadi dari 10 orang adalah 90 (A).

Contoh Soal :

Berapa cara yang dapat diperoleh untuk memilih posisi seorang tekong, apit kiri, dan apit kanan dari 15 atlet sepak takraw pelatnas SEA GAMES jika tidak ada posisi yang rangkap? (Tekong adalah pemain sepak takraw yang melakukan sepak permulaan).

Jawaban :

Untuk posisi tekong.

Posisi tekong dapat dipilih dengan 15 cara dari 15 atlet pelatnas yang tersedia.

Untuk posisi apit kiri.

Dapat dipilih dengan 14 cara dari 14 atlet yang ada (1 atlet lagi tidak terpilih karena menjadi tekong).

Untuk posisi apit kanan.

Cara untuk memilih apit kanan hanya dengan 13 cara dari 13 atlet yang ada (2 atlet tidak dapat dipilih karena telah menjadi tekong dan apit kiri).

Dengan demikian, banyak cara yang dilakukan untuk memilih posisi dalam regu sepak takraw adalah $15 \times 14 \times 13 = 2.730$ cara.

Contoh soal dan jawaban

1. Dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, akan disusun suatu bilangan yang terdiri dari 3 angka berbeda. Banyaknya bilangan yang dapat disusun adalah ...

- a. 18
- b. 36
- c. 60
- d. 120
- e. 216

2. Dari angka-angka 2, 3, 5, 7, dan 8 disusun bilangan yang terdiri atas tiga angka yang berbeda. Banyak bilangan yang dapat disusun adalah ...

- a. 10
- b. 15
- c. 20
- d. 48
- e. 60

3. Dari angka-angka 1,2,3,4,5, dan 6 akan disusun suatu bilangan terdiri dari empat angka. Banyak bilangan genap yang dapat tersusun dan tidak ada angka yang berulang adalah ...

- a. 120
- b. 180
- c. 360
- d. 480
- e. 648

4. Dari angka-angka 3,4,5,6, dan 7 akan dibuat bilangan terdiri dari empat angka berlainan. Banyaknya bilangan kurang dari 6.000 yang dapat dibuat adalah ...

- a. 24
- b. 36
- c. 48
- d. 72
- e. 96

5. Banyaknya bilangan antara 1.000 dan 4.000 yang dapat disusun dari angka-angka 1,2,3,4,5,6 dengan tidak ada angka yang sama adalah ...

- a. 72
- b. 80
- c. 96
- d. 120
- e. 180

6. Perjalanan dari Surabaya ke Sidoarjo bisa melalui dua jalan dan dari Sidoarjo ke Malang bisa melalui tiga jalan. Banyaknya cara untuk bepergian dari Surabaya ke Malang melalui Sidoarjo ada ...

- a. 1 cara
- b. 2 cara
- c. 3 cara
- d. 5 cara
- e. 6 cara

7. Suatu keluarga yang tinggal di Surabaya ingin liburan ke Eropa via Arab Saudi. Jika rute dari Surabaya ke Arab Saudi sebanyak 5 rute penerbangan, sedangkan Arab Saudi ke Eropa ada 6 rute, maka banyaknya semua pilihan rute penerbangan dari Surabaya ke Eropa pergi pulang dengan tidak boleh melalui rute yang sama adalah ...

- a. 900
- b. 800
- c. 700
- d. 600
- e. 460

8. Jika seorang ibu mempunyai 3 kebaya, 5 selendang, dan 2 buah sepatu, maka banyaknya komposisi pemakaian kebaya, selendang, dan sepatu adalah ...

- a. 6 cara
- b. 8 cara
- c. 10 cara
- d. 15 cara
- e. 30 cara

9. Seorang ingin melakukan pembicaraan melalui sebuah wartel. Ada 4 buah kamar bicara dan ada 6 buah nomor yang akan dihubungi. Banyak susunan pasangan kamar bicara dan nomor telepon yang dapat dihubungi adalah ...

- a. 10
- b. 24
- c. 360
- d. 1.296
- e. 4.096

10. Bagus memiliki koleksi 5 macam celana panjang dengan warna berbeda dan 15 kemeja dengan corak berbeda. Banyak cara Bagus berpakaian dengan penampilan berbeda adalah ...

- a. 5 cara
- b. 15 cara
- c. 20 cara
- d. 30 cara
- e. 75 cara

kunci jawaban :

- 1. D
- 2. E
- 3. B
- 4. D
- 5. E
- 6. E
- 7. D
- 8. E
- 9. B
- 10. E

1. UN 2012 BHS/A13 Dari 6 orang calon pengurus termasuk Doni akan dipilih ketua, wakil, dan bendahara. Jika Doni terpilih sebagai ketua maka banyak pilihan yang mungkin terpilih sebagai wakil dan bendahara adalah ... pilihan

- a. 12
- b. 16
- c. 20
- d. 25

- e. 30
2. UN 2012 BHS/C37 Suatu regu pramuka terdiri dari 7 orang. Jika dipilih ketua, sekretaris, dan bendahara, maka banyak pasangan yang mungkin akan terpilih adalah ...
- a. 100
b. 110
c. 200
d. 210
e. 300
3. UN 2010 BAHASA PAKET A Dalam rangka memperingati HUT RI, Pak RT membentuk tim panitia HUT RI yang dibentuk dari 8 pemuda untuk dijadikan ketua panitia, sekretaris, dan bendahara masing-masing 1 orang. Banyaknya cara pemilihan tim panitia yang dapat disusun adalah ...
- a. 24
b. 56
c. 168
d. 336
e. 6720
4. UN 2012 IPS/B25 Dari 7 orang pengurus suatu ekstrakurikuler akan dipilih seorang ketua, wakil ketua, sekretaris, bendahara, dan humas. Banyak cara pemilihan pengurus adalah
- a. 2.100
b. 2.500
c. 2.520
d. 4.200
e. 8.400
5. UN 2010 IPS PAKET B Dari 7 orang pengurus suatu ekstrakurikuler akan dipilih seorang ketua, wakil ketua, sekretaris, bendahara, dan humas. Banyak cara pemilihan pengurus adalah ...
- a. 2.100
b. 2.500
c. 2.520
d. 4.200
e. 8.400
6. UN 2012 BHS/B25 Dari 7 orang pelajar berprestasi di suatu sekolah akan dipilih 3 orang pelajar berprestasi I, II, dan III. Banyaknya cara susunan pelajar yang mungkin terpilih sebagai pelajar berprestasi I, II, dan III adalah ...
- a. 21
b. 35
c. 120
d. 210
e. 720
7. UN 2010 IPS PAKET A Dalam kompetisi bola basket yang terdiri dari 10 regu akan dipilih juara 1, 2, dan 3. Banyak cara memilih adalah ...
- a. 120
b. 360
c. 540
d. 720
e. 900
8. UN 2011 IPS PAKET 46 Jika seorang penata bunga ingin mendapatkan informasi penataan bunga dari 5 macam bunga yang berbeda, yaitu B1, B2, ..., B5 pada lima tempat yang tersedia, maka banyaknya formasi yang mungkin terjadi adalah ...

- a. 720
 - b. 360
 - c. 180
 - d. 120
 - e. 24
9. UN 2011 IPS PAKET 12 Banyak cara memasang 5 bendera dari negara yang berbeda disusun dalam satu baris adalah ...
- a. 20
 - b. 24
 - c. 69
 - d. 120
 - e. 132
10. UN 2008 BAHASA PAKET A/B Di depan sebuah gedung terpasang secara berjajar sepuluh tiang bendera. Jika terdapat 6 buah bendera yang berbeda, maka banyak cara berbeda menempatkan bendera-bendera itu pada tiang-tiang tersebut adalah ...
- a. $10!6!$
 - b. $10!4!$
 - c. $6!4!$
 - d. $10!2!$
 - e. $6!2!$
11. UN 2010 BAHASA PAKET A/B Susunan berbeda yang dapat dibentuk dari kata "DITATA" adalah ...
- a. 90
 - b. 180
 - c. 360
 - d. 450
 - e. 720
12. UN 2008 BAHASA PAKET A/B Nilai kombinasi 8C_3 sama dengan ...
- a. 5
 - b. 40
 - c. 56
 - d. 120
 - e. 336
13. UN 2009 BAHASA PAKET A/B Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Banyak himpunan bagian A yang banyak anggotanya 3 adalah ...
- a. 6
 - b. 10
 - c. 15
 - d. 24
 - e. 30
14. UN 2012 BHS/A13 Banyaknya cara memilih 3 orang utusan dari 10 orang calon untuk mengikuti suatu perlombaan adalah ...
- a. 120
 - b. 180
 - c. 240
 - d. 360
 - e. 720
15. UN 2010 IPS PAKET B Banyak cara menyusun suatu regu cerdas cermat yang terdiri dari 3 siswa dipilih dari 10 siswa yang tersedia adalah ...

- a. 80
 - b. 120
 - c. 160
 - d. 240
 - e. 720
16. UN 2010 BAHASA PAKET A/B Banyak kelompok yang terdiri atas 3 siswa berbeda dapat dipilih dari 12 siswa pandai untuk mewakili sekolahnya dalam kompetisi matematika adalah ...
- a. 180
 - b. 220
 - c. 240
 - d. 420
 - e. 1.320
17. UN 2011 IPS PAKET 12 Dari 20 kuntum bunga mawar akan diambil 15 kuntum secara acak. Banyak cara pengambilan ada ...
- a. 15.504
 - b. 12.434
 - c. 93.024
 - d. 4.896
 - e. 816
18. UN 2012 BHS/B25 Lima orang bermain bulutangkis satu lawan satu secara bergantian. Banyaknya pertandingan adalah ...
- a. 5
 - b. 10
 - c. 15
 - d. 20
 - e. 25
19. UN 2012 BHS/C37 Dari 8 pemain basket akan dibentuk tim inti yang terdiri dari 5 pemain. Banyaknya susunan tim inti yang mungkin terbentuk adalah ...
- a. 56
 - b. 36
 - c. 28
 - d. 16
 - e. 5
20. UN 2011 IPS PAKET 46 Kelompok tani Suka Maju terdiri dari 6 orang yang berasal dari dusun A dan 8 orang berasal dari dusun B. Jika dipilih 2 orang dari dusun A dan 3 orang dari dusun B untuk mengikuti penelitian tingkat kabupaten, maka banyaknya susunan kelompok yang mungkin terjadi adalah ...
- a. 840
 - b. 720
 - c. 560
 - d. 350
 - e. 120
21. UN 2009 IPS PAKET A/B Dari 20 orang siswa yang berkumpul, mereka saling berjabat tangan, maka banyaknya jabatan tangan yang terjadi adalah ...
- a. 40
 - b. 80
 - c. 190
 - d. 360
 - e. 400

22. UN 2011 BHS PAKET 12 Dari 10 warna berbeda akan dibuat warna-warna baru yang berbeda dari campuran 4 warna dengan banyak takaran yang sama. Banyaknya warna baru yang mungkin dibuat adalah ... warna

- a. 200
- b. 210
- c. 220
- d. 230
- e. 240

23. UN 2010 BAHASA PAKET A Seorang ibu mempunyai 8 sahabat. Banyak komposisi jika ibu ingin mengundang 5 sahabatnya untuk makan malam adalah ...

- a. $8! 5!$
- b. $8! 3!$
- c. $8!3!$
- d. $8!5!$
- e. $8!5!3!$

24. UN 2008 BAHASA PAKET A/B Seorang peserta ujian harus mengerjakan 6 soal dari 10 soal yang ada. Banyak cara peserta memilih soal ujian yang harus dikerjakan adalah ...

- a. 210
- b. 110
- c. 230
- d. 5.040
- e. 5.400

KUNCI JAWABAN

- 1.C
- 2.D
- 3.D
- 4.C
- 5.C
- 6.D
- 7.C
- 8.D
- 9.D
- 10.B
- 11.D
- 12.C
- 13.B
- 14.A
- 15.B
- 16.B
- 17.A
- 18.B
- 19.A
- 20.A
- 21.C
- 22.B
- 23.E
- 24.A

Questions and Answers

1. Sintia hendak bepergian dari kota A ke kota C melalui kota B. Dari kota A ke kota B terdapat dua jalan dan dari kota B ke kota C terdapat 3 jalan. Banyak jalan yang dapat ditempuh untuk bepergian dari kota A menuju kota C adalah 5 cara.

- A. True
- B. False

2. Dari huruf-huruf E, T, I, K, dan A akan dibentuk susunan huruf yang saling berbeda. Banyak cara untuk menyusun huruf-huruf itu jika huruf pertama dimulai dengan huruf hidup (vokal) adalah

3. Diketahui 5 buah angka 2, 3, 4, 5, dan 6 akan disusun bilangan-bilangan genap yang terdiri dari tiga angka. Banyak cara untuk menyusun bilangan itu bila tidak boleh mempunyai angka yang sama adalah

4. Akan dibuat nomor-nomor kode terdiri dari dua angka dan dua huruf yang saling berbeda. Banyaknya nomor kode tersebut adalah

- A. 52.650
- B. 58.500
- C. 70.200
- D. 60.000
- E. 65.000

5. Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk antara 400 sampai 900 dari angka 3, 4, 5, dan 6 yang genap adalah

- A. 8
- B. 12
- C. 16
- D. 24
- E. 48

6. Pada suatu pesta dihadiri 75 orang dan mereka saling jabat tangan. Banyaknya jabat tangan yang terjadi adalah 2075

- A. True
- B. False

7. Dari angka 1, 2, 3, 5, 6, dan 7 disusun bilangan yang terdiri atas tiga angka yang berlainan. Banyak bilangan yang kurang dari 400 dari angka-angka tersebut adalah

8. Ada 4 jalan raya yang menghubungkan kota A dan kota B. Antara kota B dan kota C ada 3 jalan raya. Jose bepergian dari kota A ke kota C melalui kota B, kemudian kembali dari kota C ke kota A juga melalui kota B. Jika jalur jalan yang ditempuh pergi pulang yang harus berbeda, maka banyak yang dapat dilalui ada

- A. 6
- B. 12
- C. 18
- D. 72
- E. 144

9. Agatha, Bunga, Cantika dan Diana akan berfoto selfi bersama secara berdampingan. Banyak caya mereka berfoto dengan Agatha dan Bunga selalu berdampingan adalah 12 cara.

- A. True
- B. False

10. Dari tujuh orang pengurus kegiatan ekstrakurikuler akan dipilih seorang ketua, wakil, sekretaris, dan bendahara dan humas. Banyak cara pemilihan pengurus adalah

- A. 2.100
- B. 2.500
- C. 2,520

D. 4.200

E. 8.400

11. Lima anak akan duduk pada tiga kursi A, B, dan C secara berdampingan. Banyaknya kemungkinan mereka duduk adalah

12. Anthony, Bram, Candra, dan Daniel akan bekerja secara bergilir. Banyaknya urutan bekerja yang dapat disusun dengan Anthony selalu pada giliran terakhir adalah 6 cara

A. True

B. False

3.3 Permutasi

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menghadapi masalah pengaturan suatu obyek yang terdiri dari beberapa unsur, baik yang disusun dengan mempertimbangkan urutan sesuai dengan posisi yang diinginkan maupun yang tidak. Misalnya menyusun kepanitiaan yang terdiri dari Ketua, Sekretaris dan Bendahara dimana urutan untuk posisi tersebut dipertimbangkan atau memilih beberapa orang untuk mewakili sekelompok orang dalam mengikuti suatu kegiatan yang dalam hal ini urutan tidak menjadi pertimbangan. Dalam matematika, penyusunan obyek yang terdiri dari beberapa unsur dengan mempertimbangkan urutan disebut dengan permutasi, sedangkan yang tidak mempertimbangkan urutan disebut dengan kombinasi.

