



CHAMPION
PUBLICATION



Bilingual
Updated

MATHS

Concept King

All Formulas and Theorems | Smart Tricks

Arithmetic & Advance Maths

Useful For

CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS
and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir





Meet the teacher:

Gagan Pratap Sir

जितना प्यार आप मुझे करते हैं उससे कही ज्यादा मैं आपको करता हूँ।

हमारा Target सरकारी Exam की तैयारी करने वाले छात्रों के लिये आसान रास्ता बनाना है।

आज के समय में **Quality content, Selection** के लिये सबसे जरूरी है और वही देने का काम पिछले 7 सालों से कर रहे हैं,

जिसके फलस्वरूप पिछले कई वर्षों से ना केवल Rank 1 हमारे द्वारा पढ़ाया गया बल्कि हजारों बच्चों का Selection उच्च पदों पर हुआ,

हमे गर्व है कि हम Excise Inspector बनाते हैं,

और अगर आप मेहनत करोगे तो अगले Inspector आप होग!



CONTACT US:

Be in touch with us on:

Facebook, Telegram, Instagram, Twitter and

CareerWill App

pratapgagan123@gmail.com

FOLLOW US ON OUR VERIFIED CHANNELS

| 4 million

| 5 Lakh

| 1.1 million

| 4 Lakh

| 5 Lakh



Free video Lectures



Percentage Lecture



Ratio Lecture



CHAMPION
PUBLICATION

Bilingual
Updated

MATHS

Concept King

All Formulas and Theorems | Smart Tricks

Arithmetic & Advance Maths

Useful For

CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS
and Other Competitive Exams

Author

Gagan Pratap Sir

Co-Author & Editor

Manvendra Singh

© Copyright of Publisher

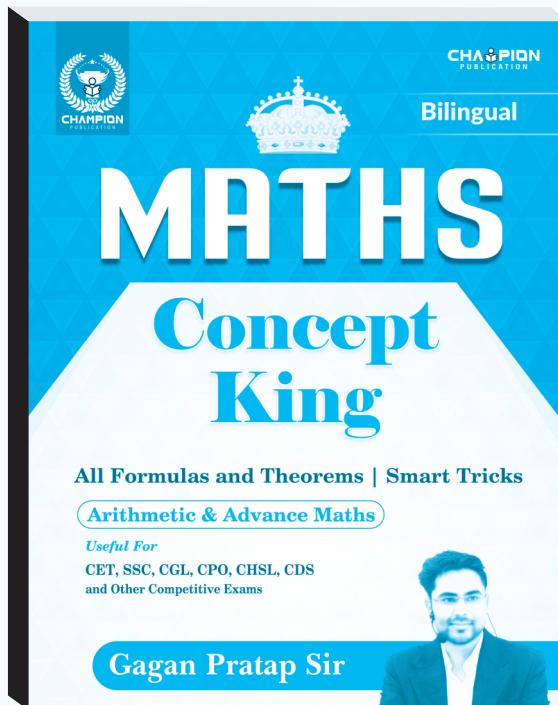
No part of this publication may be re-produced, stored in a retrieval system or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, scanning, web or otherwise without the written permission of the publisher.

Champion Publication has taken utmost precaution in publishing the book, yet if any mistake has inadvertently crept in, the publishers shall not be responsible for the same.

Acknowledgement

Special thanks to my dear friend PRADEEP for enhancing the content by his knowledgeable contribution and making this book more exam oriented.

Edition : 2024



Price ₹ 220/-

Cover Design : Divesh Kumar



Publisher & Distributor

Jaina Extention, Dr. Mukherjee Nagar,
Delhi-110009
Contact No: +91 7351553388 (Only message)

Published by
Champion Publication (India)
For further information about the products



Dedication to

My beloved Brother
Dharmendra for bringing
the enthusiasm in my life and
I wish the same enthusiasm
this book brings to my
students



Preface

The main aim of publishing this book is to spread the knowledge in the easiest way amongst learners. There are manifold purposes of writing this book on the subject. Basically, it caters to the needs of the candidates aspiring for competitive examinations, and for the beginners to understand the intricacies of the subject.

It is observed that the very name of the subject, Mathematics evokes fear in the minds of the students. Through this book an effort has been made to dispel that fear. MCQs at the end of every unit will help the students to make a self-assessment of the knowledge assimilated by going through the Chapters. The answers have been given for MCQs along with explanations.

As a professional it is observed that the books in the market are providing useful information to the students. They provide very useful multiple choice questions with their correct answers. The inquisitive mind of the student is still left high and dry as he is at a loss to know as to why a particular answer and why not otherwise. Through this book, the author has made an effort to provide rationale for the solutions. The book, therefore, meets the expectations of the students as it answers the demand and the quest in their mind.

The book is user-friendly and provides content in a well structured manner. It provides comprehensive and critical study of the various concepts of the subject matter. A word or suggestion from your side may add another feather to the cap of the subject matter of the book. The author looks forward to the comments, suggestions and criticism from the readers. Constructive suggestions and feedback from users would be highly appreciated, gratefully acknowledged and suitably incorporated.

Striving to serve the student community and to impart quality education.

**With best wishes
Champion Publication**

INDEX

Title Name	Page No.
Table of Symbols (प्रतीकों की तालिका) Conversion of Units (इकाइयों का रूपांतरण) 1-2	
Geometry	
Line and Angle (रेखा और कोण)	3-05
Types of Triangles (त्रिभुज के प्रकार)	6-10
Area side properties (त्रिभुज का क्षेत्रफल)	11-12
Similarity of triangles (त्रिभुज की समरूपता)	13-16
Congruency of triangle (त्रिभुज की सर्वांगसमता)	17-18
Centre of Triangle (त्रिभुज के केन्द्र)	19-21
Circumcentre and Orthocentre (परिकेंद्र और लम्बकेंद्र)	22-25
Centroid (केन्द्रक)	26-29
Equilateral triangle (समबाहु त्रिभुज)	30-31
Right angle triangle (समकोण त्रिभुज)	32-34
Square and Rectangle (वर्ग और आयत)	35-36
Parallelogram / Rhombus / Trapezium (समांतर चतुर्भुज / समचतुर्भुज / समलंब)	37-40
Circle (वृत्त)	41-51
Co-ordinate Geometry (निर्देशांक ज्यामिति)	52-56
2 Dimension Mensuration (2 आयामी क्षेत्रमिति)	57-67
Polygon (बहुभुज)	68-69
3 Dimension Mensuration (3 आयामी क्षेत्रमिति)	70-79
Number system (संख्या प्रणाली)	80-81
Divisibility Rules (विभाज्यता के नियम)	82-83
Remainder Theorem (शेषफल प्रमेय)	84-85
Number of Factors (गुणनखंडों की संख्या)	86-87
Sequences and Series (अनुक्रम और श्रेणी)	88-93
LCM & HCF (लघुत्तम समापवर्तक और महत्तम समापवर्तक)	94-96

Title Name	Page No.
Calculation (गणना)	97-118
Simplification (सरलीकरण)	119-121
Surds & Indices (घातांक और करणी)	122-124
Algebra (बीजगणित)	125-129
Theory of Equations (समीकरणों का सिद्धांत)	130-132
Maximum and Minimum value in Algebra (बीजगणित में अधिकतम एवं न्यूनतम मान)	133
Trigonometry (त्रिकोणमिति)	134-142
Maxima & Minima (अधिकतम और न्यूनतम)	143
Height & Distance (लंबाई और दूरी)	144-146
Arithmetic (अंकगणित)	
Percentage (प्रतिशत)	147-155
Profit & Loss (लाभ और हानि)	156-159
Discount (बट्टा/छूट)	160-161
Simple interest (साधारण ब्याज)	162-163
Compound interest (चक्रवृद्धि ब्याज)	164-168
Ratio & Proportion (अनुपात तथा समनुपात)	169-173
Mixture & Alligation (मिश्रण तथा पृथ्वीकरण)	174-177
Partnership (साझेदारी)	178
Average (औसत)	179-184
Time & Work (समय और कार्य)	185-187
Pipe & Cistern (नल व टंकी)	188-189
Time, Speed & Distance (समय, दूरी और चाल)	190-193
Boat & Stream (नाव व धारा)	194-195
Race (दौड़)	196-198
Permutation & Combinations (क्रमचय और संचय)	199-202
Probability (प्रयिकता)	203-208
Statistics (सांख्यिकी)	209-214



Table of Symbols (प्रतीकों की तालिका)



Appendix	
Symbol	Reference
=	equal to
≠	not equal to
≡	identity
≈	approximately equal to
≅	congruent to
→	approaches, ray
∞	proportional to
<	less than
≯	not less than
>	greater than
≸	not greater than
≤	less than or equal to
≥	greater than or equal to
<<	much less than
>>	much greater than
∞	infinity
σ or Σ	sigma (Summation)
%	percentage
+	plus, positive
-	minus, negative
±	plus or minus
{a × b a · b}	multiplication
{a ÷ b a / b}	division
∴	therefore
∴	since
—	line segment
∠	acute angle
⊥	perpendicular
	parallel
Δ	triangle
□	rectangle
□	square
log _b a	logarithm (to base b)
log ₁₀ a	common logarithm
log _e a or ln a	natural logarithm
∧	conjunction (and)
∨	disjunction (or)
⇒, ⇔	implication
~	negation, equivalence, relation
∃, ∀	quantifier
{}	set
∅	empty set, void set, null set
!	Factorial
i	Imaginary unit
∪	Union
⊂	Subset of
⊃	Superset
∩	Intersection
⊆	Subset or equal to
μ	Mean (average)
Conversion of Units	
Conversion of Length	
10 millimetres (mms)	= 1 centimetre (cm)
10 centimetres	= 1 decimetre (dm)
10 decimetres	= 1 metre (m)
10 metres	= 1 decametre (dam)
10 decametres	= 1 hectometre (hm)
10 hectometres	= 1 kilometre (km)
Conversion of Area	
100 square millimetres	= 1 square centimetre
100 square centimetres	= 1 square decimetre
100 square decimetres	= 1 square metre
100 square metres	= 1 square decametre
100 square decametres	= 1 square hectometre
100 square hectometres	= 1 square kilometre
1 hectare	= 10000 square metres
Conversion of Volume	
1000 cubic millimetres	= 1 cubic centimetre
1000 cubic centimetres	= 1 cubic decimetre
1000 cubic decimetres	= 1 cubic metre
1000 cubic metres	= 1 cubic decametre
1000 cubic decametres	= 1 cubic hectometre
1000 cubic hectometres	= 1 cubic kilometre
Conversion of Capacity	
10 millilitres	= 1 centilitre
10 centilitres	= 1 decilitre
10 decilitres	= 1 litre
10 litres	= 1 decalitre
10 decalitres	= 1 hectolitre
10 hectolitres	= 1 kilolitre

Conversion of Weight	
10 milligrams	= 1 centigram
10 centigrams	= 1 decigram
10 decigrams	= 1 gram (g)
10 grams	= 1 decagram
10 decagrams	= 1 hectogram
10 hectograms	= 1 kilogram (kg)
100 kilograms	= 1 quintal
10 quintals or 1000 kg	= 1 metric tonne

Conversion of Time	
60 seconds	= 1 minute
60 minutes	= 1 hour
24 hours	= 1 day
7 days	= 1 week
15 days	= 1 fortnight
28, 29, 30 or 31 days	= 1 month
12 months	= 1 year
365 days	= 1 year
366 days	= 1 leap year
10 years	= decade
25 years	= silver jubilee
50 years	= golden jubilee
60 years	= diamond jubilee
75 years	= radium jubilee or platinum jubilee
100 years	= century
1000 years	= 10 centuries or 1 millennium

Complete CLASSNOTES Arithmetic

Useful For CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

Equivalents of Units	
Units of Lengths	
12 inches	= 1 feet (ft) = 0.3048 metres
3 feet	= 1 yard (d)
1 yard	= 0.9144 metres
22 yards	= 1 chain
1 kilometre	= 0.621 mile or 10^3 metres
1 mile	= 1.6093 kilometres or 1760 yards
1 inch	= 2.54 centimetres
1 hectare	= 2.471 acres
1 mile	= 5280 feet
Units of Area	
1 square feet	= 144 square inches = 0.0929 square metres
1 square metre	= 1.196 square yards
1 square yard	= 0.836 square metres
1 square kilometre	= 0.3861 square miles = 1000 hectares
1 square mile	= 2.59 square kilometres = 640 acres
1 acre	= 4840 square yards = 4046.86 square metres
1 hectare	= 10000 square meters

Complete CLASSNOTES Advance Maths

Useful For CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir



Geometry (Line & Angle) (रेखा और कोण)



Line and Angle (रेखा और कोण)

- ❖ **Point (•)**: Zero dimension figure or a circle with zero radius.

बिंदु : शून्य आयामी आकृति या शून्य त्रिज्या वाला एक वृत्त।

➤ Types of point/बिंदु के प्रकार

- (i) Collinear point/सरेंख बिंदु

If 3 or more than 3 points lie on a line close to or far from each other, then they are said to be collinear.

यदि 3 या 3 से अधिक बिंदु एक रेखा पर एक दूसरे के निकट या दूर स्थित हों, तो वे सरेंख कहलाते हैं।

Ex. Point P, Q, R, S are collinear/P, Q, R, S सरेंख बिंदु हैं।



- (ii) Non-collinear point/असरेंख बिंदु

In 3 or more points are not situated on a straight line, these all point are called non-collinears point.

यदि 3 या अधिक बिंदु एक सीधी रेखा पर स्थित नहीं हैं, तो ये सभी बिंदु असरेंख बिंदु कहलाते हैं।

Ex. . . .

- ❖ **Line**: (One dimension figure) line is a set of points having only length with no ends.

रेखा : (एक आयामी आकृति) रेखा बिंदुओं का एक समूह है जिसमें केवल लंबाई होती है जिसका कोई अंत नहीं होता है।

- ❖ **Line segment**: A line with a fixed length.

रेखा खंड : एक निश्चित लंबाई वाली रेखा।



- ❖ **Ray**: A line with uni-direction length.

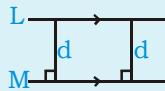
किरण : एक दिशा लंबाई वाली रेखा।

- ❖ **Parallel lines**: two or more line that never intersects $L \parallel M$

समानांतर रेखाएँ : दो या अधिक रेखाएँ जो एक दूसरे को कभी नहीं काटती हैं। $L \parallel M$

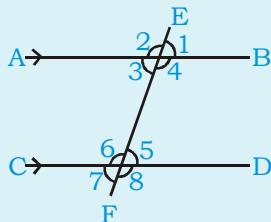
- ❖ **Transversal Line** : A line which intersects (touches) two or more lines at distinct point is called transversal lines of the given lines.

तिर्यक रेखा : वह रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को अलग-अलग बिंदु पर काटती (सर्पत) है, दी गई रेखा की तिर्यक रेखा कहलाती है।



$AB \parallel CD$ and EF is transversal line

$AB \parallel CD$ और EF एक तिर्यक रेखा है



Corresponding angles / संगत कोण $\Rightarrow \angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 8$

$\angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7$

Alternate Angles / एकांतर कोण $\Rightarrow \angle 3 = \angle 5, \angle 4 = \angle 6$

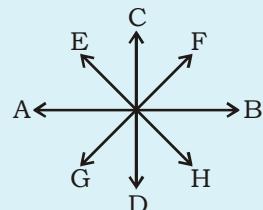
$\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$

$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$

➤ Concurrent line/समवर्ती रेखा

Three or more than three lines, which pass from a single point is called concurrent lines.

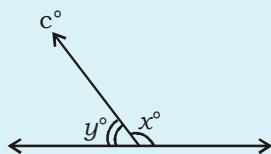
तीन या तीन से अधिक रेखाएं, जो एक बिंदु से होकर गुजरती हैं, समवर्ती रेखाएं कहलाती हैं।



➤ Linear pair angle/रैखिक युग्म कोण

A linear pair is a pair of adjacent angle whose non-common sides are opposite rays.

एक रेखीय युग्म आसन्न कोणों का युग्म होता है, जिसकी गैर उभयनिष्ठ भुजाएं विपरीत रेखा होती हैं।



$$\angle x + \angle y = 180^\circ$$

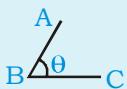
\Rightarrow Linear pair angle are supplementary.

- ❖ **Angle**: inclination between two lines is called angle.

Types of Angles (कोणों के प्रकार)

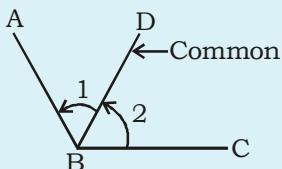
कोण: दो रेखाओं के बीच के झुकाव को कोण कहते हैं।

$$\angle ABC = \theta$$



Adjacent angles/आसन्न कोण

Two angles are said to be adjacent if



$\angle 1$ and $\angle 2 \rightarrow$ adjacent angle.

- (i) They have a common vertex (vertex B)

उनका एक उभयनिष्ठ शीर्ष है (शीर्ष B)

- (ii) They have a common arm. (BD is common)

उनकी एक ही भुजा है। (BD सामान्य है)

- There is one and only one line passing through two distinct point.

Two or more line are said to be coplanar if they lie in the same plane, otherwise they are said to be non-coplanar.

दो विभिन्न बिन्दुओं से होकर जाने वाली एक और केवल एक ही रेखा है। दो या दो से अधिक रेखाएं समतलीय कहलाती हैं यदि वे एक ही तल में स्थित हों, अन्यथा उन्हें गैर-समतलीय कहा जाता है।

- ❖ Complementary Angle : If sum of two angles is 90° then they are Complementary to each other.

पूरक कोण : यदि दो कोणों का योग 90° हो तो वे एक दूसरे के पूरक होते हैं।

- ❖ Complementary Angle/ (पूरक कोण) $\alpha + \beta = 90^\circ$

Supplementary Angle : If sum of two angles is 180° then they are supplementary to each other.

संपूरक कोण : यदि दो कोणों का योग 180° हो तो वे एक दूसरे के पूरक होते हैं।

Supplementary Angles/ (संपूरक कोण) $\alpha + \beta = 180^\circ$

- ❖ Angle Complementary Supplementary

कोण	पूरक	संपूरक
-----	------	--------

$$43^\circ \quad 47^\circ \xrightarrow{+90} 137^\circ$$

$$12^\circ \quad 78^\circ \xrightarrow{+90} 168^\circ$$

$$\theta \quad 90^\circ - \theta \xrightarrow{+90} 180^\circ - \theta$$

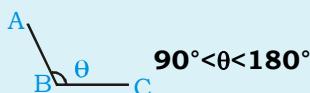
Supplementary angle of an angle is 90° more than complementary angle.

एक कोण का संपूरक कोण पूरक कोण से 90° अधिक होता है।

- ❖ Acute Angle / न्यून कोण \rightarrow $0^\circ < \theta < 90^\circ$

- ❖ Right Angle / समकोण \rightarrow $AB \perp BC \theta = 90^\circ$

- ❖ Obtuse Angle / अधिक कोण \rightarrow



- ❖ Straight or line angle / सीधा या रेखा कोण \rightarrow

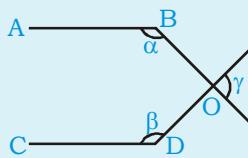


- ❖ Reflex Angle / वृहत्तकोण \rightarrow $180^\circ < \theta < 360^\circ$

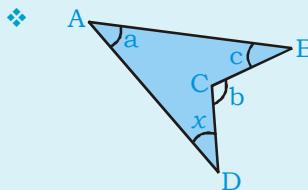
- ❖ Complete Angle / पूर्ण कोण \rightarrow $\theta = 360^\circ$

- ❖ If $AB \parallel CD$ then find the value of $\alpha + \beta + \gamma$?

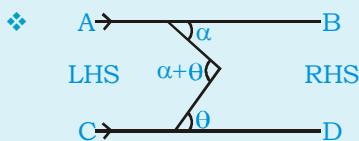
अगर $AB \parallel CD$ तो $\alpha + \beta + \gamma$ का मान ज्ञात करें?



$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$



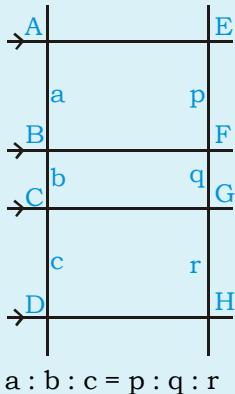
$$b = a + c + x$$



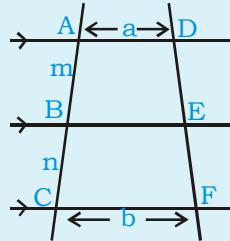
Sum of angle on RHS = LHS

(RHS = LHS पर कोणों का योग)

$$\alpha + \theta = \alpha + \theta$$



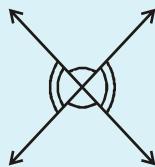
$$\frac{a}{a+b+c} = \frac{p}{p+q+r}$$



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{m}{n}$$

$$BE = \frac{an+bm}{m+n}$$

❖ Vertically opposite/(शीर्षभिन्न कोण)



Complete CLASSNOTES
Arithmetic

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

Complete CLASSNOTES
Advance Maths

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir



Types of Triangles (त्रिभुज के प्रकार)

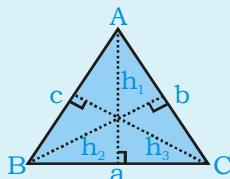


Triangle (त्रिभुज)

- A triangle is a 3-sided polygon that consists of three edges and three vertices.

एक त्रिभुज एक 3-भुजाओं वाला बहुभुज है जिसमें तीन किनारे और तीन शीर्ष होते हैं।

- 3 sides, 3 vertices, 3 altitudes, 3 angles
3 भुजाएँ, 3 शीर्ष, 3 ऊँचाई, 3 कोण



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

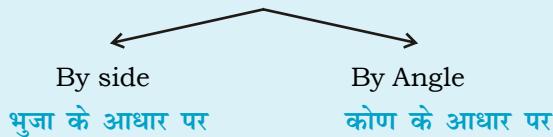
$$\text{Area} \Rightarrow \frac{1}{2} \times a \times h_1 = \frac{1}{2} b \times h_2 = \frac{1}{2} c \times h_3 = \frac{1}{2} \times \text{Base} \times$$

Corresponding height.

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = \text{constant}$$

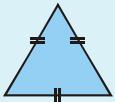
$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Type of Triangle (त्रिभुज के प्रकार)



By side (भुजाओं के आधार पर)

- Equilateral Triangle / समबाहु त्रिभुज**



Equilateral triangle has 3 equal sides, each angle equals 60° .

समबाहु त्रिभुज में प्रत्येक कोण 60° तथा तीनों भुजाएँ समान होती है।

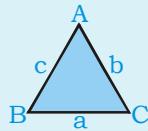
- Isosceles Triangle / समद्विबाहु त्रिभुज**



two equal sides / दो समान भुजाएँ

two angle same / दो कोण समान

- Scalene Triangle / विषमबाहु त्रिभुज**



three unequal sides / तीन असमान भुजाएँ

three unequal angles / तीन असमान कोण

$$\angle A \neq \angle B \neq \angle C \text{ & } a \neq b \neq c$$

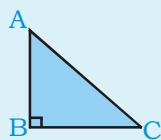
By Angle (कोणों के आधार पर)

- Acute Angle Triangle / चून कोण त्रिभुज**



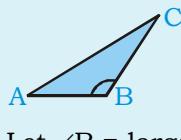
All three angles $< 90^\circ$ / तीनों कोण $< 90^\circ$

- Right Angle Triangle / समकोण त्रिभुज**



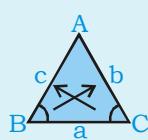
One angle is 90° . $\angle B = 90^\circ$ and $\angle A + \angle C = 90^\circ$

- Obtuse Angle Triangle / अधिक कोण त्रिभुज**



One angle $> 90^\circ$ / एक कोण $> 90^\circ$

- Let $\angle B = \text{largest angle}$ / माना $\angle B = \text{सबसे बड़ा कोण}$



\therefore side AC = b = largest side

भुजा AC = b = सबसे बड़ी भुजा

Let $\angle C = \text{smallest angle}$ (माना $\angle C = \text{सबसे छोटा कोण}$)

\therefore side AB = c = smallest side

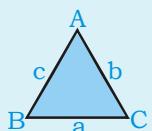
भुजा AB = c = सबसे छोटी भुजा

- Inequality of triangle (त्रिभुज की असमिकाएँ)**

The triangle inequality states that for any triangle the sum of the lengths of any two sides must be greater than the length of the remaining side.

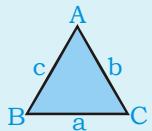
त्रिभुज असमानता बताती है कि किसी भी त्रिभुज के लिए किसी भी दो भुजाओं की लंबाई का योग शेष भुजा की लंबाई से अधिक होना चाहिए।

❖ **Conditions for formation of triangle:**→



$$\begin{aligned}|b-c| &< a < b+c \\ |a-c| &< b < a+c \\ |a-b| &< c < a+b\end{aligned}$$

- ❖ Eg → 4, 9, 15 Δ not possible / त्रिभुज संभव नहीं ∵ 4 + 9 < 15
5, 10, 15 Δ not possible / त्रिभुज संभव नहीं ∵ 5 + 10 = 15
7, 12, 15 Δ is possible / त्रिभुज संभव है ∵ 7+12>15
OR 7+15 > 12 OR 12 + 15 > 7



1. Sum of any two sides is always greater than 3rd side.

किन्हीं भी दो भुजाओं का योग हमेशा तीसरी भुजा से बड़ा होता है।
 $a+b > c$
 $b+c > a$
 $c+a > b$

2. Difference of any two sides is always less than 3rd side.

किन्हीं दो भुजाओं का अंतर सदैव तीसरी भुजा से कम होता है।
 $\Rightarrow b > c-a$
 $\Rightarrow b > a-c$
 $\Rightarrow \therefore |c-a| < b < c+a$

- ❖ If 10, 17, x are sides of a Δ, $x \rightarrow$ integer

Then $7 < x < 27$

∴ $x \rightarrow \{8, 9, 10, \dots, 26\}$

$x_{\min} = 8, x_{\max} = 26$

$x_{\text{total}} = 19$ values possible / 19 मान संभव

∴ 19 Δ's possible / 19 त्रिभुज संभव हैं।

Possible values of $x = 2 \times$ small side - 1

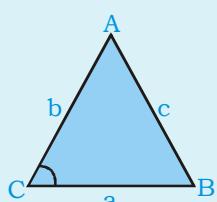
$$\Rightarrow 2 \times 10 - 1 = 19$$

x के संभावित मान = $2 \times$ छोटी भुजा - 1 $\Rightarrow 2 \times 10 - 1 = 19$

Relation between 3 sides of Triangle

(त्रिभुज की 3 भुजाओं के बीच संबंध)

I. Acute Angle Triangle / न्यून कोण त्रिभुज

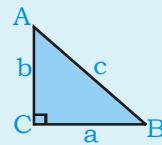


$\angle C = \text{largest} / \angle C = \text{सबसे बड़ा कोण}$

side c = largest / भुजा c = सबसे बड़ा

$$c^2 < a^2 + b^2$$

II. Right Angle Triangle / समकोण त्रिभुज

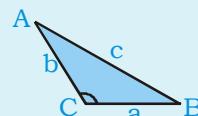


$\angle C = \text{largest} / \angle C = \text{सबसे बड़ा कोण}$

side c = largest / भुजा c = सबसे बड़ा

$$c^2 = a^2 + b^2$$

III. Obtuse Angle Triangle / अधिक कोण त्रिभुज



$\angle C = \text{largest} / \angle C = \text{सबसे बड़ा कोण}$

side c = largest / भुजा c = सबसे बड़ा

$$c^2 > a^2 + b^2$$

- ❖ sides of triangle : 11.7, 16.9, 23.4. which type of Δ it is?

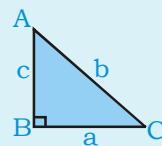
त्रिभुज की भुजाएँ : 11.7, 16.9, 23.4. यह किस प्रकार का Δ है?

Take ratio of sides 11.7 : 16.9 : 23.4

$$9 : 13 : 18$$

$18^2 > 9^2 + 13^2 \therefore \Delta$ is obtuse angle triangle.

Pythagoras Triplets (पाइथागोरस त्रिगुण/त्रिक)



$$b^2 = c^2 + a^2$$

$$\begin{array}{lll}(3,4,5), & (5,12,13), & (7,24,25), \\ (8,15,17), & (9,40,41), & (11,60,61), \\ (12,35,37), & (16,63,65), & (13,84,85), \\ (20,21,29), & (28,45,53), & (33,56,65), \\ (39,80,89), & (36,77,85), & (65, 72, 97), \\ (20, 99, 101)\end{array}$$

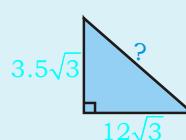
multiplication and division on these triplets will also result in triplets.

इन त्रिक पर गुणा और भाग का परिणाम भी त्रिक होगा।

$$(5,12, 13) \xrightarrow{\times 2} (10, 24, 26)$$

$$(3,4,5) \rightarrow (6,8,10), (9,12,15), (12,16,20), (15,20,25)$$

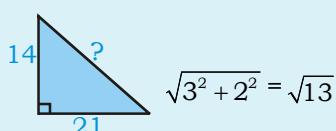
Ex: 1→



7 24 25
 \downarrow^2 \downarrow^2 \downarrow^2

$$3.5 \quad 12 \quad 12.5 \Rightarrow 3.5\sqrt{3}, 12\sqrt{3}, 12.5\sqrt{3}$$

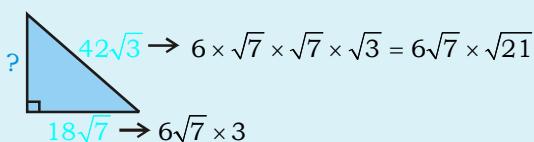
Ex: 2 →



$$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\textcircled{7} \times 2 \quad \textcircled{7} \times 3 \quad \textcircled{7} \times \sqrt{13} = 7\sqrt{13}$$

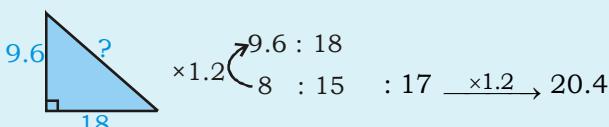
Ex: 3 →



$$18\sqrt{7} \rightarrow 6\sqrt{7} \times 3$$

$$\text{3rd side} = 6\sqrt{7} \times \sqrt{21-9} = 6\sqrt{7} \times \sqrt{12} = 12\sqrt{21}$$

Ex: 4 →



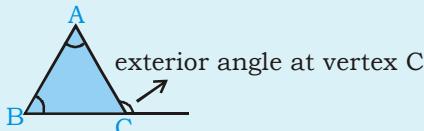
$$\times 1.2 \curvearrowright 9.6 : 18 \quad 8 : 15 : 17 \quad \times 1.2 \rightarrow 20.4$$

❖ Exterior angle is equal to sum of opposite interior angles.

बाहरी कोण विपरीत आंतरिक कोणों के योग के बराबर है।

$$A+B+C = 180^\circ$$

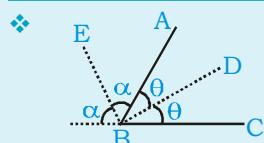
$$A+B = 180^\circ - C$$



$$\text{sum of all exterior angles} = 360^\circ$$

सभी बाहरी कोणों का योग = 360°

Angle Bisector (कोण द्विभाजक)



BE → exterior angle bisector of $\angle ABC$

BE → $\angle ABC$ का बाहरी कोण समद्विभाजक

$$2\alpha + 2\theta = 180^\circ$$

$$\alpha + \theta = 90^\circ = \angle EBD$$

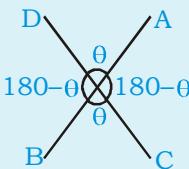
\therefore Angle between internal angle bisector and external angle bisector of an angle is 90° .

किसी कोण के आंतरिक कोण समद्विभाजक और बाहरी कोण समद्विभाजक के बीच का कोण 90° होता है।

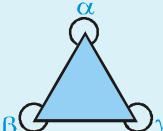
BD is interior angle bisector of $\angle ABC$

BD, $\angle ABC$ का आंतरिक कोण समद्विभाजक है

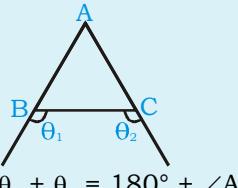
❖ Vertically Opposite Angle / (शीर्षभिमुख कोण)



❖ Some other properties / कुछ अन्य गुण



$$\alpha + \beta + \gamma = 3 \times 360^\circ - 180^\circ = 900^\circ$$



$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ + \angle A$$

❖ If angles of a Δ are in A.P., middle angle is always 60° / (यदि Δ के कोण समांतर श्रेणी में हैं, तो मध्य कोण हमेशा 60° होता है)

$$(a-d), a, (a+d)$$

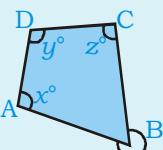
$$\therefore a-d+a+a+d = 180^\circ$$

$$3a = 180^\circ$$

$$a = 60^\circ$$

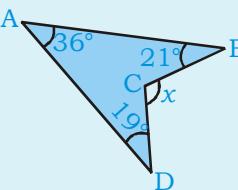
$$\therefore \angle A + \angle C = 120^\circ \text{ & } \angle B = 60^\circ$$

$$\begin{array}{ccc} \angle A & \angle B & \angle C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 60^\circ & 60^\circ & 60^\circ \end{array}$$

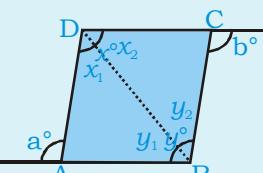


$$\angle B \text{ (internal / आंतरिक)} = 360^\circ - (x+y+z)$$

$$\angle B \text{ (external / बाहरी)} = x^\circ + y^\circ + z^\circ$$



$$x^\circ = 36^\circ + 21^\circ + 19^\circ = 76^\circ$$



$$a+b = x+y$$

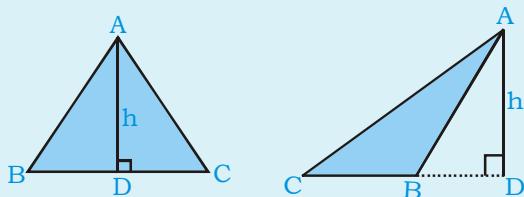
$$\begin{aligned}x_1 + y_1 &= a^\circ \\x_2 + y_2 &= b^\circ \\x_1 + x_2 + y_1 + y_2 &= a+b \\x+y &= a+b\end{aligned}$$

❖ Altitude / Height / Perpendicular

शीर्ष-लंब / ऊँचाई / लंबवत

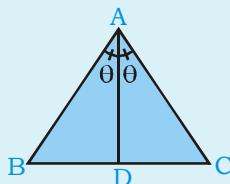
The perpendicular drawn from the vertex of the triangle to the opposite side.

त्रिभुज के शीर्ष से विपरीत दिशा में खींचा गया लंब।



❖ A line that splits an angle into two equal angles.

एक रेखा जो एक कोण को दो बराबर कोणों में विभाजित करती है।



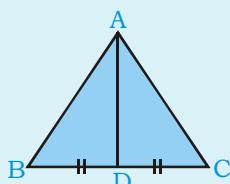
AD is the angle bisector of $\angle BAC$, BD and DC need not be equal

$\angle BAC$ का कोण समद्विभाजक है और BD, DC का बराबर होना आवश्यक नहीं है।

Median (माध्यिका)

❖ Line drawn from a vertex to opposite side which divides the opposite side into equal parts.

किसी शीर्ष से विपरीत दिशा में खींची गई रेखा जो विपरीत भुजा को समान भागों में विभाजित करती है।

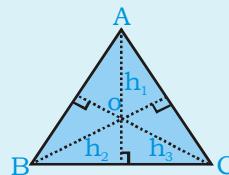


AD is the median of side BC. / AD भुजा BC की माध्यिका है
 $BD = DC$

Perpendicular bisector (लंब द्विभाजक)

❖ A Perpendicular bisector is a line that bisects a line segment in two equal parts and makes an angle of 90° at the point of intersection.

लंब समद्विभाजक एक रेखा है जो एक रेखा खंड को दो बराबर भागों में विभाजित करती है और प्रतिच्छेदन बिंदु पर 90° का कोण बनाती है।

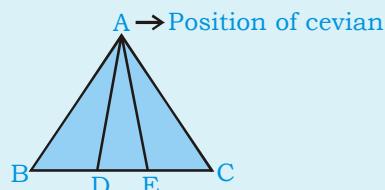


O = circumcentre / परिकेन्द्र

Cevian (केवियन)

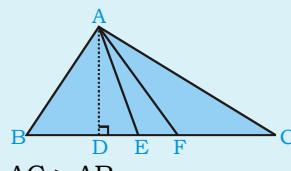
❖ Cevian → Any line which joins vertex to opposite side.

केवियन → कोई भी रेखा जो शीर्ष को विपरीत भुजा से जोड़ती है



AD, AE are cevians / AD, AE केवियन हैं

❖ ΔABC is scalene Δ / ΔABC विषमबाहु त्रिभुज है



$\therefore \angle B > \angle C$

$\perp AD$ will be near to largest among $\angle B$ and $\angle C$ i.e. angle $\angle B$ and far from small angle $\angle C$.