Masalah penyusunan kepanitiaan yang terdiri dari Ketua, Sekretaris dan Bendahara dimana urutan dipertimbangkan merupakan salah satu contoh permutasi. Jika terdapat 3 orang (misalnya Amir, Budi dan Cindy) yang akan dipilih untuk menduduki posisi tersebut, maka dengan menggunakan Prinsip Perkalian kita dapat menentukan banyaknya susunan panitia yang mungkin, yaitu:

- Pertama menentukan Ketua, yang dapat dilakukan dalam 3 cara.
- Begitu Ketua ditentukan, Sekretaris dapat ditentukan dalam 2 cara.
- Setelah Ketua dan Sekretaris ditentukan, Bendahara dapat ditentukan dalam 1 cara.
- Sehingga banyaknya susunan panitia yang mungkin

Secara formal Permutasi didefinisikan sebagai berikut:

Permutasi dari n unsur yang berbeda x_1, x_2, \dots, x_n adalah pengurutan dari n unsur tersebut.

CONTOH :

Tentukan permutasi dari 3 huruf yang berbeda, misalnya ABC !

Permutasi dari huruf ABC adalah ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Sehingga terdapat 6 permutasi dari huruf ABC.

TEOREMA 2

Terdapat n permutasi dari n unsur yang berbeda.

Bukti

Asumsikan bahwa permutasi dari unsur yang berbeda merupakan aktivitas yang terdiri dari langkah yang berurutan. Langkah pertama adalah memilih unsur pertama yang bisa dilakukan dengan n cara. Langkah kedua adalah memilih unsur pertama sudah terpilih. Lanjutkan langkah tersebut sampai langkah ke n yang bisa dilakukan dengan 1 cara. Berdasarkan prinsip perkalian, terdapat

$$n(n-1)(n-2)\dots 2.1=n!$$

permutasi n unsur berbeda

Contoh :

Berapa banyak permutasi dari huruf ABC ?

Terdapat $3.2.1 = 6$ permutasi dari huruf ABC

Berapa banyak permutasi dari huruf ABCDEF jika subuntai ABC harus selalu muncul bersama?

Karena subuntai ABC harus selalu muncul bersama, maka subuntai ABC bisa dinyatakan sebagai satu unsur. Dengan demikian terdapat 4 unsur yang dipermutasikan, sehingga banyaknya permutasi adalah $4.3.2.1 = 24$.

DEFINISI

Permutasi- r dari n unsur yang berbeda x_1, x_2, \dots, x_n adalah pengurutan dari sub-himpunan dengan r anggota dari himpunan x_1, x_2, \dots, x_n . Banyaknya permutasi- r dari n unsur yang berbeda dinotasikan dengan $P(n, r)$.

Tentukan permutasi-3 dari 5 huruf yang berbeda, misalnya ABCDE.

Permutasi-3 dari huruf ABCDE adalah

ABC ABD ABE ACB ACD ACE

ADB ADC ADE AEB AEC AED

BAC BAD BAE BCA BCD BCE

BDA BDC BDE BEA BEC BED

CAB CAD CAE CBA CBD CBE

CDA CDB CDE CEA CEB CED

DAB DAC DAE DBA DBC DBE

DCA DCB DCE DEA DEB DEC

EAB EAC EAD EBA EBC EBD

ECA ECB ECD EDA EDB EDC

Sehingga banyaknya permutasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah 60.

TEOREMA 3

Banyaknya permutasi- r dari n unsur yang berbeda adalah

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Asumsikan bahwa permutasi- r n unsur yang berbeda merupakan aktifitas yang terdiri dari r langkah yang merupakan aktifitas yang terdiri dari r langkah yang berurutan. Langkah pertama adalah memilih unsur pertama yang bisa dilakukan dengan n cara. langkah kedua adalah memilih unsur kedua yang bisa dilakukan dengan $n-1$ cara karena unsur pertama sudah terpilih. Lanjutkan langkah tersebut sampai dengan $n-r+1$ cara. Berdasarkan prinsip perkalian Diperoleh

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(n-r)(n-r-1)\dots 2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\text{Jadi } P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Gunakan Teorema 3.2 untuk menentukan permutasi-3 dari 5 huruf yang berbeda, misalnya ABCDE.

Karena $r = 3$ dan $n = 5$ maka permutasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

Jadi banyaknya permutasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah 60.

3.4 kombinasi

Berbeda dengan permutasi yang urutan menjadi pertimbangan, pada kombinasi urutan tidak dipertimbangkan. Misalnya pemilihan 3 orang untuk mewakili kelompok 5 orang (misalnya Dedi, Eka, Feri, Gani dan Hari) dalam mengikuti suatu kegiatan. Dalam masalah ini, urutan tidak dipertimbangkan karena tidak ada bedanya antara Dedi, Eka dan Feri dengan Eka, Dedi dan Feri. Dengan mendaftar semua kemungkinan 3 orang yang akan dipilih dari 5 orang yang ada, diperoleh:

{Dedi, Eka, Feri}	{Dedi, Eka, Gani}	{Dedi, Eka, Hari}
{Dedi, Feri, Gani}	{Dedi, Feri, Hari}	{Dedi, Gani, Hari}
{Eka, Feri, Gani}	{Eka, Feri, Hari}	{Eka, Gani, Hari}
{Feri, Gani, Hari}		

Sehingga terdapat 10 cara untuk memilih 3 orang dari 5 orang yang ada.

Selanjutnya kita dapat kombinasikan secara formal.

Seperti keterangan diatas.

DEFINISI

Kombinasi- r dari n unsur yang berbeda x_1, x_2, \dots, x_n adalah seleksi tak terurut r anggota dari himpunan x_1, x_2, \dots, x_n (sub-himpunan dengan r unsur). Banyaknya kombinasi- r dari n unsur yang berbeda dinotasikan dengan $C(n, r)$ atau $(n \ r)$.

CONTOH :

Tentukan kombinasi-3 dari 5 huruf yang berbeda, misalnya ABCDE. Kombinasi-3 dari huruf ABCDE adalah

ABC	ABD	ABE	ACD	ACE
ADE	BCD	BCE	BDE	CDE

Sehingga banyaknya kombinasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah 10.

Teorema 3

Banyaknya kombinasi- r dari n unsur yang berbeda adalah

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)! \cdot r!}$$

Bukti.

- Langkah pertama adalah menghitung kombinasi- r dari n , yaitu $C(n, r)$.
- Langkah kedua adalah mengurutkan r unsur tersebut, yaitu $r!$.

Dengan demikian

Pembuktian dilakukan dengan menghitung permutasi dari n unsur yang berbeda dengan cara berikut ini.

$$\begin{aligned} P(n, r) &= C(n, r) \cdot r! \\ C(n, r) &= \frac{P(n, r)}{r!} \\ &= \frac{n! / (n - r)!}{r!} \\ &= \frac{n!}{(n - r)! r!} \end{aligned}$$

seperti yang diinginkan

Gunakan Teorema 3.3 untuk menentukan kombinasi-3 dari 5 huruf yang berbeda, misalnya ABCDE.

Karena $r = 3$ dan $n = 5$ maka kombinasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah

$$C(5, 3) = \frac{5!}{(5 - 3)! \cdot 3!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 5 \cdot 2 = 10$$

Jadi banyaknya kombinasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah 10.

Contoh

Berapa banyak cara sebuah panitia yang terdiri dari 4 orang bisa dipilih dari 6 orang

Karena panitia yang terdiri dari 4 orang merupakan susunan yang tidak terurut, maka masalah ini merupakan kombinasi-4 dari 6 unsur yang tersedia. Sehingga dengan menggunakan Teorema 3.3 dimana $n = 6$ dan $r = 4$ diperoleh:

$$C(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 3 \cdot 5 = 15$$

Jadi terdapat 15 cara untuk membentuk sebuah panitia yang terdiri dari 4 orang bisa dipilih dari 6 orang.

Contoh :

Berapa banyak cara sebuah panitia yang terdiri dari 2 mahasiswa dan 3 mahasiswi yang bisa dipilih dari 5 mahasiswa dan 6 mahasiswi?

Pertamai, memilih 2 mahasiswa dari 5 mahasiswa yang ada, yaitu:

$$C(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 5 \cdot 2 = 10$$

Kedua, memilih 3 mahasiswi dari 6 mahasiswi yang ada, yaitu:

$$C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 4 = 20$$

Sehingga terdapat $10 \cdot 20 = 200$ cara untuk membentuk sebuah panitia yang terdiri dari 2 mahasiswa dan 3 mahasiswi yang bisa dipilih dari 5 mahasiswa dan 6 mahasiswi?

Kalau pada pembahasan permutasi sebelumnya unsur-unsur yang diurutkan berbeda, pada bagian ini akan dibahas permutasi yang digeneralisasikan dengan membolehkan pengulangan unsur-unsur yang akan diurutkan, dengan kata lain unsur-unsurnya boleh sama.

Misalkan kita akan mengurutkan huruf-huruf dari kata KAKIKUKAKU. Karena huruf-huruf pada kata tersebut ada yang sama, maka banyaknya permutasi bukan $10!$, tetapi kurang dari $10!$.

Untuk mengurutkan 10 huruf pada kata KAKIKUKAKU dapat dilakukan dengan cara:

Kalau pada pembahasan permutasi sebelumnya unsur-unsur yang diurutkan berbeda, pada bagian ini akan dibahas permutasi yang digeneralisasikan dengan membolehkan pengulangan unsur-unsur yang akan diurutkan, dengan kata lain unsur-unsurnya boleh sama. Misalkan kita akan mengurutkan huruf-huruf dari kata KAKIKUKAKU. Karena huruf-huruf pada kata tersebut ada yang sama, maka banyaknya permutasi bukan $10!$, tetapi kurang dari $10!$. Untuk mengurutkan 10 huruf pada kata KAKIKUKAKU dapat dilakukan dengan cara:

-Asumsikan masalah ini dengan 10 posisi kosong yang akan diisi dengan huruf-huruf pada kata KAKIKUKAKU.

-Pertama menempatkan 5 huruf K pada 10 posisi kosong, yang dapat dilakukan dalam $c(10,5)$ cara

-Setelah 5 huruf k ditempatkan, maka terdapat $10-5=5$ posisi kosong

-Berikutnya adalah menempatkan 2 huruf A pada 5 posisi kosong, yang dapat dilakukan dalam $c(5,2)$ cara. b begitu 2huruf A ditempatkan, terdapat $C(3,2)$ cara untuk menempatkan 2 huruf A ditempatkan, terdapat $C(3,2)$ cara untuk menempatkan 2 huruf U pada 3 posisi kosong yang ada

- Akhirnya terdapat $C(1,1)$ cara untuk menempatkan 1 huruf I pada 1 posisi kosong yang tersisa

$$C(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{3.2} = 5.4 = 20$$

Jadi banyaknya cara untuk mengurutkan huruf-huruf dari kata KAKIKUKAKU adalah 7560.

Secara umum banyaknya permutasi dari obyek yang mempunyai beberapa unsur sama dapat dijabarkan seperti pada teorema berikut ini.

TEOREMA

Misalkan X merupakan sebuah barisan yang mempunyai n unsur, dimana terdapat n_1 unsur yang sama untuk jenis 1, n_2 unsur yang sama untuk jenis 2 dan seterusnya sampai n_t unsur yang sama untuk jenis t. Banyaknya permutasi dari barisan X adalah

$$\begin{aligned} C(10,5).C(5,2).C(3,2).C(1,1) &= \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} \\ &= \frac{10!}{5!2!2!1!} \\ &= \frac{10.9.8.7.6}{2.2} \\ &= 7560 \end{aligned}$$

Generalisasi Kombinasi Generalisasi kombinasi merupakan perluasan dari kombinasi yang membolehkan pengulangan suatu unsur. Misalnya kita ingin memilih 4 kelereng dari sebuah kantong yang berisi paling sedikitnya 4 kelereng dari masing-masing warna yaitu merah, biru dan kuning. Kemungkinan terpilihnya 4 kelereng tersebut adalah 4 merah 3 merah, 1 biru 2 merah, 2 biru 1 merah, 3 biru 3 merah, 1 kuning 2 merah, 2 kuning 1 merah, 3 kuning 4 biru 3 biru, 1 kuning 2 biru, 2 kuning 1 biru, 3 kuning 4 kuning 2 merah, 1 biru, 1 kuning 1 merah, 2 biru, 1 kuning 1 merah, 1 biru, 2 kuning

3.5 Notations

Notation 3.1. Given an open subset G of \mathbb{R}^n , the set of functions φ are:

1. Bounded support G ;
2. Infinitely differentiable;

a vector space is denoted by $\mathcal{D}(G)$.

3.6 Remarks

This is an example of a remark.

R The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.7 Corollaries

This is an example of a corollary.

Corollary 3.7.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.8 Propositions

This is an example of propositions.

3.8.1 Several equations

Proposition 3.8.1 — Proposition name. It has the properties:

$$||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \quad (3.1)$$

$$||\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^n ||\mathbf{x}_i|| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \quad (3.2)$$

3.8.2 Single Line

Proposition 3.8.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathcal{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

3.9 Examples

This is an example of examples.

3.9.1 Equation and Text

■ **Example 3.1** Let $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$ and denoted by: $x^0 = (1, 1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \quad (3.3)$$

The function f has bounded support, we can take $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$ for all $\varepsilon \in]0; 5/2 - \sqrt{2}[$. ■

3.9.2 Paragraph of Text

■ **Example 3.2 — Example name.** Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. ■

3.10 Exercises

This is an example of an exercise.

Exercise 3.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds. ■

3.11 Problems

Problem 3.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

3.12 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.

Vocabulary 3.1 — Word. Definition of word.

Part Two

4	Statistika	89
4.1	A. Penyajian Data Dalam Bentuk Diagram	
4.2	B. Penyajian Data Dalam Bentuk Tabel distribusi Frekuensi	
4.3	Ukuran Pemusatan Data	
4.4	Mean	
4.5	Median	
4.6	Modus	
4.7	Ukuran Letak Data	
4.8	CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN	
5	Peluang kejadian majemuk	115
5.1	Kejadian Saling bebas	
5.2	Penjelasan Kejadian Saling bebas	
5.3	Contoh Soal	
5.4	Kejadian Saling bebas	
5.5	Contoh 1 Kejadian saling Bebas	
5.6	Contoh 2 Kejadian saling Bebas	
5.7	Contoh 3 Kejadian saling Bebas	
5.8	Contoh 4 Kejadian saling Bebas	
5.9	Contoh 5 Kejadian saling Bebas	
5.10	Contoh 6 Kejadian saling Bebas	
5.11	Contoh 7 Kejadian saling Bebas	
5.12	Contoh 8 Kejadian saling Bebas	
5.13	Contoh 9 Kejadian saling Bebas	
5.14	Contoh 10 Kejadian saling Bebas	
5.15	Contoh 11 Kejadian saling Bebas	
5.16	Contoh 11 Kejadian saling Bebas	
5.17	Contoh 12 Kejadian saling Bebas	
5.18	Contoh 13 Kejadian saling Bebas	
5.19	Contoh 14 Kejadian saling Bebas	
5.20	Contoh 15 Kejadian saling Bebas	
5.21	Contoh 16 Kejadian saling Bebas	
5.22	Contoh 17 Kejadian saling Bebas	
	Bibliography	123
	Books	
	Articles	

4. Statistika

4.1 A. Penyajian Data Dalam Bentuk Diagram

Statistika adalah cabang dari matematika terapan yang mempunyai cara-cara, maksudnya mengkaji/membahas, mengumpulkan, dan menyusun data, mengolah dan menganalisis data, serta menyajikan data dalam bentuk kurva atau diagram, menarik kesimpulan, menasirkan parameter, dan menguji hipotesa yang didasarkan pada hasil pengolahan data. Contoh : statistik jumlah lulusan siswa SMA dari tahun ke tahun, statistic jumlah kendaraan yang melewati suau jalan, statistic perdagangan antara Negara-negara di Asia, dan sebagainya.