$\perp AD$, $\angle B$ और $\angle C$ कोण में से सबसे बड़े $\angle B$ के निकट होगा और छोटे कोण $\angle C$ से दूर होगा।

AE → Angle bisector of $\angle A$

AE → $\angle A$ का कोण द्विभाजक

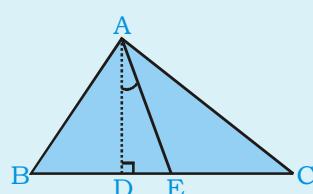
AF → median i.e. $BF = FC$

AF → माध्यिका यानी $BF = FC$

❖ $AD \rightarrow$ Altitude / $AD \rightarrow$ ऊँचाई

AE → Angle bisector of $\angle A$

AE → $\angle A$ का कोण द्विभाजक



$$\angle DAE = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

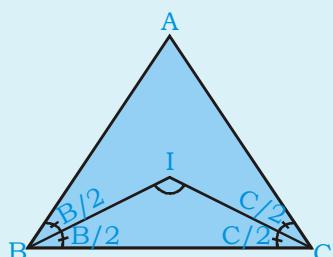
$$\angle DAE = \frac{\angle A}{2} - 90^\circ + \angle B$$

$$= \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} + \angle B$$

$$\therefore \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ$$

$$= \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

❖ $A + B + C = 180^\circ$

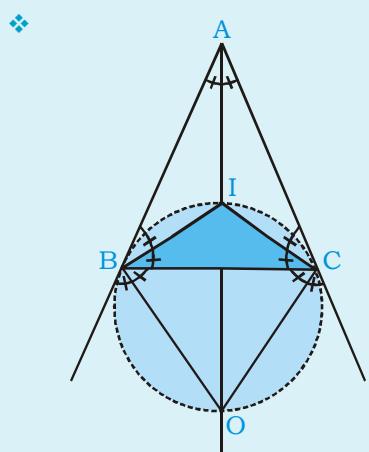


$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) \Rightarrow \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle A}{2}$$

$$\angle BIC = 180^\circ - \left(\frac{\angle B + \angle C}{2} \right)$$

$$= 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \angle A}{2} \right) = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$

$$\therefore \angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$



$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle BOC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$$

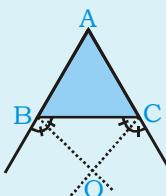
AO will be a straight line and bisect angle A.

AO एक सीधी रेखा और कोण A द्विभाजित होगा।

$$\angle BIC + \angle BOC = 180^\circ$$

BICO will be a cyclic quadrilateral.

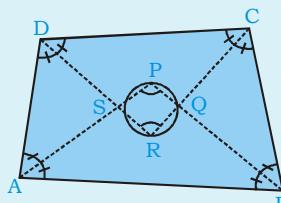
BICO एक चक्रीय चतुर्भुज होगा।



$$\angle BOC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle A = 2(90^\circ - \angle BOC)$$

❖ In any quadrilateral bisector of $\angle A$ & $\angle B$ meet at P.
किसी चतुर्भुज में $\angle A$ व $\angle B$ के समद्विभाजक P पर मिलते हैं।



$$\angle APB = \frac{\angle C + \angle D}{2}$$

$$\angle APB = 180^\circ - \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right)$$

$$\angle APB = \frac{C}{2} + \frac{D}{2}$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle D}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$180^\circ - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} \right) = \frac{C}{2} + \frac{D}{2}$$

Bisector of $\angle C$ and $\angle D$ meet at R

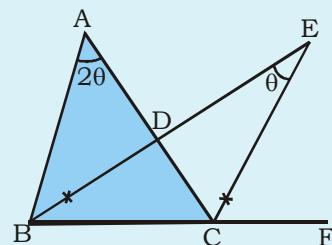
$$\therefore \angle DRC = \frac{\angle A + \angle B}{2}$$

$$\angle P + \angle R = 180^\circ$$

$$\angle S + \angle Q = 180^\circ$$

$\therefore \square PQRS$ will be a cyclic quadrilateral.

□ PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज होगा।



$$\angle BEC = \frac{\angle A}{2}$$



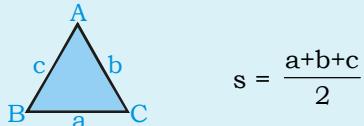
Area side properties (त्रिभुज का क्षेत्रफल)



Area of triangle (त्रिभुज का क्षेत्रफल)

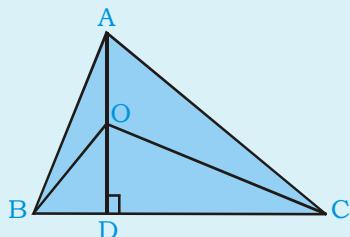
- ❖ Area of $\Delta = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$



$$\text{Area of } \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- ❖ In any ΔABC , $AD \perp BC$



$$AB^2 + OC^2 = OB^2 + AC^2$$

O is any point on altitude / O ऊँचाई पर कोई बिंदु है

Sine Rule (ज्या नियम)

- ❖

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K \text{ (constant)}$$

$$a:b:c = K \sin A : K \sin B : K \sin C$$

$$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$\text{Area of } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{height}$$

$$\text{Area of } \Delta = \frac{1}{2} \times a \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times c \sin B$$

$$\sin B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \sin B$$

$$\sin C = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin C$$

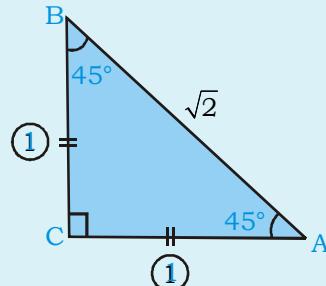
$$c \sin B = b \sin C \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{1}{2} a b \sin C = \frac{1}{2} b c \sin A$$

Side-Angle ratio of some triangles

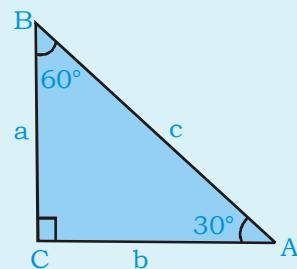
(कुछ त्रिभुजों का भुजा-कोण अनुपात)

- ❖



$$45^\circ \quad 45^\circ \quad 90^\circ$$

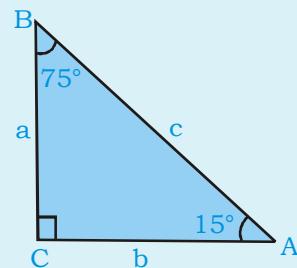
$$\text{sides} \Rightarrow 1 : 1 : \sqrt{2}$$



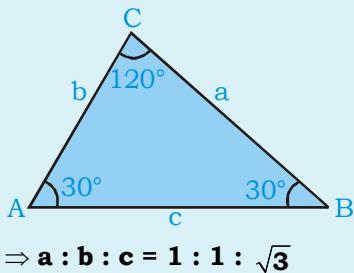
$$a:b:c = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$$

$$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$$

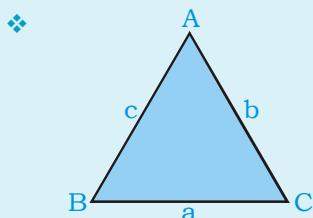
$$a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$$



$$\Rightarrow a : b : c = \sqrt{3}-1 : \sqrt{3}+1 : 2\sqrt{2}$$



Cosine Rule (कोज्या नियम)

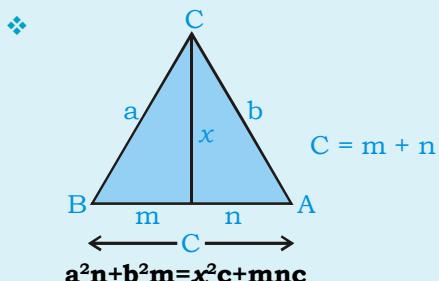


$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2acc \cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2abc \cos C$$

Stewart's Theorem (स्टीवर्ट प्रमेय)



In isosceles triangle $a = b$

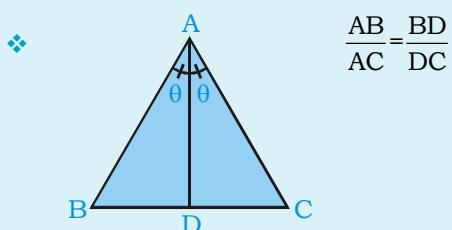
$$a^2n + a^2m = x^2c + mnc$$

$$a^2(m+n) = c(x^2 + mn)$$

$$a^2 = x^2 + mn$$

$$x^2 = a^2 - mn$$

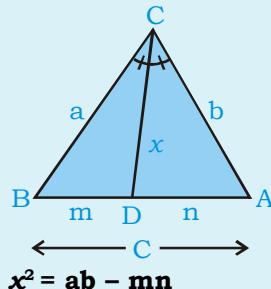
Interior Angle bisector theorem (आंतरिक कोण समद्विभाजक प्रमेय)



Length of Angle bisector (कोण द्विभाजक की लंबाई)

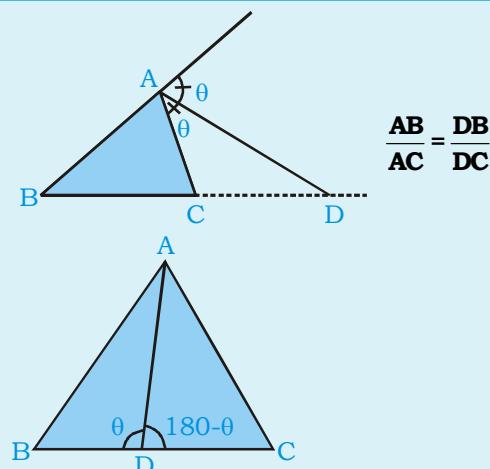
- CD is angle bisector of $\angle BCA$

CD, $\angle BCA$ का कोण समद्विभाजक है



Exterior Angle bisector theorem

(बाह्य कोण समद्विभाजक प्रमेय)

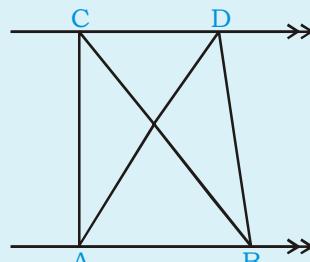


$$\frac{\text{Ar} \triangle ADB}{\text{Ar} \triangle ADC} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times BD \times \sin \theta}{\frac{1}{2} \times AD \times DC \times \sin(180 - \theta)} = \frac{BD}{DC}$$

\therefore जिस ratio में cevian base को divide करेगी, Area भी उसी ratio में divide होगा।

If AD is median $BD = DC$

$\therefore \text{Ar } \triangle ADB = \text{Ar } \triangle ADC$



$$\text{Ar } \triangle ABC = \text{Ar } \triangle ABD \quad AB \parallel CD$$

If $AB \parallel CD$, same parallel line के बीच same base पर बने \triangle का Area बराबर होता है।



Similarity of triangles (त्रिभुज की समरूपता) (~)

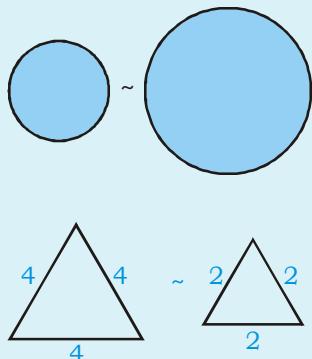


- ❖ **Similarity of triangles :** Two triangles are similar if they have the same ratio of corresponding sides and equal pair of corresponding angles.

त्रिभुजों की समरूपता : दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान हो और संगत कोणों का युग्म समान हो।

- ❖ **Similarity of triangles : size may be different but shape should be same.**

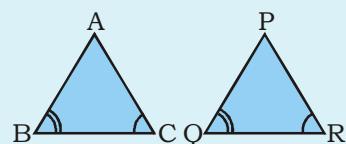
त्रिभुजों की समरूपता : आकार भिन्न हो सकते हैं लेकिन आकृति समान होनी चाहिए।



- ❖ Conditions of Similarity (समरूपता की शर्तें):-

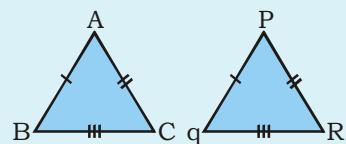
1. A-A (Angle-Angle) (कोण-कोण)

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$



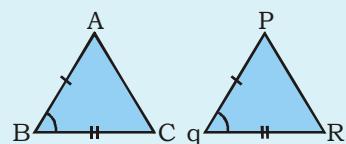
2. S-S-S(Side-Side-Side) (भुजा-भुजा-भुजा)

$$AB = PQ, \quad BC = QR, \quad AC = PR$$



3. S-A-S(Side-Angle-Side) (भुजा-कोण-भुजा)

$$\angle B = \angle Q, \quad AB = PQ, \quad QR = BC$$

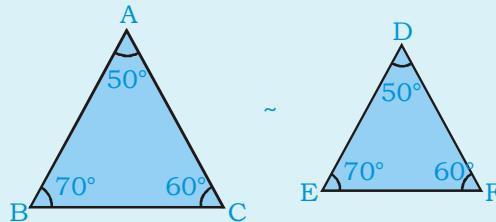


- ❖ If two angle is same in a triangle then third angle will be similar.

यदि एक त्रिभुज में दो कोण समान हैं तो तीसरा कोण भी समान होगा।

$$\begin{array}{l} \angle A = \angle D \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle F \end{array}$$

] corresponding Angles



sides opposite to corresponding angles is called corresponding sides.

संगत कोणों की सम्मुख भुजाएँ संगत भुजाएँ कहलाती हैं।

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

$$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \quad (\text{Property})$$

- ❖ In similar triangle ratio of each corresponding length is equal.

समरूप त्रिभुज में प्रत्येक संगत लंबाई का अनुपात बराबर होता है।

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\text{Angle bisector 1}}{\text{Angle bisector 2}} = \frac{\text{median 1}}{\text{median 2}}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\text{perimeter of } \Delta ABC}{\text{perimeter of } \Delta DEF}$$

$$\frac{\text{Area of } \Delta ABC}{\text{Area of } \Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times h_1}{\frac{1}{2} \times EF \times h_2} = \left(\frac{BC}{EF} \right)^2 = \left(\frac{AC}{DF} \right)^2 = \left(\frac{AB}{DE} \right)^2$$

= Ratio of square of corresponding length.

संगत लंबाई के वर्ग का अनुपात।

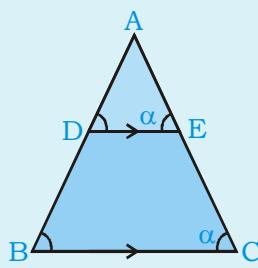
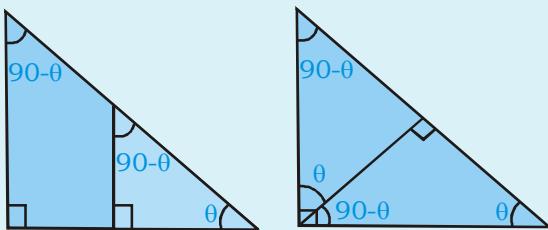
Thales Theorem (थेल्स प्रमेय)

- ❖ If a line (DE) is drawn parallel to one side (BC) of triangle then it will divide other two sides in the same ratio. Hence $AD : DB = AE : EC$

यदि त्रिभुज की एक भुजा (BC) के समांतर एक रेखा (DE) खींची जाए तो वह अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करेगी। अतः $AD : DB = AE : EC$

यदि D, AB का मध्य बिंदु है और DE \parallel BC है तो E, AC का मध्य बिंदु होगा।

Similar figures (समरूप आकृतियाँ)



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

If $AD : DB = 8:5$

$$\text{then } \frac{\text{area } \triangle ADE}{\text{area } \triangle ABC} = \frac{8^2}{13^2} = \frac{64}{169}$$

$$\frac{\text{Ar } \triangle ADE}{\text{Ar } \square DECB} = \frac{64}{169-64} = \frac{64}{105}$$

Convergence of thales theorem

थेल्स प्रमेय का अभिसरण

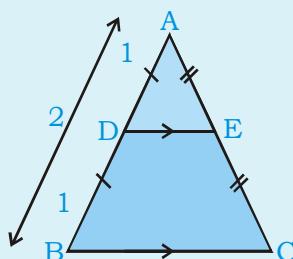
If D & E two points on AB and AC such that

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ then } DE \parallel BC$$

Mid point theorem (मध्य बिंदु प्रमेय)

- The line segment in a triangle joining the mid points of two sides of triangle will be parallel to its third side and is also half of the length of third side.

त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड उसकी तीसरी भुजा के समांतर होगा और तीसरी भुजा की लंबाई का आधा भी होगा।



D, E \rightarrow mid points, $AD = DB$ & $AE = EC$

$DE \parallel BC$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC, \quad DE = \frac{BC}{2}$$

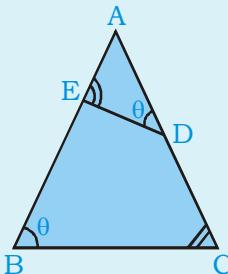
$$\text{Ar } \triangle ADE : \text{Ar } \triangle ABC = 1 : 4$$

$$\text{Ar } \triangle ADE : \text{Ar } \square DECB = 1 : 3$$

Convergence of mid point theorem

मध्य बिंदु प्रमेय का अभिसरण

If D is mid point of AB and $DE \parallel BC$ then E will be mid point of AC.



$\angle A = \text{common}$

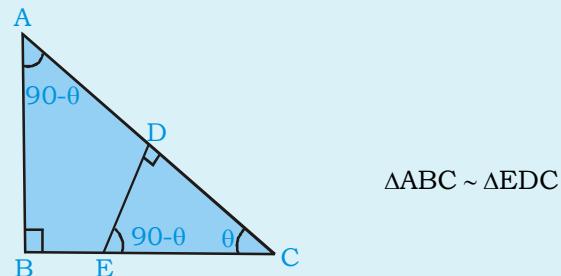
$\angle ABC = \angle ADE = \theta$ (given)

\therefore 3rd angle will also be equal / तीसरा कोण भी बराबर होगा

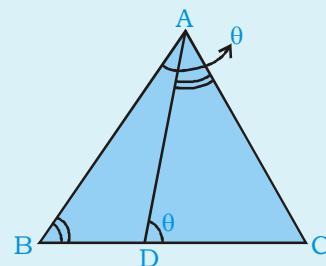
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$

- If we make a right angle triangle in an right angle triangle then big and small right triangle are always similar.

यदि हम एक समकोण त्रिभुज में एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं तो बड़ा और छोटा समकोण त्रिभुज हमेशा समरूप होते हैं।



$\triangle ABC \sim \triangle EDC$

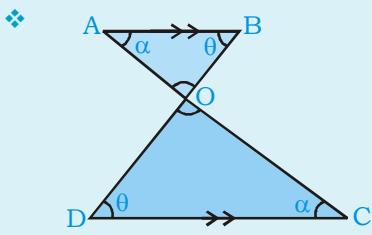
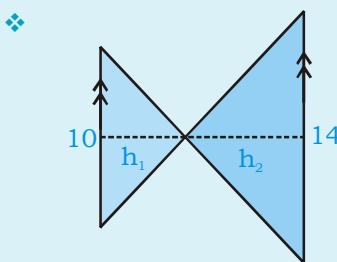


$\angle C = \text{common}$

$\angle A = \angle ADC = \theta$ (given)

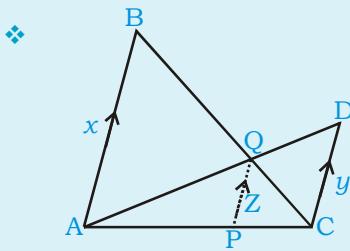
\therefore 3rd angle will be equal $\angle ABC = \angle DAC$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAC$

 $AB \parallel CD$ $\triangle AOB \sim \triangle COD$ 

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{10}{14}$$

$$h_1 : h_2 \Rightarrow 5 : 7$$

 $AB \parallel PQ \parallel CD$

$$Z = \frac{xy}{x+y}$$

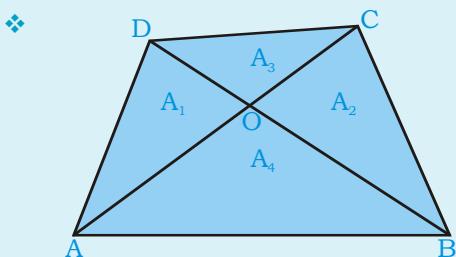
$$\frac{z}{x} = \frac{CP}{CA} \text{ & } \frac{z}{y} = \frac{AP}{AC}$$

$$\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = \frac{CP+AP}{AC} \Rightarrow \frac{z}{x} + \frac{z}{y} = \frac{AC}{AC} = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

(Result)

In any quadrilateral (किसी चतुर्भुज में)



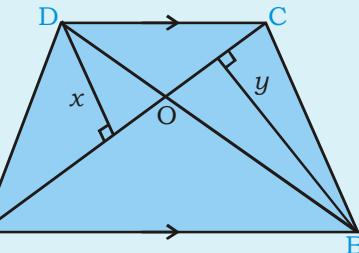
$$\frac{AO}{OC} = \frac{A_1}{A_3} = \frac{A_4}{A_2}$$

$$A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4$$

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_4}{A_2}$$

A_1, A_2, A_3 and A_4 are the areas of respective triangles.

A_1, A_2, A_3 and A_4 क्रमशः त्रिभुजों के क्षेत्रफल हैं।

Proof:-

x and y is the heights of triangles.

$$\text{Area of } \Delta = \frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{height}$$

$$\text{Area of triangle } A_1 = \frac{1}{2} \times AO \times x \quad \dots(1)$$

$$\text{Area of triangle } A_2 = \frac{1}{2} \times OC \times y \quad \dots(2)$$

$$\text{Area of triangle } A_3 = \frac{1}{2} \times CO \times x \quad \dots(3)$$

$$\text{Area of triangle } A_4 = \frac{1}{2} \times AO \times y \quad \dots(4)$$

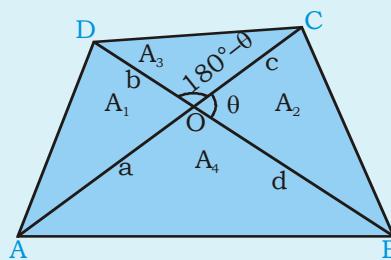
Multiply eq (1) and eq (2)

$$A_1 \times A_2 = \left(\frac{1}{2} \times AO \times x \right) \left(\frac{1}{2} \times CO \times y \right)$$

By commutative property

$$A_1 \times A_2 = \left(\frac{1}{2} \times CO \times x \right) \left(\frac{1}{2} \times AO \times y \right)$$

$A_1 \times A_2 = A_3 \times A_4$ Hence proved

Alternatively:-

$$[\because \sin (180^\circ - \theta) = \sin \theta]$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \times a \times b \sin\theta \quad \dots(1)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times c \times d \sin\theta \quad \dots(2)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \times b \times c \sin\theta \quad \dots(3)$$

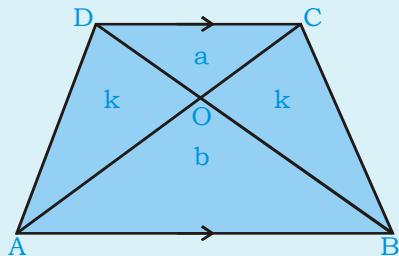
$$A_4 = \frac{1}{2} \times a \times d \sin\theta \quad \dots(4)$$

[Multiply eq. (1) and (2) or (3) and (4)]

$$\frac{1}{2} \times abcd \sin^2\theta = \frac{1}{2} \times abcd \sin^2\theta$$

$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_4$ Hence proved

In a trapezium (एक समलंब चतुर्भुज में)



$$\text{Ar } \triangle ADB = \text{Ar } \triangle ACB$$

$$\text{Common Area} = \triangle AOB$$

$$\triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$\therefore \text{Ar } \triangle AOD = \text{Ar } \triangle BOC$$

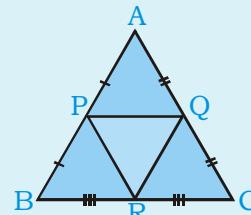
(In a trapezium the triangle formed on non-parallel sides have equal area)

(एक समलंब चतुर्भुज में, असमान भुजाओं पर बने \triangle का क्षेत्रफल बराबर होता है।)

$$K \times K = a \times b$$

$$K = \sqrt{ab}$$

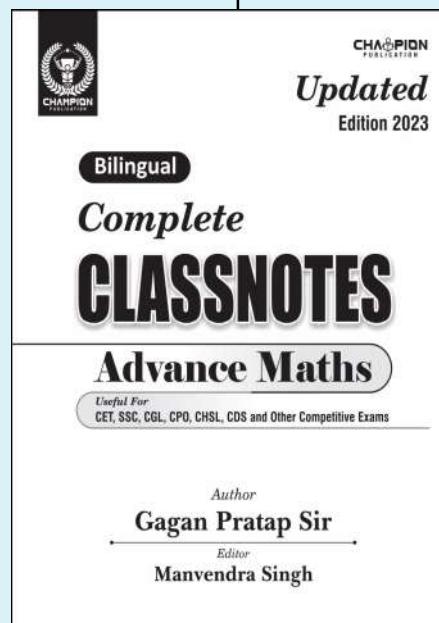
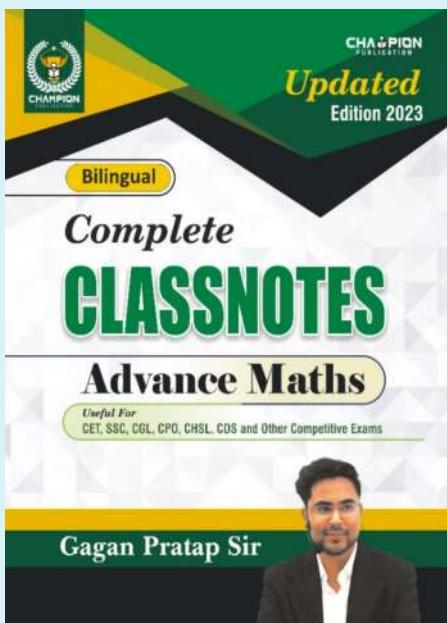
Medial Triangle (मध्य का त्रिभुज)



P, Q, R are mid points / P, Q, R मध्य बिंदु हैं

$$\text{Perimeter of } \triangle PQR = \frac{1}{2} \times \text{perimeter of } \triangle ABC$$

$$\text{Area of } \triangle PQR = \frac{1}{4} \times \text{Area of } \triangle ABC$$



INDEX	
GEOMETRY [गeometri]	
(1) Line and angle [रेखा और कोण]	3-12
(2) Type of Triangle, interior and exterior angle, Inequality of triangle and theorem [त्रिकोण के प्रकार, अंतर्गत कोण व बाहरी कोण, त्रिकोण के असमानता व नियम]	13-44
(3) Sine Rule, Cosine Rule, Angle bisector theorem [साइन रुल, कोसाइन रुल, कोण विभाजक नियम]	45-65
(4) Area of Triangle [त्रिकोण का क्षेत्र]	66-79
(5) Similarity of Triangle [त्रिकोण की समानता]	80-106
(6) Congruency of Triangle and Mass point geometry [त्रिकोण की समानता व मास बिंदु ज्यामिति]	107-122
(7) Centroid of triangle [त्रिकोण का केंद्रिय बिंदु]	123-141
(8) Circumcenter, Orthocenter [परिकेंद्र, अर्थोकेंद्र]	142-164
(9) Centroid [केंद्रिय बिंदु]	165-179
(10) Equilateral triangle/equilateral Triangle [समरूप त्रिकोण, समरूप त्रिकोण]	180-195
(11) Right angled triangle [विलोम त्रिकोण]	196-219
(12) Square, Rectangle, Rhombus [वर्षा, वर्षभास्तु, वर्षभास्तु]	220-239
(13) Parallelogram, Rhombus, Trapezium [समान्तर चतुर्भुज, वर्षभास्तु, समान्तर चतुर्भुज]	240-263
(14) Circle [angle based questions] [वृत्त के कोण आधारीक प्रश्न]	264-305
(15) Circle [Tangent/chord based questions] [वृत्त के वृत्त व छेद आधारीक प्रश्न]	306-335
Co-ordinate Geometry [बिंदु ज्यामिति]	
(1) 2D Mensuration [2 डी मेसुरेशन]	336-361
(1) Triangle [त्रिकोण]	362-374
(2) Quadrilateral [चतुर्भुज]	375-389
(3) Circle/Semi-circle [वृत्त/अर्ध वृत्त]	390-414
(4) Polygon [पॉल्यून]	417-427
3D Mensuration [3 डी मेसुरेशन]	
(1) Cube, Cuboid [घन, घनाएँ]	428-441
(2) Cylinder, Hollow Cylinder [बॉल, खाली बॉल]	442-457
(3) Cone, Cutting of Cone, Frustum [कॉन, कॉन की काट, फ्रूस्टम]	458-475
(4) Sphere, Hemisphere [सैर्फ, अर्ह-सैर्फ]	476-488
(5) Prism [प्रिस्म]	489-493
(6) Pyramid [पायरामिड]	494-503
Trigonometry [त्रिकोणमिति]	
(1) Algebra [आर्गेंग्याल] / 504-659	660-694
Maxima Minima [माइक्सा मिनिमा]	
(2) Height and Distance [हाईट एंड डिस्टेन्स]	602-611
Statistics [स्टैटिस्टिक्स]	
(3) Permutation and Combination [पर्मियूयन एंड कॉम्बिनेशन]	612-634
Probability [प्रॉबिलिटी]	
(4) Statistics [स्टैटिस्टिक्स] / 835-850	851-875
Permutation and Combination [पर्मियूयन एंड कॉम्बिनेशन] / 876-896	



Congruency of triangle (त्रिभुज की सर्वांगसमता)



Congruency of triangle (त्रिभुज की सर्वांगसमता)

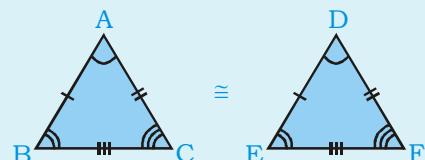
- Two triangles are called congruent if all three corresponding sides are equal and all the three corresponding angles are equal.

दो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते हैं यदि तीनों संगत भुजाएँ बराबर हों और तीनों संगत कोण बराबर हों।

- Congruency of triangle → size and shape is same
 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

त्रिभुज की सर्वांगसमता → आकार व आकृति समान होती है।

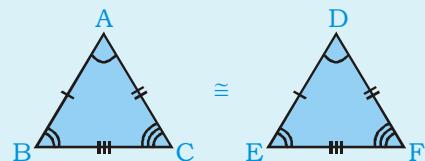
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$



Condition of congruency (सर्वांगसमता की शर्त)

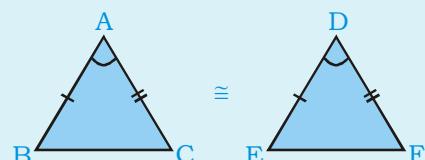
- SSS (side-side-side)** → Corresponding sides are equal.

SSS (भुजा-भुजा-भुजा) → संगत भुजाएँ बराबर हों।



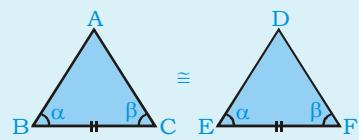
- SAS (side-angle-side)** → Two side and angle between them is equal.

SAS (भुजा-कोण-भुजा) → दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण बराबर होता है।



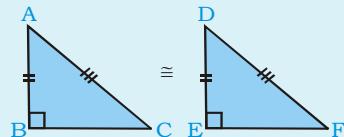
- ASA (Angle-side-angle)** → Two angle and side between them is equal.

ASA (कोण-भुजा-कोण) → दो कोण और उनके बीच की भुजा बराबर होती है।



- (iv) RHS (Right angle-hypotenuse-side)** →

RHS (समकोण-कर्ण भुजा) →



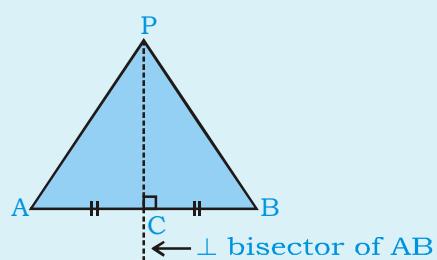
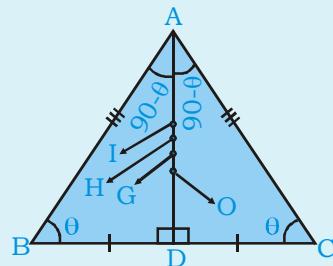
$$\triangle ADB \cong \triangle ADC$$

AD → \perp angle bisector of $\angle A$ / AD → कोण का \perp द्विभाजक

AD → Median (माध्यिका)

AD → \perp bisector of BC

AD → All 4 centres lie on AD.

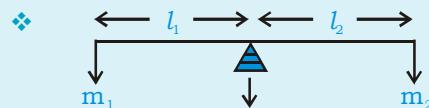


$$\triangle PCA \cong \triangle PCB$$

$$PA = PB$$

P is any point

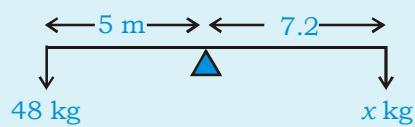
Mass point geometry (द्रव्यमान बिंदु ज्यामिति)



Center of mass (द्रव्यमान केन्द्र)

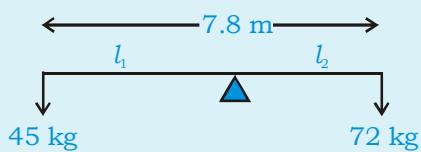
$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$$



Find x = ?

$$\frac{48}{x} = \frac{7.2}{5} \Rightarrow x = \frac{100}{3} \text{ kg} = 33.3 \text{ kg}$$

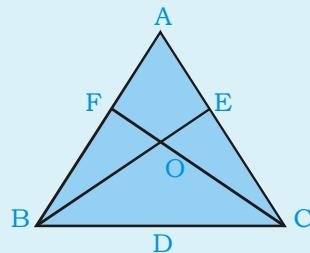


Find $l_1 = ?$

$$\begin{array}{lll} m \rightarrow & 45 & : \quad 72 \\ & 5 & : \quad 8 \\ l \rightarrow & 8 & : \quad 5 \\ & \downarrow \times 0.6 & \\ & 4.8 \text{ m} & \\ \therefore 13 & \xrightarrow{\times 0.6} 7.8 & \end{array}$$

Ceva's Theorem (सेवा की प्रमेय)

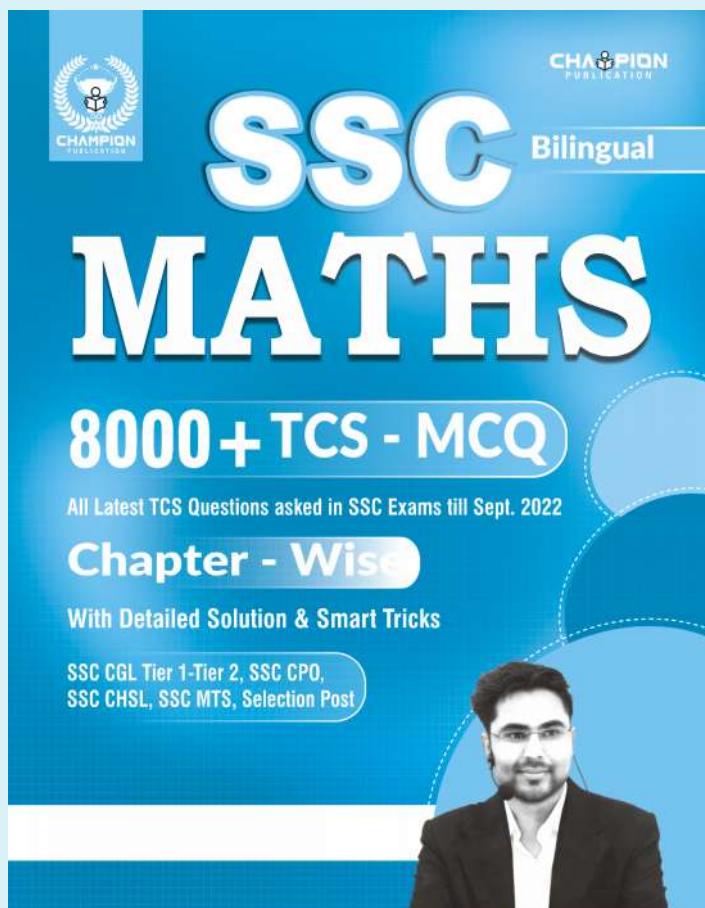
- In $\triangle ABC$, AD, BE and CF are the cevians i.e. any line from vertex to opposite side.
- त्रिभुज ABC में, AD, BE और CF केवियन हैं यानी शीर्ष से विपरीत भुजा पर कोई रेखा।



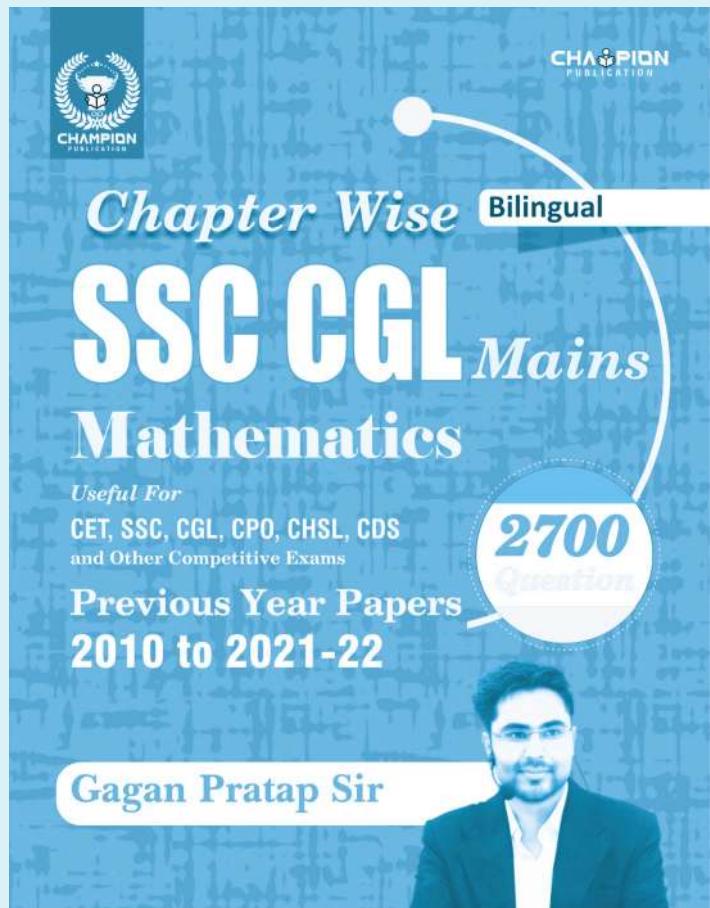
$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$$

$$\frac{AO}{OD} + \frac{BO}{OE} + \frac{CO}{OF} = 2$$



Gagan Pratap Sir

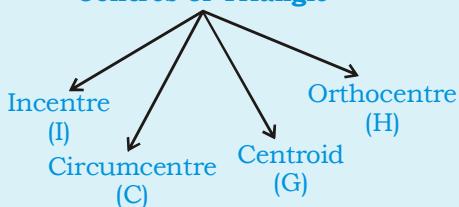




Centre of Triangle (त्रिभुज के केन्द्र)