1. Diagram Garis

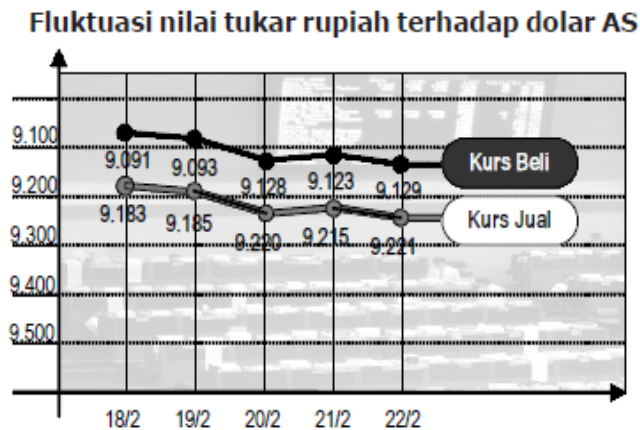
Penyajian data statistik dengan menggunakan diagram berbentuk garis lurus disebut diagram garis lurus atau diagram garis. Diagram garis biasanya digunakan untuk menyajikan data statistic yang diperoleh berdasarkan pengamatan dari waktu ke waktu sevara berurutan. Sumbu X menunjukkan waktu-waktu pengamatan, sedangkan sumbu Y menunjukkan nilai data pengamatan untuk suatu waktu tertentu. Kumpulan waktu dan pengamatan membentuk titik-titik pada bidang XY, selanjutnya kolom dari tiap dua titik yang berdekatan tadi dihubungkan dengan garis lurus sehingga akan diperoleh diagram garis atau grafik garis. Diagram ini biasanya digunakan untuk menggambarkan suatu kondisi yang berlangsung secara kontinu, misalnya perkembangan nilai tukar mata uang suatu Negara terhadap nilai tukar Negara lain, jumlah penjualan setiap waktu tertentu, dan jumlah penduduk suatu daerah setiap periode tertentu. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal 1

Fluktuasi nilai tukar rupiah terhadap doal AS dari tanggal 18 Februari 2008 sampai dengan tanggal 22 Februari 2008 ditunjukkan oleh tabel berikut.

Tanggal	18/2	19/2	20/2	21/2	22/2
Kurs Beli	Rp. 9.091	Rp. 9.093	Rp. 9.128	Rp. 9.123	Rp. 9.129
Kurs Jual	Rp. 9.181	Rp. 9.185	Rp. 9.220	Rp. 9.215	Rp. 9.221

Nyatakan data di atas dalam bentuk diagram garis. Penyelesaian Jika digambar dengan menggunakan diagram garis adalah sebagai berikut.



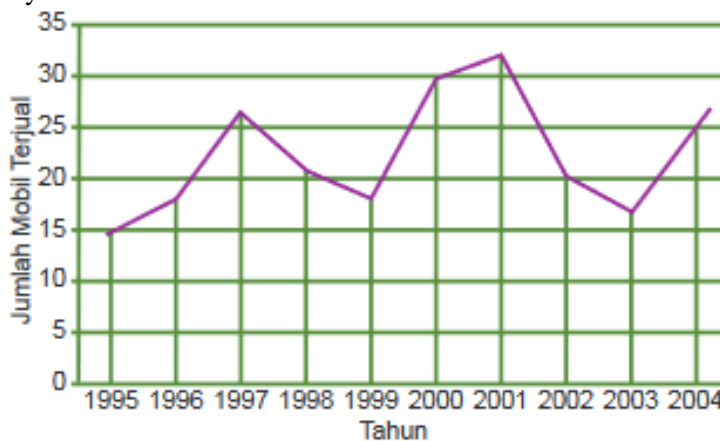
Contoh Soal 2

Sebuah dealer mobil sejak tahun 1995 hingga akhir tahun 2004 selalu mencatat jumlah mobil yang terjual setiap tahun sebagai berikut.

Tahun	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Jumlah Mobil yang Terjual	15	18	27	21	18	30	32	20	17	25

Buatlah diagram garis untuk data tersebut.

Penyelesaian



Dari diagram tersebut, tampak penjualan mobil terbanyak pada tahun 2001. Dari tahun 1995-1997, penjualan mobil cenderung mengalami kenaikan dan tahun 1998-1999 cenderung mengalami penurunan.

Contoh Soal 3

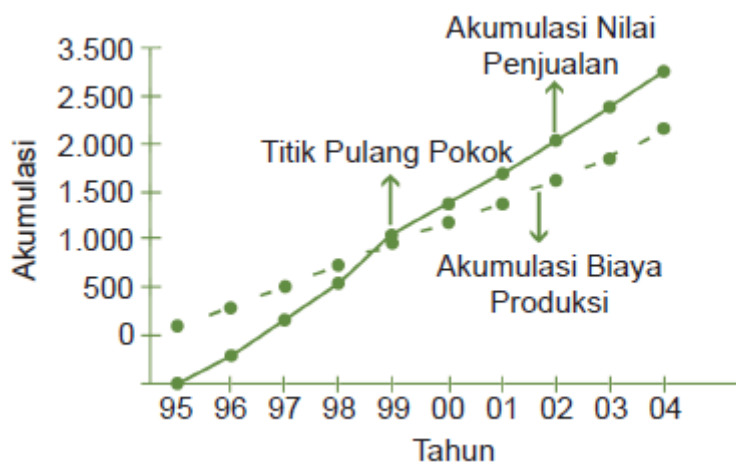
Sebuah perusahaan yang memproduksi barang elektronik mencatat akumulasi biaya produksi tahunan dan akumulasi nilai penjualan selama sepuluh tahun dari tahun 1995 sampai dengan 2004 sebagai berikut (dalam jutaan rupiah)

Tahun	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Biaya Produksi per/tahun	600	200	200	220	230	210	200	240	240	300
Akumulasi Biaya Produksi	600	800	1.000	1.220	1.450	1.660	1.860	2.100	2.340	2.640
Nilai Penjualan per Tahun	0	280	370	400	510	300	300	360	340	400
Akumulasi Nilai Penjualan	0	280	650	1.050	1.560	1.860	2.160	2.520	2.860	3.260

Buatlah diagram garis untuk data tersebut

Penyelesaian

Diagram garis untuk akumulasi biaya produksi dan akumulasi nilai penjualan adalah sebagai berikut.



Dari gambar di atas Anda dapat mengetahui bahwa perusahaan mulai memperoleh laba (keuntungan) di antara tahun 1999 dan 2000, yaitu pada saat kedua garis berpotongan. Titik potong kedua garis tersebut disebut titik pulang pokok (break event point).

Diagram garis biasanya digunakan untuk menaksir atau memperkirakan data berdasarkan pola-pola yang telah diperoleh. Diagram pada Gambar 1.2 merupakan diagram garis tunggal. Adapun diagram pada Gambar 1.3 disebut diagram garis majemuk, dikatakan majemuk karena dalam satu gambar terdapat lebih dari satu garis. Diagram garis majemuk biasanya digunakan untuk membandingkan dua keadaan atau lebih yang mempunyai hubungan, misalnya diagram dua garis yang melukiskan akumulasi biaya produksi dan akumulasi nilai penjualan setiap tahun selama sepuluh tahun.

2. Diagram Lingkaran

Diagram lingkaran adalah penyajian data statistik dengan menggunakan gambar yang berbentuk lingkaran. Bagian-bagian dari daerah lingkaran menunjukkan bagian-bagian atau persen dari keseluruhan. Untuk membuat diagram lingkaran, terlebih dahulu ditentukan besarnya presentase tiap objek terhadap keseluruhan data dan besarnya sudut pusat sektor lingkaran. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh soal 1

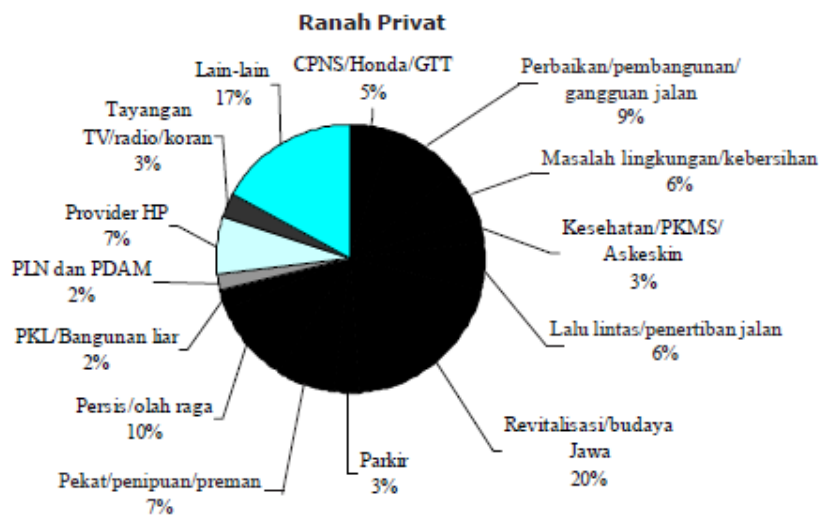
Ranah privat (pengaduan) dari koran Solo Pos pada tanggal 22 Februari 2008 ditunjukkan seperti pada tabel berikut.

No	Ranah Privat	Persentase
1.	CPNS/Honda/GTT	5 %
2.	Perbaikan/pembangunan/gangguan jalan	9 %
3.	Masalah lingkungan/ kebersihan	6 %
4.	Kesehatan/PKMS/Askeskin	3 %
5.	Lalu lintas/penertiban jalan	6 %
6.	Revitalisasi/budaya Jawa	20 %
7.	Parkir	3 %
8.	Pekat/penipuan/preman	7 %
9.	Persis/olahraga	10 %
10.	PKL/bangunan liar	2 %
11.	PLN dan PDAM	2 %
12.	Provider HP	7 %
13.	Tayangan TV/radio/koran	3 %
14.	Lain-lain	17 %
Jumlah		100 %

Nyatakan data di atas dalam bentuk diagram lingkaran. Penyelesaian Sebelum data pada tabel di atas disajikan dengan diagram lingkaran, terlebih dahulu ditentukan besarnya sudut dalam lingkaran dari data tersebut.

1. $CPNS/Honda/GTT = \frac{5}{100} \times 360^\circ = 18^\circ$
2. $Perbaikan/pembangunan/gangguan jalan = \frac{9}{100} \times 360^\circ = 32,4^\circ$
3. $Masalah lingkungan/kebersihan = \frac{6}{100} \times 360^\circ = 21,6^\circ$
4. $Kesehatan/PKMS/Askeskin = \frac{3}{100} \times 360^\circ = 10,8^\circ$
5. $Lalu lintas /penertiban jalan = \frac{6}{100} \times 360^\circ = 21,6^\circ$
6. $Revitalisasi/budaya Jawa = \frac{20}{100} \times 360^\circ = 72^\circ$
7. $Parkir = \frac{3}{100} \times 360^\circ = 10,8^\circ$
8. $Pekat/penipuan/preman = \frac{7}{100} \times 360^\circ = 25,2^\circ$
9. $Persis/olahraga = \frac{10}{100} \times 360^\circ = 36^\circ$
10. $PKL/Bangunan liar = \frac{2}{100} \times 360^\circ = 7,2^\circ$
11. $PLN dan PDAM = \frac{2}{100} \times 360^\circ = 7,2^\circ$
12. $Provider HP = \frac{7}{100} \times 360^\circ = 25,2^\circ$
13. $Tayangan TV/radio/Koran = \frac{3}{100} \times 360^\circ = 10,8^\circ$
14. $Lain-lain = \frac{17}{100} \times 360^\circ = 61,2^\circ$

Diagram lingkarannya adalah sebagai berikut.



Contoh soal 2

Berikut ini adalah data penjualan 6 jenis mobil dari suatu perusahaan pada kurun waktu 2002-2007.

Jenis Mobil	I	II	III	IV	V	VI
Penjualan	18	26	15	36	50	8

Buatlah diagram lingkaran dari data di atas.

Penyelesaian

Untuk dapat menggambarkan diagram lingkaran, terlebih dahulu tentukan besar sudut masing-masing juring yang mewakili masing-masing jenis mobil (Jumlah penjualan $18 + 26 + 15 + 36 + 50 + 8 = 153$)

$$\text{Mobil jenis I} : \frac{18}{153} \times 360^\circ = 42,35^\circ$$

$$\text{Mobil jenis II} : \frac{26}{153} \times 360^\circ = 61,18^\circ$$

$$\text{Mobil jenis III} : \frac{15}{153} \times 360^\circ = 35,29^\circ$$

$$\text{Mobil jenis IV} : \frac{36}{153} \times 360^\circ = 84,70^\circ$$

$$\text{Mobil jenis V} : \frac{50}{153} \times 360^\circ = 117,65^\circ$$

$$\text{Mobil jenis VI} : \frac{8}{153} \times 360^\circ = 18,82^\circ$$

Setelah menemukan besar sudut dari masing-masing jenis mobil yang terjual, kalian dapat menggambarannya dalam lingkaran. Kalian juga dapat menyatakan diagram lingkaran tersebut dalam bentuk persentase. Untuk menentukan persentase mobil jenis I, caranya adalah

$$\frac{\text{Jumlah penjualan mobil jenis I}}{\text{Jumlah penjualan seluruh mobil}} \times 100 \%$$

Jadi, persentase mobil jenis I adalah :

$$\frac{18}{153} \times 100 \% = 11,77\%$$

Mobil jenis II : 16,99%

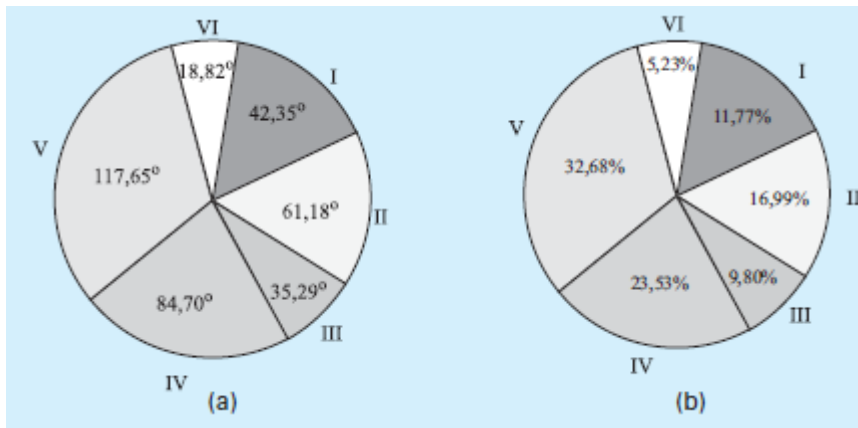
Mobil jenis III : 9,80%

Mobil jenis IV : 23,53%

Mobil jenis V : 32,68%

Mobil jenis VI : 5,23%

Diagram lingkarannya seperti pada gambar dibawah ini (b)



3. Diagram Batang

Diagram batang umumnya digunakan untuk menggambarkan perkembangan nilai suatu objek penelitian dalam kurun waktu tertentu. Diagram batang menunjukkan keterangan-keterangan dengan batang-batang tegak atau mendatar dan sama lebar dengan batang-batang terpisah. Perhatikan contoh berikut .

Contoh soal 1

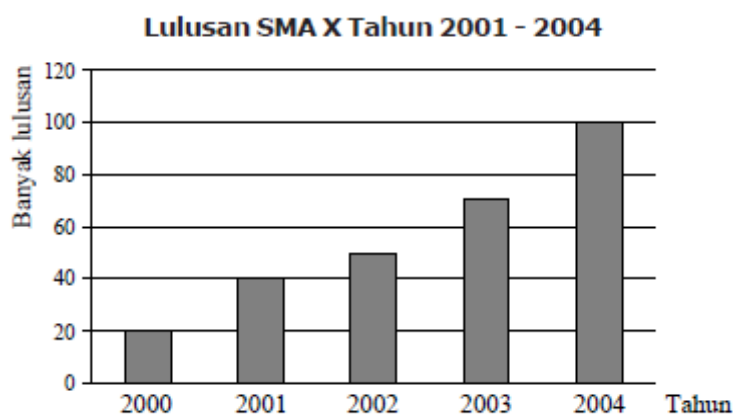
Jumlah lulusan SMA X di suatu daerah dari tahun 2001 sampai tahun 2005 adalah sebagai berikut.

Tahun	Jumlah
2000	20
2001	40
2002	50
2003	70
2004	100

Nyatakan data di atas dalam bentuk diagram batang.

Penyelesaian

Data tersebut dapat disajikan dengan diagram batang sebagai berikut.



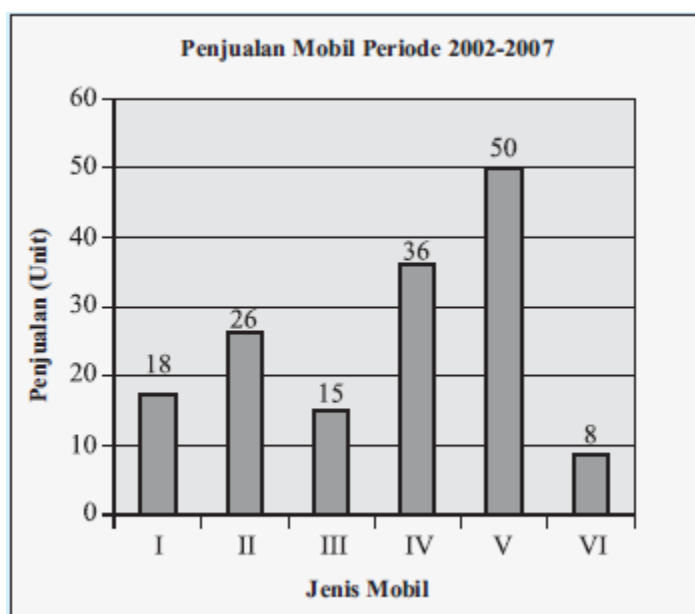
Contoh soal 2

Buatlah diagram batang dari contoh penjualan 6 jenis mobil pada contoh di depan.

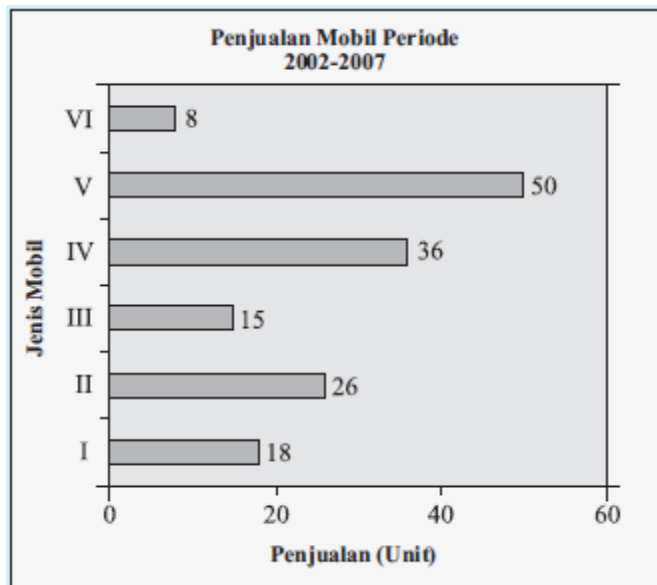
Jenis Mobil	I	II	III	IV	V	VI
Penjualan	18	26	15	36	50	8

Penyelesaian

Data penjualan jenis mobil di atas dapat disajikan kembali pada tabel berikut



Dari data ini, diagram batangnya dapat ditampilkan sebagai berikut. Diagram batang di atas dinamakan diagram batang tegak atau vertical. Jika digambarkan dengan diagram batang mendatar atau horizontal, gambarnya adalah sebagai berikut.



Dua buah data atau lebih juga dapat ditampilkan dalam satu diagram batang. Perhatikan contoh berikut.

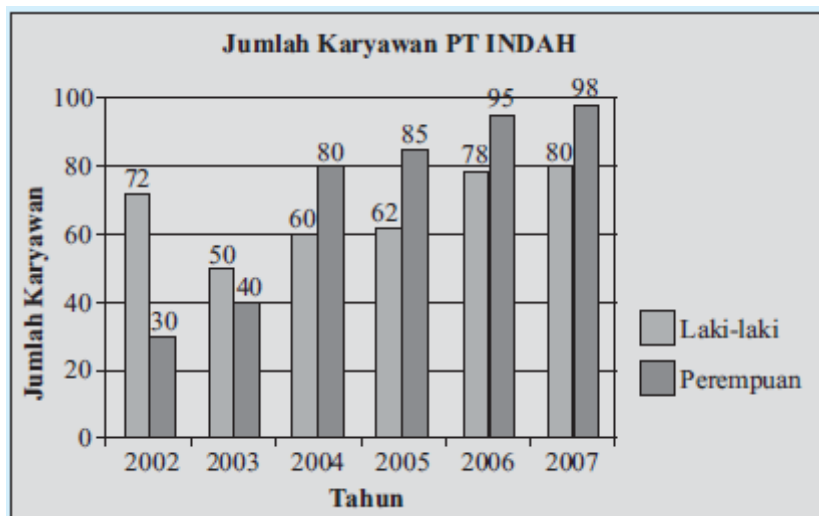
Contoh Soal 4

Buatlah suatu diagram batang yang mewakili data tentang jumlah karyawan PT Lestari dalam tahun-tahun berikut.

Jenis Kelamin	Tahun					
	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Laki-laki	72	50	60	62	78	80
Perempuan	30	40	80	85	95	98

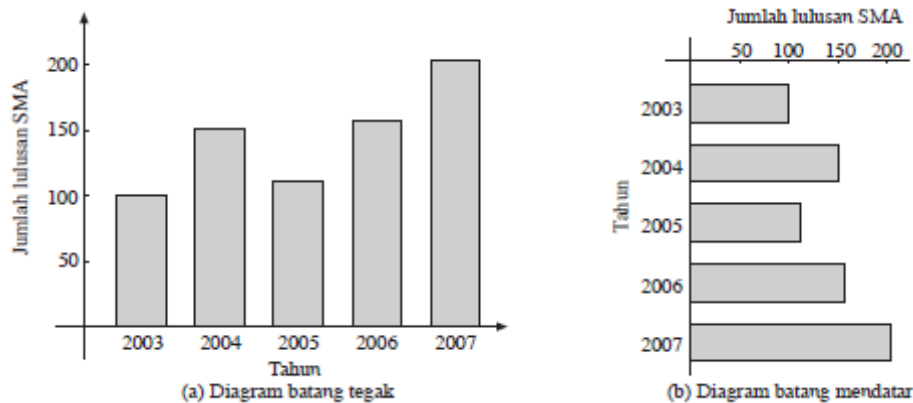
Penyelesaian :

Jumlah karyawan laki-laki dan perempuan pada tahun yang sama digambarkan sebagai dua batang yang didekatkan. Hasilnya tampak seperti pada gambar berikut.



Contoh soal 5

Banyaknya lulusan SMA di sebuah kelurahan selama lima tahun terakhir tercatat sebagai berikut. Tahun 2003 : 100 orang Tahun 2004 : 150 orang Tahun 2005 : 120 orang Tahun 2006 : 160 orang Tahun 2007 : 200 orang Sajikan data tersebut ke dalam diagram batang.



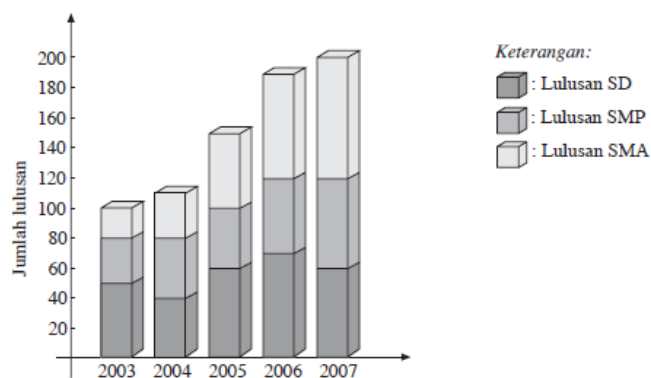
Pada gambar diagram diatas menggunakan batang tunggal, yaitu setiap batang berdiri sendiri. Di samping diagram batang jenis tersebut, dapat dijumpai beberapa jenis diagram batang lainnya, antara lain sebagai berikut.

a. Diagram Batang Bersusun

Pada diagram batang ini, setiap barang terdiri atas beberapa batang yang disusun secara bertingkat, dari tingkatan yang paling bawah hingga ke tingkatan yang paling atas. Misalnya, tabel berikut ini menggambarkan jumlah lulusan SD, SMP, dan SMA di sebuah kelurahan.

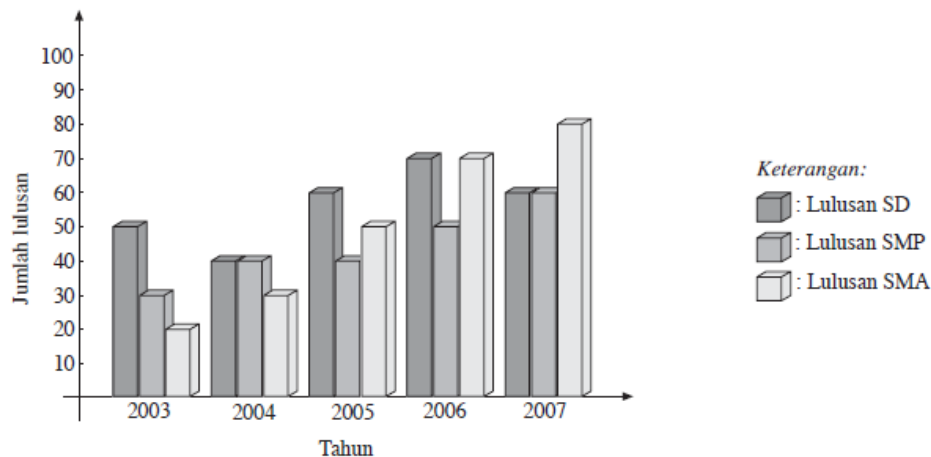
Lulusan	Tahun				
	2003	2004	2005	2006	2007
SD	50	40	60	70	60
SMP	30	40	40	50	60
SMA	20	30	50	70	80

Dari tabel di atas dapat dibuat diagram batang seperti berikut (batang-batang digambarkan dalam tiga dimensi sehingga berbentuk balok-balok)



b. Diagram Batang Komparatif

Diagram batang jenis ini disebut diagram batang komparatif (komparatif dari kata komparasi yang artinya perbandingan) karena beberapa batang pada kelompok yang sama digambarkan pada satu kelompok sehingga terlihat jelas perbandingan masing-masing batang pada satu kelompok itu. Diagram batang komparatif disebut juga diagram batang majemuk. Misalnya, dari data jumlah lulusan SD, SMP, dan SMA pada tabel diatas, dapat dibuat diagram batang komparatif sebagai berikut.



4.2 B. Penyajian Data Dalam Bentuk Tabel distribusi Frekuensi

Selain dalam bentuk diagram, penyajian data juga dengan menggunakan tabel distribusi frekuensi. Berikut ini akan dipelajari lebih jelas mengenai tabel distribusi frekuensi tersebut.

1. Distribusi Frekuensi Tunggal Data tunggal seringkali dinyatakan dalam bentuk daftar bilangan, namun kadangkala dinyatakan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi. Tabel distribusi frekuensi tunggal merupakan cara untuk menyusun data yang relatif sedikit. Perhatikan contoh data berikut.
5, 4, 6, 7, 8, 8, 6, 4, 8, 6, 4, 6, 6, 7, 5, 5, 3, 4, 6, 6, 8, 7, 8, 7, 5, 4, 9, 10, 5, 6, 7, 6, 4, 5, 7, 7, 4, 8, 7, 6

Dari data di atas tidak tampak adanya pola yang tertentu maka agar mudah dianalisis data tersebut disajikan dalam tabel seperti di bawah ini

Nilai	Tally (Turus)	Frekuensi
3		1
4		7
5		6
6		10
7		8
8		6
9		1
10		1

Daftar di atas sering disebut sebagai distribusi frekuensi dan karena datanya tunggal maka disebut distribusi frekuensi tunggal.

Contoh Soal

Seorang peneliti mengadakan penelitian tentang berat badan dari 35 orang.

Data hasil penelitian itu (dalam kg) diberikan berikut ini:

48 32 46 27 43 46 25 41 40 58 16 36

21 42 47 55 60 58 46 44 63 66 28 56

50 21 56 55 25 74 43 37 51 53 39

Sajikan data tersebut ke dalam tabel distribusi frekuensi.

1. Jangkauan (J) = $X_m - X_n = 74 - 16 = 58$.
2. Banyak kelas (K) = $1 + 3,3 \log n = 1 + 3,3 \log 35 = 6,095$. Banyak kelas dibulatkan menjadi "6".
3. Panjang interval kelas (I) adalah $I = J/K = 58/6 = 9,67$. Panjang interval kelas dibulatkan menjadi "10".

Dengan panjang interval kelas = 10 dan banyak kelas = 6, diperoleh tabel distribusi frekuensi seperti pada Tabel 4. atau Tabel 5

Cara I: Batas bawah kelas pertama diambil datum terkecil. Amati Tabel 4. Dari tabel tersebut tampak bahwa frekuensi paling banyak dalam interval 46–55. Artinya, berat badan kebanyakan berkisar antara 46 kg dan 55 kg.