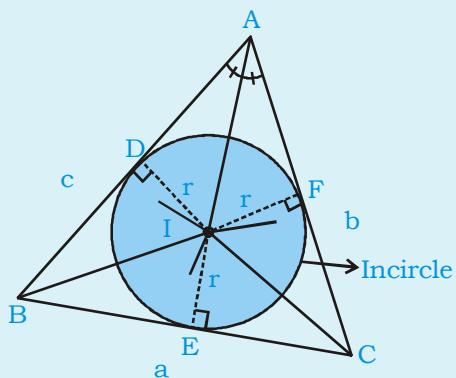


Centres of Triangle



Incentre (I) (अन्तःकेन्द्र)

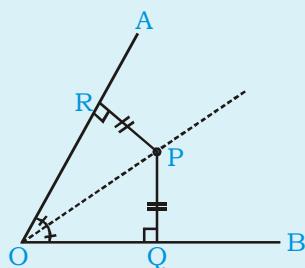
- Incentre is the intersection point of all three internal angle bisectors of $\triangle ABC$.
अन्तःकेन्द्र $\triangle ABC$ के सभी तीन आंतरिक कोण समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिंदु है।



Centre of incircle is called incentre and its radius is called inradius (r)

अन्तःवृत्त के केन्द्र को अन्तःकेन्द्र और इसकी त्रिज्या को अन्तःत्रिज्या (r) कहा जाता है

- Incentre always lies inside the triangle.
अन्तःकेन्द्र हमेशा त्रिभुज के अंदर स्थित होता है।
- Incentre is equidistant from all three sides of triangle.
अन्तःकेन्द्र त्रिभुज के तीनों ओर से समदूरस्थ है।



P is any point on angle bisector of $\angle AOB$

P , $\angle AOB$ के कोण द्विभाजक पर कोई बिंदु है

$$PR = PQ$$

$$ID = IE = IF = r, \DeltaADI \cong \DeltaAFI$$

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$$

$$\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$$

$$\text{In } \triangle ABC \rightarrow \frac{a+b+c}{2} = \text{Semi-perimeter (s)} \\ \therefore \text{Area } \triangle ABC = \Delta = r \times s$$

$$r = \frac{\Delta}{s}$$

$$\text{Inradius} = \frac{\text{Area}}{\text{Semiperimeter}}$$

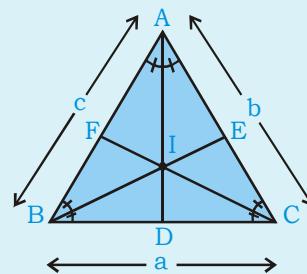
$$\Delta_{ABC} = \Delta_{BIC} + \Delta_{AIC} + \Delta_{AIB} \quad (\text{Area})$$

$$\Delta = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = r \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = r \times s$$

- If altitudes h_1, h_2, h_3 are given then
यदि ऊँचाई h_1, h_2, h_3 दी गई हो तो

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

(Result)



$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$$

$$\frac{BI}{IE} = \frac{c+a}{b}$$

$$\frac{CI}{IF} = \frac{a+b}{c}$$

Proof:-

$$\text{In } \triangle ACD, \frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{CD} \quad \dots(i)$$

$$\text{In } \triangle ABC, \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{BD}{CD}$$

$$\text{Add 1 both side } \Rightarrow \frac{b+c}{c} = \frac{BD+CD}{CD}$$

$$\text{From eq. (i)} \Rightarrow \frac{b+c}{d} = \frac{AI}{ID}$$

$$\text{In } \triangle BAE, \frac{BI}{IE} = \frac{AB}{AE} = \frac{C}{AE} \quad \dots(\text{ii})$$

$$\text{In } \triangle BAC, \frac{BC}{AB} = \frac{EC}{AE}$$

$$\text{Add 1 both side } \Rightarrow \frac{a+c}{c} = \frac{b}{AE}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{c}{AC}$$

$$\text{From eq. (ii)} \Rightarrow \frac{a+c}{b} = \frac{BI}{IE}$$

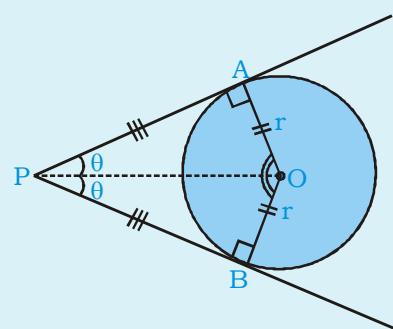
$$\text{In } \triangle CBF, \frac{CI}{IF} = \frac{BC}{BF} = \frac{a}{BF} \quad \dots(\text{iii})$$

$$\text{then } \triangle CAB, \frac{BC}{AC} = \frac{AF}{BF}$$

Add 1 both side

$$\frac{b+a}{a} = \frac{c}{BF} \Rightarrow \frac{b+a}{c} = \frac{a}{BF}$$

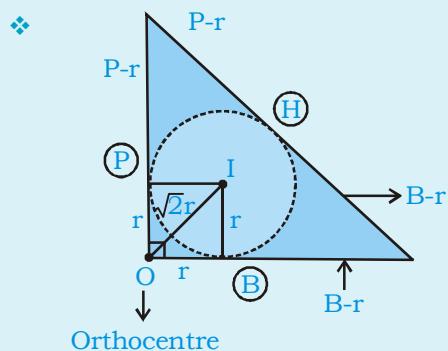
$$\text{From eq. (iii), } \frac{b+a}{c} = \frac{CI}{IF}$$



$$PA = PB$$

$$\triangle AOP \cong \triangle BOP$$

In right angle triangle (समकोण त्रिभुज में)



$$r = \frac{P + B - H}{2}$$

$$P - r + B - r = H$$

$$P + B - 2r = H$$

$$\frac{P + B - H}{2} = r$$

Distance between orthocentre and incentre = OI

$$= \sqrt{2}r$$

लंबकेंद्र और अंतःकेंद्र के बीच की दूरी = OI = $\sqrt{2}r$

Sides (triplet) Radius (r)

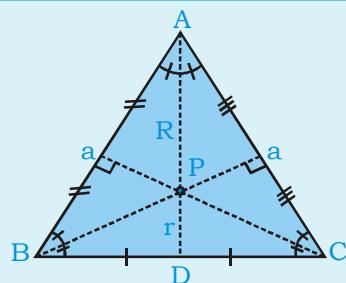
भुजाएं (ट्रिप्लेट) क्रिया (r)

$$(3, 4, 5) \quad r = 1$$

$$(3k, 4k, 5k) \quad r = k$$

$$(39, 52, 65) \quad r = 13$$

For equilateral Triangle (समबाहु त्रिभुज के लिए)



Point (बिंदु) = I, O, G, H (lie at same place P)

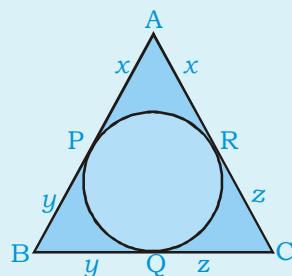
$$AP = R, PD = r$$

$$h = AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2}{\frac{3a}{2}} \Rightarrow r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, r = \frac{h}{3}$$

$$R = \frac{2h}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\left| \frac{R}{r} = \frac{2}{1} \right|, \frac{\text{Area of circumcircle}}{\text{Area of incircle}} = \frac{4}{1}$$

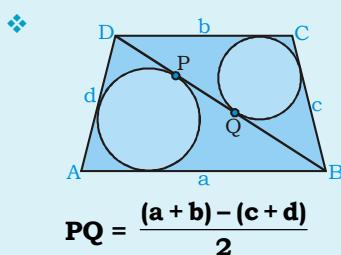


$$S = x + y + z$$

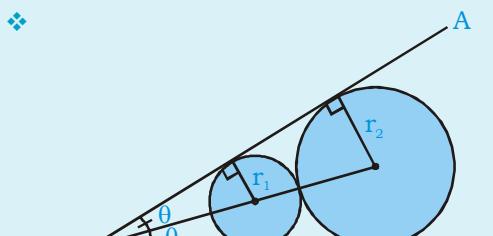
$$\text{Area of } (\Delta) \triangle ABC = \sqrt{(x+y+z) \cdot xyz}$$

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y+z)} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{xyz}{(x+y+z)}}$$

In any quadrilateral (किसी चतुर्भुज में)

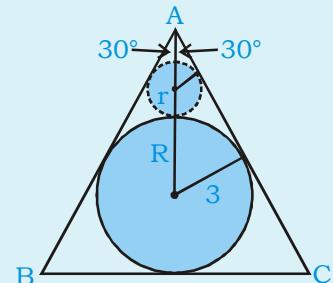


$$PQ = \frac{(a+b)-(c+d)}{2}$$



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

In an Equilateral Triangle (समबाहु त्रिभुज में)

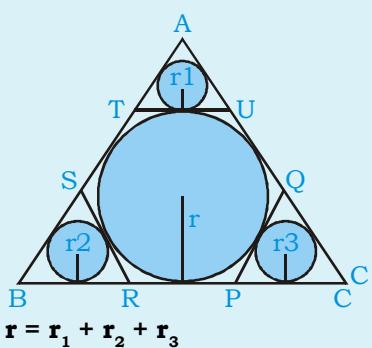


$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{r}{R} = \frac{1}{3} = \frac{\text{Area small circle}}{\text{Area large circle}} = \frac{1}{9}$$

- ❖ A circle is inscribed in $\triangle ABC$. Three tangents PQ, RS and TU are drawn of this circle $PQ \parallel AB$, $RS \parallel AC$ and $TU \parallel BC$. Three other incircles are also drawn as shown in figure find correct relation?

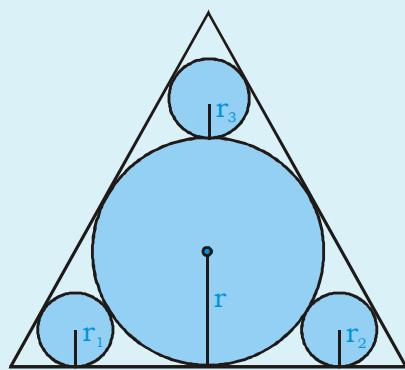
एक वृत त्रिभुज ABC के अंदर बनाया गया है। इस वृत की तीन स्पर्श रेखाएं PQ, RS, और TU इस प्रकार खींची जाती है कि $PQ \parallel AB$, $RS \parallel AC$ और $TU \parallel BC$ है। तीन अतिरिक्त अन्तः वृत खींचें जाते हैं जो चित्र में दर्शाए गए हैं। सही संबंध है:



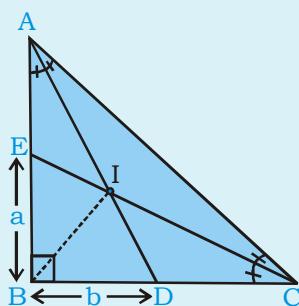
$$r = r_1 + r_2 + r_3$$

- ❖ Find relation between r, r_1, r_2, r_3 ?

r, r_1, r_2, r_3 के बीच संबंध ज्ञात करें।



$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

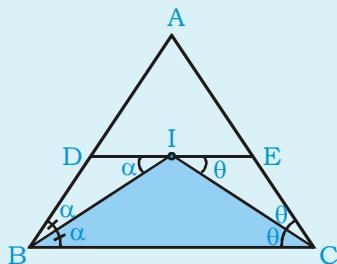


$$BI = \sqrt{ab} = \sqrt{2} r$$

r = radius of $\triangle ABC$

$$r = \frac{BI}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}}$$

In Any Triangle (किसी त्रिकोण में)



$DE \parallel BC$

$$DI = DB, \quad IE = EC$$

$\triangle ABD$ and $\triangle ACE$ are isosceles triangles.

I = Incentre (I)

$$DE = BD + EC$$

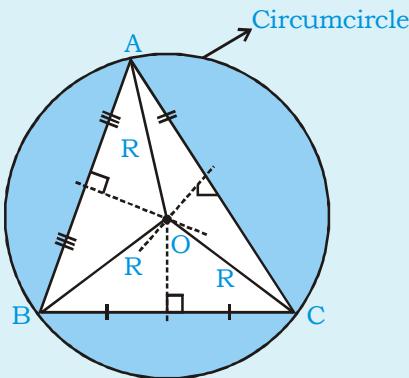


Circumcentre and Orthocentre (परिकेन्द्र और लम्बकेन्द्र)

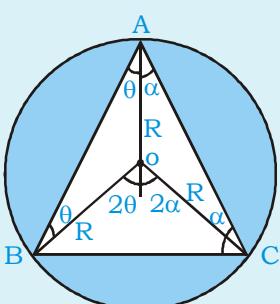


Circumcentre (परिकेन्द्र)

- Intersection point of all 3 perpendicular bisectors.
सभी 3 लम्ब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदन बिंदु।

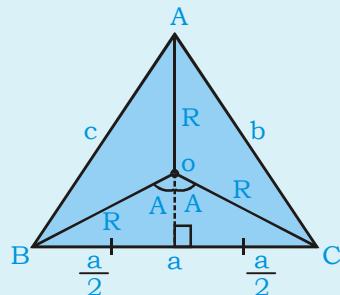


- Centre of circumcircle is called circumcentre (O)
परिवृत के केंद्र को परिकेन्द्र (O) कहा जाता है
- Radius of circumcircle is called circumradius (R)
परिवृत की त्रिज्या को परित्रिज्या (R) कहा जाता है।
- O is equidistant from all 3 vertex of ΔABC
 $O, \Delta ABC$ के सभी 3 शीर्षों से समदूरस्थ है
- $OA = OB = OC = R$
- Circumcentre may lie inside, outside or on the Δ .
परिकेन्द्र अंदर, बाहर या त्रिभुज पर स्थित हो सकता है।
- O is the intersection point of all 3 \perp bisectors of sides
 O सभी 3 \perp भुजाओं के समद्विभाजक का प्रतिच्छेदन बिंदु है
- $\angle BOC = 2\angle A; \angle AOB = 2\angle C; \angle AOC = 2\angle B$

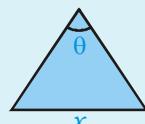


$$\angle BOC = 2\theta + 2\alpha = 2(\theta + \alpha) = 2\angle A$$

Circumradius (R) / परित्रिज्या (R)



$$\sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A}$$



$$R = \frac{x}{2 \sin \theta}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

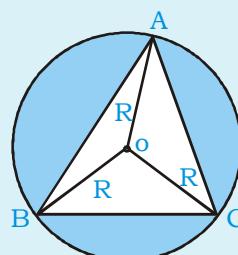
$$\text{Area of triangle } (\Delta) = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2\Delta}{bc}$$

$$\therefore R = \frac{a}{2 \times \frac{2\Delta}{bc}} \Rightarrow R = \frac{abc}{4\Delta} \text{ or } \Delta = \frac{abc}{4R}$$

Position of circumcentre (परिकेन्द्र की स्थिति)

A. Acute angle triangle (Inside the Δ) :

न्यून कोण त्रिभुज (Δ के अंदर) :

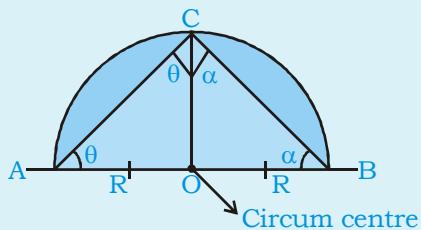


$$OA = OB = OC = R$$

O = Circumcentre / परिकेन्द्र

B. Right angle triangle (Mid point of hypotenuse):-

समकोण त्रिभुज (कर्ण का मध्य बिंदु)



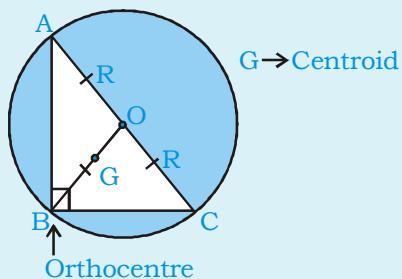
$$OA = OB = OC = R$$

$$AB = \text{Hypotenuse} / \text{कर्ण}, R = \frac{AB}{2}$$

$$2\theta + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\theta + \alpha = 90^\circ$$

$$R = \frac{\text{Hypotenuse}}{2} = \frac{H}{2}$$



$$BO = R = \text{distance between orthocentre and circumcentre} = \text{median of hypotenuse} =$$

$$\text{shortest median} = \frac{H}{2}$$

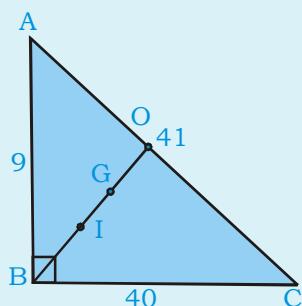
$$BO = R = \text{लम्बकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी} = \text{कर्ण की माध्यिका} = \text{सबसे छोटी माध्यिका} = \frac{H}{2}$$

$$BG : GO = 2 : 1$$

$$GO \rightarrow \text{distance between centroid and circumcentre}$$

$$= \frac{R}{3} = \frac{H}{6}$$

$$GO \rightarrow \text{केन्द्रक और परिकेन्द्र के बीच की दूरी} = \frac{R}{3} = \frac{H}{6}$$

Example (उदाहरण) :

$$R = \frac{41}{2} = 20.5 \text{ cm}$$

$$r = \frac{9 + 40 - 41}{2} = 4 \text{ cm}$$

BI (Distance between orthocentre and incentre)

$$= r\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$BI (\text{लम्बकेन्द्र और अंतःकेन्द्र के बीच की दूरी}) = r\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Distance between orthocentre and circumcentre

$$\Rightarrow BO = R = 20.5$$

$$\text{लम्बकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी} \Rightarrow BO = R = 20.5$$

BG (Distance between orthocentre and centroid)

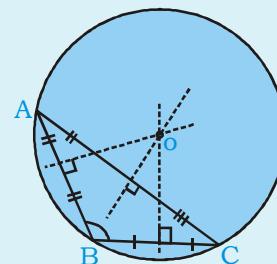
$$= \frac{h}{3} = \frac{41}{3} = 13\frac{2}{3} \text{ cm}$$

$$BG (\text{लम्बकेन्द्र और केन्द्रक के बीच की दूरी}) = \frac{h}{3} = \frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$$

सेमी

C. Obtuse angle triangle (Outside triangle)

अधिक कोण त्रिभुज (त्रिभुज के बाहर)



❖ For any triangle distance between incentre and circumcentre (d)

किसी भी प्रकार के त्रिभुज में अंतःकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच दूरी (d)

$$d = \sqrt{R^2 - 2R \cdot r}$$

Where / यहाँ

$$R \rightarrow \text{Circumradius} / \text{परित्रिज्या}$$

$$r \rightarrow \text{Inradius} / \text{अंतःत्रिज्या}$$

 $d \geq 0$

$$\therefore R^2 - 2Rr \geq 0 \Rightarrow R^2 \geq 2Rr \Rightarrow R \geq 2r$$

$$\therefore \frac{R}{r} \geq 2$$

$$\left(\frac{R}{r} \right)_{\min} = 2$$

Ex. → $r = 6, R = 11.2 \text{ cm}$, find area of Δ

$$\frac{R}{r} \geq 2 \text{ Here } \frac{11.2}{6} < 2 ; \text{ No } \Delta \text{ is possible.}$$

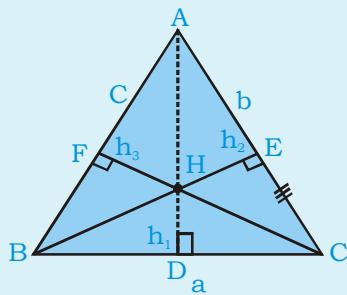
 \therefore Area cannot be determined.

(क्षेत्रफल निर्धारित नहीं किया जा सकता है)

Orthocentre (लम्बकेन्द्र)

- Orthocentre (H) is intersection point of all three altitudes of a Δ and may lie inside, upon and outside the Δ .

लम्बकेन्द्र (H) Δ की सभी ऊंचाई का मिलन बिंदु है और यह Δ के अंदर बाहर या शीर्ष पर स्थित हो सकता है।



$$\text{Area } \Delta ABC = \frac{1}{2} ah_1 = \frac{1}{2} bh_2 = \frac{1}{2} ch_3$$

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2 \times \text{Area} = \text{Constant}$$

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

- $AB + BC + CA > AD + BE + CF$;

$$AB > AD, BC > BE, AC > CF$$

$$AB + BC + AC > AD + BE + CF$$

- $\angle BHC = 180^\circ - \angle A$

$$\angle AHC = 180^\circ - \angle B$$

$$\angle AHB = 180^\circ - \angle C$$

In Quad AFHE

$$\angle F = \angle E = 90^\circ \text{ each}$$

$$\angle A + \angle H = 180^\circ$$

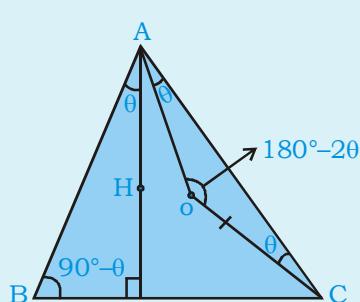
$$\angle H = 180^\circ - \angle A$$

$$\therefore \angle BHC = 180^\circ - \angle A$$

(V. opp. Angles)

- H** → Orthocentre / लम्बकेन्द्र

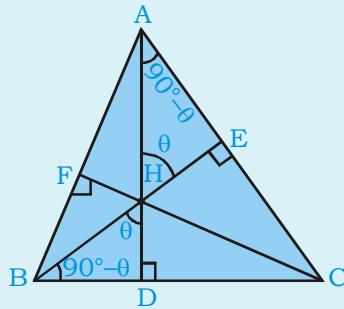
O → Circumcentre / परिकेन्द्र



$$\angle AOC = (90 - \theta) \times 2 = 180 - 2\theta$$

$$\angle OAC = \angle OCA = \theta$$

$$\therefore \angle BAH = \angle OAC$$



$$AH \times HD = BH \times HE = CH \times HF$$

$\Delta AHE \sim \Delta BHD$

$$\frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HD}$$

$$\Rightarrow AH \times HD = BH \times HE$$

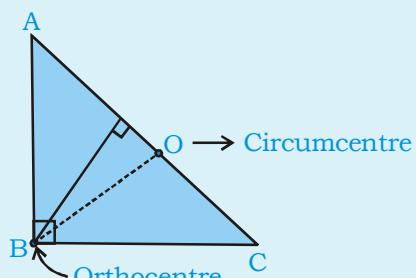
Position of orthocentre (लम्बकेन्द्र की स्थिति)

A. Acute angle triangle:- Always inside the triangle

A. न्यूनकोण त्रिभुजः- सदैव त्रिभुज के अंदर होता है

B. Right angle triangle (On 90° vertex):

B. समकोण त्रिभुज (90° शीर्ष पर):



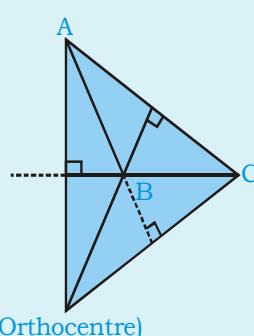
$$AB \perp BC$$

OB = Distance between orthocentre and circumcentre = R = $\frac{H}{2}$

$$OB = \text{लम्बकेन्द्र और परिकेन्द्र के बीच की दूरी} = R = \frac{H}{2}$$

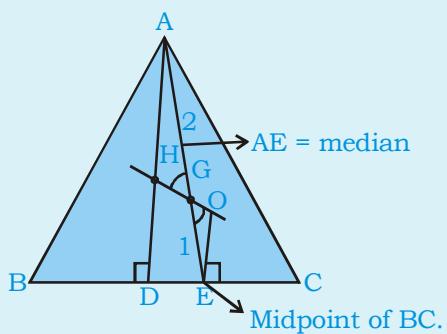
Obtuse angle triangle (Outside triangle):-

अधिककोण त्रिभुज (त्रिभुज के बाहर):-



Euler's line (यूलर की रेखा)

- In any triangle H, G, O always in a straight line
किसी भी त्रिभुज में H, G, O हमेशा एक सीधी रेखा में होंगे



$AE = \text{median}$
E is mid point of BC.

$$\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1}$$

$$\Delta AHG \sim \Delta EOG$$

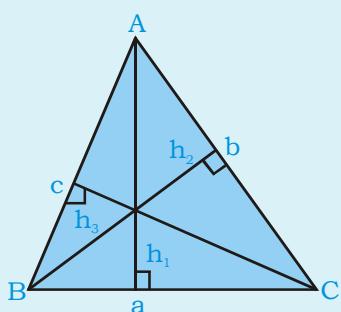
$$\frac{HG}{GO} = \frac{2}{1} = \frac{AH}{OE}$$

- If h_1, h_2, h_3 are 3 altitudes of a triangle
यदि h_1, h_2, h_3 एक त्रिभुज के 3 शोषलंब हैं

$$\text{Then } \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} < h_3 < \frac{h_1 h_2}{h_1 - h_2}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} ah_1 = \frac{1}{2} bh_2 = \frac{1}{2} ch_3$$

$$a = \frac{2\Delta}{h_1}, b = \frac{2\Delta}{h_2}, c = \frac{2\Delta}{h_3}$$

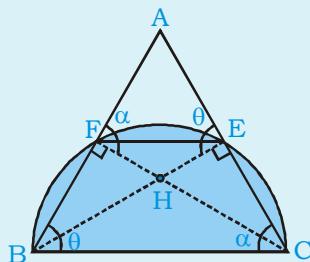


$$|a - b| < c < |a + b|$$

$$\left| \frac{2\Delta}{h_1} - \frac{2\Delta}{h_2} \right| < \left| \frac{2\Delta}{h_3} \right| < \left| \frac{2\Delta}{h_1} + \frac{2\Delta}{h_2} \right|$$

$$\frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2} < \frac{1}{h_3} < \frac{h_2 + h_1}{h_1 h_2}$$

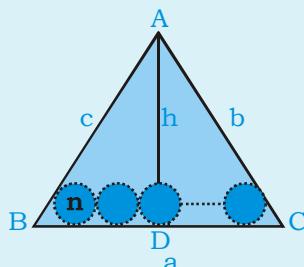
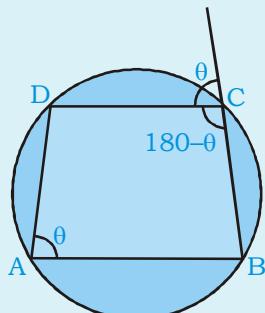
$$\frac{h_1 h_2}{h_1 - h_2} > h_3 > \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}$$



$$\Delta AEF \sim \Delta ABC$$

- Interior angle of a cyclic quadrilateral is equal to the opposite exterior angle.

चक्रीय चतुर्भुज का आंतरिक कोण विपरीत बाहरी कोण के बराबर होता है।



n circles of equal radii r are made on side 'BC'.

समान त्रिज्या r वाले n वृत्त 'BC' भुजा पर बनाए गए हैं।

$$r = \frac{\text{Area } \Delta ABC}{s + (n-1) \cdot h}$$

s = semi-perimeter / (अर्धपरिमाप)

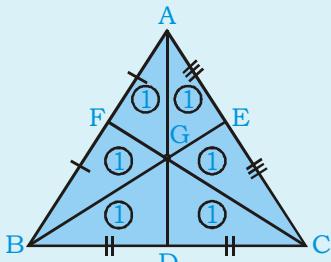


Centroid (केन्द्रक)



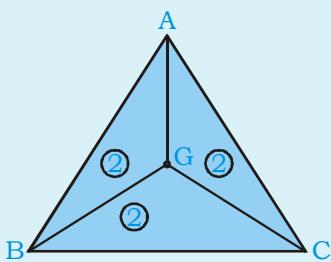
Centroid (केन्द्रक)

- ❖ Centroid is the intersection point of all 3 medians of triangle.
केन्द्रक, त्रिभुज की सभी 3 माध्यिकाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु है।
- ❖ Median divides the triangle into two equal areas.
माध्यिका त्रिभुज को दो समान क्षेत्रों में विभाजित करती है।
- ❖ Centroid always lies inside the triangle.
केन्द्रक हमेशा त्रिभुज के अंदर स्थित होता है।

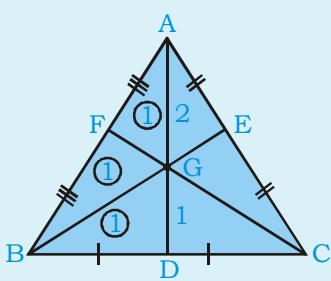


- ❖ 6 triangle made by 3 medians have equal area.
3 माध्यिकाओं द्वारा बनाए गए 6 त्रिभुज का क्षेत्रफल बराबर होता है।
- ❖ Area of each triangle = $\frac{1}{6}$ Area of $\triangle ABC$

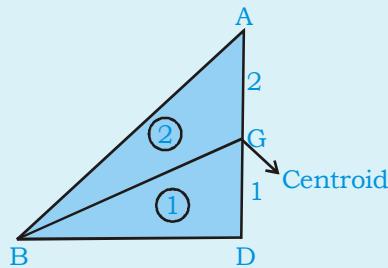
$$\text{Area } \triangle AGC = \text{Area } \triangle AGB = \text{Area } \triangle BGC = \frac{1}{3} \text{ Area } \triangle ABC$$



- ❖ Centroid always divides median in the ratio 2 : 1.
केन्द्रक हमेशा माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।



$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$$

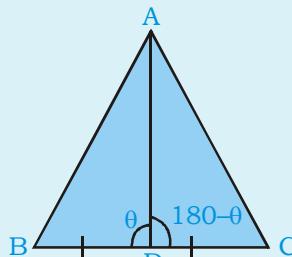


$$AG = \frac{2}{3} AD$$

$$GD = \frac{1}{3} AD$$

Apollonius theorem (अपोलोनियस प्रमेय)

- ❖ To find length of median.
माध्यिका की लम्बाई ज्ञात करने के लिए



$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

$$AB^2 + AC^2 = 2 \left(AD^2 + \frac{BC^2}{4} \right)$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2 (AD^2 + BD^2)$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2 (AD^2 + CD^2) \quad (\text{as } BD = CD)$$

Proof:-

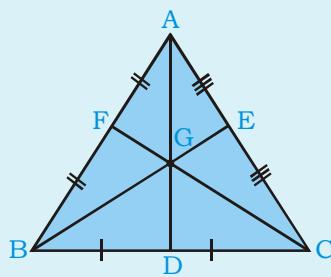
$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos\theta$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD \cos\theta$$

$$AB^2 + AC^2 = 2 AD^2 + BD^2 + CD^2$$

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2 (AD^2 + BD^2)}$$



$$AB^2 + AC^2 = 2 \left(AD^2 + \frac{BC^2}{4} \right)$$

$$AB^2 + BC^2 = 2 \left(BE^2 + \frac{AC^2}{4} \right)$$

$$AC^2 + BC^2 = 2 \left(CF^2 + \frac{AB^2}{4} \right)$$

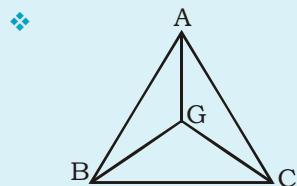
$$2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2AD^2 + \frac{BC^2}{2} + 2BE^2 + \frac{AC^2}{2} +$$

$$2CF^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$$

$$\frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} = \frac{4}{3}$$

$$1 < \frac{AB + BC + CA}{AD + BE + CF} < \frac{4}{3}$$



$$GB + GC > BC$$

$$GA + GC > AC$$

$$AG + BG > AB$$

$$AG = \frac{2}{3} AD$$

$$BG = \frac{2}{3} BE$$

$$CG = \frac{2}{3} CF$$

$$2(AG + BG + CG) > AB + BC + CA$$

$$2 \times \frac{2}{3} (AD + BE + CF) > AB + BC + CA$$

$$4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$$

❖ $AB + AC > 2AD$

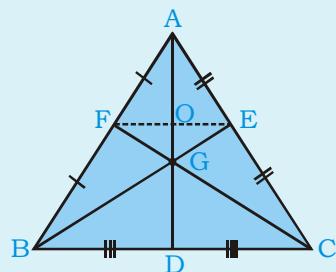
$$AB + BC > 2BE$$

$$AC + BC > 2CF$$

$$2(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)$$

$$\therefore AB + BC + AC > AD + BE + CF$$

$$\therefore \frac{AB + BC + AC}{AD + BE + CF} > 1$$



$$AO : OG : GD = 3 : 1 : 2$$

BE and CF are medians.

$\triangle AFE \sim \triangle ABC$

Let $AD = 6$ unit

$$\therefore AG : GD = 2 : 1$$

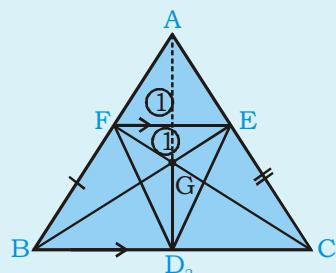
$\therefore AG = 4$ unit and $GD = 2$ unit

$$F, E \text{ are mid points} \Rightarrow AO = OD = \frac{6}{2} = 3 \text{ unit}$$

$$OG = AG - AO = 4 - 3 = 1 \text{ unit}$$

$$\therefore AO : OG : GD = 3 : 1 : 2$$

$$\text{Area of } \triangle GEF = \frac{1}{12} \text{ Area } \triangle ABC$$



$$\triangle EFG \sim \triangle BCG$$

$$EF = \frac{BC}{2}$$

Side $\rightarrow 1 : 2$

Area $\rightarrow 1 : 4$

$$\text{Area } \triangle ABC = \text{Ar } \triangle BGC \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

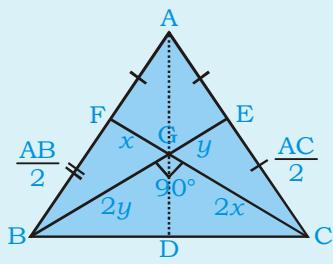
$$\therefore \frac{\text{Area } \triangle GEF}{\text{Area } \triangle ABC} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Area } \triangle EFG = \text{Area } \triangle DFG = \text{Area } \triangle DEG = 1$$

$$\therefore \text{Area } \triangle DEF = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ unit}$$

$$\therefore \frac{\text{Area } \triangle DEF}{\text{Area } \triangle ABC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

❖ If two medians of a \triangle intersect each other at 90°
यदि \triangle की दो माध्यिकाएँ एक दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करती हैं



$$BE^2 + CF^2 = AD^2 \quad (\text{AD is 3rd median})$$

$$\mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 = 5\mathbf{BC}^2$$

$$x^2 + 4y^2 = \frac{\mathbf{AB}^2}{4}$$

$$y^2 + 4x^2 = \frac{\mathbf{AC}^2}{4}$$

$$5(x^2 + y^2) = \frac{\mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2}{4}$$

$$5(4x^2 + 4y^2) = \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2$$

$$\Rightarrow 5\mathbf{BC}^2 = \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2$$

(Property)

❖ Special case in isosceles Δ

समद्विबाहु Δ में विशेष मामला

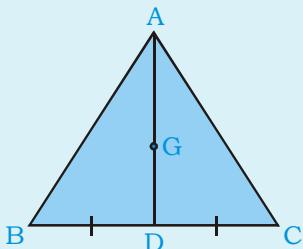
$$AB = AC \Rightarrow BE = CF$$

$$\mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 = 5\mathbf{BC}^2$$

$$2\mathbf{AB}^2 = 5\mathbf{BC}^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{BC}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

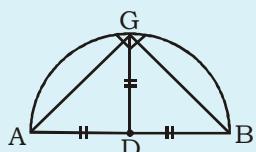
❖



If AG = BC or AD = 1.5 BC

$$\Rightarrow \angle BGC = 90^\circ$$

Proof:-



G = centroid

$$AD = AG + GD$$

$$\angle BGC = 90^\circ$$

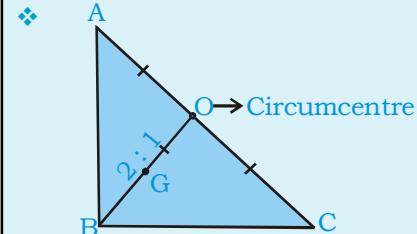
$$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1} \text{ by centroid property and AD is median}$$

Hence, AG = BC

$$\therefore \frac{2}{3} AD = BC$$

$$\therefore AD = \frac{3}{2} BC = 1.5 BC$$

Right Angle Triangle (समकोण त्रिभुज)



BO = Hypotenuse median = Shortest median

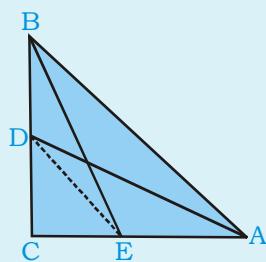
BO = कर्ण की माध्यिका = सबसे छोटी माध्यिका

$$= R = \frac{H}{2}$$

$$BG = \frac{H}{3}, GO = \frac{H}{6}$$

❖ If D, E are two points on BC and AC respectively.

यदि D, E, BC और AC पर स्थित दो बिंदु हैं।



$$AD^2 = CD^2 + CA^2$$

$$BE^2 = CE^2 + BC^2$$

$$AD^2 + BE^2 = \frac{CD^2 + CE^2}{DE^2} + \frac{CA^2 + BC^2}{AB^2}$$

$$\therefore AD^2 + BE^2 = DE^2 + AB^2$$

If D, E are mid points, AD and BE are medians,

$$\text{then } DE = \frac{AB}{2} = R$$

यदि D, E मध्य बिंदु हैं, AD और BE माध्यिकाएँ हैं, तो $DE = \frac{AB}{2} = R$

$$AD^2 + BE^2 = DE^2 + AB^2$$

$$AD^2 + BE^2 = \frac{AB^2}{4} + AB^2$$

$$AD^2 + BE^2 = \frac{5AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4(AD^2 + BE^2) = 5AB^2$$

$$\Rightarrow AB = 2R$$

$$AD^2 + BE^2 = \frac{5}{4} \times 4R^2$$

$$\therefore AD^2 + BE^2 = 5 \times R^2$$

$$\mathbf{AD^2 + BE^2 = 5R^2}$$

- ❖ Area of $\Delta ABC = \frac{4}{3} \times$ Area of triangle made by using length of all 3 medians.

ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{4}{3} \times$ सभी 3 माध्यिकाओं की लंबाई का उपयोग करके बनाया गया त्रिभुज का क्षेत्रफल।

Example (उदाहरण) :

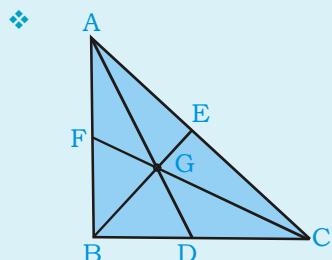
Length of 3 medians 15, 36, 39. Then find the area of triangle ABC.