Tabel 4. Tabel distribusi frekuensi

Interval Kelas	Turus	Frekuensi
16–25	E	5
26–35	C	3
36–45	ED	9
46–55	EE	10
56–65	EA	6
66–75	B	2
	Jumlah	35

Cara II: Batas atas kelas terakhir diambil datum terbesar. Amati Tabel 5.

Tabel 5. Tabel distribusi frekuensi

Interval Kelas	Turus	Frekuensi
15–24	C	3
25–34	E	5
35–44	ED	9
45–54	EC	8
55–64	EC	8
65–74	B	2
	Jumlah	35

Dari tabel tampak frekuensi paling sedikit dalam interval 65–74. Artinya, berat badan antara 65 kg dan 74 kg ada 2 orang. Perhatikan interval kelas yang pertama, yaitu 15–24. 15 disebut batas bawah dan 24 disebut batas atas. Ukuran 15–24 adalah hasil pembulatan, ukuran yang sebenarnya terletak pada 14,5–24,5. 14,5 disebut tepi bawah kelas (batas bawah nyata) dan 24,5 disebut tepi atas kelas (batas atas nyata) pada interval kelas 15–24.

Dalam menentukan tepi bawah kelas dan tepi atas kelas pada setiap interval kelas, harus diketahui satuan yang dipakai. Dengan demikian, untuk tepi bawah kelas adalah batas bawah kelas dikurangi 1/2 satuan ukuran. Jadi, tepi kelas dari interval kelas 15–24 menjadi 14,5–24,5.

2. Distribusi Frekuensi Bergolong

Tabel distribusi frekuensi bergolong biasa digunakan untuk menyusun data yang memiliki kuantitas yang besar dengan mengelompokkan ke dalam interval-interval kelas yang sama panjang. Perhatikan contoh data hasil nilai pengerjaan tugas Matematika dari 40 siswa kelas XI berikut ini.

66 75 74 72 79 78 75 75 79 71

75 76 74 73 71 72 74 74 71 70

74 77 73 73 70 74 72 72 80 70

73 67 72 72 75 74 74 68 69 80

Apabila data di atas dibuat dengan menggunakan tabel distribusi frekuensi tunggal, maka

penyelesaiannya akan panjang sekali. Oleh karena itu dibuat tabel distribusi frekuensi bergolong dengan langkah-langkah sebagai berikut. a. Mengelompokkan ke dalam interval-interval kelas yang sama panjang, misalnya 65 – 67, 68 – 70, ... , 80 – 82. Data 66 masuk dalam kelompok 65 – 67. b. Membuat turus (tally), untuk menentukan sebuah nilai termasuk ke dalam kelas yang mana. c. Menghitung banyaknya turus pada setiap kelas, kemudian menuliskan banyaknya turus pada setiap kelas sebagai frekuensi data kelas tersebut. Tulis dalam kolom frekuensi. d. Ketiga langkah di atas direpresentasikan pada tabel berikut ini.

Hasil Tugas	Titik Tengah	Turus	Frekuensi
65 – 67	66	II	2
68 – 70	69	III	5
71 – 73	72	IIIIIIIIII	13
74 – 76	75	IIIIIIIIII	14
77 – 79	78	IIII	4
80 – 82	81	II	2
		Jumlah	40

Istilah-istilah yang banyak digunakan dalam pembahasan distribusi frekuensi bergolong atau distribusi frekuensi berkelompok antara lain sebagai berikut.

a. Interval Kelas

Tiap-tiap kelompok disebut interval kelas atau sering disebut interval atau kelas saja. Dalam contoh sebelumnya memuat enam interval ini.

65 – 67 Interval kelas pertama

68 – 70 Interval kelas kedua

71 – 73 Interval kelas ketiga

74 – 76 Interval kelas keempat

77 – 79 Interval kelas kelima

80 – 82 Interval kelas keenam

b. Batas Kelas

Berdasarkan tabel distribusi frekuensi di atas, angka 65, 68, 71, 74, 77, dan 80 merupakan batas bawah dari tiap-tiap kelas, sedangkan angka 67, 70, 73, 76, 79, dan 82 merupakan batas atas dari tiap-tiap kelas.

c. Tepi Kelas (Batas Nyata Kelas)

Untuk mencari tepi kelas dapat dipakai rumus berikut ini.

$$\begin{aligned}\text{Tepi bawah} &= \text{batas bawah} - 0,5 \\ \text{Tepi atas} &= \text{batas atas} + 0,5\end{aligned}$$

Dari tabel di atas maka tepi bawah kelas pertama 64,5 dan tepi atasnya 67,5, tepi bawah kelas kedua 67,5 dan tepi atasnya 70,5 dan seterusnya.

d. Lebar kelas Untuk mencari lebar kelas dapat dipakai rumus:

Untuk mencari lebar kelas dapat dipakai rumus:

Lebar kelas = tepi atas – tepi bawah

Jadi, lebar kelas dari tabel diatas adalah $67,5 - 64,5 = 3$.

e. Titik Tengah Untuk mencari titik tengah dapat dipakai rumus:

$$\text{Titik tengah} = \frac{1}{2} (\text{batas atas} + \text{batas bawah})$$

Dari tabel di atas: titik tengah kelas pertama = $0.5 (67 + 65) = 66$

titik tengah kedua = $0.5 (70 + 68) = 69$ dan seterusnya.

3. Distribusi Frekuensi Kumulatif

Daftar distribusi kumulatif ada dua macam, yaitu sebagai berikut.

a. Daftar distribusi kumulatif kurang dari (menggunakan tepi atas).

b. Daftar distribusi kumulatif lebih dari (menggunakan tepi bawah).
Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh data berikut ini.

Data	Frekuensi	Tepi Bawah	Tepi Atas
41 – 45	3	40,5	45,5
46 – 50	6	45,5	50,5
51 – 55	10	50,5	55,5
56 – 60	12	55,5	60,5
61 – 65	5	60,5	65,5
66 – 70	4	65,5	70,5

Dari tabel di atas dapat dibuat daftar frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari seperti berikut:

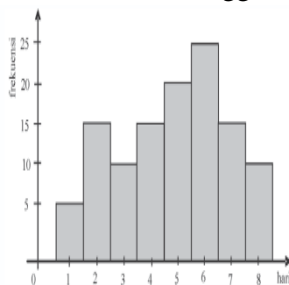
Data	Frekuensi Kumulatif Kurang Dari	Data	Frekuensi Kumulatif Lebih Dari
$\leq 45,5$	3	$\geq 40,5$	40
$\leq 50,5$	9	$\geq 45,5$	37
$\leq 55,5$	19	$\geq 50,5$	31
$\leq 60,5$	31	$\geq 55,5$	21
$\leq 65,5$	36	$\geq 60,5$	9
$\leq 70,5$	40	$\geq 65,5$	4

4. Histogram

Dari suatu data yang diperoleh dapat disusun dalam tabel distribusi frekuensi dan disajikan dalam bentuk diagram yang disebut histogram. Jika pada diagram batang, gambar batang-batanganya terpisah maka pada histogram gambar batang-batanganya berimpit. Histogram dapat disajikan dari distribusi frekuensi tunggal maupun distribusi frekuensi bergolong. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini. Data banyaknya siswa kelas XI IPA yang tidak masuk sekolah dalam 8 hari berurutan sebagai berikut:

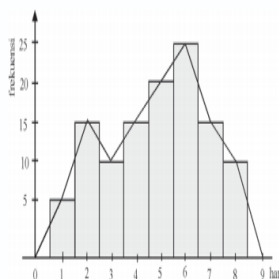
Hari	1	2	3	4	5	6	7	8
Banyaknya siswa absen	5	15	10	15	20	25	15	10

Berdasarkan data diatas dapat dibentuk histogramnya seperti berikut dengan membuat tabel distribusi frekuensi tunggal terlebih dahulu



5. Poligon Frekuensi

Apabila pada titik-titik tengah dari histogram dihubungkan dengan garis dan batangbatangnya dihapus, maka akan diperoleh poligon frekuensi. Berdasarkan contoh di atas dapat dibuat poligon frekuensinya seperti gambar berikut ini.



Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh soal berikut ini.

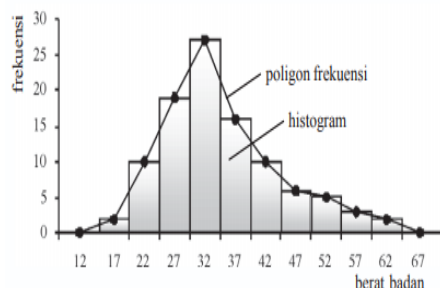
Contoh soal

Hasil pengukuran berat badan terhadap 100 siswa SMP X digambarkan dalam distribusi bergolong seperti di bawah ini. Sajikan data tersebut dalam histogram dan poligon frekuensi.

Berat Badan (kg)	Titik Tengah	Frekuensi
15 – 19	17	2
20 – 24	22	10
25 – 29	27	19
30 – 34	32	27
35 – 39	37	16
40 – 44	42	10
45 – 49	47	6
50 – 54	52	5
55 – 59	57	3
60 – 64	62	2
		100

Penyelesaian

Histogram dan poligon frekuensi dari tabel di atas dapat ditunjukkan sebagai berikut



6. Poligon Frekuensi Kumulatif

Dari distribusi frekuensi kumulatif dapat dibuat grafik garis yang disebut poligon frekuensi kumulatif. Jika poligon frekuensi kumulatif dihaluskan, diperoleh kurva yang disebut kurva ogive. Untuk lebih jelasnya, perhatikan

contoh soal berikut ini.

Hasil Ulangan	Frekuensi
65 – 67	2
68 – 70	5
71 – 73	13
74 – 76	14
77 – 79	4
80 – 82	2
	40

Hasil tes ulangan Matematika terhadap 40 siswa kelas XI IPA digambarkan dalam tabel di samping.

- Buatlah daftar frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari.
- Gambarlah ogive naik dan ogive turun

Penyelesaian

- Daftar frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari adalah sebagai berikut.

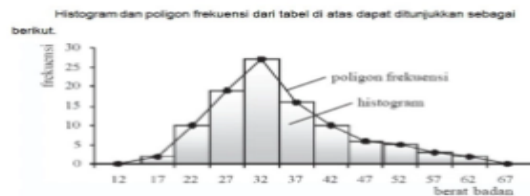
Data	Frekuensi Kumulatif Kurang Dari	Data	Frekuensi Kumulatif Lebih Dari
$\leq 67,5$	2	$\geq 64,5$	40
$\leq 70,5$	7	$\geq 67,5$	38
$\leq 73,5$	20	$\geq 70,5$	33
$\leq 76,5$	34	$\geq 73,5$	20
$\leq 79,5$	38	$\geq 76,5$	6
$\leq 82,5$	40	$\geq 79,5$	2

Contoh soal 2

Hasil pengukuran berat badan terhadap 100 siswa SMP X digambarkan dalam distribusi bergolong seperti di bawah ini. Sajikan data tersebut dalam histogram dan poligon frekuensi.

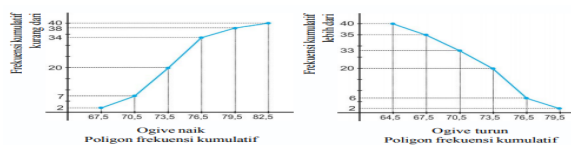
Berat Badan (kg)	Titik Tengah	Frekuensi
15 – 19	17	2
20 – 24	22	10
25 – 29	27	19
30 – 34	32	27
35 – 39	37	16
40 – 44	42	10
45 – 49	47	6
50 – 54	52	5
55 – 59	57	3
60 – 64	62	2
		100

Penyelesaian



b. Ogive naik dan ogive turun

Daftar frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari dapat disajikan dalam bidang Cartesius. Tepi atas (67,5; 70,5; ...; 82,5) atau tepi bawah (64,5; 67,5; ...; 79,5) diletakkan pada sumbu X sedangkan frekuensi kumulatif kurang dari atau frekuensi kumulatif lebih dari diletakkan pada sumbu Y. Apabila titik-titik yang diperlukan dihubungkan, maka terbentuk kurva yang disebut ogive. Ada dua macam ogive, yaitu ogive naik dan ogive turun. Ogive naik apabila grafik disusun berdasarkan distribusi frekuensi kumulatif kurang dari. Sedangkan ogive turun apabila berdasarkan distribusi frekuensi kumulatif lebih dari. Ogive naik dan ogive turun data di atas adalah sebagai berikut:



4.3 Ukuran Pemusatan Data

Ukuran pemusatan data disebut juga sembarang ukuran yang menunjukkan pusat sekumpulan data, yang telah diurutkan dari angka yang terkecil sampai terbesar atau sebaliknya dari angka yang terbesar sampai terkecil. Beberapa fungsi dari ukuran pemusatan data adalah untuk membandingkan dua data atau contoh, karena sangat sulit untuk membandingkan banyaknya anggota dari masing-masing anggota populasi atau banyaknya anggota data contoh. Nilai ukuran pemusatan ini dibuat sehingga dapat mewakili seluruh nilai pada data yang bersangkutan.

Ukuran pemusatan yang sering digunakan adalah mean, modus, dan median. Nilai tengah (mean) akan sangat dipengaruhi nilai banyaknya data. Median yang sangat beragam sulit dalam penggunaan parameter populasi. Dan modus hanya digunakan untuk data ukuran yang besar.

Salah satu ukuran yang paling penting untuk menggambarkan suatu distribusi data adalah nilai pusat data pengamat. Setiap pengukuran aritmatika yang ditujukan untuk menggambarkan suatu nilai yang mewakili nilai pusat atau nilai sentral dari suatu gugus data (himpunan pengamatan) dikenal sebagai ukuran tendensi sentral. Biasanya Ukuran pemusatan data sering kali digunakan agar data yang diperoleh mudah untuk dipahami oleh siswa. Ukuran pemusatan data dibagi menjadi mean yang digunakan untuk mengetahui nilai rata rata pada setiap himpunan angka, median digunakan untuk mengetahui suatu nilai tengah suatu himpunan angka, dan modus adalah data yang sering muncul.

4.4 Mean

Mean yaitu suatu nilai rata rata dan di dapatkan dari sekumpulan data adalah jumlah seluruh data dibagi banyaknya data. Dengan mengetahui mean suatu data, maka variasi data yang lain akan mudah diperkirakan. atau juga dapat disebut suatu metode yang sering digunakan untuk menggambarkan ukuran suatu data. Mean dapat dihitung dengan menjumlahkan seluruh nilai data pengukuran dan dibagi dengan banyaknya data yang digunakan. Definisi tersebut di nyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

Theorem 4.4.1 — Mean. rumus mencari nilai rata-rata:

$$\text{Sampel} \quad (4.1)$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (4.2)$$

$$\text{Populasi} \quad (4.3)$$

$$\bar{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (4.4)$$

Keterangan

Σ = lambang penjumlahan semua gugus data pengamatan

n = banyaknya sampel data

N = banyaknya data populasi

\bar{x} = nilai rata-rata sampel

μ = nilai rata-rata populasi

4.4.1 Rata-Rata Hitung (Mean/Arhitmetic Mean)

Rata-rata merupakan nilai yang mewakili kumpul data yaitu nilai yang kurang dari nilai itu, nilai yang lebih dari nilai itu dan nilai itu sendiri. Contoh: - Ani cantik - Rina tidak cantik = Kesimpulannya rata-rata perempuan itu cantik - Dini sangat cantik Mean dari sekumpulan data adalah jumlah dari kumpulan bilangan dibagi banyak bilangan tersebut.