3 माध्यिकाओं की लंबाई 15, 36, 39 है तो त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात करे।

Area of triangle made by 15, 36, 39 (triplets)

$$= \frac{1}{2} \times 15 \times 36 = 270$$

$$\text{Area of } \Delta ABC (\text{main } \Delta) = \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 15 \times 36 \right) = 360 \text{ cm}^2$$

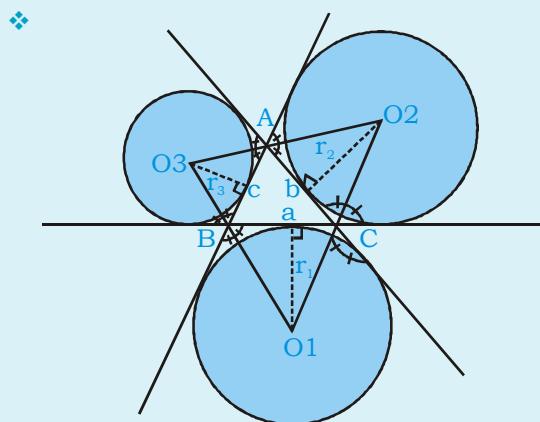


$$BE = R = \frac{AC}{2}$$

$$AD^2 + CF^2 = 5.R^2$$

$$AG^2 + CG^2 = 5BG^2$$

Exocentre (बाह्यकेंद्र)



$$r_1 = \frac{\Delta}{S-a}$$

$$r_2 = \frac{\Delta}{S-b}$$

$$r_3 = \frac{\Delta}{S-c}$$

$$\angle BO_1C = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$$

$$r_1 = \frac{rs}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

$$\text{Where, } s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = s^2$$

$$\text{If we make incircle in } \Delta ABC \text{ with radius. } r \text{ then } r = \frac{\Delta}{S}$$

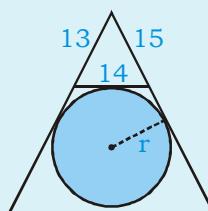
यदि हम त्रिज्या r के साथ ΔABC में वृत्त बनाते हैं। तो $r = \frac{\Delta}{S}$

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{\Delta}{S} \cdot \frac{\Delta}{S-a} \cdot \frac{\Delta}{S-b} \cdot \frac{\Delta}{S-c} = \frac{\Delta^4}{\Delta^2}$$

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \Delta^2$$

$$\text{Area } (\Delta) \text{ of } \Delta ABC = \sqrt{r.r_1r_2r_3}$$

Example (उदाहरण) :



Find $r = ?$

$$\Delta = 84 \text{ cm}^2, S = 21$$

$$r = \frac{84}{21-14} = 12 \text{ cm}$$

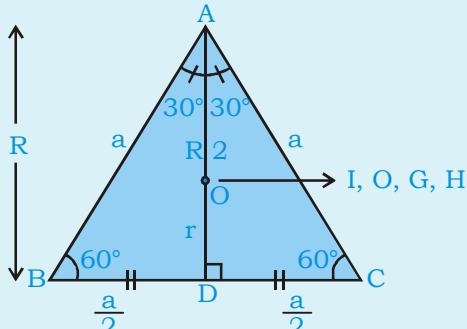


Equilateral triangle (समबाहु त्रिभुज)



Equilateral Triangle (समबाहु त्रिकोण)

- All sides are equal. / सभी भुजाएँ समान हैं।



$AD \rightarrow$ median, angle bisector, altitude, \perp bisector

$$\text{of } \triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$AD \rightarrow \triangle ABC$ की मध्यिका, कोण द्विभाजक, ऊँचाई, \perp द्विभाजक

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$\triangle ADB \cong \triangle ADC$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

All centre lies at same point.

सभी केंद्र एक ही बिंदु पर स्थित हैं।

$$\text{Circumradius (R)} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad R = \frac{2}{3} h,$$

$$\text{Inradius (r)} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad r = \frac{1}{3} h$$

$$\frac{R}{r} = \frac{2}{1} \left| \frac{\text{Area of circumcircle}}{\text{Area of incircle}} \right| = \frac{4}{1}$$

- All 3 medians / सभी 3 मध्यिकाएँ $= \frac{\sqrt{3}}{2} a =$ Height

- Side / भुजा Height / ऊँचाई Area / क्षेत्र**

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & \frac{\sqrt{3}}{2} a & \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \end{array}$$

$$2 \text{ cm} \quad \sqrt{3} \text{ cm} \quad \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$2 \text{ k} \quad \sqrt{3} \text{ k} \quad \sqrt{3} \text{ k}^2$$

$$28 \text{ cm} \quad 14\sqrt{3} \quad 196\sqrt{3}$$

$$6\sqrt{6} \quad \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6} = 9\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \cdot (3\sqrt{6})^2 = 54\sqrt{3}$$

- Circumcircle radius Side of equilateral Δ In radius

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

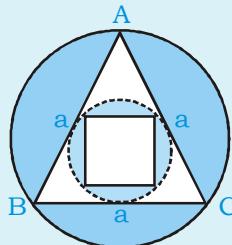
$$R : a : r$$

$$2 : 2\sqrt{3} (\text{Let}) : 1$$

$$\text{Area} \rightarrow 4\pi : 3\sqrt{3} : \pi$$

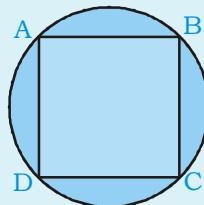
- Circum circle : Triangle : Incircle : Square परिवृत्त : त्रिभुज : अंतःवृत्त : वर्ग

$$\text{Area} \rightarrow 4\pi : 3\sqrt{3} : \pi : 2$$

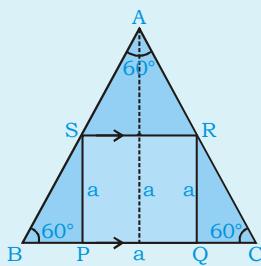


- Circle(वृत्त) : Square(वर्ग)

$$A \rightarrow \pi : 2 \text{ or } 11 : 7$$



- $\triangle ABC$ is an equilateral Δ . $\triangle ABC$ एक समबाहु Δ है।



$$\text{Side of Equilateral } \Delta = a \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\text{Side of Equilateral } \Delta : \text{Side of Square}$$

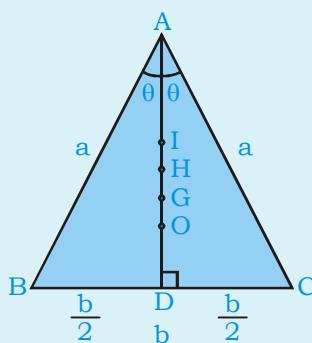
$$\text{समबाहु } \Delta \text{ की भुजा} : \text{वर्ग की भुजा}$$

$$(\sqrt{3} + 2) : \sqrt{3}$$

Isosceles Triangle (समद्विबाहु त्रिकोण)

- Triangle in which any two sides are equal.

वह त्रिभुज जिसकी कोई भी दो भुजाएँ बराबर हों।



$$AB = AC$$

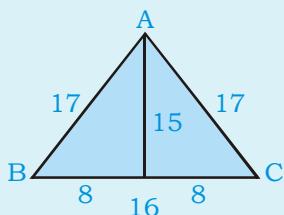
All 4 centre lies on line AD.

सभी 4 केंद्र रेखा AD पर स्थित हैं

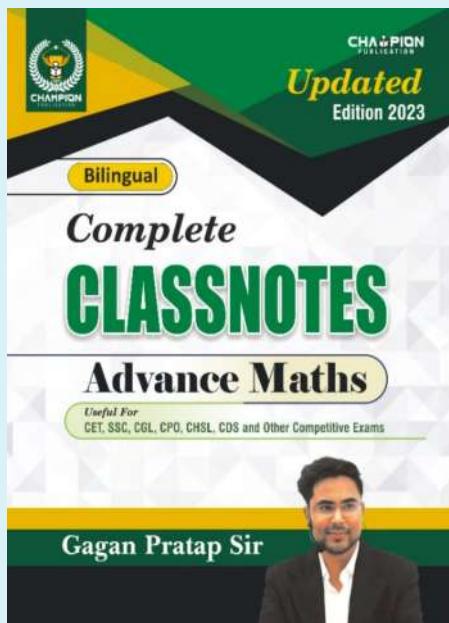
$$AD = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \text{Height}$$

$$\text{Area} = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}$$

Ex:- Find area 17, 17, 16 side

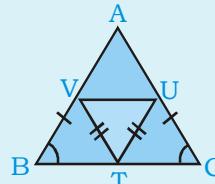


$$\text{Area of } \triangle ABC = 15 \times 8 = 120 \text{ cm}^2$$



- The triangle formed by joining the mid-point of an isosceles triangle is also an isosceles Δ.
किसी समद्विबाहु Δ के मध्य बिंदुओं को मिलाकर बिना Δ भी समद्विबाहु त्रिभुज होता है।

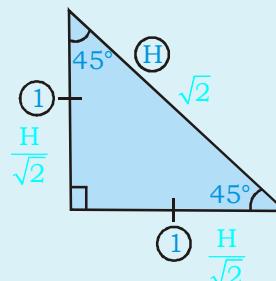
$$PQ = PR \quad ST = TU$$



Isosceles Right Angle Triangle

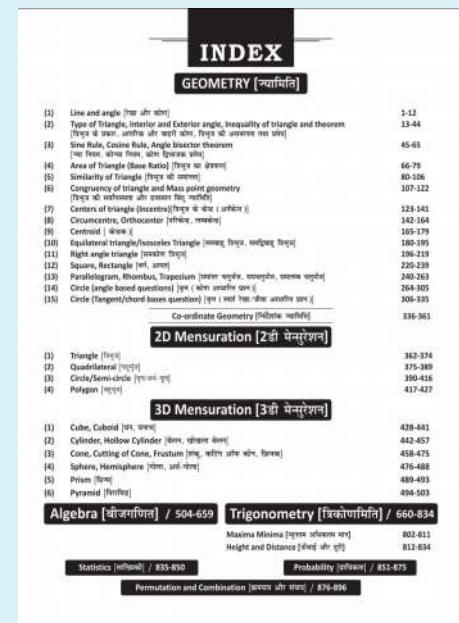
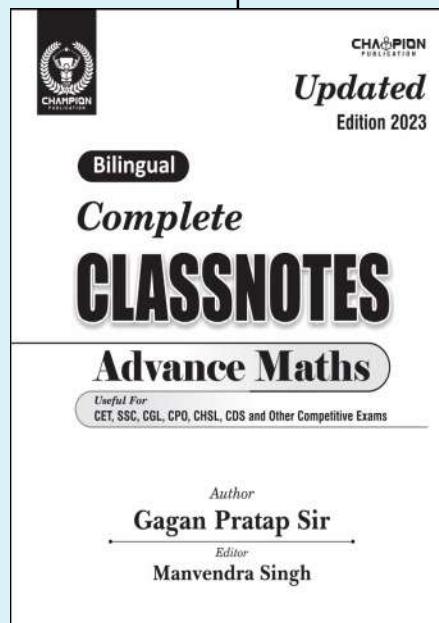
(समद्विबाहु समकोण त्रिभुज)

-



$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times \frac{H}{\sqrt{2}} \times \frac{H}{\sqrt{2}} = \frac{H^2}{4}$$

$$\text{Perimeter} / \text{परिमाप} = H(\sqrt{2} + 1)$$



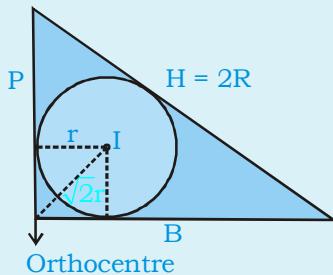


Right angle Triangle (समकोण त्रिभुज)



Right Angle Triangle (समकोण त्रिभुज)

- Triangle in which one angle is 90° .
त्रिभुज जिसमें एक कोण 90° का होता है।
- Right angle triangle is inscribed in a semi-circle.
समकोण त्रिभुज एक अर्धवृत्त में बना हुआ होता है।



$$r = \frac{P + B - H}{2}$$

$$2r = P + B - H$$

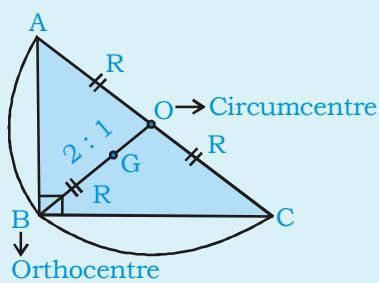
$$2r + H = P + B$$

$$2r + 2R = P + B$$

$$2r + 2R = P + B$$

$$r + R = \frac{P + B}{2}$$

$$R = BO = \text{Shortest median} = \frac{H}{2}$$

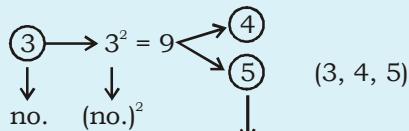


$$BG = \frac{2}{3}R = \frac{H}{3}$$

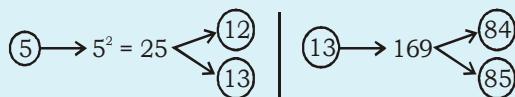
$$GO = \frac{R}{3} = \frac{H}{6}$$

How to Find Triplet? (त्रिमिति / त्रिक कैसे खोजें?)

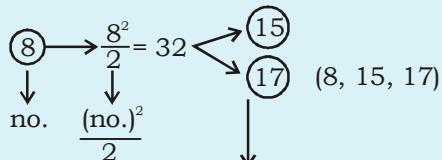
- Odd number / विषम संख्या**



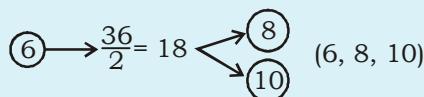
Make two factors at a diff. of 1.



- Even number / सम संख्या**

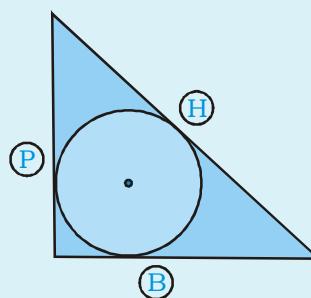


Break in two parts at the diff. of 2.



$$r = \frac{P + B - H}{2} = \frac{(P + B + H)}{2} - H$$

$$r = S - H = S - 2R \Rightarrow S = r + 2R$$



$$\Delta = r \cdot S$$

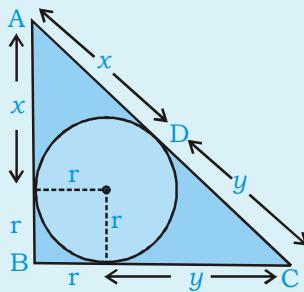
$$\Delta = S(S - 2R) \quad \text{Put } r = S - 2R$$

$$\Delta = r \cdot S = r(r + 2R) \Rightarrow \Delta = r^2 + 2rR$$

$$\text{Put } S = r + 2R$$

\therefore Area of right angle triangle \Rightarrow

$$\frac{1}{2}PB = r \times S = S(S - 2R) = r^2 + 2rR.$$



Area of $\Delta ABC = x \times y$

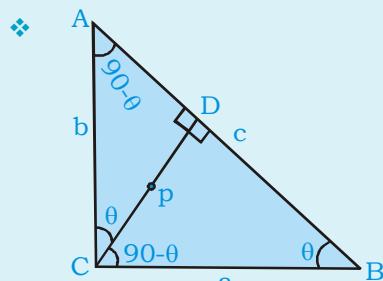
$$s = r + x + y$$

$$\Delta = r \cdot (r + x + y) = xy$$

$$(x + r)^2 + (y + r)^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 + r^2 + 2rx + y^2 + r^2 + 2yr = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$2r(r + x + y) = 2xy \Rightarrow r(r + x + y) = xy$$

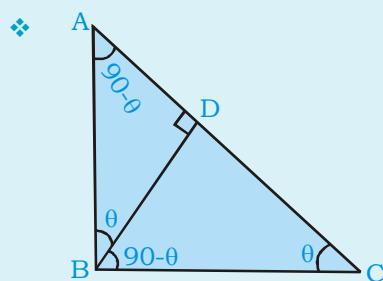


$\Delta ACB \sim \Delta CDB \sim \Delta ADC$

$$\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} c \cdot p \Rightarrow p = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{c}{ab} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{c^2}{a^2 b^2} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$\therefore \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$



$$\Delta ADB \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\mathbf{AB^2 = AD \times AC}$$

$$\Delta BDC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}$$

$$\mathbf{BC^2 = CD \times AC}$$

$$\frac{\mathbf{AB^2}}{\mathbf{BC^2}} = \frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{CD}}$$

$\Delta ABD \sim \Delta BDC$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \mathbf{BD^2 = AD \times CD}$$

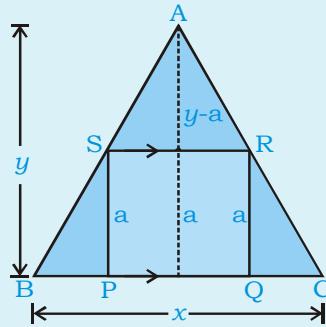
$$\mathbf{BD = \frac{AB \times BC}{AC}}$$

Maximum Area of a Square Inscribed in a Triangle

(एक त्रिभुज में अंकित एक वर्ग का अधिकतम क्षेत्रफल)

❖ **Side of square (a) = $\frac{xy}{x+y}$**

$\Delta ABC \sim \Delta ASR$

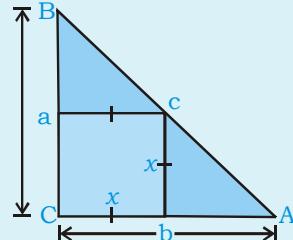


$$\frac{a}{x} = \frac{y-a}{y}$$

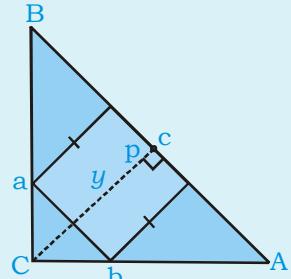
$$ay = xy - ax$$

$$a(x+y) = xy$$

❖ Maximum size square inside right angle Δ .



$$\mathbf{Side of square (x) = \frac{ab}{a+b}}$$



c = hypotenuse

p = length of perpendicular

y = Side of square

$$y = \frac{cp}{c+p} = \frac{c \times \frac{ab}{c}}{c + \frac{ab}{c}} = \frac{abc}{c^2 + ab}$$

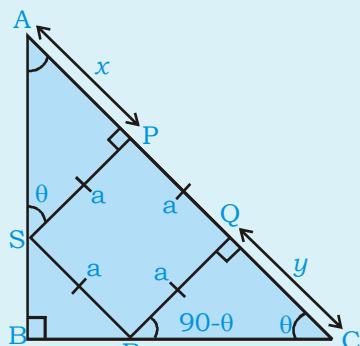
$$\text{Side of square } (y) = \frac{abc}{a^2 + b^2 + ab}, x > y$$

❖ AP = x and QC = y

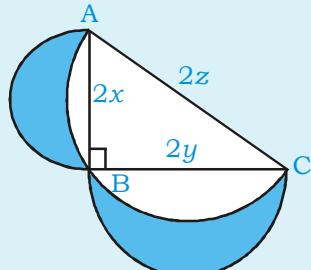
$$\text{Side of square} / \text{वर्ग का भुजा} = a = \sqrt{xy}$$

$\triangle ASP \sim \triangle RCQ$

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{a} \Rightarrow a = \sqrt{xy}$$



❖

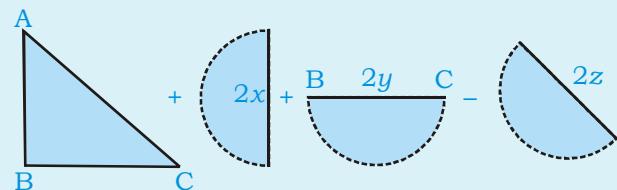


Area of shaded part = Area of $\triangle ABC$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Shaded part / छायांकित भाग \Rightarrow



$$= \Delta ABC + \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{2} - \frac{\pi z^2}{2}$$

$$= \Delta ABC + \frac{\pi}{2} z^2 - \frac{\pi}{2} z^2 = \Delta ABC$$

$\therefore \text{Area of shaded part} = \text{Area of } \triangle ABC$



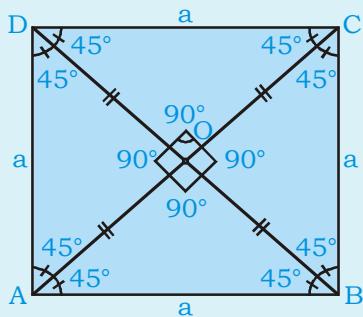
Square and Rectangle (वर्ग और आयत)



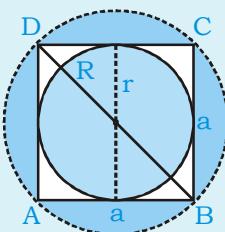
Square (वर्ग)

- A closed figure with all 4 sides equal and all angles 90° .

एक बंद आकृति जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों और सभी कोण 90° हों।



- Area / क्षेत्र = $a^2 = \frac{d^2}{2}$
- Perimeter / परिमाप = $4a$
- Diagonal bisect the vertex angle.
विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजित करता है।
- $AC = a\sqrt{2} = BD$
- $AO = BO = CO = DO = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$
- Diagonal bisect each other at 90°
विकर्ण एक दूसरे को 90° पर समद्विभाजित करते हैं।
- $\Delta DOC \cong \Delta AOB \cong \Delta AOD \cong \Delta BOC$



$$\text{Radius of incircle} / \text{अंतःवृत्त की त्रिज्या} = r = \frac{a}{2}$$

$$\text{Radius of circum-circle} = R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

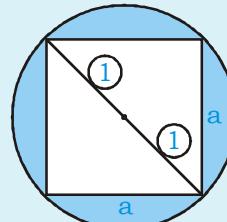
$$\text{परिवृत्त की त्रिज्या} = R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\frac{\text{Area of circumcircle}}{\text{Area of incircle}} = \frac{2}{1}$$

❖ Area of circle : Area of square

वृत्त का क्षेत्रफल : वर्ग का क्षेत्रफल



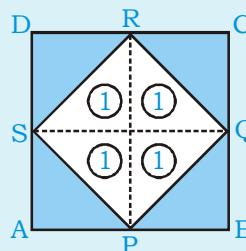
$$\pi(1)^2 : \frac{(2)^2}{2}$$

$$\pi : 2$$

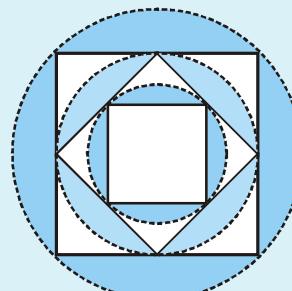
$$11 : 7$$

- P, Q, R, S are mid points of sides of square. PQRS is also a square.

P, Q, R, S वर्ग ABCD की भुजाओं के मध्य बिंदु हैं, PQRS भी एक वर्ग होगा।



$$\text{Area of } \square PQRS = \frac{\text{Area of } \square ABCD}{2}$$



Bigger : Outer : Medium : Medium : Small : Small
circle square circle square circle square
(बड़ा वृत्त) : (बाहरी वर्ग) : (मध्यम वृत्त) : (मध्यम वर्ग) : (छोटा वृत्त) : (छोटा वर्ग)

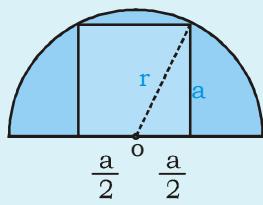
$$\text{Area} \rightarrow 8\pi : 16 : 4\pi : 8 : 2\pi : 4\dots$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 88 : 56 : 44 : 28 : 22 : 14 \dots$$

- Largest square inscribed in semi-circle →

अर्धवृत्त में बना हुआ सबसे बड़ा वर्ग →

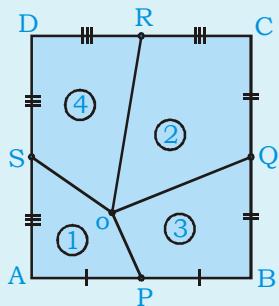


$$a^2 + \frac{a^2}{4} = r^2$$

$$\frac{5}{4} a^2 = r^2 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{5} r^2$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{5}} r$$

- ❖ P, Q, R, S are mid points of respective sides.
P, Q, R, S संबंधित भुजाओं के मध्य बिंदु हैं।



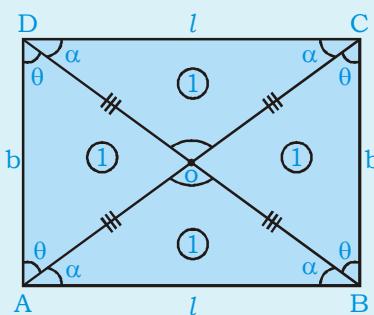
ABCD → Square/Rectangle

$$\text{Area } (1+2) = \text{Area } (3+4) = \frac{1}{2} \text{ Area } \square ABCD$$

Rectangle (आयत)

- ❖ A type of quadrilateral and all the four vertex angles are equal to 90° .

एक प्रकार का चतुर्भुज जिसकी विपरीत भुजाएँ एक दूसरे के बराबर और समान्तर होती हैं और चारों शीर्ष 90° के बराबर होते हैं।



In which opposite side are equal and parallel to each other.

$$\text{Area} = \text{Length} \times \text{breadth} = l \times b$$

$$\text{Perimeter} = 2(l + b)$$

Diagonal do not bisect vertex angle.

विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजित नहीं करता है।

$$AC = BD = \sqrt{l^2 + b^2}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA$$

$$AO = OC = BO = DO = \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2}$$

- ❖ Diagonals bisect each other but not at 90°

विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं लेकिन 90° पर नहीं

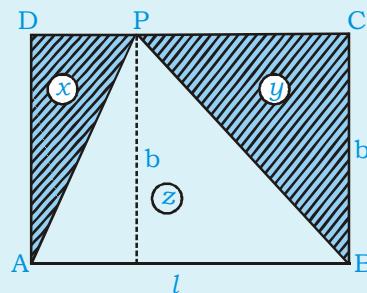
- ❖ $\triangle DOC \cong \triangle BOA$ and $\triangle AOD \cong \triangle COB$

- ❖ BO is median of $\triangle ABC \Rightarrow \text{Ar } \triangle AOB = \text{Ar } \triangle BOC$

- ❖ Similarly $\text{Ar } \triangle AOB = \text{Ar } \triangle BOC = \text{Ar } \triangle COD = \text{Ar } \triangle AOD$

- ❖ In square/rectangle/parallelogram/rhombus ABCD →

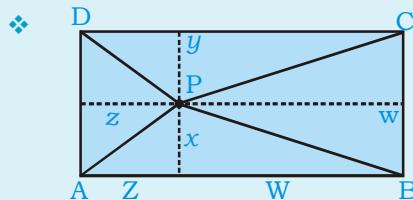
वर्ग/आयत/समांतर चतुर्भुज/समचतुर्भुज ABCD में →



$$\frac{\text{Area } \triangle APB}{\text{Area } \triangle ABCD} = \frac{\frac{1}{2} \times l \times b}{l \times b} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{Shaded Area}}{\text{Area } ABCD} = \frac{1}{2} \therefore \text{Area } (x+y) = \text{Area } z$$

British Flag Theorem (For Square/Rectangle) (ब्रिटिश ध्वज प्रमेय (वर्ग/आयत के लिए))



Note → AC and BD are not diagonals.

नोट → AC और BD विकर्ण नहीं हैं।

- ❖ P is any point inside / P अंदर कोई बिंदु है

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

$$x^2 + z^2 + w^2 + y^2 = x^2 + w^2 + y^2 + z^2$$



Parallelogram/Rhombus/Trapezium

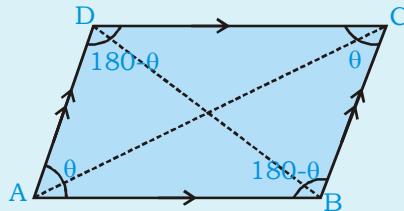
(समांतर चतुर्भुज / समचतुर्भुज / समलंब)



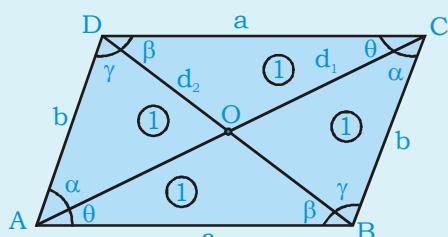
Parallelogram (समांतर चतुर्भुज)

- ❖ It is a quadrilateral with opposite sides equal and parallel.

यह एक चतुर्भुज है जिसकी विपरीत भुजाएँ बराबर और समान्तर हैं।



- $AB \parallel CD$ and $BC \parallel AD$
- $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
- Angle ratio / कोण अनुपात $\rightarrow x : y : x : y$
- Opposite angles are equal
सम्मुख कोण बराबर होते हैं
- Sum of two adjacent angles is 180°
दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है
- $AB = CD$ and $BC = AD$
- $\triangle ABC \cong \triangle CDA$
- Diagonal / विकर्ण $AC \neq BD$
- $\alpha \neq \theta$, $\beta \neq \gamma$
- Opposite Δ's are congruent
विपरीत Δ सर्वांगसम हैं



$\triangle COD \cong \triangle AOB$

$\triangle AOD \cong \triangle COB$

$$\therefore BO = DO = \frac{BD}{2}$$

$$AO = CO = \frac{AC}{2}$$

- Diagonal bisect each other but not at 90° .

विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं लेकिन 90° पर नहीं।

- Area of all 4 triangle is same.

सभी 4 त्रिभुज का क्षेत्रफल समान है।

$$\text{i.e., } Ar \triangle AOB = Ar \triangle BOC = Ar \triangle COD = Ar \triangle DOA = \frac{1}{4}$$

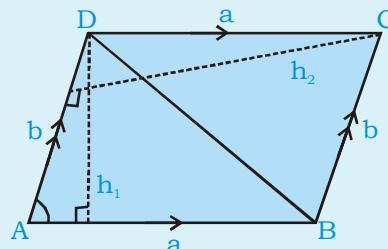
$$Ar \square ABCD$$

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad \therefore d_1 > d_2$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

- ❖ **Area of Parallelogram / समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल :**



$$\text{Area of Parallelogram} = ab \sin \theta$$

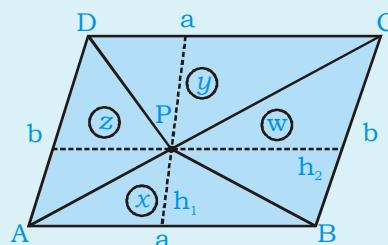
$$Ar \text{ of } \triangle ABD = \frac{1}{2} ab \sin \theta = Ar \triangle BDC$$

$$\therefore \text{Ar of Parallelogram} = 2 \times \frac{1}{2} ab \sin \theta = \mathbf{ab \sin \theta}$$

$$Ar \text{ of Parallelogram} = \text{Base} \times \text{Height} \Rightarrow ah_1 = bh_2$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1}$$

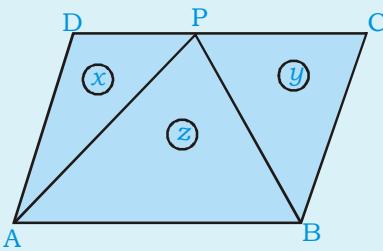
- ❖ **P is any point / P कोई बिंदु है**



$$\text{Area } (x+y) = \text{Area } (z+w) = \frac{1}{2} \text{ Area of Parallelogram}$$

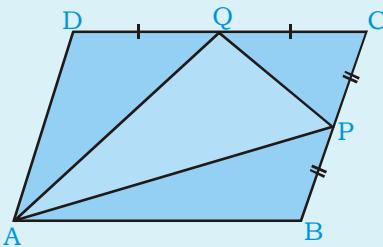
ABCD

$$\frac{1}{2} ah_1 = \frac{1}{2} bh_2$$



$$\text{Ar } \triangle APB = \frac{1}{2} \text{ Area } \square ABCD$$

$$\text{Ar } (x + y) = \text{Ar}(z) = \frac{1}{2} \text{ Area } \square ABCD$$

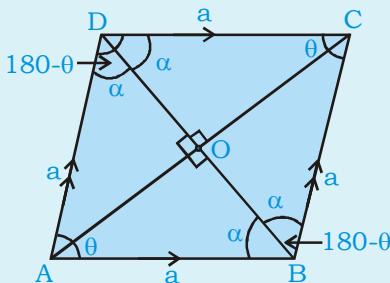


$$\frac{\text{Ar } \triangle APQ}{\text{Ar } \square ABCD} = \frac{3}{8}$$

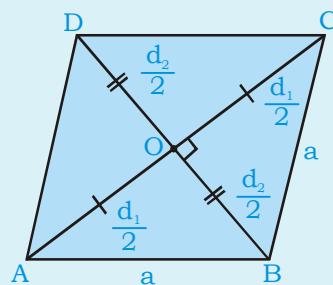
Rhombus (समचतुर्भुज)

- Rhombus is a type of parallelogram with all sides equal and diagonals bisect each other at 90°

समचतुर्भुज एक प्रकार का समांतर चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाएँ समान होती हैं और विकर्ण एक दूसरे को 90° पर काटते हैं।



- All sides are equal / सभी भुजाएँ समान हैं।
- $\angle A = \angle C$ and $\angle B = \angle D$
- Diagonal bisect vertex angle.
विकर्ण शीर्ष कोण को समद्विभाजित करते हैं।
- Diagonal bisect rhombus into two equal areas.
विकर्ण समचतुर्भुज को दो बराबर क्षेत्रफलों में विभाजित करता है।
- $AC \neq BD$
- All 4Δ made by two diagonals are congruent.
दो विकर्णों द्वारा बनाए गए सभी 4Δ सर्वांगसम होते हैं।
- $AO = OC = \frac{AC}{2}$ and $BO = OD = \frac{BD}{2}$
- Diagonal bisect each other at 90° .
विकर्ण परस्पर 90° पर समद्विभाजित करते हैं।



$$\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} = a^2$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$$

$$a = \frac{1}{2} \times \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

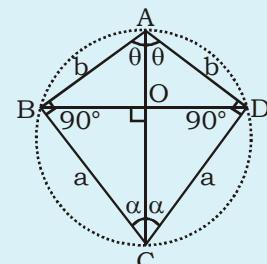
$$\text{Area } \triangle BOC = \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$$

$$\text{Area of rhombus} = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

$$\text{Perimeter} = 4a$$

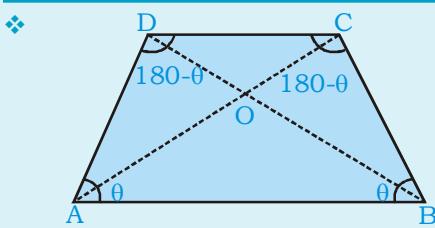
Kites

- A kite has 2 distinct pairs of equal adjacent sides (Here AB = AD, CB = CD)
एक पंतग में समान आसन्न भुजाओं के 2 अलग-अलग जोड़े होते हैं (यहाँ AB = AD, CB = CD)
- Diagonals cut at 90° ($AC \perp BD$)
विकर्ण 90° पर कटे ($AC \perp BD$)
- One of the diagonals bisects the other (AC bisects BD ; $BO = OD$)/एक विकर्ण दूसरे को समद्विभाजित करता है (AC , BD को समद्विभाजित करता है; $BO = OD$)
- Perimeter/परिमाप = $2(a + b)$
- $\text{Area} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
- $\text{Area} = ab \sin\theta$ [$\angle ABC = \angle ADC$]



- If $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, the kite ABCD is cyclic quadrilateral.
यदि $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ है, तो पंतग ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।
- AC = diameter of the circle/वृत्त का व्यास
- $2(\theta + a) = 180 \Rightarrow \theta + a = 90$

Isosceles Trapezium (समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज)



$AB \parallel CD ; AD = BC$

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

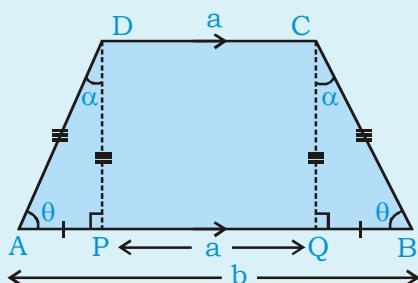
\therefore Each isosceles trapezium is a cyclic quadrilateral.

.. प्रत्येक समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।

or if a trapezium is inscribed in a circle it must be a isosceles trapezium.

या यदि एक समलंब एक वृत में बना हुआ है तो यह एक समद्विबाहु समलंब होना चाहिए।

$$AC = BD$$

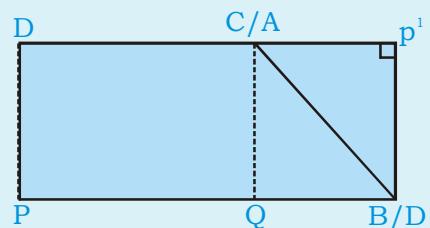


$$AP = QB = \frac{b-a}{2}$$

$$\triangle APD \cong \triangle BQC$$

Shift $\triangle APD$ near $\triangle BQC \Rightarrow$ trapezium converted to rectangle.

$\triangle ADP$ को $\triangle BQC$ के पास शिफ्ट करने पर \Rightarrow समलम्ब आयत में परिवर्तित हो जाता है।




SSC MATHS
 Bilingual
 8000+ TCS - MCQ
 All Latest TCS Questions asked in SSC Exams till Sept. 2022
 Chapter - Wise
 With Detailed Solution & Smart Tricks
 SSC CGL Tier 1-Tier 2, SSC CPO,
 SSC CHSL, SSC MTS, Selection Post




27 Sets
 Bilingual
SSC CGL Mains
 Mathematics
 Useful For
 CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS
 and Other Competitive Exams
 Previous Year Papers
 2010 to 2021-22





Circle (वृत्त)



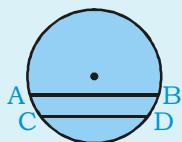
Circle (वृत्त)

- ❖ Circle → A round plane figure whose boundary consists of points equidistant from a fixed point (the centre).

वृत्त → किसी एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर स्थिति बिंदुओं का बिंदुपथ वृत्त कहलाता है। यह निश्चित बिंदु वृत्त का केंद्र कहलाता है।

Chord → line touches circumference of circle at two points.