Untuk data tunggal seperti: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Maka:

Theorem 4.4.2 — Mean. rumus mencari nilai rata-rata:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (4.5)$$

Keterangan:

\bar{x} = Rataan Hitung

n = banyak data

x_i = data ke-i

Contoh = Tentukan rata-rata dari nilai siswa sebagai berikut: 70, 69, 45, 80 dan 56!

x_i menyatakan nilai ujian dan f_i menyatakan frekuensi untuk nilai x_i yang bersesuaian. Untuk mencari rata-rata tabel diatas, akan lebih mudah bila dibuat tabel penolong seperti berikut:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \sum x_i}{\sum x_i}$$

Dari tabel, dapat kita lihat $\sum f_i x_i = 1035$ dan $\sum f_i = 16$. Sehingga:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \sum x_i}{\sum x_i} = \frac{1035}{16} = 64,6$$

Rataan hitung nilai tersebut adalah 64,6.

Untuk data daftar distribusi frekuensi kelompok rumus yang digunakan sama dengan data daftar distribusi frekuensi tunggal yaitu $\bar{x} = \frac{\sum f_i \sum x_i}{\sum x_i}$. Hanya saja, karena ada pengelompokan kelas maka $\sum x_i$ yang dirumus merupakan titik tengah dari kelas tersebut. $\frac{\text{batas atas} + \text{batas bawah}}{2}$

x_i	f_i
70	5
69	6
45	3
80	1
56	1

Table 4.1: Data Frekuensi Tunggal

x_i	f_i	$f_i x_i$
70	5	350
69	6	414
45	3	135
80	1	80
56	1	56

Table 4.2: Table caption

Contoh:

Kelas	f_i	x_i	$f_i x_i$
31-40	1	35,5	35,5
41-50	2	45,5	91
51-60	5	55,5	277,5
61-70	15	65,6	982,5
71-80	25	75,5	1887,5
81-90	20	85,5	1710
91-100	18	95,5	1146
Jumlah	80	-	6130

Table 4.3: tabel nilai ujian 80 Mahasiswa (I)

Dari tabel, dapat kita lihat $\sum f_i x_i = 6130$ dan $\sum f_i = 80$. Sehingga:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6130}{80} = 76,62$$

Rataan hitung nilai ujiannya adalah 76,62.

Untuk mencari ratahan hitung data distribusi frekuensi kelompok dapat digunakan cara lainnya yaitu cara sandi atau cara singkat. Untuk memakai cara ini maka gunakan langkah-langkah berikut. Ambil salah satu titik tengah kelas, namakan x_0 . Untuk titik tengah x_0 diberi nilai sandi $c = 0$. Titik tengah yang nilainya kurang dari x_0 berturut-turut diberi harga-harga sandi $c = -1, c = -2, c = -3$, dan seterusnya. Titik tengah yang nilainya lebih dari x_0 berturut-turut diberi harga-harga sandi $c = +1, c = +2, c = +3$, dan seterusnya. p merupakan panjang kelas dimana setiap kelas memiliki panjang kelas yang sama. Gunakan rumus:

$$\bar{x} = x_0 + p \left(\frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} \right)$$

Contoh:

Dari tabel, dapat kita lihat $\sum f_i c_i = 9$ dan $\sum f_i = 80$. Panjang kelasnya adalah 10. Sehingga:

$$\bar{x} = x_0 + p \left(\frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} \right) = 75,5 + 10 \frac{9}{80} = 76,62$$

Kelas	f_i	x_i	c_i	$f_i c_i$
31-40	1	35,5	-4	-4
41-50	2	45,5	-3	-6
51-60	5	55,5	-2	-10
61-70	15	65,6	-1	-15
71-80	25	75,5	0	0
81-90	20	85,5	1	20
91-100	12	95,5	2	24
Jumlah	80	-	-	9

Table 4.4: tabel nilai ujian 80 Mahasiswa (II)

4.4.2 Rata-Rata Harmonik

Rata-rata harmonik merupakan kebalikan dari rata-rata hitung dengan bilangannya merupakan kebalikan dari kumpulan bilangan tersebut. Dalam seperangkat data $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ Maka rata-rata harmoniknya dirumuskan sebagai berikut:

Theorem 4.4.3 — Mean. rumus mencari nilai rata-rata:

$$H = \frac{n}{\sum(\frac{1}{x_i})} \quad (4.6)$$

Keterangan :

H = Rataan Harmonik

n = Banyak Data

x_i = data ke-i

Hitung rata-rata harmonik untuk kumpulan data: 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12! $H = \frac{n}{\sum(\frac{1}{x_i})}$ $H = \frac{7}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 5,87$ Untuk data dalam daftar distribusi frekuensi digunakan rumus:

Theorem 4.4.4 — Mean. rumus mencari nilai rata-rata:

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum(\frac{f_i}{x_i})} \quad (4.7)$$

Keterangan :

H = Rataan Harmonik

x_i = Titik Tengah Kelas

$f(i)$ = Frekuensi yang bersesuaian dengan x_i

Contoh:

Dari tabel, dapat kita lihat $\sum \frac{f_i}{x_i} = 1,0819$ dan $\sum f_i = 80$. Sehingga: $H = \frac{\sum f_i}{\sum(\frac{f_i}{x_i})} = \frac{80}{1,0819} = 73,91$

Rataan harmonik nilai ujiannya adalah 73,91.

Dari tabel nilai ujian 80 mahasiswa (I – IV), telah dihitung nilai rata-rata hitung, rata-rata ukur dan rata-rata harmoniknya yaitu:

$\bar{x} = 76,62$

G = 75,37

H = 73,94

Kelas	f_i	x_i	$\frac{f_i}{x_i}$
31-40	1	35,5	0,0282
41-50	2	45,5	0,044
51-60	5	55,5	0,0901
61-70	15	65,6	0,229
71-80	25	75,5	0,3311
81-90	20	85,5	0,2339
91-100	18	95,5	0,1256
Jumlah	80	-	1,0819

Table 4.5: tabel nilai ujian 80 Mahasiswa (III)

4.4.3 Rata-Rata Ukur(Geometric Mean)

Jika perbandingan tiap dua data berurutan tetap atau hampir tetap, untuk mencari rata-ratanya lebih baik dipakai rata-rata ukur daripada rata-rata hitung.

Untuk data $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ Maka :

Theorem 4.4.5 — Mean. Geometri ukur :

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (4.8)$$

Keterangan :

G = Rataan Ukur

n = Banyaknya Data

x_i = data ke -i

Hitunglah rata-rata ukur 3 buah data berikut: $x_1 = 2, x_2 = 4$ dan $x_3 = 8$! $G = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = 4$ Untuk bilangan-bilangan bernilai besar, lebih baik digunakan logaritma yang dirumuskan sebagai berikut : $\log G = \frac{\sum \log x_i}{n}$

Hitunglah rata-rata ukur 3 buah data berikut: $x_1 = 2, x_2 = 4$ dan $x_3 = 8$!

$$\log G = \frac{\log 2 + \log 4 + \log 8}{3}$$

$$\log G = \frac{0,301 + 0,6021 + 0,9031}{3}$$

$$\log G = 0,6021$$

$$\log G = \log 4$$

$$G = 4$$

Untuk data yang telah disusun dalam daftar distribusi frekuensi, digunakan rumus sebagai berikut:

Theorem 4.4.6 — Mean. Geometri ukur :

$$\log G = \frac{\sum f_i \log x_i}{\sum f_i} \quad (4.9)$$

Keterangan :

G = Rataan Ukur

x_i = Titik Tengah Kelas

f_i = frekuensi yang bersesuaian dengan x_i

Contoh :

Dari tabel, dapat kita lihat $\sum f_i \log x_i = 150,1782$ dan $\sum f_i = 80$. $\log G = \frac{\sum f_i \log x_i}{\sum f_i}$ $\log G = \frac{150,1782}{80} = 1,8772$ $G = 75,37$ Nilai ujian itu memiliki rata-rata ukur 75,37.

Kelas	f_i	x_i	$\log x_i$	$f_i \log x_i$
31-40	1	35,5	1,5502	1,5502
41-50	2	45,5	1,658	3,316
51-60	5	55,5	1,7443	8,7215
61-70	15	65,6	1,8162	27,243
71-80	25	75,5	1,8779	46,9475
81-90	20	85,5	1,932	38,64
91-100	12	95,5	1,98	23,76
Jumlah	80	-	-	150,1782

Table 4.6: tabel nilai ujian 80 mahasiswa (IV)

4.4.4 Distribusi frekuensi

Rata-rata yang dihitung berdasarkan data yang sudah ditata dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan dapat ditentukan dengan menggunakan formula / rumus rumus yang sama dengan formula untuk menghitung nilai rata-rata dari data yang sudah dikelompokkan atau data yang terdistribusi, dengan rumus sebagai berikut:

Theorem 4.4.7 — Mean. rumus mencari nilai distribusi frekuensi:

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \quad (4.10)$$

Keterangan

\sum = lambang penjumlahan semua gugus data

f_i = frekuensi data ke-i

\bar{x} = nilai rata-rata sampel

4.5 Median

Median merupakan nilai tengah dari sekumpulan data yang telah diurutkan dari angka terkecil sampai ke angka terbesar. Median ditentukan berdasarkan jumlah data, dengan jumlah data yang ganjil maka mediannya memiliki nilai tengah dari data yang telah diurutkan, dan dengan jumlah data genap maka mediannya adalah mean / rata-rata dari dua bilangan yang ditengah data yang sudah diurutkan

Theorem 4.5.1 — Median. rumus mencari nilai rata-rata:

$$\text{untuk ganjil} \quad (4.11)$$

$$Me = x_{\frac{1}{2}(n+1)} \quad (4.12)$$

$$\text{Untuk genap} \quad (4.13)$$

$$Me = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} \quad (4.14)$$

Keterangan

$x_{\frac{n}{2}}$ = data pada urutan ke- $\frac{n}{2}$ setelah diurutkan

Untuk mencari median pada daftar distribusi frekuensi kelompok maka lakukan langkah berikut: • Temukan letak kelas median dengan cara melihat kelas mana yang mencapai setengah dari jumlah frekuensi. • Hitung batas bawah kelas yang disimbolkan b • Hitung panjang kelas yang disimbolkan p • Tambahkan kolom tabel frekuensi kumulatif karena dalam rumus akan ada

frekuensi kumulatif sebelum kelas median yang disimbolkan f_k • Perhatikan frekuensi pada kelas median yang disimbolkan f_m • Rumus yang digunakan yaitu:

$$M_e = b + p \left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{f_m} \right)$$

Contoh:

Kelas	f_i	f_k
31-40	1	1
41-50	2	3
51-60	5	8
61-70	15	23
71-80	25	48
81-90	20	68
91-100	18	80
Jumlah	80	-

Table 4.7: tabel nilai ujian 80 Mahasiswa (I)

• Kelas median: 71 – 80 • $b = 70,5$ • $p = 10$ • $f_k = 23$ • $f_m = 25$

$$M_e = b + p \left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{f_m} \right) = 70,5 + 10 \left(\frac{40 - 23}{25} \right) = 77,3$$

Jadi, Mediannya adalah 77,3

4.6 Modus

Modus adalah data yang sering muncul atau data yang memiliki jumlah frekuensi paling banyak. Sebuah data dapat dikatakan tidak memiliki modus ketika seluruh data yang muncul memiliki frekuensi yang sama atau dapat disebut sebuah data memiliki modus lebih dari satu. Modus merupakan nilai yang paling banyak muncul dalam suatu kumpulan data atau bila dilihat dalam data berbentuk tabel modus merupakan nilai dengan frekuensi terbanyak dalam suatu data. Untuk data yang ditampilkan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi berkelompok, dapat digunakan menentukan letak modus dengan cara melihat kelas interval yang mempunyai frekuensi paling besar. Bila data mempunyai satu modus dapat disebut unimodal dan data yang memiliki dua modus disebut bimodal, sedangkan jika data mempunyai modus yang lebih dari dua disebut multimodal. Modus dapat dilambangkan dengan Mo

Theorem 4.6.1 — Modus. rumus mencari nilai rata-rata:

$$untuk\ ganjil \quad (4.15)$$

$$Mo = T_b + \left(\frac{s_1}{s_1 + s_2} \right) i \quad (4.16)$$

Keterangan

Mo = Modus

T_b = Tepi bawah dari kelas modus

s_1 = Selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sebelum kelas modus

s_2 = Selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas sesudah kelas modus

i = panjang kelas interval

Berapakah modus dari data 12, 34, 14, 34, 28, 34, 34, 28, 14 !

Bila diubah dalam bentuk tabel maka:

Contoh :

Modus dari data tersebut adalah 34

x_i	f_i
12	1
14	2
28	2
34	4

Table 4.8: Data Frekuensi Tunggal

Untuk menentukan modus dalam data yang sudah disusun dalam bentuk daftar distribusi frekuensi kelompok lakukan langkah-langkah berikut: • Tentukan kelas modus yakni kelas yang memiliki frekuensi terbesar dibandingkan kelas-kelas lainnya • Hitung panjang kelas yang disimbolkan p • Hitung batas bawah kelas yang disimbolkan b • Frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas dengan titik tengah yang kurang dari (sebelum) titik tengah kelas modus yang disimbolkan d1 • Frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas dengan titik tengah yang lebih dari (sesudah) titik tengah kelas modus yang disimbolkan d2 • Masukkan nilai yang telah dihitung kedalam rumus:

$$M_o = b + p\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)$$

Contoh:

Kelas	f_i	x_i
31-40	1	35,5
41-50	2	45,5
51-60	5	55,5
61-70	15	65,6
71-80	25	75,5
81-90	20	85,5
91-100	18	95,5
Jumlah	80	-

Table 4.9: tabel nilai ujian 80 Mahasiswa (I)

Kelas modus = 71 – 80 b = 70,5 p = 10 d1 = 25 – 15 = 10 d2 = 25 – 20 = 5

$$M_o = b + p\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)$$

$$M_o = 70,5 + 10\left(\frac{10}{10+5}\right) = 77,17$$

Modus dari tabel tersebut adalah 77,17.

4.7 Ukuran Letak Data

Ukuran letak data biasanya dinyatakan dalam bentuk fraktil. Fraktil merupakan nilai-nilai yang membagi seperangkat data yang telah terurut menjadi beberapa bagian yang sama

Ukuran letak data terdiri dari: • Kuartil • Desil • Persentil

1. Kuartil Jika sekumpulan data dibagi menjadi empat bagian yang sama banyak, sesudah disusun menurut urutan nilainya, maka bilangan pembagiannya disebut kuartil.

Dalam kuartil dikenal istilah kuartil pertama (Q1), kuartil kedua (Q2) / median, kuartil ketiga (Q3).

Untuk menentukan kuartil pada data tunggal, kita harus mempertimbangkan banyaknya data (n) terlebih dahulu. Penghitungan kuartil tergantung dari kondisi banyaknya data tersebut.