जीवा → जो रेखा वृत्त की परिधि को दो बिंदुओं पर स्पर्श करती है।



$$AB > CD$$

Greater chord is near the centre.

बड़ी जीवा केंद्र के पास होती है।

Radius → It is a straight line from the centre to the circumference of the circle.

त्रिज्या → केंद्र और वृत्त की परिधि के किसी भी बिंदु के बीच की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।

$$PQ = \text{radius of circle} / \text{वृत्त की त्रिज्या} = r$$

Diameter/व्यास

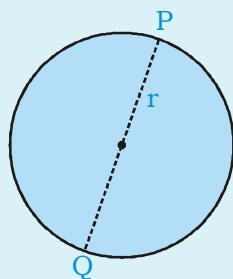
- The chord across a circle through the center is called the diameter.

वृत्त के केंद्र से गुजरने वाली जीवा व्यास कहलाती है।

Arc/चाप

- A continuous piece of a circle is called an arc of the circle.

किसी वृत्त का एक सतत टुकड़ा वृत्त का चाप कहलाता है।

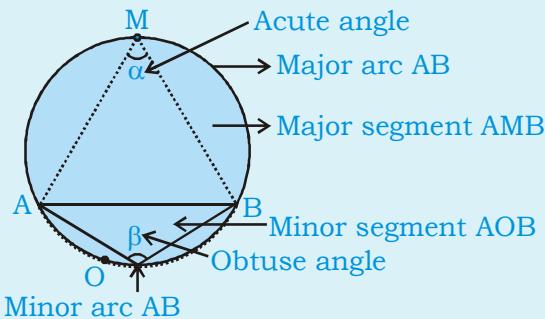


$$\text{Area} / \text{क्षेत्र} = \pi r^2$$

$$\text{Circumference} / \text{परिधि} = 2\pi r$$

PQ = diameter = biggest chord of circle.

PQ = व्यास = वृत्त की सबसे बड़ी जीवा।



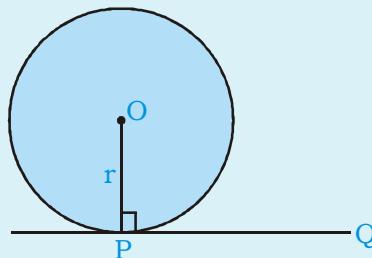
Tangent Line (स्पर्शरेखा)

- ❖ A line that touches the circle at only one point is known as tangent of the circle.

एक रेखा जो वृत्त को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करती है, वृत्त की स्पर्श रेखा कहलाती है।

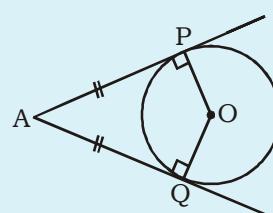
$$\angle OPQ = 90^\circ$$

If PQ is tangent to the circle then $OP \perp PQ$
i.e., radius $\perp PQ$



- The lengths of two tangents, drawn from an external point to a circle, are equal.

किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।



$$\text{i.e. } AP = AQ.$$

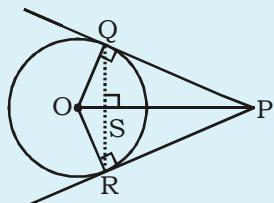
- When tangents drawn from an external point to a circle

किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएं

(a) Tangents are equal in length

स्पर्श रेखाओं की लंबाई समान होती है।

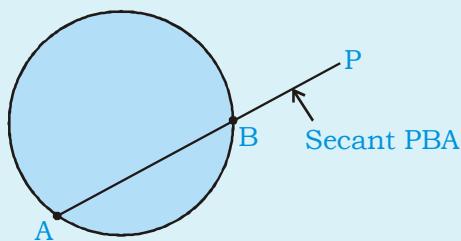
- (b) $\angle QPO = \angle OPR$
- (c) $\angle QOP = \angle POR$
- (d) $\frac{PQ}{QO} = \frac{QS}{SO}$
- (e) $PQO \cong PRO$



Secant Line (छेदक रेखा)

- ❖ A straight line that intersects a circle in two points is called secant line of circle.

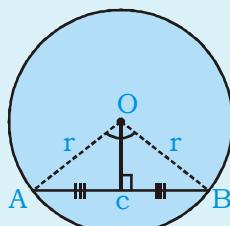
एक सीधी रेखा जो एक वृत्त को दो बिंदुओं पर काटती है, वृत्त की छेदक रेखा कहलाती है।



- ❖ A perpendicular drawn from the centre of a circle to a chord bisects the chord. / एक वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$$OC \perp AB \Rightarrow AC = BC$$

or If $AC = BC$ then $OC \perp AB$

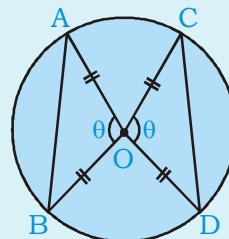


- ❖ 1. Equal chords are equidistant from the centre. समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

- 2. Equal chords make equal angle at the centre. समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण बनाती हैं।

If $AB = CD$ then $\angle AOB = \angle COD$

or if $\angle AOB = \angle COD$ then $AB = CD$



- Equal chords of a circle are equidistant from the centre.

किसी वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

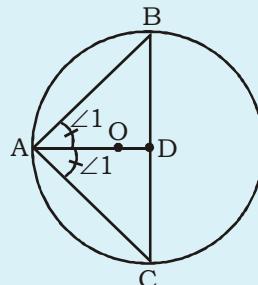


i.e. if $AB = CD$, $OX \perp AB$ and $OY \perp CD$, then $OX = OY$.

Or if $OX = OY$, $OX \perp AB$ and $OY \perp CD$ then $AB = CD$

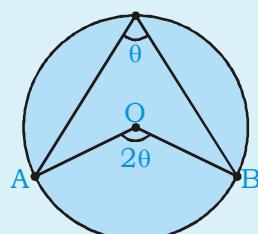
- If two chords AB and AC of a circle are equal, then the bisector of $\angle BAC$ passes through the centre O of the circle.

$\angle 1 = \angle 2$ यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC समान हैं। तब $\angle BAC$ का कोण समद्विभाजक वृत्त के केंद्र O से गुजरेगी। $\angle 1 = \angle 2$



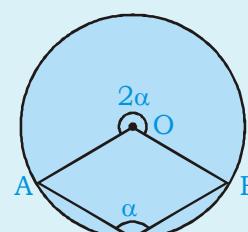
- ❖ Angle made by an arc on centre is double the angle made by the same arc on the circumference of centre.

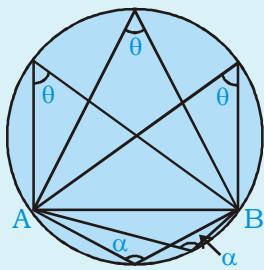
किसी चाप द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण उसी चाप द्वारा केंद्र की परिधि पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।



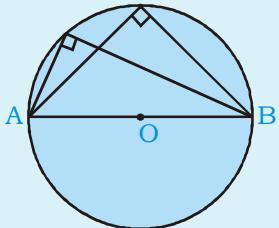
- ❖ Angle made by an arc on same side of circle are equal.

एक चाप द्वारा वृत्त के एक ही ओर बने कोण बराबर होते हैं।

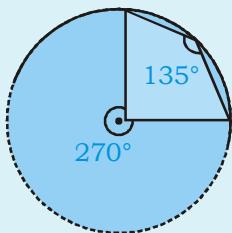




- Angle made in semi-circle is right angle.
अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।



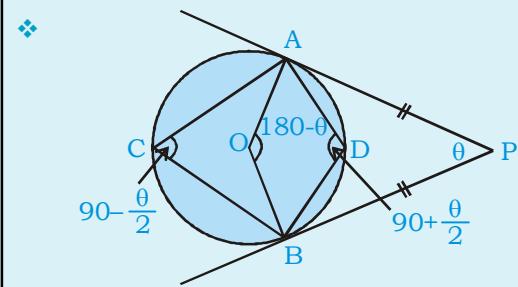
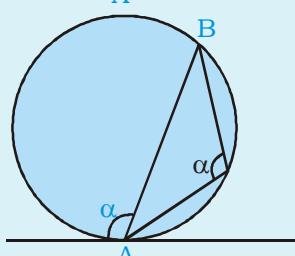
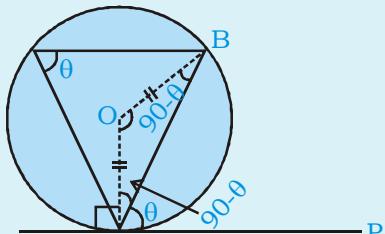
- Angle made in quarter circle is 135° .
चौथाई वृत्त में बना कोण 135° का होता है।



Alternate Segment Theorem (एकांतर वृत्तखंड प्रमेय)

- Angle made by a chord and tangent is equal to the angle made by the chord in other segment of the circle.

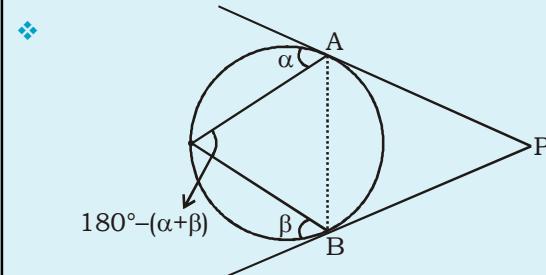
एक जीवा और स्पर्शरेखा द्वारा बनाया गया कोण जीवा द्वारा वृत्त के दूसरे खंड में बनाए गए कोण के बराबर होता है।



$$\angle ADB = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$$

$$\angle ACB = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

$$\angle APB = \theta$$

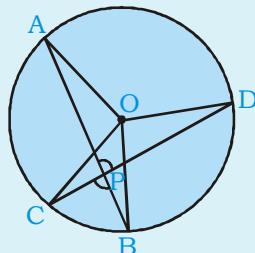


- AB and CD two chords cuts each other internally at point P. Then →

AB और CD दो जीवाएं आंतरिक रूप से बिंदु P पर काटती हैं। फिर→

$$\angle APD = \angle BPC = \frac{\angle AOD + \angle BOC}{2}$$

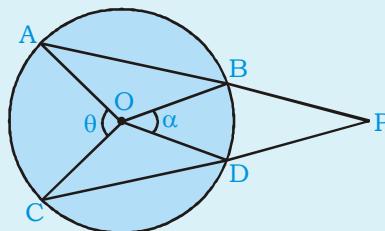
$$\angle APC = 180^\circ - \angle APD$$



- AB and CD two chords cuts each other externally at point P. Then →

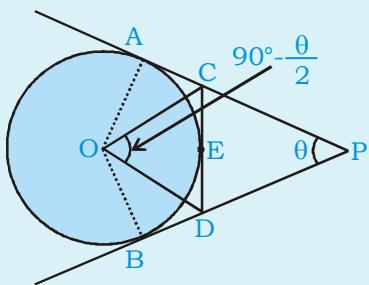
AB और CD दो जीवाएं बाह्यतः बिंदु P पर काटती हैं। फिर→

$$\angle APC = \angle BPD = \frac{\theta - \alpha}{2}$$

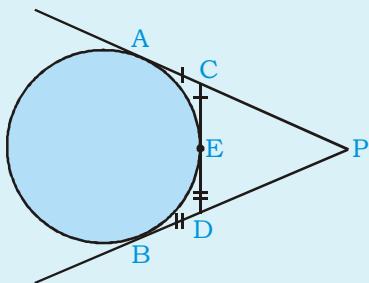


❖ $\angle COD = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$

$$\angle COD = \frac{\angle AOB}{2}$$



❖ Perimeter of ΔPCD / ΔPCD की परिमाप = $2PA = 2PB$

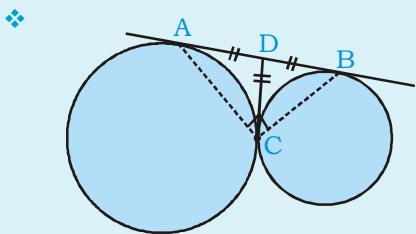


$$\Rightarrow PC + CE + ED + PD$$

$$\Rightarrow PC + CA + BD + PD$$

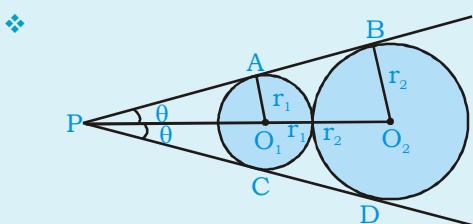
$$\Rightarrow PA + PB$$

$$\Rightarrow 2PA \text{ or } 2PB (\because PA = PB)$$



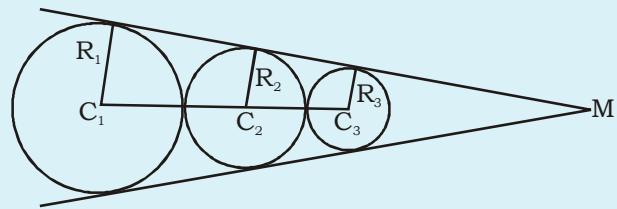
$$AD = BD = CD$$

$$\angle ACB = 90^\circ$$

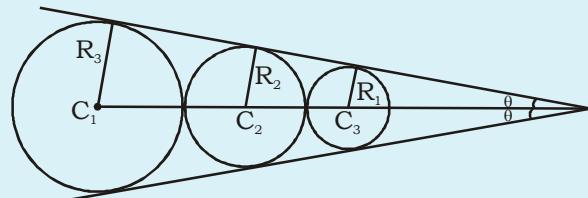


$$O_1O_2 = r_1 + r_2$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$



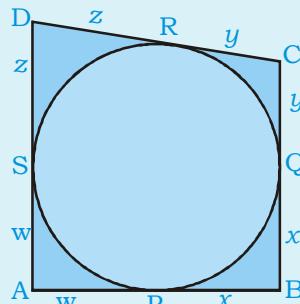
R_1, R_2, R_3 are always in GP / यदि R_1, R_2, R_3 गुणोत्तर श्रेणी में हो। $R_2 = \sqrt{R_1 \times R_3}$



$$\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} \Rightarrow r_2 = \sqrt{r_1 \times r_3}$$

❖ If a circle is inscribed in a quadrilateral or a quadrilateral is circumscribing a circle.

यदि एक वृत एक चतुर्भुज में बना हुआ है या एक चतुर्भुज एक वृत के परिसंगत है।



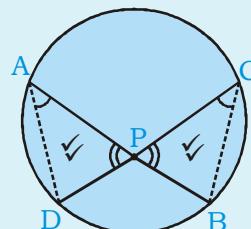
$$AB + CD = BC + AD$$

❖ Two chords AB and CD cuts each other at point P internally.

दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु P पर आंतरिक रूप से काटती हैं।

$$PA \times PB = PC \times PD$$

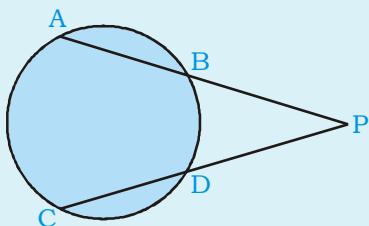
$$\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA}$$



❖ Two chords AB and CD cuts each other at point P.

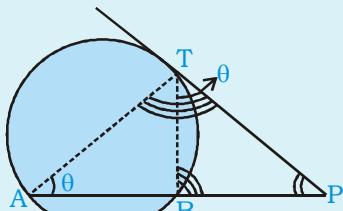
दो जीवाएँ AB और CD एक दूसरे को बिंदु P पर काटती हैं।

$$PB \times PA = PD \times PC$$



- ❖ From an external point a secant and tangent is drawn. Then →

एक बाहरी बिंदु से एक छेदक और स्पर्शरेखा खींची जाती है। फिर →
 $PT^2 = PB \times PA$



$$\Delta TPB \sim \Delta APT$$

$$\frac{PB}{PT} = \frac{PT}{PA}$$

- ❖ When a circle is drawn between two parallel lines and a tangent is given intersecting these two parallel lines.

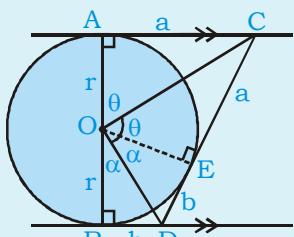
जब दो समानांतर रेखाओं के बीच एक वृत्त खींचा जाता है और इन दो समानांतर रेखाओं को काटती हुई एक स्पर्श रेखा दी जाती है।

$$\angle COD = 90^\circ$$

$$2\theta + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\theta + \alpha = 90^\circ$$

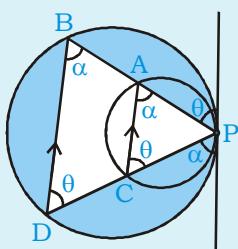
$$r = \sqrt{ab}$$



- ❖ When two circles touch each other internally and common tangent is given →

जब दो वृत्त एक दूसरे को आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं और उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा दी जाती है →

$$\Delta PAC \sim \Delta PBD$$

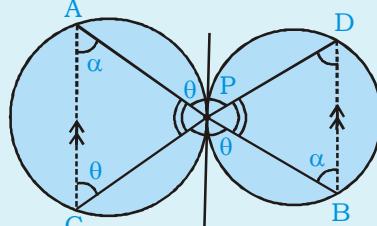


$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$$

- ❖ When two circles touch each other externally and common tangent is given →

जब दो वृत्त एक दूसरे को बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं और उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा दी जाती है →

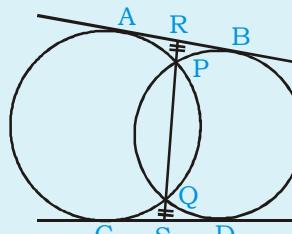
$$\Delta PAC \sim \Delta PBD$$



$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD}$$

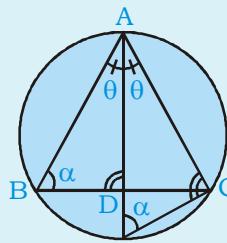
- ❖ Two circles intersect each other at two distinct points and two common tangents are given then → दो वृत्त एक दूसरे को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं और तब दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ दी गई हैं

$$AB = CD$$



$$RS^2 = AB^2 + PQ^2$$

$$\diamond \quad AB \times AC + AE \times DE = AE^2$$



$$\Delta ABD \sim \Delta ACE$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$$

$$\Rightarrow AB \times AC = AD \times AE$$

Proof:-

$$\Delta AEB \sim \Delta ACD$$

by (AA)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AE \times AD = AB \times AC$$

$$\therefore AB \times AC + AE \times DC = L.H.S$$

$$\therefore AE \times AD + AE \times DE = AE (AD + DE)$$

$$AE = AD + DE$$

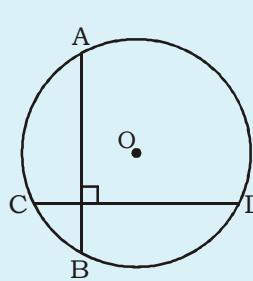
$$AE \times AE \Rightarrow AE^2$$

Hence, L.H.S = R.H.S proved

$$\boxed{AB \times AC + AE \times DE = AE^2}$$

- If two chords intersect each other at 90° .

यदि दो जीवाएँ एक दूसरे को 90° पर प्रतिच्छेद करती हैं।



$$\begin{aligned} AP &= x \\ CP &= z \end{aligned}$$

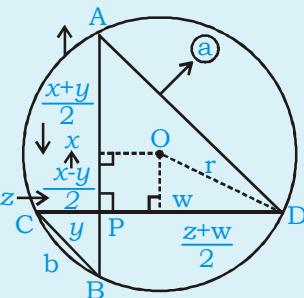
$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}}{2}$$

$$x \times y = z \times w$$

$$r^2 = \left(\frac{z+w}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{z^2 + w^2 + 2zw + x^2 + y^2 - 2xy}{4}$$

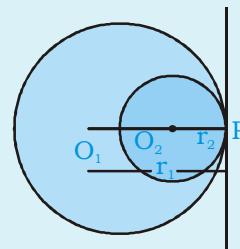
$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$



$$\begin{aligned} PD &= w \\ AD &= a \end{aligned}$$

Maximum common tangent = 1

अधिकतम उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा = 1

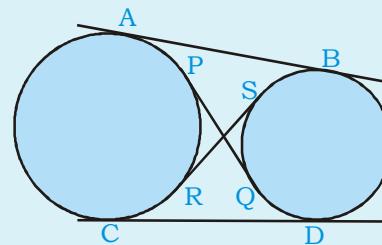


- If two circles do not touch each other, there can be maximum 4 common tangents.

Direct common tangent = 2

Transverse common tangent = 2.

जब दो वृत्त आपस में स्पर्श नहीं करते तो उनकी अधिकतम 4 स्पर्शरेखाएँ हो सकती हैं।



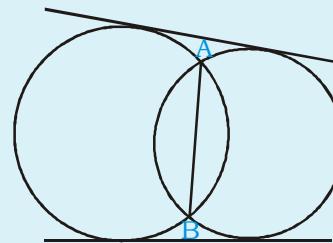
DCT = AB & CD

TCT = PQ & RS

Maximum common tangent = 4

अधिकतम उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा = 4

- Intersecting circles / (प्रतिच्छेदी वृत्त)**



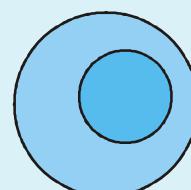
AB → common chord / उभयनिष्ठ जीवा

Maximum common tangent = 2

अधिकतम उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा = 2

- If one circle is made inside other circle and they do not touch each other then no common tangent is possible.

यदि एक वृत्त दूसरे वृत्त के अंदर बनाया जाता है और वे एक दूसरे को स्पर्श नहीं करते हैं तो कोई उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा संभव नहीं है।



$O_1PO_2 \rightarrow$ straight line / सीधी रेखा

Maximum common tangent = 3

अधिकतम उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा = 3

AB = CD = EF

Internally touch (आंतरिक रूप से स्पर्श करें)

- When two circles touch each other internally then distance between their centres is difference of their radii.

जब दो वृत्त एक दूसरे को अन्तर: स्पर्श करते हैं तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी उनकी त्रिज्याओं का अंतर होती है।

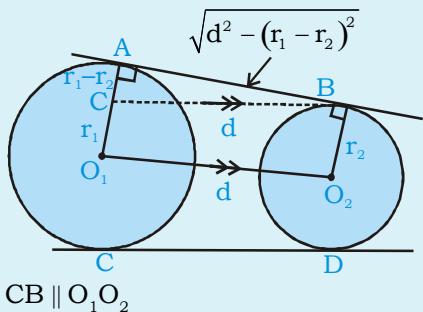
$O_1O_2P \rightarrow$ straight line / सीधी रेखा

$$O_1O_2 = d = r_1 - r_2$$

जब दो वृत्त एक-दूसरे को दो अलग-अलग बिंदुओं पर काटते हैं तो उनकी उभयनिष्ठ जीवा AB की लम्बाई \rightarrow उभयनिष्ठ जीवा होती है

Direct Common Tangent (उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा)

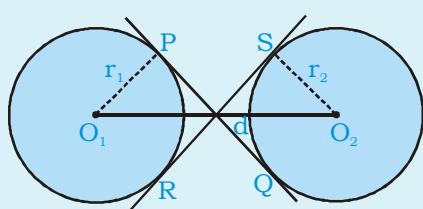
- Length of DCT / DCT की लंबाई



$$DCT = AB = CD = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

Transverse Common Tangent (त्रिर्यक उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा)

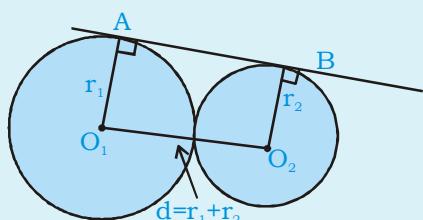
- Length of TCT / TCT की लंबाई



$$TCT = PQ = RS = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

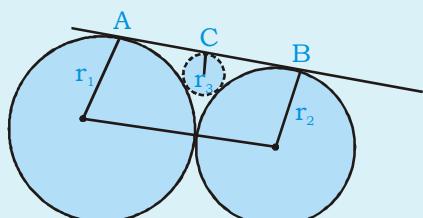
DCT > TCT

- AB = DCT = $2\sqrt{r_1 r_2}$



$$DCT = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{4r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

- AB = AC + BC



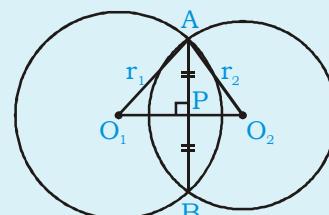
$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_2 r_3}$$

Divide by $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

(Result)

- When two circles intersect each other at two distinct points then length of their common chord AB is \rightarrow Common chord



$$\Rightarrow AB = 2AP = 2PB$$

$$AP = PB$$

$$Ar \Delta O_1AO_2 = \frac{1}{2} \times O_1O_2 \times AP$$

Where यहाँ $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$

$$O_1O_2 = C$$

$$\therefore AB = \frac{2r_1 r_2}{C}$$

Distance between centres $O_1 O_2 =$

$$\sqrt{r_1^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

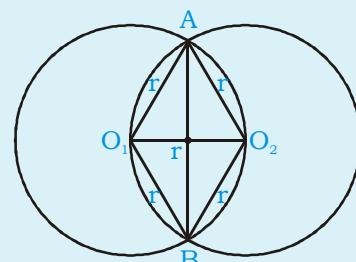
- If two circles pass through each others centre. /

यदि दो वृत्त एक दूसरे के केंद्र से गुजरते हैं।

Length of common chord AB is \rightarrow

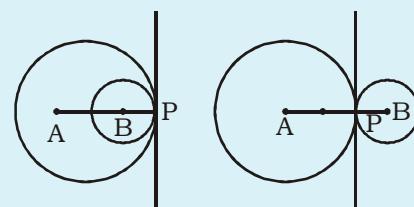
उभयनिष्ठ जीवा AB की लम्बाई है \rightarrow

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} r \times 2 = \sqrt{3}r$$



- If two circles having centres at A and B touch each other internally or externally at point P lies on the line AB joining their centres.

यदि दो वृत्त जिनका केंद्र A और B हैं, एक दूसरे को बिंदु P पर आंतरिक या बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं, जो उनके केंद्रों को जोड़ने वाली रेखा AB पर स्थित है।



i.e. A, B and P are collinear. / अतः A, B तथा P सरेंखीय है।

Distance between their centres (d)

In the given figure, there are two circles with the centres O and O' touching each other internally at P. Tangents TQ and TP are drawn to the larger circle and tangents TR and TP are drawn to the smaller circle. Then $TQ : TR = 1 : 1$

दी गई आकृति में O और O' केंद्र वाले दो वृत्त हैं जो एक दूसरे को बिंदु P पर अंतर्भूत स्पर्श करता है। TQ और TP बड़े वृत्त पर डाली गई स्पर्श रेखाएं और TP तथा TR छोटे वृत्त पर डाली गई स्पर्श रेखाएं हैं, तो $TQ : TR = 1 : 1$.

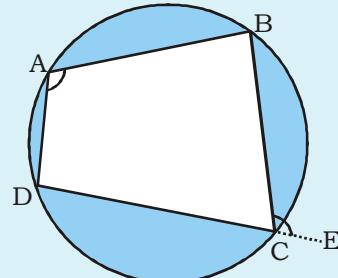
Cyclic Quadrilateral (चक्रीय चतुर्भुज)

- If all vertices of a quadrilateral lie on the circle, it is called a cyclic quadrilateral.

यदि किसी चतुर्भुज के चारों शोष किसी वृत्त की परिधि पर होते हैं तो यह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।

Properties/विशेषताएं

- The sum of opposite angles of a cyclic quadrilateral is 180° . / चक्रीय चतुर्भुज के विपरीत कोणों का योग 180° होता है।



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$

- The exterior angle of a cyclic quadrilateral is equal to the opposite interior angle.

चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण अंतर्भूत कोण के बराबर होता है।

$$\angle DAB = \angle BCE$$

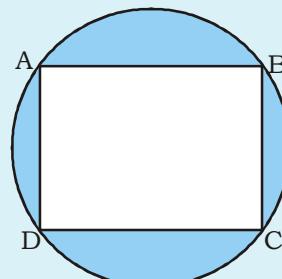
$$\angle DAB = \angle BCD = 180^\circ$$

$$\text{और } \angle BCD + \angle BCE = 180^\circ$$

$$\therefore \angle DAB = \angle BCE$$

- All angles of cyclic parallelogram is 90° .

चक्रीय समानांतर चतुर्भुज के सभी कोण 90° होते हैं।



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

but according to parallelogram property $\angle A = \angle C = \theta$

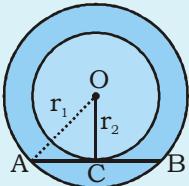
परंतु समानांतर चतुर्भुज के अनुसार $\angle A = \angle C = \theta$

$$\therefore 2\theta = 180^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

- When touch internally/जब आंतरिक स्पर्श करते हैं, $d = AP - BP$

- When touch externally/जब बाह्य स्पर्श करते हैं, $d = AP + BP$

- If circles are concentric/जब वृत्त संकेंद्र हो तब

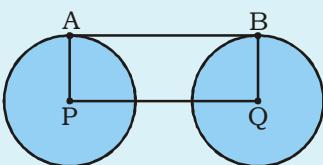


AB is chord of the greater circle be a tangent to smaller circle

बड़े वृत्त की जीवा AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है

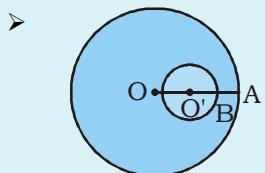
$$\text{Length of AB} = 2AC/AB \text{ की लंबाई} = 2AC = 2\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$$

- If radius of circle is same/यदि वृत्तों की क्रिया समान हो, $r_1 = r_2 = r$



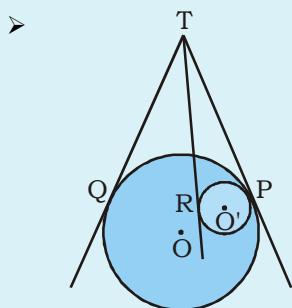
- Direct common tangent/उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा, $AB = PQ$
 $AB = PQ$ i.e. length of direct common tangent equal to distance between circle.

$AB = PQ$ i.e. उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लंबाई दोनों वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी के समान होती है।



Two circles with R and r cm, one circle is inscribed in another circle. If the shortest distance between the circles is S cm. Then the distance between the centres is:

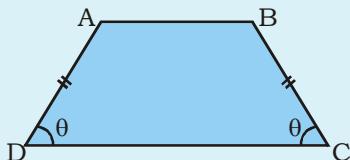
दो वृत्तों की क्रिया R और r cm है, एक को दूसरे के अंदर बनाया गया यदि वृत्तों के बीच की सबसे छोटी दूरी S cm है तो उनके केंद्रों के बीच की दूरी = $OO' = OA - O'B - AB = R - r - S$



अर्थात् यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। तो □PQRS भी चक्रीय होगा।

- If non parallel sides of a trapezium are equal then it will be a cyclic quadrilateral.

यदि किसी समलंब चतुर्भुज की असमानांतर भुजाएँ समान हो तो यह चक्रीय चतुर्भुज होगा।



$$\therefore AB \parallel DC$$

$$\text{So, अतः } \angle A = 180^\circ - \theta \text{ and } \angle B = 180^\circ - \theta$$

If sum of opposite angles is 180°

विपरीत कोणों का योग = 180°

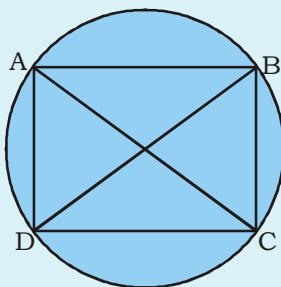
$$(\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ)$$

then it is cyclic quadrilateral.

यह एक चक्रीय चतुर्भुज है।

- Ptolemy's theorem** → In a cyclic quadrilateral the sum of products of the measures of the pairs of opposite sides is equal to product of its diagonals.

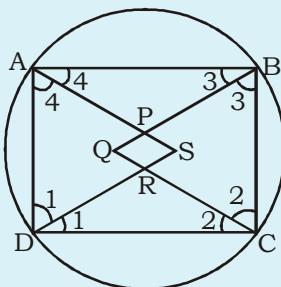
पटोलमी प्रमेय → किसी चतुर्भुज चक्रीय में, विपरीत भुजाओं के गुणनफलों का योग चतुर्भुज के विकर्णों के गुणनफल के समान होता है।



$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

- The quadrilateral formed by angle bisectors of a cyclic quadrilateral is also cyclic.

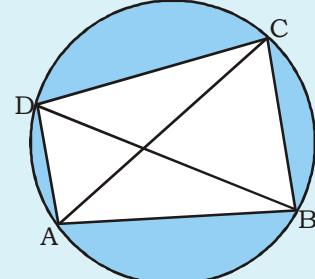
किसी चक्रीय चतुर्भुज के कोण समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज चक्रीय होता है।



i.e. If ABCD is a cyclic quadrilateral, then □PQRS is also a cyclic.

If A cyclic trapezium is isosceles and its diagonals are equal

एक चक्रीय समलंब चतुर्भुज समद्विबाहु होता है तथा इसके विकर्ण समान होता है।

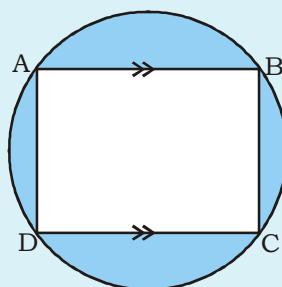


i.e. If ABCD is a cyclic trapezium s.t. $AB \parallel DC$, then $AD = BC$ and $AC = BD$.

अर्थात् यदि ABCD एक चक्रीय समलंब चतुर्भुज इस प्रकार है कि, $AD = BC$ और $AC = BD$

- If two opposite sides of a cyclic quadrilateral are equal, then the other two sides are parallel.

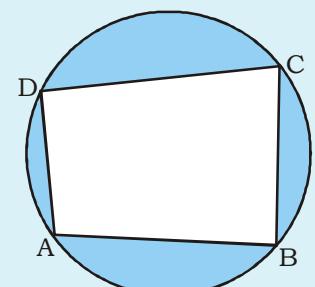
यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज की दो विपरीत भुजाएं बराबर हो, तो अन्य दो भुजाएं समानांतर होती हैं।



i.e. If $AD = BC$, then $AB \parallel CD$. / यदि $AD = BC$, तब $AB \parallel CD$.

- An isosceles trapezium is always cyclic.

एक समद्विबाहु चतुर्भुज हमेशा चक्रीय होता है।



i.e. If $AB \parallel DC$ and $AD = BC$.

यदि $AB \parallel DC$ और $AD = BC$.

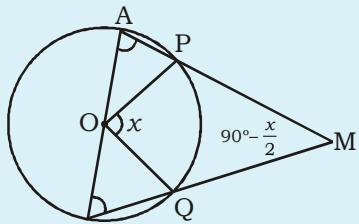
Then, ABCD is a cyclic trapezium.

तो, ABCD चक्रीय समलंब चतुर्भुज है।

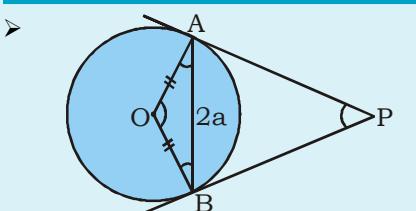
- If AB is a diameter of the circle (centre O) and APM and BQM are its two secants. If $\angle POQ = x$ then

यदि O केंद्र वाले वृत्त का व्यास AB है तथा दो छेदक रेखाएँ APM व BQM जो वृत्त से बाहर M पर काटती हैं तो $\angle POQ = x$

$$\angle PMQ = 90^\circ - \frac{x}{2}$$



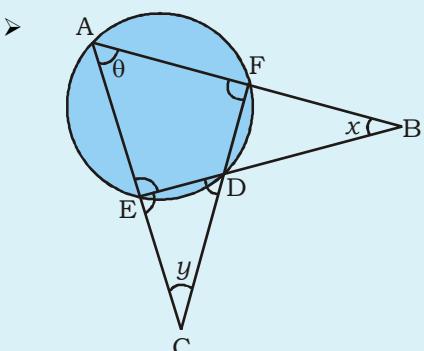
Miscellaneous Results



If/ यदि $AB = 2a$, Radius/ त्रिज्या = r

then length of tangent/ तब स्पर्श रेखा की लंबाई

$$PA = PB = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$



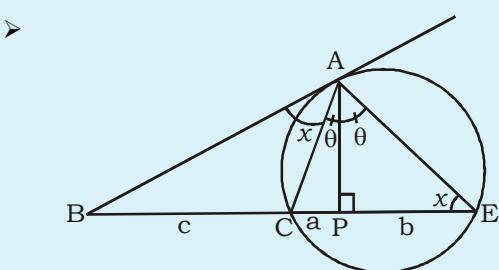
AB & AC are secant/ AB और AC छेदक रेखाएँ हैं।

If/ यदि $\angle ABE = x$

$\angle ACF = y$

$\therefore \angle BAC = \theta$

$$\text{then/ तब, } \theta = 90^\circ - \left(\frac{x+y}{2} \right)$$



AB is tangent/ AB एक स्पर्श रेखा है।

BE is secant/ BE एक छेदक रेखा है।

AP is Angle bisector of $\angle CAE$ / AP, $\angle CAE$ का कोण समद्विभाजक है।

In this figure/ इस चित्र में,

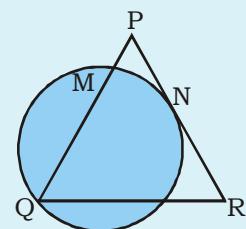
$$AB = BP$$

$$c = \frac{a^2}{b.c}$$

$$AB = BP = \frac{a \times b}{b - c}$$

- PQR is an isosceles triangle with PQ = PR. A circle through Q touching PR at the middle point and intersect PQ at M then PM : PQ

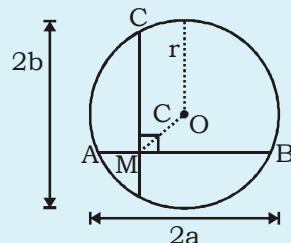
PQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है। जिसमें PQ = PR है। एक वृत्त जो Q से होकर गुजरता है। और PR को मध्य बिंदु पर स्पर्श करता है। तथा PQ को M पर प्रतिच्छेद करता है। तो PM : PQ



$$PN^2 = PQ \times PM$$

$$PM = \frac{1}{2}$$

$$\frac{PM}{PQ} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



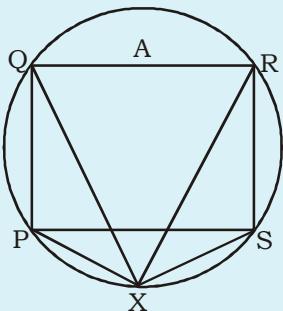
If $CD \perp AB$

$$AB = 2a$$

$$CD = 2b$$

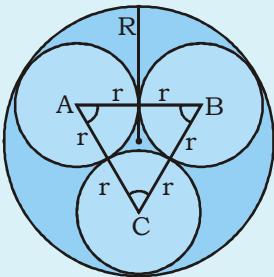
$OM = c$ and Radius = r then

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$



PQRS is a square (cyclic) of side "A". X is a point on the circle, then/ PQRS एक वर्ग है जिसकी भुजा "A" है X वृत्त पर एक बिंदु है। तब,

$$PX^2 + QX^2 + RX^2 + SX^2 = 4A^2$$

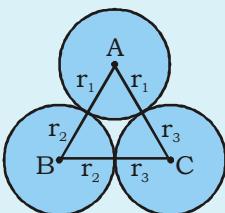


3 circles are of radius r touching each other. A large circle is also present touching all three circles.

3 समान त्रिज्या (r) वाले वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तथा एक बड़ा वृत्त (R त्रिज्या) इन तीनों वृत्तों को स्पर्श करता है।

The radius of the largest circle/तो बड़े वृत्त की त्रिज्या =

$$(R) = r \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 \right)$$

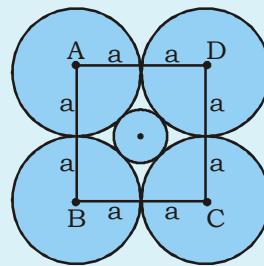


With A, B, C centres, three circles are drawn such that they touch each other externally.

The sides of $\triangle ABC$ are x cm, y cm, z cm then sum of the radius of the circles =

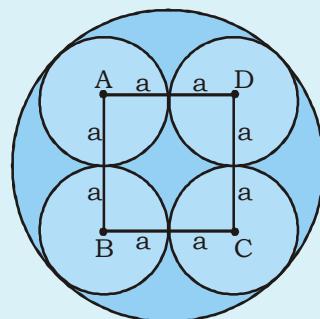
A, B और C केंद्रों वाले तीन वृत्त एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं यदि $\triangle ABC$ की भुजाएँ x cm, y cm, z cm, हो तीनों वृत्तों की त्रिज्याओं का योग =

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{x + y + z}{2}$$



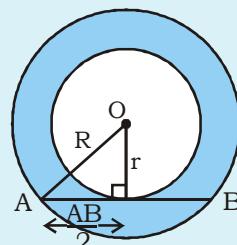
In the given figure, radius of smaller circle is/ दी गई आकृति में, छोटे वृत्त की त्रिज्या:

$$= \frac{1}{2} \times [2a(\sqrt{2} - 1)] = (\sqrt{2} - 1)a$$

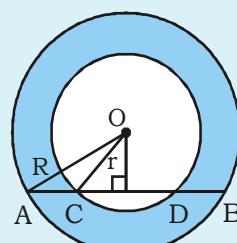


In the given figure, find the radius of bigger circle is/ दी गई आकृति में, बड़े वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करें:

$$= \sqrt{2}a + a = (\sqrt{2} + 1)a$$



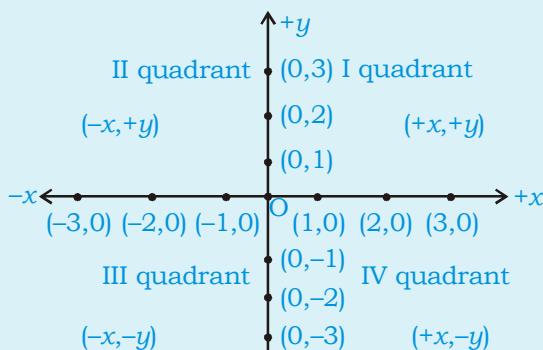
$$\text{Area of ring } [\pi(R^2 - r^2)] = \frac{\pi AB^2}{4}$$



$$\text{Area of ring} = \pi \left(\frac{AB^2 - CD^2}{4} \right)$$



Co-ordinate Geometry (निर्देशांक ज्यामिति)



O (origin) (मूल) $\equiv (O, O)$

$P \equiv (x, y)$

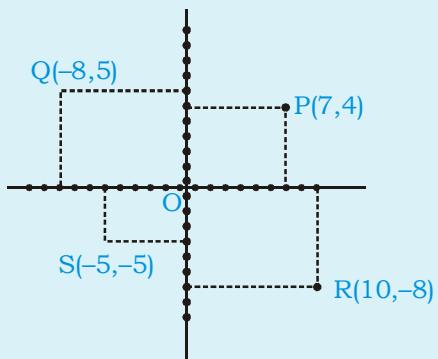
Equation of x -axis $\Rightarrow y = 0$

x -अक्ष का समीकरण $\Rightarrow y = 0$

Equation of y -axis $\Rightarrow x = 0$

y -अक्ष का समीकरण $\Rightarrow x = 0$

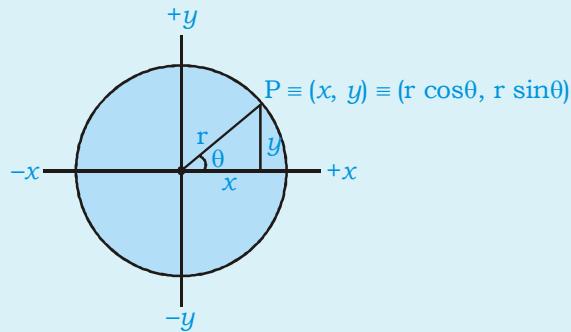
❖ Representation of points (बिंदुओं का निरूपण/प्रतिरूपण)



Polar co-ordinates of a point (एक बिंदु के ध्रुवीय निर्देशांक)

- ❖ Pole \rightarrow Reference point in polar co-ordinate system the co-ordinates is called a pole.
- ❖ When each point on a plane of a 2D co-ordinate system is decided by a distance from a reference point and an angle is taken from a reference direction. It is known as the polar co-ordinate system.

जब एक 2D निर्देशांक पद्धति के तल पर प्रत्येक बिंदु को एक संदर्भ बिंदु से दूरी द्वारा तय किया जाता है और एक संदर्भ दिशा से एक कोण लिया जाता है। इसे ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति के रूप में जाना जाता है।



$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Mid Point Formula (मध्य बिंदु सूत्र)

- ❖ A mid point is the middle point of a line segment which is equidistant from both the end points.

Mid point

एक मध्य बिंदु एक रेखा खंड का मध्य बिंदु होता है जो दोनों अंत बिंदुओं से समान दूरी पर होता है।

Mid point / (मध्य बिंदु)

A(x_1, y_1) C B(x_2, y_2)

$$\text{Mid point } / C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Distance formula (दूरी सूत्र)

- ❖ Distance between two points is the length of the line segment that connects the two points in a plane.

दो बिंदुओं के बीच की दूरी उस रेखाखंड की लंबाई है जो एक समतल में दो बिंदुओं को जोड़ती है।

$$A \equiv (x_1, y_1) \quad \therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$B \equiv (x_2, y_2)$$

Point of intersection formula/प्रतिच्छेद बिंदु का सूत्र

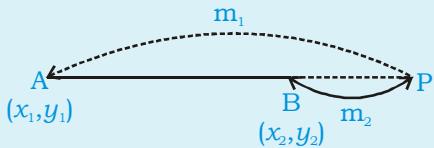
- (A) Internal division / आंतरिक विभाजन \rightarrow

A (x_1, y_1) P B (x_2, y_2)

$$P \equiv \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

(B) External division / बाह्य विभाजन →

$$AP : PB = m_1 : m_2$$



$$P \equiv \left(\frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2} \right)$$

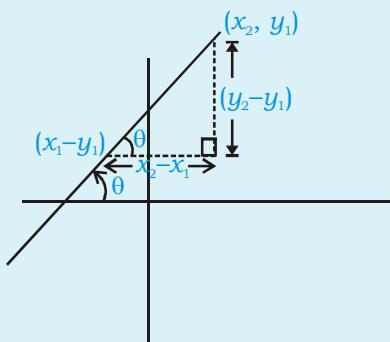
Slope of a Line (रेखा की ढालान)

- The slope of a line is a measure of its steepness. It is the change in y co-ordinate with respect to the change in x co-ordinate.

किसी रेखा का ढाल उसकी ढाल का माप होता है। यह y निर्देशांक में परिवर्तन के संबंध में x निर्देशांक में परिवर्तन है।

Slope of a line / रेखा की ढालान (m) = $\tan \theta$ (slope)

$$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



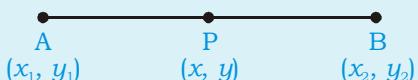
- Standard equation of a line / एक रेखा का मानक समीकरण
 $\rightarrow ax + by + c = 0$

$$\text{slope} = \frac{-a}{b}$$

Point form of a line / एक रेखा से बिंदु

Slope of line AP = slope of line AB.

रेखा AP का ढाल = रेखा AB का ढाल



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

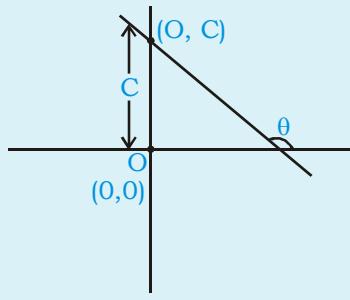
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Slope / ढालान = m

Intercept on y -axis / y -अक्ष पर अवरोधन = c

$$y - c = m(x - 0)$$

$$y = mx + c$$



$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ by &= -ax - c \end{aligned}$$

$$y = \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}$$

$$y = mx + c$$

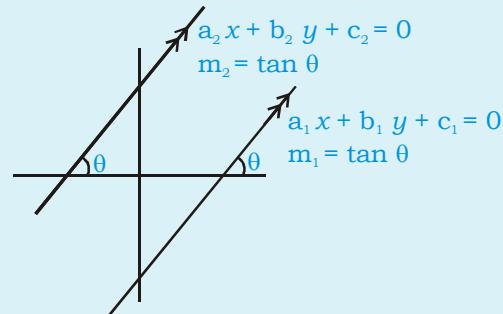
$$\text{compare / तुलना करना } m = \frac{-a}{b} = \frac{-\text{coff. of } x}{\text{coff. of } y}$$

- If two lines are parallel to each other their slope will be equal $\Rightarrow m_1 = m_2$

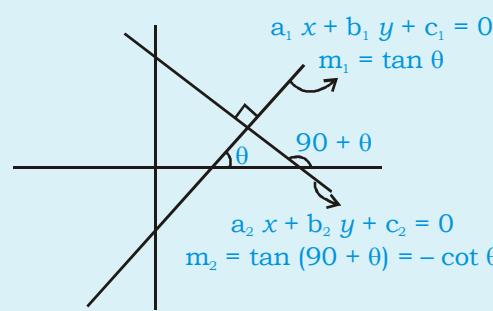
यदि दो रेखाएँ एक दूसरे के समांतर हों तो उनकी प्रवणता बराबर होगी
 $\Rightarrow m_1 = m_2$

$$\frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



- If two lines are perpendicular to each other \rightarrow
 यदि दो रेखाएँ एक दूसरे के लंबवत हों \rightarrow



$$\therefore m_1 m_2 = \tan \theta (-\cot \theta)$$

$$\therefore m_1 m_2 = -1$$

Concurrent Lines (समवर्ती रेखाएँ)

Intercept form of a line (एक रेखा का अवरोधन रूप)

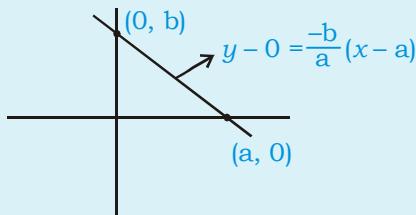
- ❖ Intercept at x -axis = a

x -अक्ष पर अंतःखंड = a

Intercept at y -axis = b

y -अक्ष पर अवरोधन(अंतःखंड) = b

$$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



$$\frac{-y}{b} = \frac{x}{a} - 1$$

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

- ❖ Equation of line parallel to line $ax + by + c = 0$ is $ax + by = k$.

रेखा $ax + by + c = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $ax + by = k$ है।

Equation of line perpendicular to line $ax + by + c = 0$ is $bx - ay = k$.

रेखा $ax + by + c = 0$ पर लंबवत रेखा का समीकरण $bx - ay = k$ है।

- (A) If two lines are $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ are parallel to each other then $m_1 = m_2$ and

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

यदि दो रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

एक दूसरे के समानांतर हैं तो $m_1 = m_2$ और $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

No intersecting point / कोई प्रतिच्छेदन बिंदु नहीं

∴ No solution possible / कोई हल संभव नहीं

- (B) If two line are co-incident on each other then

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ and infinite solutions}$$

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे पर संपाती हैं तो $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, अनंत हल संभव है।

- (C) If two lines intersect at single point then $m_1 \neq m_2$

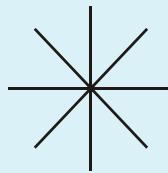
$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}, \text{ unique solution possible}$$

यदि दो रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो $m_1 \neq m_2$,

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ अद्वितीय हल संभव है

- ❖ Lines passing through a single point

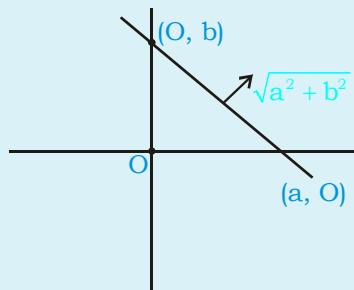
एक बिंदु से गुजरने वाली रेखाएँ



- ❖ Intercept by line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ between both axis

दोनों अक्षों के बीच $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ रेखा द्वारा अवरोधन

$$= \sqrt{a^2 + b^2}$$



- ❖ Line $ax + by = 0$ always passes through origin.

रेखा $ax + by = 0$ हमेशा मूल बिंदु से होकर गुजरती है।

Angle Between Two Lines (दो रेखाओं के बीच का कोण)

- ❖ $\theta \rightarrow$ acute angle / न्यून कोण

Let angle between two lines = θ and their slopes are m_1 and m_2 then

मान लीजिए कि दो रेखाओं के बीच का कोण = θ और उनकी प्रवणताएँ m_1 और m_2 हैं, तब

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

- ❖ Distance of line $ax + by + c = 0$ from a point (x_1, y_1)

एक बिंदु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c = 0$ की दूरी

$$\Rightarrow \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- ❖ Distance of line $ax + by + c = 0$ from origin

मूल बिंदु से रेखा $ax + by + c = 0$ की दूरी

$$= \left| \frac{C}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

❖ **Distance between two parallel lines:-**

दो समानांतर रेखाओं के बीच की दूरी :

$$ax + by + c_1 = 0$$

$$ax + by + c_2 = 0$$

$$\text{distance} / \text{दूरी} = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

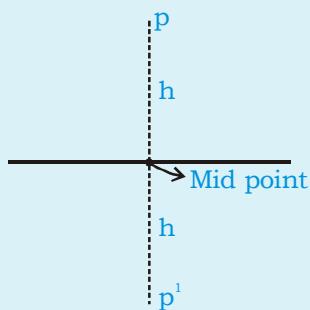
Reflection (प्रतिविंब)

❖ A reflection is the mirror image of the shape.

एक प्रतिविंब आकार की दर्पण छवि है।

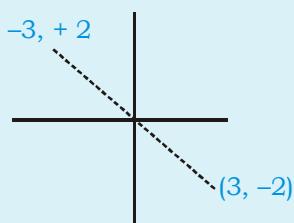
Types of reflection in co-ordinate system

निर्देशांक पद्धति में प्रतिविंब के प्रकार



1. If reflection is asked about origin change only signs

यदि प्रतिविंब मूल बिन्दु से पूछा जाए तो केवल संकेत बदलते हैं



2. **Reflection over x-axis** → x -co-ordinate remains same but y co-ordinate changes its signs.

x -अक्ष पर परावर्तन → x -निर्देशांक समान रहता है लेकिन y -निर्देशांक अपने चिह्न बदल देता है।

3. **Reflection over y-axis** → y co-ordinate remains same but x co-ordinate changes its signs.

y -अक्ष पर परावर्तन → y निर्देशांक पर परावर्तन समान रहता है लेकिन x निर्देशांक अपना चिह्न बदल लेता है।

4. **Reflection over $y = x$** → When a point is reflected across the line $y = x$, the x -co-ordinates and y co-ordinates change their places.

$y = x$ → पर परावर्तन जब एक बिन्दु रेखा $y = x$, x -निर्देशांक और y के पार परिलक्षित होता है निर्देशांक अपना स्थान बदलते हैं।

∴ Reflection of point (x, y) across the line $y = x$ is (y, x) .

बिन्दु (x, y) का रेखा $y = x$ पर परावर्तन है (y, x) ।

5. **Reflection over $y = -x$** → Both co-ordinates change their place and sign as well.

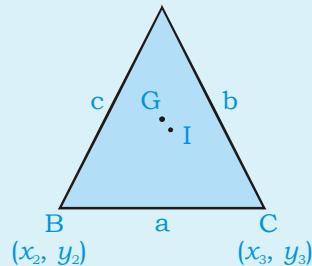
y पर प्रतिविंब $y = -x$ → पर परावर्तन दोनों निर्देशांक अपना स्थान और चिह्न भी बदलते हैं।

∴ Reflection of point (x, y) across the line $y = -x$ is $(-y, -x)$

बिन्दु (x, y) का रेखा $y = -x$ से परावर्तन होता है $(-y, -x)$

Centroid and Incentre (केन्द्रक और अन्तःकेन्द्र)

A ≡ (x_1, y_1)



G → Centroid / केन्द्रक

I → Incentre / अन्तःकेन्द्र

$$G \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$I \equiv \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} \right)$$

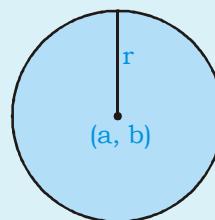
Equation of Circle (वृत्त का समीकरण)

- ❖ Where (a, b) are co-ordinates of center of circle and r is the radius.

जहाँ (a, b) वृत्त के केंद्र के निर्देशांक हैं और r त्रिज्या है।

Equation of circle / वृत्त का समीकरण →

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



if centre is origin / अगर केंद्र मूल है

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- ❖ Area enclosed by $|x| + |y| = a \Rightarrow 2a^2$

$|x| + |y| = a$ से घिरा क्षेत्र $\Rightarrow 2a^2$

➤ Equation of x axis / x अक्ष का समीकरण $\Rightarrow y = 0$

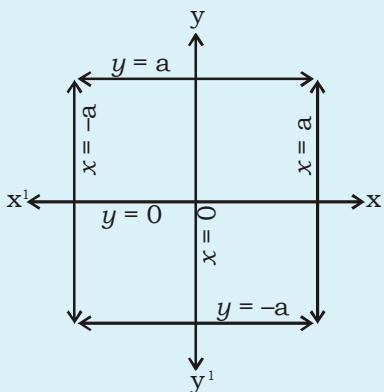
➤ Equation of line parallel to x axis $\Rightarrow y = \pm a$

x अक्ष के समांतर रेखा का समीकरण $\Rightarrow y = \pm a$

Area of A triangle (त्रिभुज का क्षेत्रफल)

- The area of a triangle the Co-ordinate of whose vertices are $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ and (x_3, y_3) is
एक त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्षों के निरेशांक हैं

$$\frac{1}{2} | x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) |$$

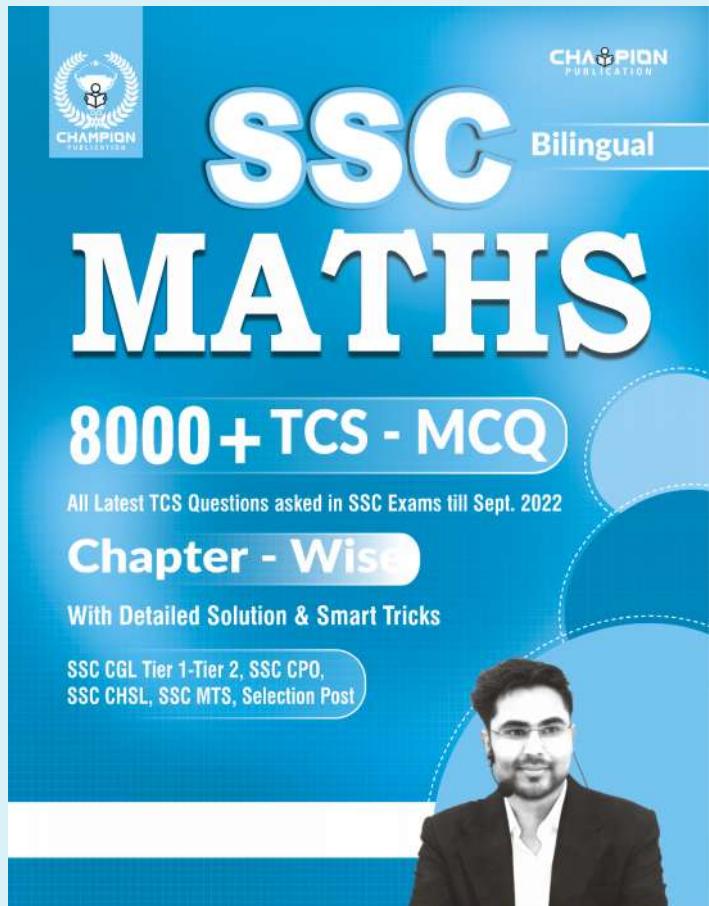


- Point of intersection of two lines

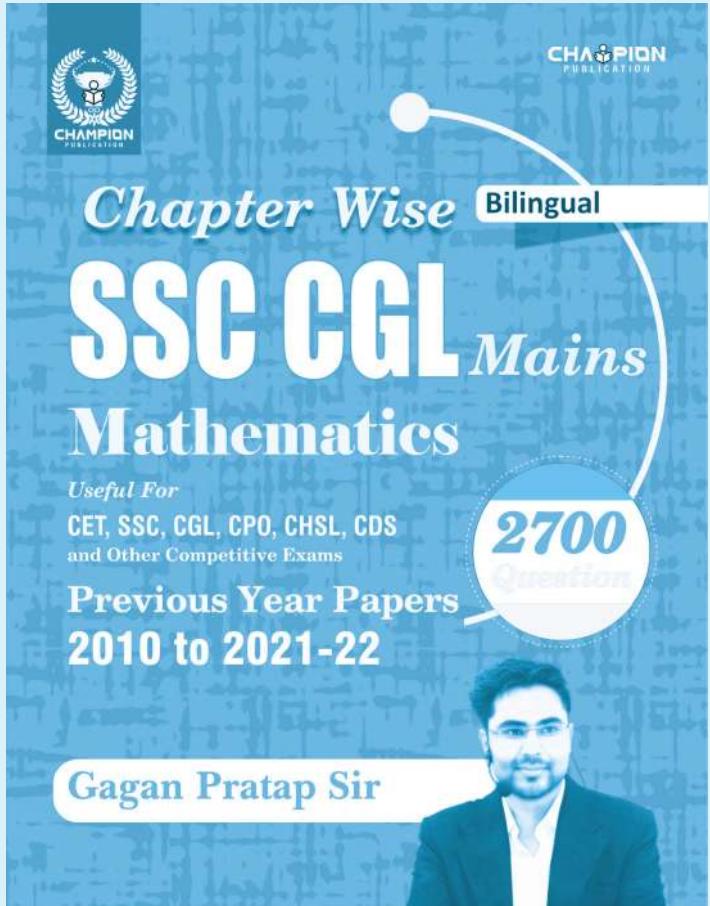
दो रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$$



Gagan Pratap Sir





2 Dimension Mensuration (2 आयामी क्षेत्रमिति)



- ❖ **Zero-Dimensional figure** → • (point)

शून्य-आयामी आकृति → • (बिंदु)

One-Dimensional figure → ←→ only length.

एक आयामी आकृति → ←→ केवल लंबाई।

Two-Dimensional figure (दो आयामी आकृति) →

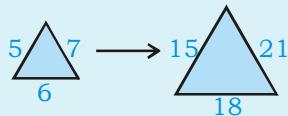


Three-Dimensional figure (त्रि-आयामी आकृति) →



H Length, Breadth & Height
लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई

- ❖ For Any 2D figure (किसी भी दो आयामी आकृति के लिए) →



- ❖ If each corresponding length of any 2D figure = K times.

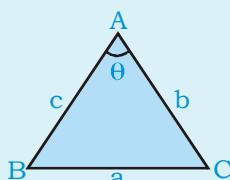
यदि किसी भी दो आयामी आकृति की प्रत्येक संगत लंबाई = K गुना

Then, perimeter = K times / तब परिमाप = K गुना

Area = K² times / क्षेत्रफल = K² गुना

Triangle (त्रिभुज)

1. Scalene triangle / विषमभागी त्रिभुज



Perimeter / परिमाप = a + b + c

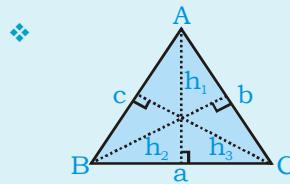
Semi-Perimeter / अर्धपरिमाप (s) = $\frac{a+b+c}{2}$

Area / क्षेत्रफल (Δ) = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Area / क्षेत्रफल (Δ) = $\frac{1}{2} bcsinA = \frac{1}{2} absinC = \frac{1}{2} acsinB$

Inradius / अंतःत्रिज्या (r) = $\frac{\text{Area}}{s}$

Circumradius / परित्रिज्या (R) = $\frac{abc}{4 \times \text{Area}}$



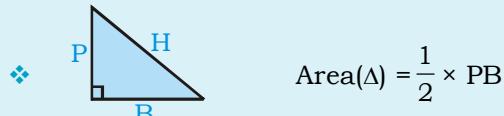
$$\text{Area}/\text{क्षेत्रफल} (\Delta) = \frac{1}{2} \times \text{Base}/\text{आधार} \times \text{Height}/\text{ऊंचाई} =$$

$$\frac{1}{2} ah_1 = \frac{1}{2} bh_2 = \frac{1}{2} ch_3$$

$$\therefore ah_1 = bh_2 = ch_3 = (\text{constant})$$

$$\therefore a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3} \quad (\text{Result})$$

2. Right angle triangle (समकोण त्रिभुज)



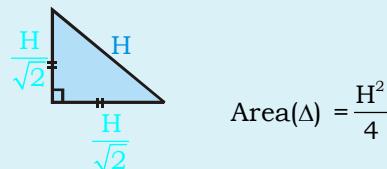
$$\text{Area}(\Delta) = \frac{1}{2} \times PB$$

$$\text{Perimeter}/\text{परिमाप} = P+B+H$$

$$\text{Inradius}/\text{अंतःत्रिज्या} (r) = \frac{P+B-H}{2}$$

$$\text{Circumradius}/\text{परित्रिज्या} (R) = \frac{\text{Hypotenuse}}{2} = \frac{H}{2}$$

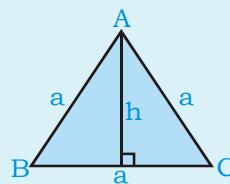
3. Isosceles right angle triangle (समद्विभागी समकोण त्रिभुज)



$$\text{Area}(\Delta) = \frac{H^2}{4}$$

$$\text{Perimeter} = H + \sqrt{2}H = H(\sqrt{2} + 1)$$

4. Equilateral triangle (समबाहु त्रिभुज)



$$\text{Side}/\text{भुजा} = a$$

Inradius / अन्तः त्रिज्या (r) = $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ or $\frac{h}{3}$

Circumradius / परित्रिज्या त्रिज्या (R) = $\frac{a}{\sqrt{3}}$ or $\frac{2h}{3}$

Perimeter / परिमाप = $3a$

Height / ऊँचाई (H) = $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

Area / क्षेत्रफल (Δ) = $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

a (side) height Area

2 $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

$\downarrow \times k$ $\downarrow \times k$ $\downarrow \times k^2$

2K $\sqrt{3} K$ $\sqrt{3} K^2$ (Result)

- ❖ **Heronian Triangle:** All sides and area is integer.
हेरोनियन त्रिभुज : सभी भुजाएँ और क्षेत्रफल पूर्णांक हैं।

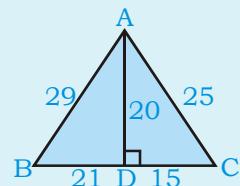
Find the Area of Δ with side $\rightarrow 36, 29, 25$

29, 20, 21

15, 20, 25 (use the common triplet)

$15 + 20 = 36$ (Acute Δ)

ऐसे 2 साइड देखो जो 90° के सामने हों और triplet में 1 length common हो

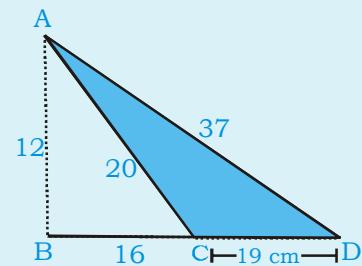


Area of triangle / त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 36 \times 20 = 360 \text{ cm}^2$

- ❖ 57, 60, 111 \rightarrow Find Area / क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Simplify by 3 / 3 से सरल कीजिए $\Rightarrow 19, \frac{20}{12}, \frac{37}{12}$

$35 - 16 = 19$ (obtuse Δ)

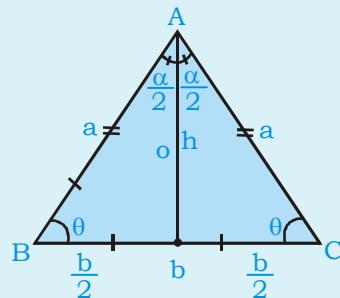


Area / क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 19 \times 12 = 114$

\therefore Area of original Δ (मूल Δ का क्षेत्रफल) \Rightarrow

$114 \times (3)^2 \Rightarrow 114 \times 9 \Rightarrow 1026 \text{ cm}^2$

- 5. **Isosceles triangle** (समद्विबाहु त्रिभुज) :-

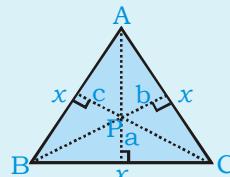


Height / ऊँचाई = $\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

Area / क्षेत्रफल = $\frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}$

Area / क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} a^2 \cdot \sin \alpha$

Perimeter / परिमाप = $2a + b$



ABC \rightarrow Equilateral Δ with side x and height H .

ABC \rightarrow भुजा x और ऊँचाई H के साथ समबाहु त्रिभुज।

P \rightarrow Any point inside triangle./त्रिभुज के अंदर कोई बिंदु a,b,c \rightarrow \perp (Perpendicular) from point P on each side

a,b,c \rightarrow प्रत्येक भुजा पर P से \perp (लम्ब)

$H = a+b+c$

Area $\Delta ABC = \Delta BPC + \Delta APC + \Delta APB$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{1}{2} xa + \frac{1}{2} xb + \frac{1}{2} xc$$

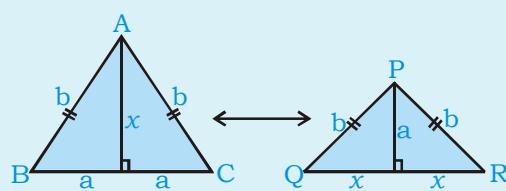
$$\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{x}{2} (a+b+c) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} x = a+b+c$$

$\therefore H = a+b+c$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} (a+b+c)$$

(Result)

Area of $\Delta ABC = \frac{1}{\sqrt{3}} (a+b+c)^2$



Area of $\Delta ABC = ax = \text{Area of } \Delta PQR$

Scalene Triangle (विषमबाहु त्रिभुज)

- All 3 side are unequal. / तीनों भुजाएँ असमान हैं।

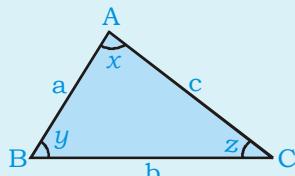
Perimeter / परिमाप (P) = $a + b + c$

$$\text{Semi-perimeter} / \text{अर्ध परिधि} = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{Area of } \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{Area of } \triangle ABC = r \times s$$

$$\text{Area of } \triangle ABC = \frac{abc}{4R}$$



- If regular polygon have same perimeter then figure with more number of sides have greater area.

यदि नियमित बहुभुज का परिमाप समान हो तो अधिक भुजाओं वाली आकृति का क्षेत्रफल अधिक होता है।

\therefore Area of square > Area of \triangle with same perimeter.

वर्ग का क्षेत्रफल > समान परिमाप वाले \triangle का क्षेत्रफल।

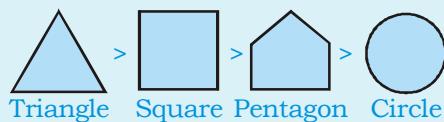
Infinite sides / अनंत भुजाएँ \rightarrow circle / वृत्त

\therefore circle has more area then any other closed figure.

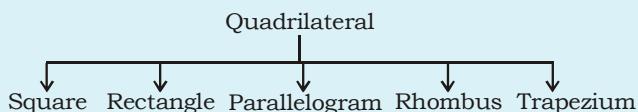
\therefore वृत्त का क्षेत्रफल किसी अन्य बंद आकृति से अधिक होता है।

- If all the given figure have the same perimeter then:-

यदि दि गई सभी आकृतियाँ का परिमाप समान हो तो:-

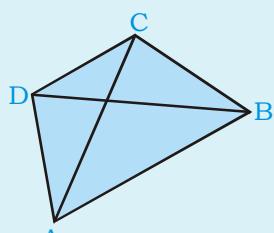


Quadrilateral (चतुर्भुज)



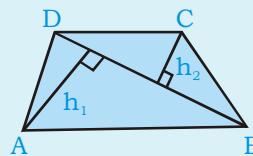
Quadrilateral: A closed shape and a type of polygon that has 4 sides, 4 vertices and 4 angles.

चतुर्भुज : एक बंद आकृति और एक प्रकार का बहुभुज जिसमें 4 भुजाएँ, 4 शीर्ष और 4 कोण होते हैं।



$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

Area of Quadrilateral / चतुर्भुज का क्षेत्रफल



$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times BD \times (h_1 + h_2)$$

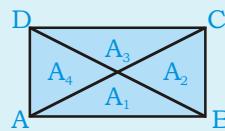
$$= \frac{1}{2} \times \text{diagonal} \times (\text{Sum of perpendiculars drawn on this diagonal})$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{विकर्ण} \times (\text{इस विकर्ण पर खोंचे गए लंबों का योग})$$

- In any Quadrilateral / किसी भी चतुर्भुज में

A_1, A_2, A_3 and A_4 are the area of respective triangles.

A_1, A_2, A_3 और A_4 क्रमशः त्रिभुजों के क्षेत्रफल हैं।

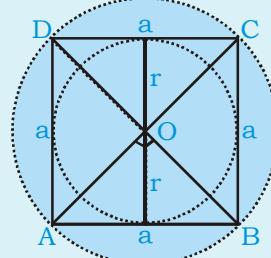


$$A_1 \times A_3 = A_2 \times A_4$$

- Area of quadrilateral made by joining the mid points of all sides of given quadrilateral is half of the original quadrilateral.

दिए गए चतुर्भुज की सभी भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाकर बने चतुर्भुज का क्षेत्रफल मूल चतुर्भुज का आधा होता है।

Square (वर्ग)



$$\text{Area of } \triangle AOB = \text{Area of } \triangle BOC = \text{Area of } \triangle COD =$$

$$\text{Area of } \triangle AOD = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Perimeter} / \text{परिधि} = 4a$$

$$\text{Area} / \text{क्षेत्रफल} = a^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$\text{diameter} / \text{व्यास} = a\sqrt{2}$$

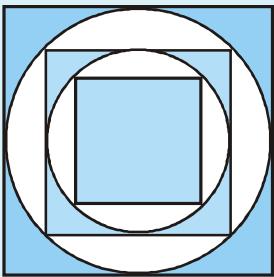
$$\text{Inradius} / \text{अंतःत्रिज्या} (r) = \frac{a}{2}$$

Circumradius / बाह्य त्रिज्या (R) = $\frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$R : r = \sqrt{2} : 1, \frac{\text{Area of circumcircle}}{\text{Area of incircle}} = \frac{2}{1}$$

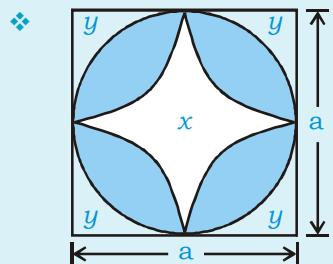
- If we make circle inside a square and again make a square inside the circle and so on... the area will becomes half and so on.