Cara menentukan kuartil sebagai berikut. Urutkan data dari yang terkecil sampai dengan yang terbesar. Tentukan Q2 atau median. Tentukan Q1 dengan membagi data di bawah Q2 menjadi dua

bagian yang sama besar. Tentukan Q3 dengan membagi data di atas Q2 menjadi dua bagian sama besar.

Untuk data tunggal dengan banyak data ganjil. Maka: - Urutkan data terlebih dahulu, kemudian cari letak kuartil dengan rumus $Q_i = \frac{i(n+1)}{4}$ - Barulah dapat ditentukan nilai kuartilnya

Contoh soal: Tentukan kuartil 1, 2 dan 3 dari data berikut: 350, 400, 450, 550, 600, 600, 600, 650, 700 dan 750! Penyelesaian:

$$Q_i = \frac{(10+1)}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Artinya Q_1 terletak diantara data kedua dan data ketiga. Dengan pendekatan datum interpolasi berikut. $Q_1 = x_2 + \frac{3}{4}(x_3 - x_2) = 400 + \frac{1}{4}(450 - 400) = 437,5$

$$Q_i = \frac{2(10+1)}{4} = 5\frac{1}{2}$$

Artinya Q_2 terletak diantara data kelima dan data keenam. Dengan pendekatan datum interpolasi berikut. $Q_2 = x_5 + \frac{1}{4}(x_6 - x_5) = 600 + \frac{1}{5}(600 - 600) = 600$

$$Q_i = \frac{3(10+1)}{4} = 8\frac{1}{4}$$

Artinya Q_3 terletak diantara data kedelapan dan data kesembilan. Dengan pendekatan datum interpolasi berikut. $Q_3 = x_8 + \frac{1}{4}(x_9 - x_8) = 650 + \frac{1}{4}(700 - 650) = 562,5$

Untuk data dalam daftar distribusi frekuensi kelompok, maka: • Temukan kelas kuartil dengan rumus: $Q_i = \frac{i(n+1)}{4}$ dengan $i = 1, 2, 3$ • Hitung batas bawah kelas yang disimbolkan b • Hitung panjang kelas yang disimbolkan p • Tambahkan kolom tabel frekuensi kumulatif karena dalam rumus akan ada frekuensi kumulatif sebelum kelas kuartil yang disimbolkan f_k • Perhatikan frekuensi pada kelas kuartil yang disimbolkan f_Q • Rumus yang digunakan yaitu:

$$Q_i = b + p\left(\frac{\frac{in}{4} - f_k}{f_Q}\right)$$

Contoh : Tentukan kuartil 3 dari data pada tabel berikut!

Nilai	f_i	f_k
31-40	1	1
41-50	2	3
51-60	5	8
61-70	15	23
71-80	25	48
81-90	20	68
91-100	12	80
Jumlah	80	-

Table 4.10: Table caption

$$Q_3 = \frac{3(80+1)}{4} = 60,75 \bullet \text{Kelas kuartil: } 81 - 90 \bullet b = 80,5 \bullet p = 10 \bullet f_k = 48 \bullet f_Q = 20$$

$$Q_i = b + p\left(\frac{\frac{in}{4} - f_k}{f_Q}\right) = 80,5 + 10\left(\frac{60,75 - 48}{20}\right) = 86,5$$

Jadi, Kuartil ketiganya adalah 86,5.

4.8 CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Data Tabel Frekuensi Nilai Modus dari data pada tabel...

- $49,5 - \frac{40}{7}$
- $49,5 - \frac{36}{7}$
- $49,5 + \frac{36}{7}$
- $49,5 + \frac{40}{7}$
- $49,5 + \frac{48}{7}$

Jawaban :

Kelas	Frekuensi
20-29	3
30-39	7
40-49	8
50-59	12
60-69	9
70-79	6
80-89	5

Table 4.11: Frukuenzi

Kelas	Frekuensi
20-29	3
30-39	7
40-49	8
50-59	12
60-69	9
70-79	6
80-89	5

Table 4.12: Frukuenzi

Diketahui :

$$L_0 = 50 - 0,5 = 49,5$$

$$d_1 = 12 - 8 = 4$$

$$d_2 = 12 - 9 = 3$$

$$M_0 = L_0 + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot c$$

$$M_0 = 49,5 + \frac{4}{4+3} \cdot 10$$

$$M_0 = 49,5 + \frac{40}{7}$$

JAWABAN = D

2. Rata rat nilai tes matematika 10 siswa adalah 65. Jika ditambah 5 siswa lainnya maka rata rata nya menjadi 70 nilai rata rata 5 siswa yang ditambahkan adalah...

a.75

b.78

c.80

d.82

e.85

JAWABAN

$$\bar{x}_{gab} = \frac{n_1 \cdot \bar{x}_1 + n_2 \cdot \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$70 = \frac{10 \cdot 65 + 5 \cdot \bar{x}_2}{10 + 5}$$

$$70 = \frac{650 + 5 \cdot \bar{x}_2}{15}$$

$$1050 = 650 + 5 \cdot \bar{x}_2$$

$$400 = 5 \cdot \bar{x}_2$$

$$\bar{x}_2 = 80$$

JAWABAN = C

3. Data Nilai Matematika kelas XII Nilai Modus dati data pada tabel...

a.80,6

b.81,6

Kelas	Frekuensi
51-60	5
61-70	12
71-80	15
81-90	9
91-100	3

Table 4.13: Frukensi

c.82,6

d.81,5

e.80,5

JAWABAN

$$Q_3 = T_b + \left(\frac{\frac{3}{4} \cdot n + f_{k3}}{f_3} \right) i$$

Kelas	Frekuensi
51-60	5
61-70	12
71-80	15
81-90	9
91-100	3

Table 4.14: Frukensi

$$\frac{3}{4} \cdot n = \frac{3}{4} \cdot 44 = 33$$

$$\text{Kelas : } Q_3 = 81 - 90 \quad T_b = 81 - 0,5 = 80,5 \quad f_{k3} = 32 \quad f_3 = 9 \quad i = 61 - 51 = 10$$

$$Q_3 = 80,5 + \left(\frac{33-32}{9} \right) \cdot 10$$

$$Q_3 = 80,5 + \left(\frac{1}{9} \right) \cdot 10$$

$$Q_3 = 80,5 + 1,1$$

$$Q_3 = 81,6$$

JAWABAN = B

4. Dibawah ini data fuekensi PT Maju Terus

Kelas	Frekuensi
20-26	2
27-33	8
34-40	13
41-47	11
48-54	5
55-61	1

Table 4.15: Frukensi

Rata Rata umur karyawan...

a.40,1

b.39,4

c.39,1

d.38,4

e.38,1

JAWABAN

Rata Rata data Berkelompok :

Kelas	f	x	d	fd
20-26	2	23	-14	-28
27-33	8	30	-7	-56
34-40	13	37	0	0
41-47	11	44	7	77
48-54	5	51	14	70
55-61	1	58	21	21

Table 4.16: Frukuenasi

$$\text{Rata rata} = \bar{x}_s + \frac{\sum f \cdot d}{\sum f}$$

$$\text{Rata-rata} = 37 + \frac{84}{40} = 37 + 2,1 = 39,1$$

JAWABAN = C

Keterangan : rata rata sementara dipilih dari titik tengah kelas yang terletak ditengah atau yang memiliki frekuensi terbesar.

5. Peluang kejadian majemuk

5.1 Kejadian Saling bebas

Peluang Kejadian A dinotasikan dengan $P(A)$ adalah perbandingan banyaknya hasil kejadian A dinotasikan $n(A)$ terhadap banyak semua hasil yang mungkin dinotasikan dengan $n(S)$ dalam satu percobaan. Kisaran nilai peluang kejadian A adalah $0 \leq P(A) \leq 1$. jika $P(A) = 0$ disebut kemustahilan dan $P(A) = 1$ disebut kepastian.

1. kejadian saling bebas (Stokastik)

Dua kejadian dikatakan saling bebas (independen) jika terjadinya kejadian yang satu tidak mempengaruhi kemungkinan terjadinya kejadian yang lain. Bila kejadian A tidak mempengaruhi terjadinya B dan sebaliknya, maka kejadian semacam ini disebut dua kejadian saling bebas. Contoh Ketika melempar koin dua kali, hasil dari lemparan pertama tidak mempengaruhi hasil dari lemparan kedua. Ketika mengambil dua kartu dari satu set kartu permainan (52 kartu), kejadian 'mendapatkan raja (K)' pada kartu pertama dan kejadian 'mendapatkan kartu hitam' pada kartu kedua adalah tidak saling bebas. Peluang pada kartu kedua berubah setelah kartu yang pertama diambil. Kedua kejadian di atas akan menjadi saling bebas jika setelah mengambil kartu yang pertama, kartu tersebut dikembalikan ke set semula (sehingga set kartu itu lengkap kembali, 52 kartu). Jika dua kejadian yang homogen dilantunkan bersama-sama, maka kejadian yang mungkin adalah : $S = (G1, G2), (G1, A2), (A1, G2), (A1, A2) \Rightarrow n(s) = 4$

5.2 Penjelasan Kejadian Saling bebas

Kejadian pada percobaan ada dua yaitu; kejadian sederhana dan kejadian majemuk. Peluang kejadian saling lepas dan saling bebas.

Dengan menggunakan sifat-sifat gabungan dua berdasarkan teori gabungan banyak nya anggota himpunan $A \cup B$ yang disimbolkan.

$$A \cap B = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \text{ dengan } (A \cup B) \text{ yang menyatakan irisan himpunan A dan B}$$

Menentukan Peluang gabungan dua kejadian : $P(A \cap B)$.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ [bagi dg } n(S)].$$

$$\frac{n}{n} A \cup B = \frac{n}{n} \frac{A}{S} + \frac{n}{n} \frac{B}{S} - \frac{n(A \cap B)}{nS}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jadi rumus peluang gabungannya adalah; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Keterangan :

$P(A \cup B)$ = Peluang Gabungan kejadian A dan B

$P(A)$ = Peluang kejadian A

$P(B)$ = Peluang kejadian B

$PA \cap B$ Peluang irisan kejadian A dan B

5.3 Contoh Soal

1. Sebuah dadu isi enam di lempar sekali, berapakah peluang kejadian muncul nya angka genap atau angka prima ?

Penyelesaian :

a.) Ruang sample nya adalah $S=1,2,3,4,5,6$ dengan $n(S)=6$ misalnya A kejadian muncul mata dadu genap dan B kejadian mata dadu prima,

$A=2,4,6$ $B=2,3,5$ dan $A \cap B = 2$ $A \cap B$ sehingga $n(A)=3, n(B)=3, n(A \cap B) = 1$

Ketika melempar koin dua kali, hasil dari lemparan pertama tidak mempengaruhi hasil dari lemparan kedua. Ketika mengambil dua kartu dari satu set kartu permainan (52 kartu), kejadian

'mendapatkan raja (K)' pada kartu pertama dan kejadian 'mendapatkan kartu hitam' pada kartu kedua adalah tidak saling bebas. Peluang pada kartu kedua berubah setelah kartu yang pertama diambil. Kedua kejadian di atas akan menjadi saling bebas jika setelah mengambil kartu yang pertama, kartu tersebut dikembalikan ke set semula (sehingga set kartu itu lengkap kembali, 52 kartu).

Untuk dua kejadian saling bebas, A dan B, peluang untuk keduanya terjadi, $P(A \text{ dan } B)$, adalah hasil perkalian antara peluang dari masing-masing kejadian.

$P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ Misalnya, ketika melempar koin dua kali, peluang mendapat 'kepala' (K) pada lemparan pertama lalu mendapat 'ekor' (E) pada lemparan kedua adalah

$$P(K \text{ dan } E) = P(K) \times P(E)$$

$$P(K \text{ dan } E) = 0.5 \times 0.5 \quad P(K \text{ dan } E) = 0.25$$

Dalam sebuah kantong terdapat 15 alat tulis yang terdiri dari 7 Pensil dan 8 Bolpen. Jika kita disuruh mengambil 2 alat tulis dengan mata tertutup. Tentukan terambil kedua-duanya Pensil ?
Jawab :

Jika A = Pensil Pengambilan Pertama :

Maka $P(A) = n(A)/n(S) = 7/15$

Jika B = Pensil Pengambilan Kedua :

Maka $P(B) = n(B)/n(S) = 6/15$

Jadi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$= 4/10 \times 3/9 = 12/90 = 2/15$$

5.4 Kejadian Saling bebas

Jika dua keping mata uang yang homogen dilantunkan bersama sama, maka kejadian yang mungkin adalah : $S = (G1, G2), (G1, A2), (A1, G2), (A1, A2)$ $n(s) = 4$. Pada kejadian mata uang pertama muncul $G1$ dan mata uang kedua muncul $G2$, maka $P(G1) = \frac{1}{2}$ dan $P(G2) = \frac{1}{2}$. Kejadian $G1$ dan $G2$ adalah dua kejadian yang saling bebas. $P(G1, G2) = P(G1 \cap G2) = P(G1) \times P(G2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Secara umum, jika A dan B merupakan dua kejadian yang saling bebas maka peluang kejadian A dan B adalah :

5.5 Contoh 1 Kejadian saling Bebas

Contoh 1: Dua buah dadu bermata enam, yang terdiri atas warna merah dan putih, ditoss bersama-sama satu kali. Berapa peluang munculnya mata lebih dari 4 untuk dadu merah dan kurang dari 3 untuk dadu putih ?

Jika A kejadian muncul mata > 4 , maka $n(A) = 2$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Jika B kejadian muncul mata < 3 , maka $n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Jadi, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

5.6 Contoh 2 Kejadian saling Bebas

Dalam sebuah kantong terdapat sepuluh kelereng yang terdiri dari 6 kelereng merah dan 4 kelereng putih, diambil dua kelereng. Berapa peluang terambilnya kedua-duanya kelereng putih ?

Jika A kejadian terambilnya kelereng putih pada pengambilan

pertama maka $P(A) = \frac{4}{10}$

Jika B kejadian terambilnya kelereng putih pada pengambilan kedua maka $P(B) = \frac{3}{9}$

Jadi, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

5.7 Contoh 3 Kejadian saling Bebas

Dari setumpuk kartu bridge, diambil satu kartu secara berturut-turut sebanyak dua kali. Tentukan peluang bahwa yang terambil pertama As dan yang terambil berikutnya King !

$$n(\text{As}) = 4 \rightarrow P(\text{As})$$

$$n(\text{K}) = 4 \rightarrow P(\text{K})$$

Jadi, $P(\text{As} \cap \text{K}) = P(\text{As}) \times P(\text{K})$

$$\frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{16}{2652} = \frac{4}{663}$$

5.8 Contoh 4 Kejadian saling Bebas

Ketika melempar koin dua kali, hasil dari lemparan pertama tidak mempengaruhi hasil dari lemparan kedua. Ketika mengambil dua kartu dari satu set kartu permainan (52 kartu), kejadian 'mendapatkan raja (K)' pada kartu pertama dan kejadian 'mendapatkan kartu hitam' pada kartu kedua adalah tidak saling bebas. Peluang pada kartu kedua berubah setelah kartu yang pertama diambil. Kedua

kejadian di atas akan menjadi saling bebas jika setelah mengambil kartu yang pertama, kartu tersebut dikembalikan ke set semula (sehingga set kartu itu lengkap kembali, 52 kartu). Untuk dua

kejadian saling bebas, A dan B, peluang untuk keduanya terjadi, $P(A \text{ dan } B)$, adalah hasil perkalian antara peluang dari masing-masing kejadian

$P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ Misalnya, ketika melempar koin dua kali, peluang mendapat 'kepala' (K) pada lemparan pertama lalu mendapat 'ekor' (E) pada lemparan kedua adalah

$$P(\text{K dan E}) = P(\text{K}) \times P(\text{E})$$

$$P(K \text{ dan } E) = 0.5 \times 0.5$$

$$P(K \text{ dan } E) = 0.25$$

5.9 Contoh 5 Kejadian saling Bebas

Sejarah Teori Peluang Dimulai dari “meja” judi pada sekitar abad 17. Chevalier de Mere (bangsawan Perancis) bertanya pada Blaise Pascal (1623-1662). Lalu, Pascal dan Fermat (1601-1665) mengembangkannya menjadi teori Peluang.