यदि हम एक वर्ग के भीतर एक वृत्त बना दें और फिर से वृत्त के भीतर एक वर्ग बना लें और इसी तरह से बनाते रहे तो क्षेत्रफल आधा होता जाता है।

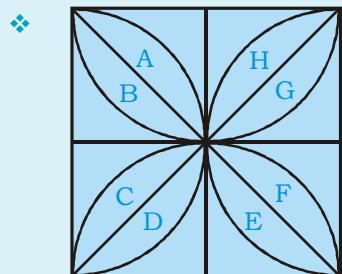


Area of largest square सबसे बड़े वर्ग का क्षेत्रफल 4	: middle : smallest मध्य : सबसे छोटा 2	: : 1
--	--	------------

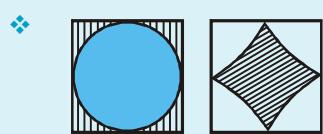
$$\therefore \text{Largest : smallest} / \text{सबसे बड़ा : सबसे छोटा} \Rightarrow 4 : 1$$



$$\text{Area of shaded region (छांयाकित भाग का क्षेत्रफल)} = \frac{4}{7} a^2$$

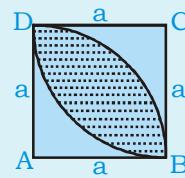


Area of A, B, C, D, E, F, G, H is equal



a is the side of square.
 a वर्ग की भुजा है।

Shaded Area / छांयाकित क्षेत्र = $\frac{3a^2}{14}$



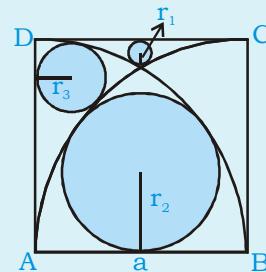
$$\text{Area of leaf / पत्ती का क्षेत्रफल} = \frac{4}{7} a^2$$

Area of leaf / पत्ती का क्षेत्रफल

$$= a \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + a \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - a^2$$

$$\frac{\pi}{2} a^2 - a^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2 = \frac{4}{7} a^2$$

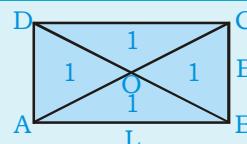
- If side of square / यदि वर्ग की भुजा = a



$$r_1 = \frac{a}{16}, \quad r_2 = \frac{3a}{8}, \quad r_3 = \frac{a}{6}$$

$$r_1 : r_2 : r_3 = \left[\frac{a}{16} : \frac{3a}{8} : \frac{a}{6} \right] \times 48 = 3 : 18 : 8$$

Rectangle (आयत)



Perimeter / परिमाप (P) = $2(L + B)$

Area / क्षेत्र (A) = $L \times B$

Diagonal / विकर्ण = $AC = BD = \sqrt{L^2 + B^2}$

Area of $\triangle AOB$ = Area of $\triangle BOC$ = Area of $\triangle COD$

$$= \text{Area of } \triangle AOD = \frac{LB}{4}$$

- Radius of maximum size circle that can be put inside rectangle = $\frac{\text{Breadth}}{2}$

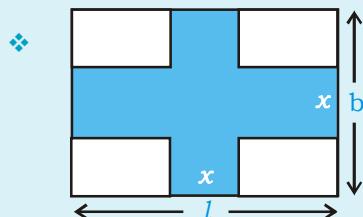
अधिकतम आकार के वृत्त की त्रिज्या जिसे आयत के अंदर रखा जा सकता है = $\frac{\text{Breadth}}{2}$

Path Around or Inside a Rectangle

(एक आयत के चारों ओर या अंदर पथ)

1. Crossing road inside rectangle

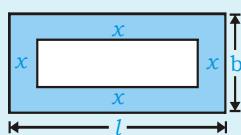
आयत के अंदर क्रॉसिंग सड़क



$$\text{Area of crossing road} = lx + bx - x^2 = x(l+b-x)$$

$$\text{Perimeter of path} = 2(l+b-2x)$$

2. Path inside a rectangle / एक आयत के अंदर पथ



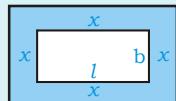
$$\text{Area of path} = 2x(l+b-2x)$$

$$\text{Perimeter of path} = 4(l+b-2x)$$

Where x is the width of the path. / जहाँ x पथ की चौड़ाई है

3. Path Outside a rectangular field

एक आयताकार मैदान के बाहर पथ

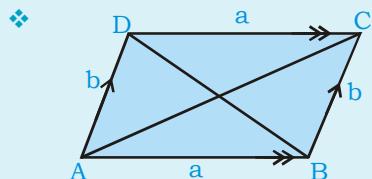


$$\text{Area of path} = 2x(l+b+2x)$$

$$\text{Perimeter of path} = 4(l+b+2x)$$

Where x is the width of path / जहाँ x पथ की चौड़ाई है

Parallelogram (समानान्तर चतुर्भुज)



$$\text{Perimeter} = 2(a+b)$$

$$AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

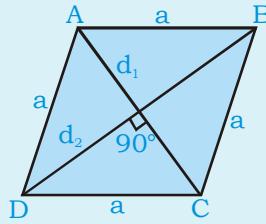
$\text{Area} = \text{Base} \times \text{Height}$ / आधार × ऊंचाई

If length of one diagonal is d / यदि एक विकर्ण की लंबाई d है

$$\text{Then Area} = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$$

$$\text{Where } s = \frac{a+b+d}{2}$$

Rhombus (समचतुर्भुज)



$$\text{Perimeter} / \text{परिमाप} = 4a$$

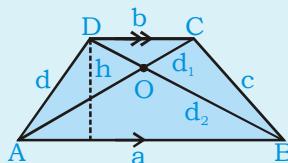
$$4a^2 = d_1^2 + d_2^2 \quad (\text{Property})$$

$$\text{area} / \text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$\text{Area} / \text{क्षेत्रफल} = \text{Base} / \text{आधार} \times \text{Height} / \text{ऊंचाई}$

$\text{Area of } \Delta \text{AOB} = \Delta \text{Area of } \Delta \text{BOC} = \text{Area of COD} = \text{Area of } \Delta \text{AOD}$

Trapezium (समलंब चतुर्भुज)



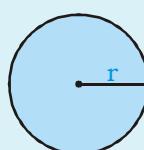
$$\text{Perimeter} / \text{परिमाप} = a + b + c + d$$

$$\text{Area} / \text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} (\text{Sum of parallel sides}) / \text{समानांतर भुजाओं का योग} \times \text{distance between them} / \text{उनके बीच की दूरी}$$

$$\text{Area} / \text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} (a+b) \times h$$

$$d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab \quad (\text{Property})$$

Circle (वृत्त)



$$\frac{\text{Circumference}}{\text{Diameter}} / \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \text{constant} = \pi$$

$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow \text{Circumference} / \text{परिधि} = 2\pi r$$

$$\text{diameter } (d) = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \quad (\text{Where, } A = \text{Area of circle})$$

$$\text{Area} / \text{क्षेत्रफल} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\text{radius } r = \frac{d}{2} \quad c = 2\pi r \quad A = \pi r^2$$

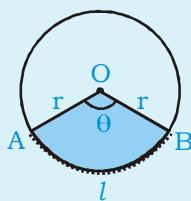
$$7 \quad 44 \quad 154$$

$$7K \quad 44K \quad 154K^2$$

$$24.5 \quad 44 \times 3.5 \quad 154 \times (3.5)^2 \quad \therefore 24.5 = 7 \times 3.5$$

$$28 \quad 44 \times 4 \quad 154 \times 16$$

Sector of a circle (एक वृत्त का खंड)



$\theta = \text{central angle} = \frac{\theta}{360^\circ}$ (sector is what part of circle)

$\theta = \text{केंद्रीय कोण} = \frac{\theta}{360^\circ}$ (वृत्तखंड वृत्त का कौन सा भाग है)

Area of sector / वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल OAB =

$$\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{l r}{2}$$

Length of $\overline{AB} = l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

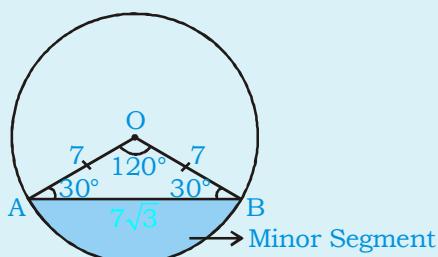
$$0^\circ = \theta \times \frac{\pi^c}{180}$$

$$l = r \times \frac{\pi \theta}{180}$$

$$l = r\theta^c \text{ or } \theta^c = \frac{l}{r}$$

Segment (वृत्तखंड)

❖ Minor segment / छोटे वृत्तखंड



Area of minor segment = Area of sector - Area of $\triangle OAB$

छोटे वृत्तखंड का क्षेत्रफल = वृत्तखंड का क्षेत्रफल - $\triangle OAB$ का क्षेत्रफल

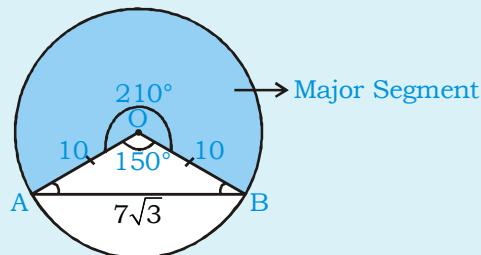
$$\Rightarrow \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 154 - \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{154}{3} - \frac{49}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{154}{3} - \frac{49\sqrt{3}}{4} \right) \text{ cm}^2$$

❖ Major segment / बड़ा वृत्तखंड

Area of major segment (बड़े वृत्तखंड का क्षेत्रफल) \Rightarrow



Area of sector (210°) + Area of $\triangle OAB$

क्रियखंड का क्षेत्रफल (210°) + $\triangle OAB$ का क्षेत्रफल

$$\Rightarrow \frac{210^\circ}{360^\circ} \times 100\pi + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 150^\circ$$

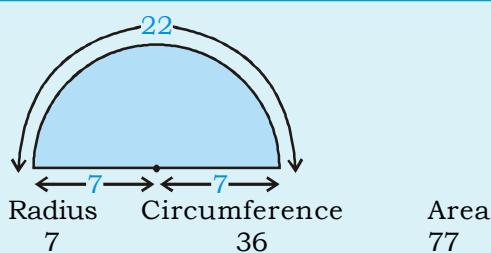
$$\Rightarrow \frac{7}{12} \times 100\pi + \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{175\pi}{3} + 25 \right) \text{ cm}^2$$

Perimeter of segment

$$\text{खंड की परिधि} = 2r \left[\frac{\pi\theta}{360^\circ} + \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

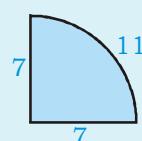
For semi-circle (अर्धवृत्त के लिए)



Perimeter / परिधि = $\pi r + \text{diameter}$

$$\text{Area} = \frac{\pi r^2}{2}$$

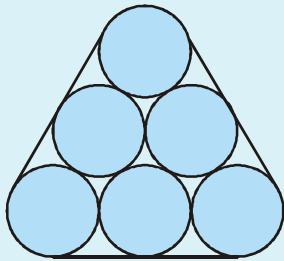
For a quadrant (एक चतुर्थांश के लिए)



Radius	Circumference	Area
त्रिज्या	परिधि	क्षेत्रफल
7	25	$\frac{77}{2} = 38.5$

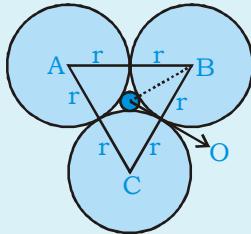
$$\text{Perimeter} / \text{परिधि} = r + r + \frac{2\pi r}{4} = 2r + \frac{\pi r}{2}$$

$$\text{Area} / \text{क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2}{4}$$



Length of string = $2\pi r + \text{diameter} \times \text{number of circles}$

डोरी की लंबाई = $2\pi r + \text{व्यास} \times \text{वृत्तों की संख्या}$



$\triangle ABC$ = equilateral Δ

OB = circumradius

Let radius of small circle = x

माना छोटे वृत्त की त्रिज्या = x

$$OB = \frac{\text{side of equilateral } \Delta}{\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = \frac{2r}{\sqrt{3}} - r$$

$$x = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \times r$$

If we draw a big circle around these 3 circles, then

$$\text{radius of that big circle} \Rightarrow y = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r$$

यदि हम इन 3 वृत्तों के चारों ओर एक बड़ा वृत्त बनाते हैं, तो उस बड़े

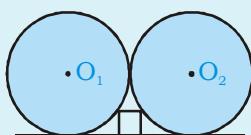
$$\text{वृत्त की त्रिज्या} \Rightarrow y = \frac{2r}{\sqrt{3}} + r$$

$$y = r \times \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right)$$

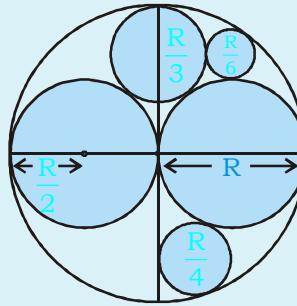
(Result)

- Two circles of equal radius touch each other as shown in figure, a square of side 'a' is placed between two circles. One side of square is on direct common tangent of both circles, find r/a ?

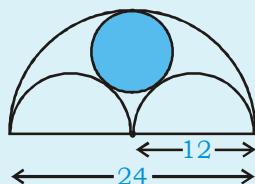
समान त्रिज्या r वाले दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। a भुजा वाला एक वर्ग इस प्रकार स्थित है कि वर्ग की एक भुजा दोनों वृत्तों के उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा पर स्थित है। तब r/a का मान होगा?



$$\frac{r}{a} = \frac{5}{2}$$

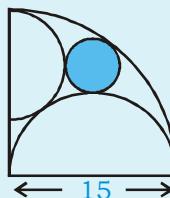


Base Figure



Derived Figure

$$\text{radius of shaded part (छायाकित भाग की त्रिज्या)} = \frac{R}{3} = \frac{12}{3} = 4$$



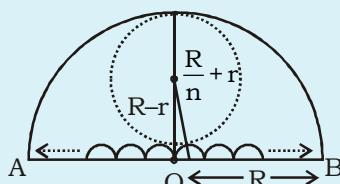
Derived Figure

$$\text{radius of shaded part (छायाकित भाग की त्रिज्या)} = \frac{R}{6} = \frac{15}{6} = 2.5$$

- n semi-circle (even) drawn on diameter AB
- n अर्धवृत्त (सम) व्यास AB पर खींचे गए हैं।

$$\text{Radius of each small semi-circle} = \frac{R}{n}$$

$$\text{प्रत्येक छोटे अर्धवृत्त की त्रिज्या} = \frac{R}{n}$$



$$\left(\frac{R}{n} + r \right)^2 = \left(\frac{R}{n} \right)^2 + (R-r)^2$$

$$\frac{R^2}{n^2} + r^2 + 2 \times \frac{R}{n} \times r = \frac{R^2}{n^2} + R^2 + r^2 - 2Rr$$

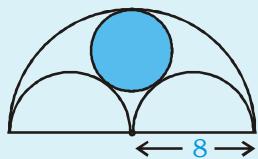
$$2 \times \frac{R}{n} \times r = R^2 - 2Rr$$

$$\frac{2Rr}{n} + 2Rr = R^2$$

$$2Rr \left(\frac{1+n}{n} \right) = R^2$$

$$r = \frac{Rn}{2(n+1)}$$

radius of small circle (छोटे वृत्त की त्रिज्या) $r = \frac{nR}{2(n+1)}$

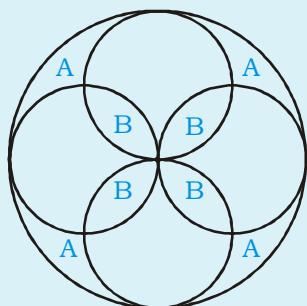


Here, $n = 2$, $R = 8$

\therefore radius of shaded part (छायांकित भाग की त्रिज्या)

$$= \frac{2 \times 8}{2 \times 3} = \frac{8}{3}$$

❖ Find $A/B = ?$

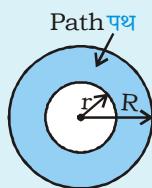


$$A = B$$

(Property)

$$\frac{A}{B} = 1 : 1$$

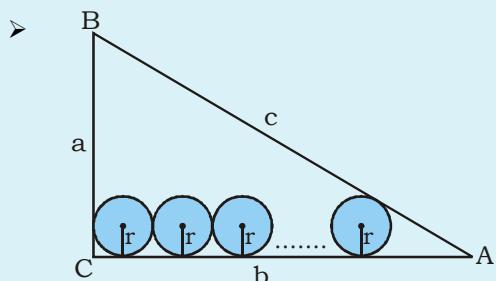
❖ Ring (वलय)



Area of ring / वलय का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

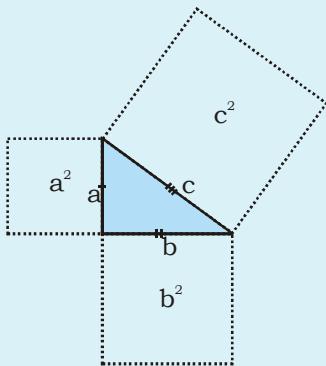
Width of path / पथ की चौमार्दी = $R - r$

Some important results



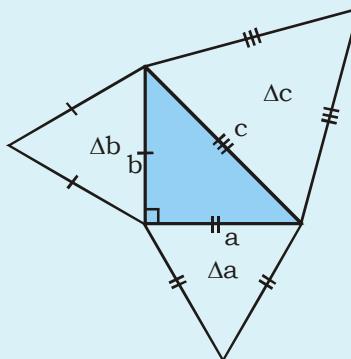
n – identical circles

$$r = \frac{ab}{(2n-1)a + b + c}$$



Area ($\square c$) = area ($\square b$) + area ($\square a$)

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Equilateral Δ s

Area (Δc) = area (Δb) + area (Δa)

वर्ग के अंदर बने रास्ते का क्षेत्रफल = $4d(a-d)$

$\therefore d = \text{length of Path}/\text{जहाँ}, d = \text{रास्ते की चौड़ाई}$

$a = \text{length of Square}/a = \text{वर्ग की लंबाई}$

➤ Area of Path outside Square / वर्ग के बाहर बने रास्ते का क्षेत्रफल = $4d(a+d)$

➤ Area of Path midway Square / वर्ग के बीचों-बीच बने रास्ते का क्षेत्रफल = $d(2a-d)$

➤ If the side of square increase by x times then the area of the square becomes x^2 times.

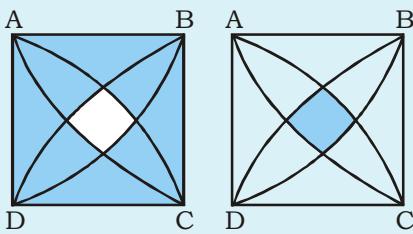
यदि वर्ग की भुजा को x गुना बढ़ा दिया जाये तब वर्ग का क्षेत्रफल x^2 गुना हो जाता है।

➤ If the area of the square is $a = \frac{4a}{\pi} \text{ cm}^2$, then the area of the circle formed by the same perimeter is

यदि वर्ग का क्षेत्रफल a सेमी 2 , तब समान परिमाप से बनाए गए वृत्त का

$$\text{क्षेत्रफल होता है} = \frac{4a}{\pi} \text{ cm}^2/\text{सेमी}^2$$

- Area of shaded part/छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



$$a^2 - 4 \left[\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{\pi a^2}{12} \right] = a^2 - \sqrt{3} a^2 + \frac{\pi a^2}{3}$$

$$a^2 \left[1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right]$$

- Room as a Rectangular figure

आयताकार कमरः-

Area of four walls of room

आयताकार कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्रफल

$$= \text{Perimeter} \times \text{Height} = 2 \times (L + B) \times H$$

- Area of Roof and 4 walls

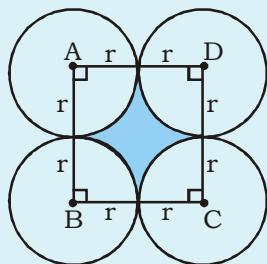
चारों दीवारों और छत का क्षेत्रफल

$$= 2H(L + B) + LB$$

(This formula can be used when we have to paint a whole room)

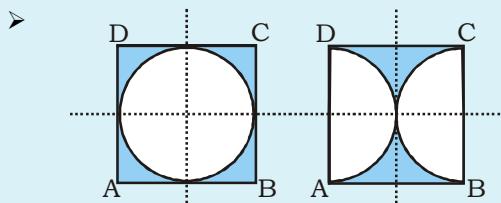
यह सूत्र तब प्रयोग कर सकते हैं जब हमें पूरे कमरे की पुताई करानी हो।

- Find the area of shaded part/छायांकित भाग का क्षेत्रफल



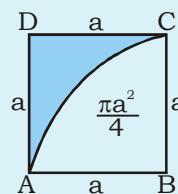
Area of square - sector/वर्ग का क्षेत्रफल-चारों त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल

$$4r^2 - \frac{\pi r^2}{360} \times 90 \times 4 = r^2[4 - \pi]$$



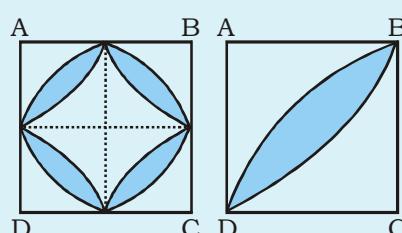
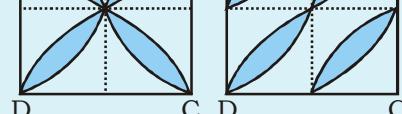
Area of shaded region is equal in each case.

छायांकित भाग का क्षेत्रफल प्रत्येक स्थिति में समान होगा।



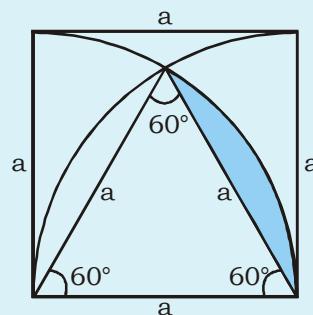
Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(4 - \pi)$$



Area of shaded region is equal in each case.

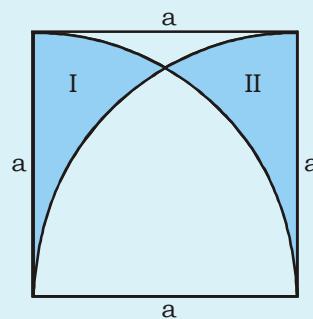
छायांकित भाग का क्षेत्रफल प्रत्येक स्थिति में समान होगा।



Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

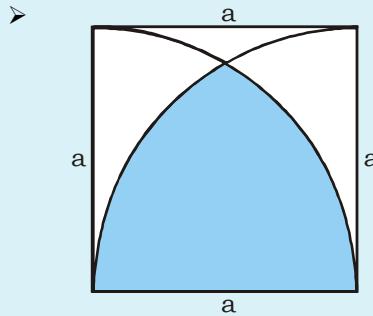
$$= \frac{a^2}{12} [2\pi - 3\sqrt{3}]$$

= 9.05% of square area/वर्ग के क्षेत्रफल का 9.05%



$$\text{Area of (I)} = \text{area of (II)} = \frac{a^2}{12} [3\sqrt{3} - \pi]$$

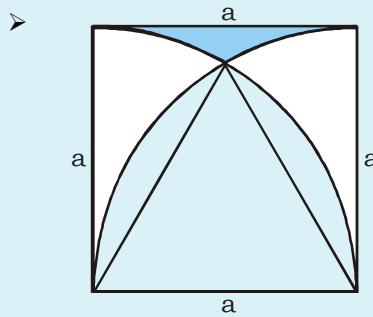
= 17.1208% of square area/वर्ग के क्षेत्रफल का



Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

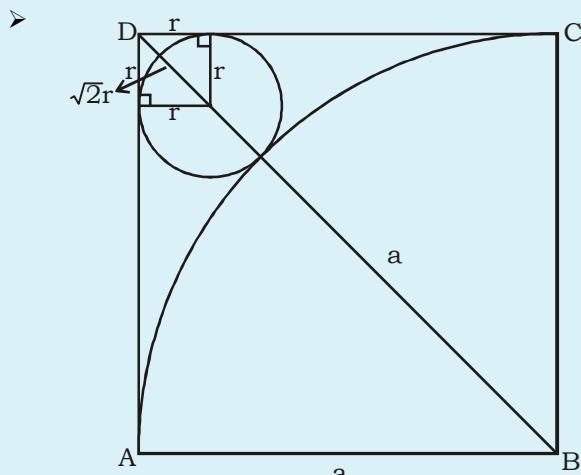
$$= \frac{a^2}{12} [4\pi - 3\sqrt{3}]$$

= 61.4166% of square area/वर्ग का क्षेत्रफल



Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \frac{a^2}{12} [12 - 2\pi - 3\sqrt{3}] = 4.3388\% \text{ of square area}$$

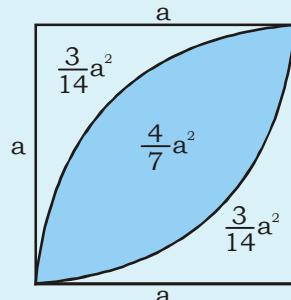


$$\sqrt{2}r + r + a = \sqrt{2}a$$

$$r(\sqrt{2} + 1) = (\sqrt{2} - 1)a$$

$$r = \frac{(\sqrt{2} - 1)a}{\sqrt{2} + 1}$$

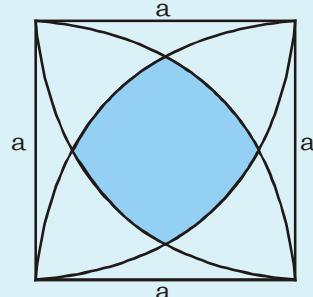
$$r = (\sqrt{2} - 1)a$$



Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \frac{a^2}{2}(\pi - 2) = \frac{4}{7}a^2$$

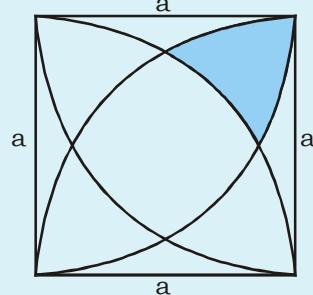
= 57.02% of square area



Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \frac{a^2}{3} \{3(1 - \sqrt{3}) + \pi\}$$

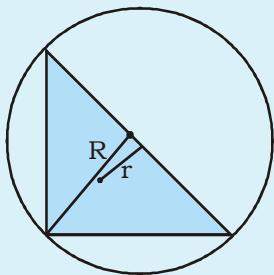
= 31.5146% of square area



Area of shaded region/छायांकित भाग का क्षेत्रफल

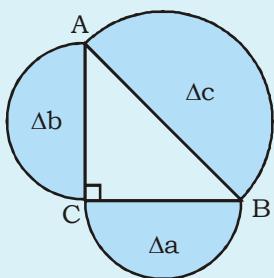
$$= \frac{a^2}{12} \{\pi - 12 + 6\sqrt{3}\}$$

= 12.78% or $\frac{1}{8}$ of square area

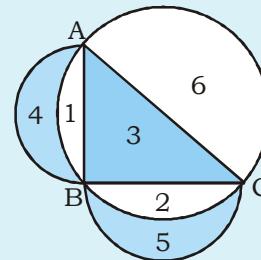


$$r = \frac{p + b - h}{2}; R = \frac{h}{2}$$

$$r = \frac{\Delta}{s}; R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{p \times b \times h}{4\Delta}$$

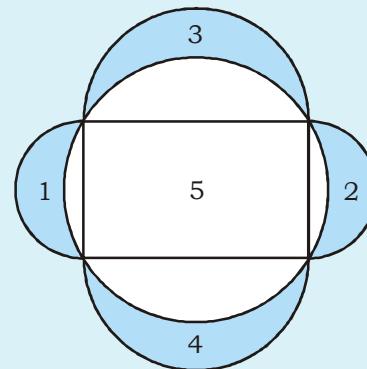


Area (Δc) = area (Δb) + area (Δa)



(i) area (6) = area (1) + area (2) + area (3)

(ii) area (4) + area (5) = area (3)



Here,

(i) area (1) = area (2)

(ii) area (3) = area (4)

(iii) area of [(1) + (2) + (3) + (4)] = area of rectangle (5)

INDEX	
GEOMETRY [गeometri]	
(1) Line and angle [लाइन और अंकुर]	3-12
(2) Type of Triangle, Interior and Exterior angle, Inequality of triangle and theorem [त्रिकोण के प्रकार, अंदरूनी और बाहरी अंकुर, त्रिकोण की असमिक्यता व नियम]	13-44
(3) Sine Rule, Cosine Rule, Angle bisector theorem [साईन रेल, कॉसाइन रेल, अंकुर विभाजक नियम]	45-65
(4) Area of Triangle [त्रिकोण का क्षेत्रफल]	66-79
(5) Similarity of Triangle [त्रिकोण की समानान्दता]	80-106
(6) Congruency of triangle [त्रिकोण की समानान्दता]	107-122
(7) Theorems on circle [वृत्त के नियम]	
(8) Centers of triangle [त्रिकोण के केंद्र]	123-141
(9) Circumcentre, Orthocenter [परिकेंद्र, अंकुर]	142-164
(10) Centroid [केंद्र]	165-179
(11) Incenter [अंकुर]	180-195
(12) Right angle triangle/Pythagoras Theorem [वर्तुल अंकुर, पायगोरस नियम]	196-219
(13) Square, Rectangle, Rhombus, Trapezium [चतुर्भुज, चतुर्भुज, वर्षभुज, वर्षभुज]	220-239
(14) Parallelogram, Rhombus, Trapezium [चतुर्भुज, वर्षभुज, वर्षभुज]	240-263
(15) Circle [angle based questions] [वृत्त के अंकुर आधारी वार्ता]	264-305
(16) Circle [Tangent/chord based questions] [वृत्त के वृत्त-चार्ड आधारी वार्ता]	306-335
Co-ordinate Geometry [बीली नियमित]	
2D Mensuration [2 आयामी मेसुरेशन]	
(1) Triangle [त्रिकोण]	362-374
(2) Quadrilateral [चतुर्भुज]	375-389
(3) Circle/Semi-circle [चतुर्भुज-मूल्यांकन]	390-416
(4) Polygon [पॉलिगोन]	417-427
3D Mensuration [3 आयामी मेसुरेशन]	
(1) Cube, Cuboid [क्यूब, क्यूबाईड]	428-441
(2) Cylinder, Hollow Cylinder [सिलिंडर, होली सिलिंडर]	442-457
(3) Cone, Cutting of Cone, Frustum [कॉन, कॉन की काटी, फ्रेस्यूम]	458-475
(4) Sphere, Hemisphere [स्फेर, हेमिस्फेर]	476-488
(5) Prism [प्रिस्म]	489-493
(6) Pyramid [पायरामिड]	494-503
Algebra [बीली नियमित] / 504-659	
Trigonometry [त्रिकोणमिति] / 660-834	
Maxima Minima [मायमा मिनिमा वार्ता]	802-811
Height and Distance [हाईट एंड डिस्टेंस]	812-834
Statistics [स्टैटिस्टिक्स] / 835-850	
Probability [प्रायिती] / 851-875	
Permutation and Combination [पर्मियूयन एंड कॉम्बिनेशन] / 876-916	



Polygon (बहुभुज)



- ❖ **Polygon:** closed figure of 3 or more sides.

बहुभुज : 3 या अधिक भुजाओं की बंद आकृति।



Polygon

convex/उत्तल

* each interior angle is less than 180°

All diagonals lies inside

* प्रत्येक आंतरिक कोण

180° से कम होता है

* सभी विकर्ण अंदर होते हैं



concave/अवतल

any one angle is more than 180°

Any one diagonal or more will be outside.

कोई भी एक कोण 180° से अधिक

होता है।

कोई एक या अधिक विकर्ण बाहर होगा।



Regular polygon (नियमित बहुभुज)

- ❖ **Always a convex polygon** / हमेशा एक उत्तल बहुभुज

* each side is equal (प्रत्येक भुजा बराबर है)

* each interior and exterior angle is equal

प्रत्येक आंतरिक और बाहरी कोण बराबर होते हैं।



Regular Hexagon: 6 sides/भुजाएँ

6 vertices/शीर्ष

6 interior angles/आंतरिक कोण

6 exterior angles/बाह्य कोण

∴ n sides polygon have: n vertices, n interior angles, n exterior angles.

∴ n भुजाओं वाले बहुभुज में: n शीर्ष, n आंतरिक कोण और n बाह्य कोण होते हैं।

- ❖ Sum of all interior angles of a polygon with n sides

n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग

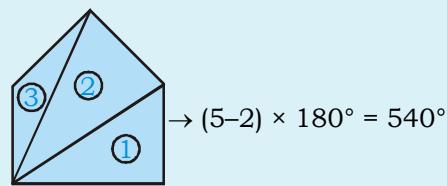
$\Rightarrow (n-2) \times 180^\circ$



$$\rightarrow (3-2) \times 180^\circ = 180^\circ$$

$$(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$$

$$\text{or } 2\Delta = 2 \times 180^\circ = 360^\circ$$



$$\text{or } 3\Delta = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

$$\rightarrow \text{Each interior angle of a regular polygon} \Rightarrow \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

$$\rightarrow \text{एक नियमित बहुभुज का प्रत्येक आंतरिक कोण} \Rightarrow \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

- ❖ Sum of all exterior angles of a 'n' sided polygon $\Rightarrow 360^\circ$

'n' भुजा वाले बहुभुज के सभी बाह्य कोणों का योग $\Rightarrow 360^\circ$

$$\Sigma I + \Sigma E = 180^\circ \times n$$

$$(n-2)180^\circ + \Sigma E = 180^\circ \times n$$

$$180^\circ n - 360^\circ + \Sigma E = 180^\circ n$$

$$\Sigma E = 360^\circ$$

$$I + E = 180^\circ$$

$$\text{Internal angle} + \text{External angle} = 180^\circ$$

$$\text{आंतरिक कोण} + \text{बाह्य कोण} = 180^\circ$$

$$\therefore \text{Each exterior angle of a regular polygon} = \frac{360^\circ}{n}$$

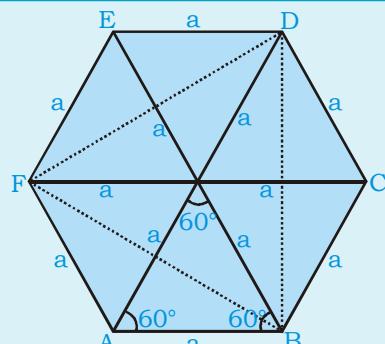
$$\text{एक नियमित बहुभुज का प्रत्येक बाहरी कोण} = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{No. of sides (भुजाओं की संख्या)} = \frac{360^\circ}{E}$$

$$\diamond \text{ No. of diagonals in a polygon} = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\text{एक बहुभुज में विकर्णों की संख्या} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Regular Hexagon (नियमित षट्भुज)



Each Interior angle / प्रत्येक आंतरिक कोण = 120°

Each exterior angle / प्रत्येक बाहरी कोण = 60°

Total diagonals / कुल विकर्ण = 9

Large diagonal (बड़ा विकर्ण) = $FC = AD = BE = 2a$

Perimeter / परिमाप = $6a$

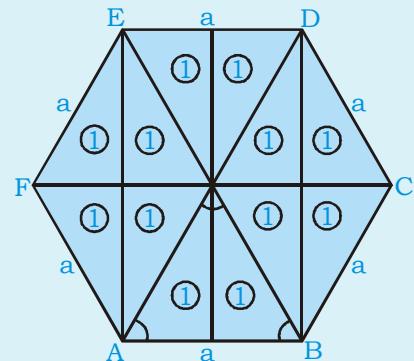
Regular Hexagon = 6 equilateral Δ = 3 Rhombus

नियमित षट्भुज = 6 समबाहु Δ = 3 समचतुर्भुज

$$\text{Area} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$r = \text{Short diagonal (लघु विकर्ण)} = FD = DB = BF = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Circumradius / परिधि (R) = a (side)

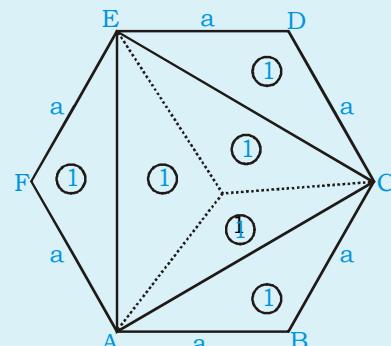
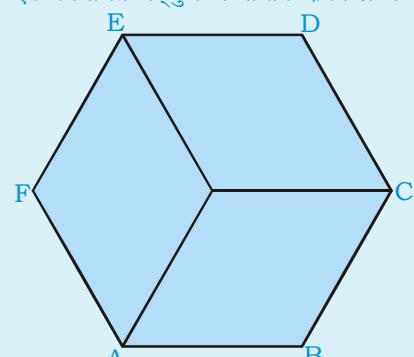


6 equilateral Δ formed. (6 समबाहु Δ का गठन हुआ।)

Area of each Δ is same. (प्रत्येक Δ का क्षेत्रफल समान है।)

3 Rhombus of equal area in a regular hexagon.

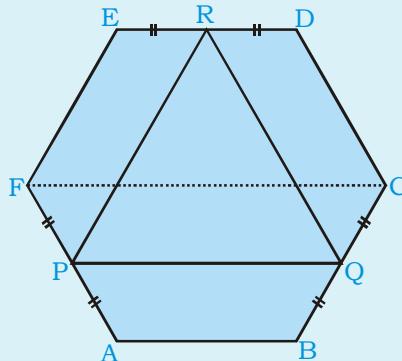
एक नियमित षट्भुज में समान क्षेत्रफल के 3 समचतुर्भुज।



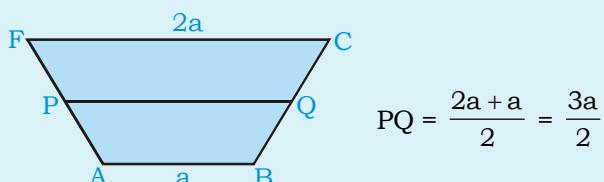
ΔEAC = equilateral Δ of side $\sqrt{3} a$

ΔEAC = $\sqrt{3} a$ भुजा का समबाहु Δ

$$\frac{\text{Area } \Delta EAC}{\text{Area ABCDEF}} = \frac{1}{2}$$



P, Q, R are mid points (P, Q, R मध्य बिंदु हैं)



$$\Delta PQR = \text{equilateral } \Delta \text{ with side } \frac{3a}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{Area } \Delta PQR}{\text{Area ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{9}{4} a^2}{6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{3}{8}$$

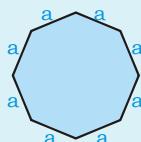
Octagon (अष्टभुज)

❖ Regular figure with 8 sides

8 भुजाओं वाली नियमित आकृति

Let side of octagon = a

मान लीजिए अष्टभुज की भुजा = a



$$\text{Area} / \text{क्षेत्र} = 2(\sqrt{2} + 1)a^2$$

$$\text{Perimeter} / \text{परिमाप} = 8a$$

$$\text{Inradius (r)} / \text{त्रिज्या (r)} = \frac{a}{2\sqrt{2}-2}$$

$$\text{Circumradius (R)} / \text{परिधि (R)} = \frac{a}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} a$$

Each interior angle = 135°

प्रत्येक आंतरिक कोण = 135°

Each exterior angle = 45°

प्रत्येक बाहरी कोण = 45°

Number of diaonal = 20

विकर्ण की संख्या = 20



3 Dimension Mensuration (3 आयामी क्षेत्रमिति)



- ❖ 3 Dimension: Length, breadth, height

3 विमा : लंबाई, चौड़ाई, ऊंचाई

Lateral surface Area / पार्श्व सतह क्षेत्रफल (LSA):

ऊपर व नीचे के क्षेत्रफल को छोड़कर बाकी सभी क्षेत्रफल surrounding area except (of figures having flat surface) top and bottom

ऊपर व नीचे को छोड़कर आसपास का क्षेत्र (चपटी सतह वाले आकृति)

Total surface area / कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) :

Area of all surfaces of a figure (LSA) + area of bases (top/bottom)

कुल सतह क्षेत्रफल/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

एक आकृति की सभी सतहों का क्षेत्रफल (LSA) + आधारों का क्षेत्रफल (ऊपर/नीचे)

Curved surface area (CSA) :

of figures having curved surfaces like cylinder, cone etc.