Jika diketahui suatu kejadian A dengan ruang sampel S, maka peluang kejadian A, ditulis $P(A)$, adalah sebagai berikut:

Kejadian A dan kejadian B dikatakan saling bebas jika $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Contoh: Pada pelemparan dua dadu bersisi enam identik, tentukan peluang munculnya mata dadu pertama angka 2 dan mata dadu kedua angka 3. Jawab:

$$A = (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6).$$

$$B = (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3).$$

$$A \cap B = (2, 3)$$

$$P(A \cap B) = 1/36 = P(A) \times P(B)$$

Suatu kejadian dikatakan saling bebas ketika terjadinya satu peristiwa tidak mempengaruhi/merubah kemungkinan terjadinya peristiwa yang lain. Ketika suatu kejadian saling bebas, maka probabilitas gabungan masing-masing kejadian tersebut adalah hasil dari probabilitas masing-masing. Dalam kasus ketika dua peristiwa terjadi dikatakan sebagai kejadian saling bebas dengan aturan perkalian sebagai berikut:

$$P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B)$$

Sumber: Weiers (2011) Menurut Montgomery (2009), dua kejadian dikatakan saling bebas jika salah satu dari persamaan dibawah ini benar : 1. $P(A | B) = P(A)$ 2. $P(B | A) = P(B)$ 3. $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

5.10 Contoh 6 Kejadian saling Bebas

Peluang Bersyarat dan Kejadian Bebas 3.1 Peluang Bersyarat

Misalkan ruang contoh berpeluang sama dari percobaan melempar sebuah dadu bersisi 6, maka $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dan terdapat dua kejadian, yaitu B adalah kejadian muncul sisi kurang dari 6, maka $B = 1, 2, 3, 4, 5$; dan A adalah kejadian munculnya sisi genap, maka $A = 2, 4, 6$. Berdasarkan hal ini, maka $P(B) = \frac{5}{6}$, dan $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Jika dua kejadian A dan B dilakukan berurutan, yaitu B terjadi terlebih dahulu, kemudian menyusul A, maka $P(A|B) = \frac{2}{5}$. Peluang kejadian A setelah kejadian B (A given B), atau dituliskan sebagai $P(A|B) = \frac{2}{5}$.

Peluang terjadinya A bila kejadian B sudah diketahui terjadi adalah $P(A \cap B) / P(B)$ disebut peluang A dengan syarat B.

5.11 Contoh 7 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.2 Suatu kotak berisi 10 marmer putih, 5 kuning, dan 10 hitam. Sebuah marmer dipilih secara acak dari kotak dan dicatat, ternyata tidak diperoleh marmer hitam kemudian dikembalikan. Berapa peluang jika selanjutnya diulangi pengambilan satu marmer dan diperoleh marmer kuning.

5.12 Contoh 8 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.3 Dalam permainan bridge, 52 kartu dibagi sama ke empat pemain, sebut saja Timur, Barat, Utara, dan Selatan. Jika Utara dan Selatan memiliki total 8 spades, berapa peluang Timur mendapatkan 3 dari 5 spades sisanya?

5.13 Contoh 9 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.4 Kantor tempat bu Budi bekerja melaksanakan pesta makan malam bagi pegawai yang sedikitnya memiliki satu anak laki-laki. Jika diketahui bu Budi memiliki dua anak, berapa peluang kedua anaknya adalah laki-laki, dan bu Budi termasuk pegawai yang diundang ke dalam acara makan malam tersebut?

5.14 Contoh 10 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.5 Celine belum memutuskan apakah akan mengambil kuliah Bahasa Perancis atau Kimia. Dia menduga bahwa peluangnya mendapatkan nilai A akan menjadi $\frac{1}{2}$ untuk Bahasa Perancis, dan $\frac{2}{3}$ untuk Kimia. Jika dalam memutuskan hal ini Celine melempar koin seimbang, berapa peluang dia mengambil kuliah Kimia dan memperoleh nilai A?

5.15 Contoh 11 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.6 Anggaplah dalam sebuah kotak terdapat 8 bola merah dan 4 bola putih, kemudian diambil 2 bola dari kotak tanpa pemulihan. Jika diasumsikan bahwa setiap bola memiliki kemungkinan yang sama untuk terpilih, berapa peluang bahwa kedua bola yang terpilih berwarna merah?

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(B \cap A) &= P(B)P(A) \\ P(B \cap A) &= P(B)P(A) \end{aligned}$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa peluang kejadian E adalah rata-rata terboboti dari peluang E dengan syarat F, dan peluang E dengan syarat bukan F. Berikut adalah beberapa ilustrasi:

5.16 Contoh 11 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.7 Anggap terdapat 5 harddisk baik dan 2 harddisk rusak pada satu kemasan. Untuk mendapatkan harddisk yang rusak, dilakukan pengujian dengan cara mengambil dan menguji satu per satu secara acak tanpa pemulihan. Berapa peluang diperoleh 2 harddisk rusak pada dua pengujian yang pertama? Jawab: Misal D1 dan D2 adalah kejadian diperoleh harddisk rusak pada pengujian pertama dan kedua.

5.17 Contoh 12 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.8 Suatu perusahaan asuransi percaya bahwa orang dapat dibagi ke dalam dua kelompok, yaitu rawan kecelakaan dan tidak. Statistik menunjukkan bahwa orang yang rawan kecelakaan akan celaka dalam satu tahun ini dengan peluang 0.4, dan turun menjadi 0.2 untuk orang yang bukan rawan kecelakaan. Jika diasumsikan 30 persen populasi adalah rawan kecelakaan, berapa peluang bahwa seseorang polis asuransi akan mengalami kecelakaan dalam satu tahun tertentu?

5.18 Contoh 13 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.9 Lanjutan dari Contoh 3.8, anggaplah seseorang polis asuransi mengalami kecelakaan pada tahun tertentu. Berapa peluang bahwa dia adalah orang yang masuk ke dalam kelompok rawan kecelakaan?

5.19 Contoh 14 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.9 Lanjutan dari Contoh 3.8, anggaplah seseorang polis asuransi mengalami kecelakaan pada tahun tertentu. Berapa peluang bahwa dia adalah orang yang masuk ke dalam kelompok rawan kecelakaan?

5.20 Contoh 15 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.10 Terdapat tiga wadah I, II, dan III. Wadah I berisi 2 bola hitam dan 1 bola kuning, wadah II berisi 1 bola hitam dan 1 bola kuning, sedangkan wadah III berisi 1 bola hitam dan 3 bola kuning. Percobaan memilih secara acak satu wadah lalu mengambil secara acak satu bola dari wadah tersebut. Jika bola yang terambil adalah bola kuning, berapa peluang bahwa wadah yang terpilih adalah wadah I? Kaidah Bayes Ambil F_1, F_2, \dots, F_n adalah kejadian mutually exclusive dan $\bigcup_{i=1}^n F_i = S$ dan kejadian E dapat ditulis sebagai $E = \bigcup_{i=1}^n (E \cap F_i)$

$$\begin{aligned} \text{maka } P(F_j | E) &= \frac{P(E \cap F_j)P(F_j)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E | F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E | F_i)P(F_i)} \end{aligned}$$

5.21 Contoh 16 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.11 Test darah di laboratorium diketahui 95 efektif mendeteksi penyakit tertentu. Walaupun demikian, test juga menghasilkan 1 hasil penyakit padahal seseorang yang dites adalah sehat (disebut positif salah). Jika 0.5 populasi memiliki penyakit, berapa peluang orang yang dites memiliki penyakit jika diketahui bahwa hasil test darahnya positif?

5.22 Contoh 17 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.12 Juri di pengadilan memiliki keyakinan 65 terdakwa melakukan kejahatan. Selama proses pengadilan, 85 terdakwa yang terbukti bersalah melakukan kejahatan adalah bertangan kidal. Jika 23 populasi bertangan kidal, berapa peluang juri memutuskan terdakwa yang bertangan kidal adalah terdakwa.

5.23 Contoh 19 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.14 Ketika koin A dilempar, peluang sisi muka yang muncul adalah $\frac{1}{4}$. Sedangkan ketika koin B dilempar, peluang muncul sisi muka adalah $\frac{3}{4}$. Satu dari kedua koin tersebut diambil dan dilempar dua kali. Jika diperoleh dua sisi muka, berapa peluang bahwa koin yang dilempar adalah B? Dan berapa rasio odd dari kejadian tersebut?

5.24 Contoh 19 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.15 Misalkan ada 3 wadah, A berisi 2 bola putih dan 4 bola merah, B berisi 8 bola putih dan 4 bola merah, C berisi 1 bola putih dan 3 bola merah. Jika 1 bola dipilih dari setiap wadah, berapa peluang bola yang terambil dari wadah A adalah bola putih dengan syarat 2 bola lainnya yang terambil adalah bola putih.

5.25 Contoh 20 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.16 Sebuah pesawat hilang, dan diperkirakan jatuh di tiga daerah dengan kemungkinan yang sama. Misalkan I_i melambangkan peluang bahwa pesawat akan ditemukan setelah pencarian di daerah i , untuk $i=1,2,3$. Berapa peluang pesawat ditemukan di daerah i setelah pencarian di daerah $k \neq i$ mengalami kegagalan, untuk $i=1,2,3$.

5.26 Contoh 21 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.17 Sebuah keluarga yang baru pindah ke suatu kota diketahui mempunyai dua orang anak. Pada suatu saat sang ibu terlihat berjalan dengan salah satu dari anaknya. Jika anak tersebut adalah perempuan, berapa peluang bahwa kedua anak keluarga tersebut adalah perempuan?

5.27 Contoh 22 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.18 Sebuah kartu dipilih secara acak dari 52 tumpukan kartu. Jika E adalah kejadian terpilih kartu ace, dan F adalah kejadian terpilih kartu spade, tunjukkan bahwa E dan F adalah kejadian saling bebas.

5.28 Contoh 23 Kejadian saling Bebas

Dua koin dilempar dan semua kemunculannya memiliki peluang yang sama. Jika E adalah kejadian muncul sisi muka pada koin pertama, dan F adalah kejadian muncul sisi belakang pada koin kedua, tunjukkan bahwa E dan F adalah kejadian yang saling bebas.

5.29 Contoh 24 Kejadian saling Bebas

Dua dadu seimbang dilempar. Jika E_1 adalah kejadian munculnya jumlah sisi kedua dadu bernilai 6, dan F adalah kejadian munculnya sisi 4 pada dadu pertama, tunjukkan bahwa E_1 dan F adalah kejadian yang tidak bebas. Jika E_2 adalah kejadian muncul jumlah sisi kedua dadu bernilai 7, apakah E_2 dan F saling bebas

5.30 Contoh 25 Kejadian saling Bebas

Proposisi Jika E dan F adalah dua kejadian saling bebas, maka E dan F^c juga saling bebas Contoh 3.21 Dua dadu seimbang dilempar. Jika E adalah kejadian muncul jumlah sisi kedua dadu bernilai 7, F adalah kejadian muncul sisi 4 pada dadu pertama, dan G adalah kejadian muncul sisi 3 pada dadu kedua, berapa $P(E | FG)$? Apakah E dan FG saling bebas?

5.31 Contoh 26 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.22 Suatu percobaan dilakukan sebanyak n kali dan saling bebas. Setiap percobaan memiliki peluang kejadian sukses sebesar p , dan peluang kejadian gagal sebesar $1 - p$. Berapa peluang a) sedikitnya muncul satu kejadian sukses b) muncul tepat k kejadian sukses

5.32 Contoh 26 Kejadian saling Bebas

Contoh 3.23 Suatu sistem terdiri atas n komponen yang disusun secara paralel, artinya sistem akan berfungsi jika sedikitnya ada satu komponen yang berfungsi. Setiap komponen saling bebas dan dapat berfungsi dengan peluang p_i , untuk $i=1,2,\dots,n$. Berapa peluang bahwa sistem tersebut berfungsi?

Contoh Soal UN

Dalam percobaan pelemparan sebuah dadu setimbang, K menyatakan kejadian munculnya mata dadu bilangan genap. Peluang kejadian K adalah... A. $1/6$ B. $1/4$ C. $1/3$ D. $1/2$ E. $1/4$

Pembahasan $n_K = 3$ $n_S = 6$ Sehingga $P_K = n_K / n_S = 3/6 = 1/2$ Jawaban: D

Contoh Soal UN

Misal kita mempunyai 10 kartu yang bernomor 1 sampai 10. Jika satu kartu diambil secara acak, maka peluang terambil adalah kartu bernomor bilangan prima adalah...

A. $4/5$ B. $3/5$ C. $1/2$ D. $3/10$ E. $2/5$

Pembahasan $nK = 5$ $nS = 10$ maka $PK = nK / nS = 5/10 = 1/2$ Jawaban: C

Seorang siswa memegang kartu remi yang berjumlah 52 buah dan meminta temannya untuk mengambil sebuah kartu secara acak. Peluang terambilnya kartu hati adalah.... A. $1/52$ B. $1/13$ C. $9/52$ D. $1/4$ E. $1/3$

$nK = 13$ $nS = 52$ Jadi $PK = nK / nS = 13/52 = 1/4$ Jawaban: D

SOAL UN

Pada pelemparan dua dadu setimbang secara bersamaan, misal K adalah kejadian munculnya hasil kali mata dadu = 6. Peluang kejadian $K = \dots$ A. $1/18$ B. $1/6$ C. $1/4$ D. $1/9$ E. $5/36$

Pembahasan: $nK = 4$ $nS = 36$ Maka $PK = nK / nS = 4 / 36 = 1/9$ Jawaban: D

SOAL UN

Dalam sebuah kantong terdapat 7 kelereng merah dan 4 kelereng putih. Akan diambil 4 kelereng sekaligus. Peluang yang terambil 2 kelereng merah dan 2 kelereng putih adalah... A. $126/330$ B. $116/330$ C. $63/330$ D. $53/330$ E. $27/330$

Dua dadu dilambungkan bersama-sama. Peluang muncul mata dadu pertama 3 dan mata dadu kedua lima adalah... A. $6 / 36$ B. $5 / 36$ C. $4 / 36$ D. $3 / 36$ E. $1 / 36$

Jawaban: Merupakan peluang kejadian saling lepas: $P(3 \text{ dan } 5) = P(3) \times P(5) = 1/6 \times 1/6 = 1 / 36$



Bibliography

Books

Articles