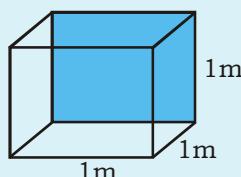
वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल (CSA) :

बेलन, शंकु आदि जैसी वक्रपृष्ठीय आकृतियों का।

CSA : Area of only curved surfaces except top and bottom.

CSA : ऊपर और नीचे को छोड़कर केवल वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल।

Volume capacity (मात्रा क्षमता) :



$$\text{volume} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1\text{m}^3 = 1000 \text{ Litre}$$

$$\Rightarrow 1\text{m}^3 = 10^3 \text{L}$$

$$\Rightarrow 1\text{L} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1\text{L} = 10^{-3} \times 10^6 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow 1\text{L} = 10^3 \text{ cm}^3$$

- ❖ $1\text{m} = 100 \text{ cm}$

$$1\text{m} = 1000 \text{ mm}$$

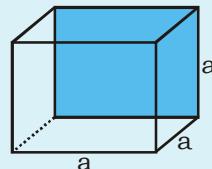
$$1 \text{ decimetre} = 10 \text{ cm}$$

$$1 \text{ km} = 100 \text{ decametre}$$

Cube (घन)

- ❖ A Solid figure in which length, Breadth and height are equal.

एक ठोस आकृति जिसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई बराबर होती है।



6 faces / फलक

8 vertices / शीर्ष

12 edges / किनारे

Diagonals (विकर्ण) = 4

$$\text{LSA} / \text{पार्श्व सतह क्षेत्रफल} = 4a^2$$

$$\text{Volume} / \text{आयतन} = a^3 = \left(\sqrt{\frac{\text{Surface Area}}{6}} \right)^3$$

$$\text{TSA} / \text{कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 6a^2$$

$$\text{Diagonal} / \text{विकर्ण} = \sqrt{3} a, \text{ Face diagonal} = \sqrt{2} a$$

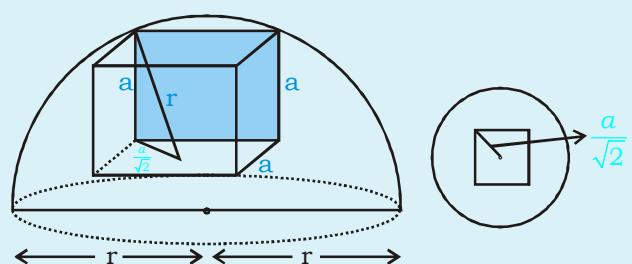
Euler's Theorem: for any 3D flat surface figure

यूलर प्रमेय: किसी भी तीन विमा वाली सतह आकृति के लिए

$$\mathbf{V} + \mathbf{F} - \mathbf{E} = 2$$

- ❖ When a cube of maximum size put inside a hemisphere.

जब एक अर्धगोले के अंदर अधिकतम आकार का घन रखा जाता है।

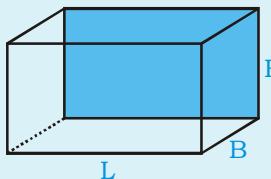


$$a = \sqrt{\frac{2}{3}} r$$

$$\frac{a^2}{2} + a^2 = r^2 \Rightarrow \frac{3}{2} a^2 = r^2$$

$$a (\text{side of cube}) = \sqrt{\frac{2}{3}} r$$

Cuboid (घनाभ)



Face / फलक = 6

Vertices / शीर्ष = 8

Edge / किनारा = 12

Adjacent faces (आसन्न फलक) = LH, BH, LB

LSA = $2(bh + lh) = 2(L+B) \times H$ = Area of 4 walls

4 दीवारों का क्षेत्रफल

TSA = $2(LB + BH + HL)$

Volume / आयतन = $L \times B \times H$

Diagonal / विकर्ण = $\sqrt{L^2 + B^2 + H^2}$

If area of 3 adjacent faces of a cuboid are x, y, z respectively.

यदि एक घनाभ के 3 आसन्न फलकों का क्षेत्रफल क्रमशः x, y, z है।

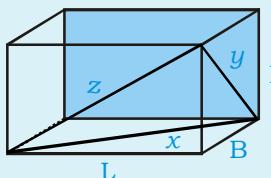
Volume / आयतन = \sqrt{xyz}

$$x = lb \quad y = bh \quad z = hl$$

$$xyz = l^2 b^2 h^2$$

$$\sqrt{xyz} = lbh = \text{volume (आयतन)}$$

If x, y, z are diagonals of three adjacent faces of a cuboid



यदि x, y, z एक घनाभ के तीन आसन्न फलकों के विकर्ण हैं

$$x = \sqrt{l^2 + b^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(l^2 + b^2 + h^2)$$

$$y = \sqrt{b^2 + h^2}$$

$$l^2 + b^2 + h^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

$$z = \sqrt{h^2 + l^2}$$

$$D = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}}$$

$$l = \sqrt{\frac{x^2 - y^2 + z^2}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}}, \quad h = \sqrt{\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2}}$$

$$\text{Volume} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 - y^2 + z^2)(y^2 + z^2 - x^2)}}{2\sqrt{2}}$$

Longest rod that can be put inside a cuboid (Room)

$$= \text{Diagonal} = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

एक घनाभ (कक्ष) के अंदर रखी जा सकने वाली सबसे लंबी छड़ी =

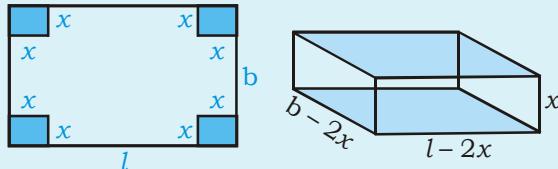
$$\text{विकर्ण} = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

If x is the thickness of a cuboid, then volume of the hollow cuboid = $lbh - (l - 2x)(b - 2x)(h - 2x)$

यदि x घनाभ की मोटाई है, तो खोखले घनाभ का आयतन = $lbh - (l - 2x)(b - 2x)(h - 2x)$

Making open rectangular box by cutting 4 corners of a rectangular sheet.

एक आयताकार शीट के 4 कोर्नरों को काटकर खुला आयताकार बॉक्स बनाना।

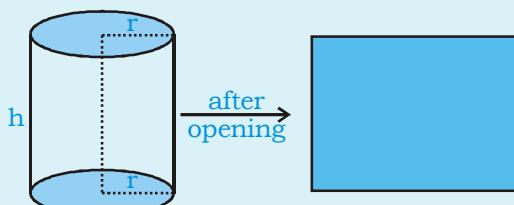


Volume of rectangular box = $(l - 2x)(b - 2x)x$.

आयताकार बॉक्स का आयतन = $(l - 2x)(b - 2x)x$.

Volume of water flowing through cuboidal pump in time 't' / घनाभकार पंप से 't' समय में पानी बहने का आयतन = area of base × (vt) ($l \times b$)

Cylinder (बेलन)



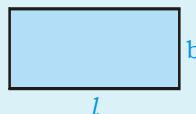
Volume = $\pi r^2 h$ = Base Area × Height

CSA = $2\pi rh$ = Base Perimeter × Height

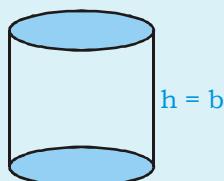
TSA = CSA + 2 × Base Area = $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi(r+h)r$

$$\text{Ratio} \Rightarrow \frac{\text{CSA}}{\text{TSA}} = \frac{h}{r+h}$$

Folding of rectangular sheet to form a cylinder
एक बेलन बनाने के लिए आयताकार शीट को मोड़ना



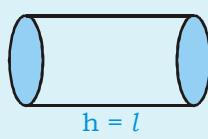
A Folding along length (लंबाई के साथ मोड़ना)



$$2\pi r = l$$

$$r = \frac{l}{2\pi}$$

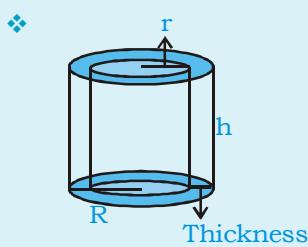
B Folding along breadth (चौड़ाई के साथ मोड़ना)



$$2\pi r = b$$

$$r = \frac{b}{2\pi}$$

Hollow Cylinder (खोखला बेलन)



thickness (मोटाई) = t

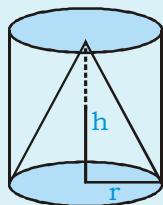
$$\text{volume of metal (धातु का आयतन)} = \pi R^2 h - \pi r^2 h \\ = \pi(R^2 - r^2)h$$

$$\text{Volume/आयतन} = \pi(R+r)(R-r)h$$

$$\text{CSA/वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल} = 2\pi(R+r)h$$

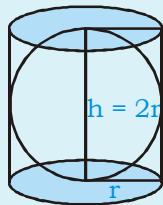
$$\text{TSA/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi(R+r)h + 2\pi(R^2 - r^2) \\ = 2\pi(R+r)(h+R-r)$$

- ❖ A maximum size cone inside a cylinder (एक बेलन के अंदर एक अधिकतम क्षेत्रफल वाला शंकु)



$$\text{Ratio} \Rightarrow \frac{\text{vol. of cylinder}}{\text{vol. of cone}} = \frac{3}{1}$$

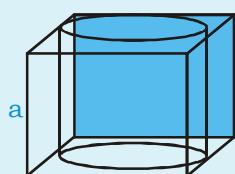
- ❖ A cylinder encloses a sphere (एक बेलन एक गोले को घेरता है)



Height of cylinder = Diameter of sphere
(बेलन की ऊँचाई = गोले का व्यास)

$$\text{Ratio} \Rightarrow \frac{\text{vol. of cylinder}}{\text{vol. of sphere}} = \frac{3}{2}$$

- ❖ A maximum size cylinder inside a cube एक घन के अंदर अधिकतम आकार का एक बेलन

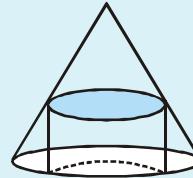


$$\text{Radius of cylinder (बेलन की त्रिज्या)} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Height of cylinder (बेलन की ऊँचाई)} = a$$

$$\text{Ratio} \Rightarrow \frac{\text{vol. of cube}}{\text{vol. of cylinder}} = \frac{14}{11}$$

- ❖ Maximum size cylinder inside a cone एक शंकु के अंदर अधिकतम क्षेत्रफल वाला बेलन



$$\text{Height of cone (शंकु की ऊँचाई)} = H$$

$$\text{Height of cylinder (बेलन की ऊँचाई)} = h$$

$$\text{Radius of cone (शंकु की त्रिज्या)} = R$$

$$\text{Radius of cylinder (बेलन की त्रिज्या)} = r$$

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h}$$

(Property)

$$\frac{\text{Volume of cylinder}}{\text{Volume of cone}} = \frac{4}{9}$$

Cone (शंकु)



$$l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\text{volume} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{CSA/वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल} = \pi r l$$

$$\text{TSA/कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(r+l)$$

- ❖ If H , C and V are the height, curved surface area and volume of a cone. Then find the value of $3\pi VH^3 - C^2 H^2 + 9V^2$?

यदि H , C और V क्रमशः किसी शंकु की ऊँचाई, वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल और आयतन को व्यक्त करते हैं, तब $3\pi VH^3 - C^2 H^2 + 9V^2$ का मान क्या होगा?

$$\text{Let } r = 1, h = 1 \quad \therefore l = \sqrt{2}$$

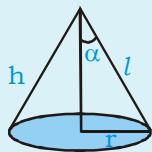
$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \pi, \quad C = \sqrt{2} \pi$$

$$3\pi VH^3 - C^2 H^2 + 9V^2 = 3\pi \times \frac{1}{3} \pi - 2\pi^2 + 9 \frac{1}{9} \pi^2$$

$$\Rightarrow \pi^2 - 2\pi^2 + \pi^2 = 0$$

- ❖ If S denotes the area of the curved surface area of a right circular cone of height h and semivertical angle α then S equals?

S किसी शंकु के वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल को व्यक्त करता है, h ऊँचाई को और α अर्ध शीर्ष कोण को व्यक्त करता है तब S का मान होगा?

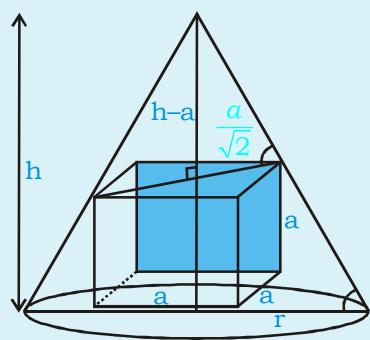


$$r = h \tan \alpha \quad l = h \sec \alpha$$

$$S = \pi r l = \pi h^2 \sec \alpha \tan \alpha$$

- ❖ When a cube of maximum volume is cut from a cone

(जब एक शंकु से अधिकतम आयतन का घन काटा जाता है)



$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{h-a}{h} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}r} = \frac{h-a}{h}$$

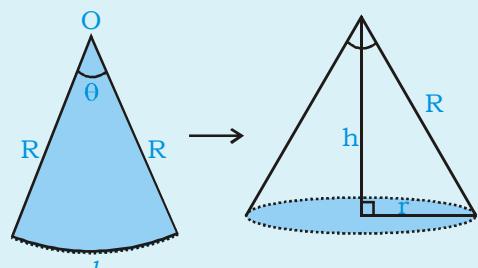
$$\sqrt{2}rh - \sqrt{2}ra = ah$$

$$a(h + \sqrt{2}r) = \sqrt{2}rh$$

$$a \text{ (side of cube)} = \frac{\sqrt{2}rh}{\sqrt{2}r + h}$$

- ❖ When a sector is folded to make a cone:

(जब एक त्रिज्यखंड को मोड़कर एक शंकु बनाया जाता है)



circumference of base of cone = arc l

(शंकु के आधार की परिधि = arc l)

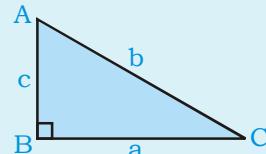
$$2\pi r = 2\pi R \times \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$r = R \frac{\theta}{360^\circ}$$

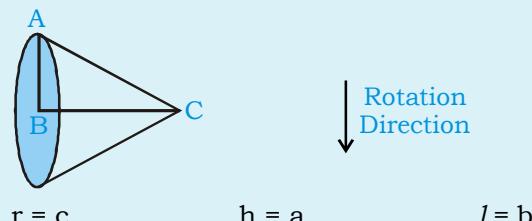
slant height of cone = radius of sector, $h = \sqrt{R^2 - r^2}$

(शंकु की तिर्यक ऊँचाई = त्रिज्यखंड की त्रिज्या, $h = \sqrt{R^2 - r^2}$)

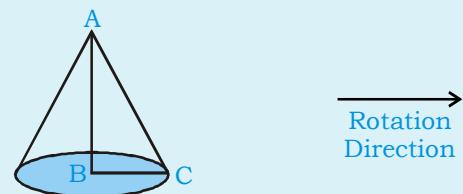
- ❖ Rotation of right angle triangle to form a cone
(एक शंकु बनाने के लिए समकोण त्रिभुज का घूर्णन)



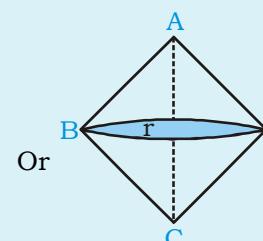
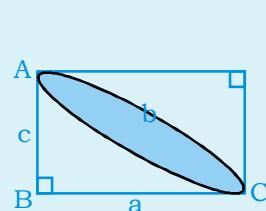
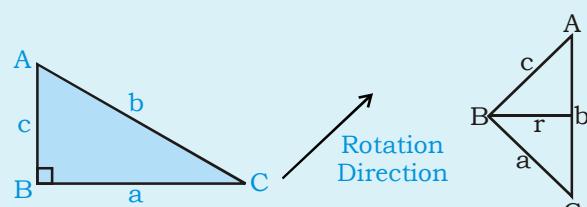
- A Rotation along base a (आधार a के साथ घूमाना)



- B Rotation along perpendicular BC (लंबवत् BC के साथ घूमाना)

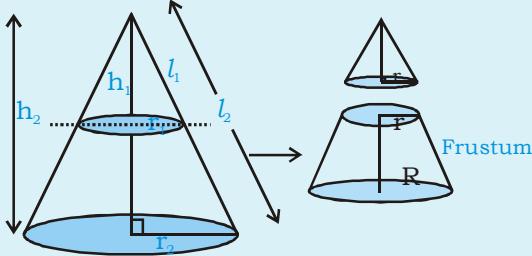


- C Rotation along hypotenuse AC (कर्ण AC के साथ घूमाना)



Sum of vol. of 2 cones (2 शंकु का आयतन) = $\frac{1}{3} \pi \frac{(ac)^2}{b}$

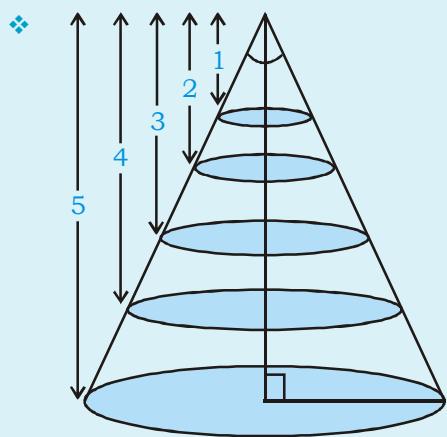
Cutting of Cone (शंकु काटना)



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

$$\frac{\text{small cone CSA}}{\text{Big cone CSA}} = \frac{\pi r_1 l_1}{\pi r_2 l_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

$$\frac{\text{small cone volume}}{\text{Big cone volume}} = \frac{\frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3$$



CSA of 5 parts \Rightarrow

$$1^2 : 2^2 - 1^2 : 3^2 - 2^2 : 4^2 - 3^2 : 5^2 - 4^2$$

$$1 : 3 : 5 : 7 : 9 \quad (\text{Ratio})$$

Volume of 5 parts \Rightarrow

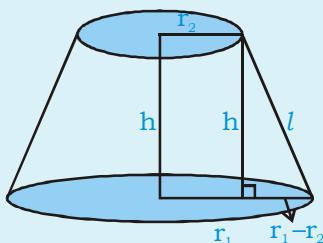
$$1^3 : 2^3 - 1^3 : 3^3 - 2^3 : 4^3 - 3^3 : 5^3 - 4^3$$

$$1 : 7 : 19 : 37 : 61 \quad (\text{Ratio})$$

Frustum of Cone (शंकु के छिनक)

- When a cone is cut parallel to its base, lower portion is called frustum.

(जब एक शंकु को उसके आधार के समांतर काटा जाता है तो निचला भाग छिनक कहलाता है।)



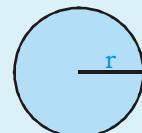
$$\text{CSA} = \pi(r_1 + r_2)l$$

$$\text{TSA} = \pi(r_1 + r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

$$\text{volume} = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \times h$$

$$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

Sphere (गोला)

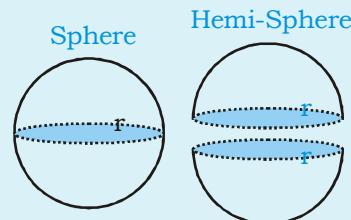


$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi}{6} d^3$$

$$\text{CSA} = \text{TSA} = 4\pi R^2 \Rightarrow \text{Area} \propto R^2$$

$$\text{Volume} \propto R^3$$

Cutting of Sphere (गोला काटना)

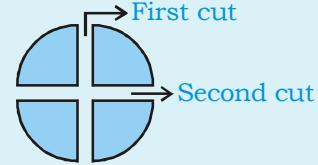
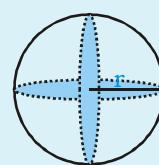


$$\text{Volume of hemisphere (गोलार्ध का आयतन)} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$\text{CSA of Hemi-sphere} = 2\pi r^2$$

$$\text{TSA of Hemi-sphere} = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

$$\text{TSA of both parts} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$



2 cut (4 pieces) 1 cut \rightarrow 2 circle area \uparrow (Increase)

$$4 \text{ parts TSA} = 4\pi r^2 + 4 \times \pi r^2 = 8\pi r^2$$

$$\text{TSA of each part} = \frac{8\pi r^2}{4} = 2\pi r^2$$

(Quarter sphere) / चौथाई गोला

If we make 3 cuts at x, y, z axis

यदि हम x, y, z अक्ष पर 3 कट बनाते हैं

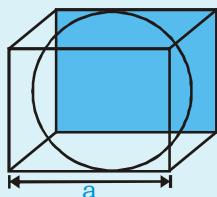
3 cut \rightarrow 8 parts

3 cut \rightarrow 6 circle area

$$8 \text{ parts TSA} = 4\pi r^2 + 6 \times \pi r^2 = 10\pi r^2$$

$$\text{TSA of each part (प्रत्येक भाग का TSA)} = \frac{10\pi r^2}{8} = \frac{5}{4} \pi r^2$$

- A maximum size sphere inside a cube
(एक घन के अंदर एक अधिकतम आकार का गोला)

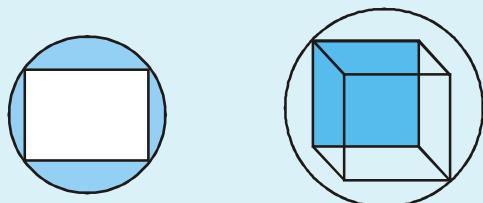


Diameter of sphere (गोले का व्यास) = a

∴ Radius of sphere (गोले की त्रिज्या) = $\frac{a}{2}$

Ratio $\Rightarrow \frac{\text{vol. of cube}}{\text{vol. of sphere}} = \frac{21}{11}$

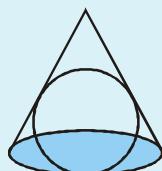
- A maximum size cube inside a sphere
(एक गोले के अंदर एक अधिकतम आकार का घन)



Diagonal of cube = Diameter of sphere
(घन का विकर्ण = गोले का व्यास)

$\frac{\text{vol. of sphere}}{\text{vol. of cube}} = \frac{11\sqrt{3}}{7}$

- A maximum size sphere inside a cone
(एक शंकु के अंदर एक अधिकतम आकार का गोला)



h = height of cone (h = शंकु की ऊँचाई)

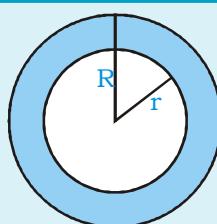
l = slant height of cone (l = शंकु की तिरछी ऊँचाई)

r = radius of base of cone (r = शंकु के आधार की त्रिज्या)

Radius of sphere (गोले की त्रिज्या) = R = $\frac{hr}{l+r}$

Hollow Sphere (खोखला गोला)

- ❖



Volume of metal (धातु की आयतन) = $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

TSA = $4\pi R^2 + 4\pi r^2$

Thickness (मोटाई) (t) = R - r

$$\text{आयतन} = \left[\frac{4}{3} \times \pi(r+t)^3 - r^3 \right]$$

Prism (प्रिंज्म)

- A prism is a solid figure with identical ends, flat faces and same cross section all along its length.
एक प्रिंज्म एक ठोस आकृति है जिसके सिरे समान होते हैं, चपटे फलक होते हैं और इसकी लंबाई के साथ समान अनुप्रस्थ काट होती है।

→ Base and Top of the prism is same

→ प्रिंज्म का आधार और शीर्ष समान है।

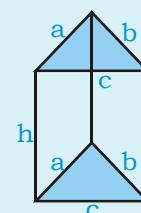
Surface of prism is lateral and not curved.

प्रिंज्म की सतह पार्श्व है और घुमावदार नहीं है।

Cube, cuboid are prism but cylinder is not prism
(घन, घनाभ प्रिंज्म हैं लेकिन बेलन प्रिंज्म नहीं है)

Triangular base prism

(त्रिकोणीय आधार प्रिंज्म)



Volume of prism = area of base × height

प्रिंज्म का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

LSA = perimeter of base × height

(LSA = (आधार की परिधि × ऊँचाई))

⇒ 3 rectangles formed if we open it

⇒ इसे खोलने पर 3 आयत बनते हैं

ah + bh + ch = (a + b + c) × h

TSA = LSA + 2 × Base Area

General formulae for a prism (प्रिंज्म के लिए सामान्य सूत्र)

A CSA = Base perimeter × Height = na × h

B TSA = CSA + 2 × Area of two base

$$\text{TSA} = nah + 2 \times \frac{na^2}{4} \cot \frac{\pi}{n}$$

C Volume = Area of base area × Height

आयतन = आधार क्षेत्रफल × ऊँचाई

$$\text{Volume} = \frac{na^2}{4} \cot \frac{\pi}{4} \times h$$

Here (यहाँ),

n → no. of sides of regular polygon

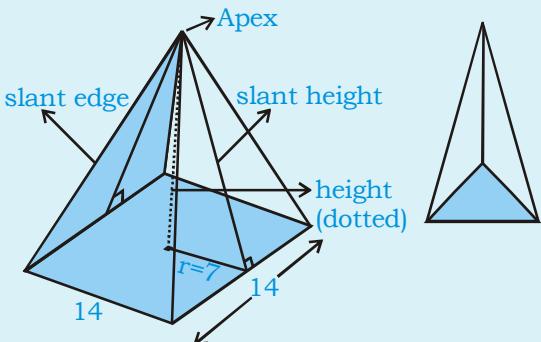
n → नियमित बहुभुज की भुजाओं की संख्या

a → side length of regular polygon

a → नियमित बहुभुज की भुजा की लंबाई

h → height of prism/प्रिंज्म की ऊँचाई

Pyramid (पिरामिड)



Square Pyramid
(वर्गाकार पिरामिड)

Triangular Pyramid
(त्रिकोणीय पिरामिड)

Height → Apex to centre of base

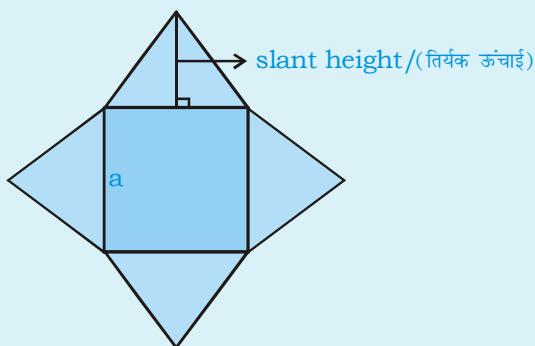
ऊँचाई → शीर्ष से आधार के केंद्र तक

slant edge → Apex to vertex of base

तिर्यक किनारा → आधार के शीर्ष से शीर्ष तक

slant height → Apex to side of base

तिर्यक ऊँचाई → आधार के किनारे से शीर्ष तक



for a regular pyramid/एक नियमित पिरामिड के लिए ⇒

$$\text{LSA} = \frac{1}{2} \times \text{perimeter of base} \times \text{slant height}$$

$$\text{LSA} = \frac{1}{2} \times \text{आधार का परिमाप} \times \text{तिर्यक ऊँचाई}$$

TSA ⇒ LSA + Base Area

$$\text{Volume} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \text{base area} \times \text{height}$$

$$\text{आयतन} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{ऊँचाई}$$

After opening square pyramid ⇒ LSA = 4Δ's
वर्गाकार पिरामिड खोलने के बाद ⇒ LSA = 4Δ's

$$\Rightarrow 4 \times \frac{1}{2} \times a \times \text{slant height}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4a \times \text{slant height}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \text{base perimeter} \times \text{slant height}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \text{आधार की परिधि} \times \text{तिर्यक ऊँचाई}$$

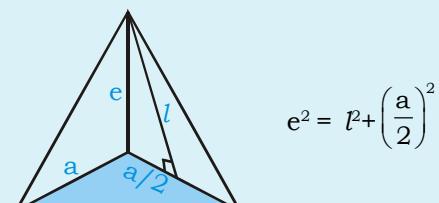
In square pyramid (वर्गाकार पिरामिड में) →

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{If slant edge (अगर तिरछा किनारा)} = e \therefore e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

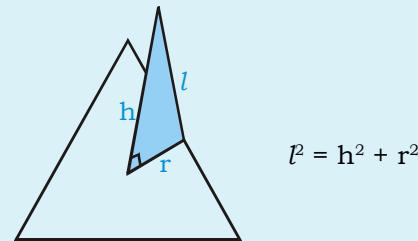
$$= e^2 = h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

In triangular pyramid (त्रिकोणीय पिरामिड में)

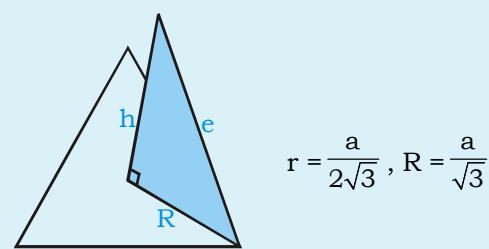


$$e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$e^2 = h^2 + R^2$$



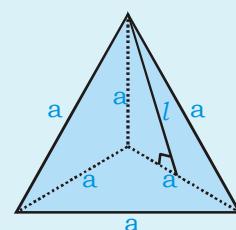
$$l^2 = h^2 + r^2$$



$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Tetrahedron (समचतुष्फलक)

❖ All 4 faces and 1 equilateral triangle.
Pyramid with triangular base.



$$\text{Slant height } (l) = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

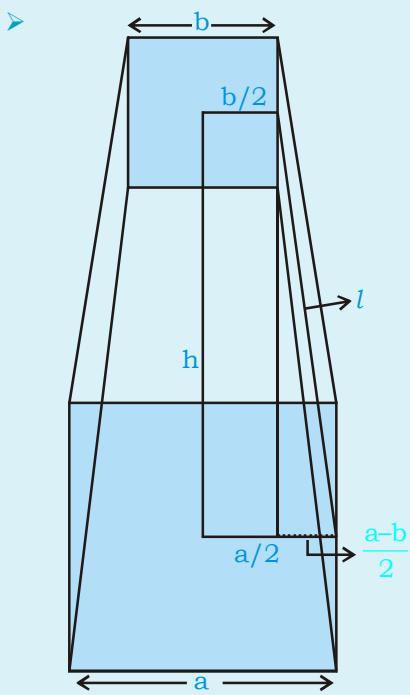
$$\text{LSA} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 3$$

$$\text{TSA} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 4 = \sqrt{3} a^2$$

$$\text{height} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

Frustum of a Pyramid (एक पिरामिड का छिनक)



$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

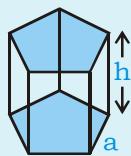
$$\text{LSA} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \times l$$

$P_1, P_2 \rightarrow$ Perimeter of bases (\rightarrow आधारों की परिधि)

$A_1, A_2 \rightarrow$ Area of bases (\rightarrow आधारों का क्षेत्रफल)

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \times A_2}) \times h$$

Pentagonal Prism (पंचभुज प्रिज्म)



$$\text{Area of pentagonal base} = \sqrt{3}a^2$$

$$\text{पंचभुज का आधार क्षेत्रफल} = \sqrt{3}a^2$$

$$\text{Lateral surface area} = 5a \times h = 5ah$$

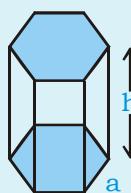
$$\text{पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 5a \times h = 5ah$$

$$\text{Total surface area} = 5ah + 2\sqrt{3}a^2$$

$$\text{कुल सतही क्षेत्रफल} = 5ah + 2\sqrt{3}a^2$$

$$\text{Volume / आयतन} = \sqrt{3}a^2 \times h = \sqrt{3}a^2 h$$

Hexagonal Prism (षट्भुज प्रिज्म)



$$\text{Base area of hexagonal} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 2.5981a^2$$

$$\text{षट्भुज का सतह क्षेत्रफल} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 2.5981a^2$$

$$\text{Lateral surface area} = 6a \times h = 6ah$$

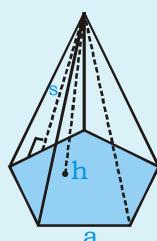
$$\text{पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 6a \times h = 6ah$$

$$\text{Total surface area} = 6ah + 3\sqrt{3} a^2$$

$$\text{कुल सतही क्षेत्रफल} = 6ah + 3\sqrt{3} a^2$$

$$\text{Volume / आयतन} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h = 2.5981a^2 h$$

Pentagonal Pyramid (पंचभुज पिरामिड)



$$\text{Lateral surface area} = \frac{1}{2} \times 5a \times s = \frac{5}{2} a s$$

$$\text{पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 5a \times s = \frac{5}{2} a s$$

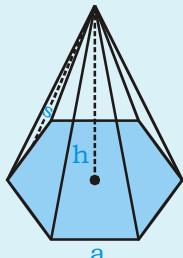
$$\text{Total surface area} = \frac{5}{2}as + \sqrt{3}a^2$$

$$\text{कुल सतही क्षेत्रफल} = \frac{5}{2}as + \sqrt{3}a^2$$

$$\text{Volume / आयतन} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3}a^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}a^2$$

Hexagonal Pyramid (षटभुज पिरामिड)

❖



s = slant height / तिरछी ऊंचाई

$$\text{Lateral surface area} = \frac{1}{2} \times 6a \times s = 3as$$

$$\text{पार्श्व पृष्ठ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 6a \times s = 3as$$

$$\text{Total surface area} = 3as + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\text{कुल सतही क्षेत्रफल} = 3as + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\text{Volume / आयतन} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2h$$

CHAMPION PUBLICATION

Bilingual

Complete
CLASSNOTES
Arithmetic

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

CHAMPION PUBLICATION

Bilingual

Complete
CLASSNOTES
Advance Maths

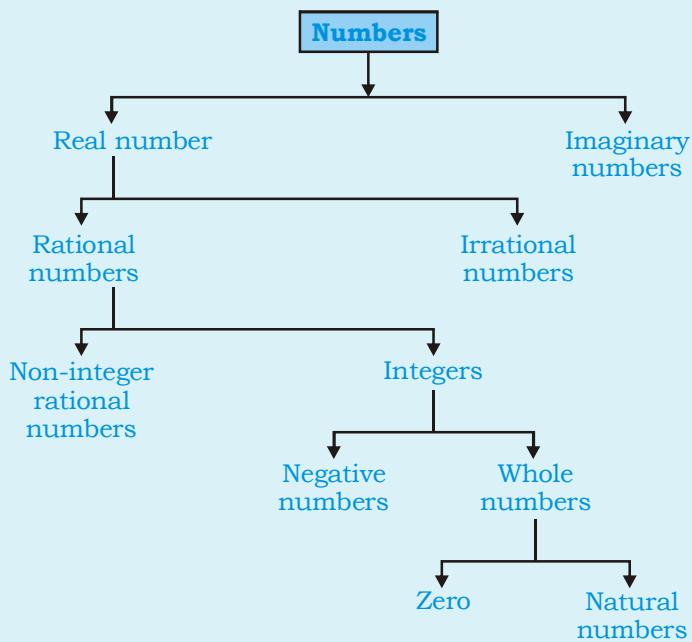
Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

Solid figure	Figure	Volume	CSA/LSA	TSA
Cube / (घन)		a^3	$4a^2$	$6a^2$
Cuboid / (घनाभ)		$L \times B \times H$	$2(L + B)H$	$2(LB + BH + HL)$
Cylinder / (बेलन)		$\pi r^2 h$	$2\pi r h$	$2\pi r(r + h)$
Cone / (शंकु)		$\frac{1}{3} \pi r^2 h$	$\pi r l$	$\pi r(r + l)$
Frustum of cone (शंकु का छिनक)		$\frac{1}{3} \pi(R^2 + r^2 + Rr)h$	$\pi(R + r)l$	$\pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$
Sphere / (गोला)		$\frac{4}{3} \pi r^3$	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
Hollow sphere (खोखला गोला)		$\frac{4}{3} \pi(R^3 - r^3)$		$4\pi R^2$
Hemi-sphere (अर्धगोला)		$\frac{2}{3} \pi r^3$	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$
Prism / (प्रिज्म)		Base area \times Height	Base peri. \times Height	LSA + 2 \times Base area
Pyramid / (पिरामिड)		$\frac{1}{3} \times \text{Base area} \times H$	$\frac{1}{2} \times \text{Base peri.} \times \text{Slant h.}$	LSA + Base area



Number system (संख्या प्रणाली)



Classification of Numbers (संख्याओं का वर्गीकरण)

Real Numbers
वास्तविक संख्याएं
which can be denoted on number line.
जिसे संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।

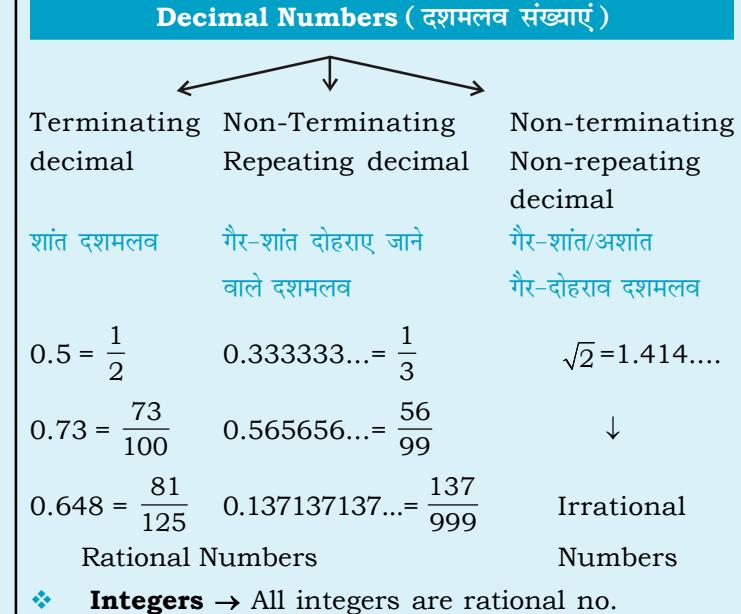
Ex. $+3, -7, 5, \frac{19}{13}, \frac{5}{7}$ $\sqrt{-7}, \sqrt{-3}, \sqrt{-5}, \sqrt{-1} = i$
 $0.0675, \sqrt{5}, \sqrt{11}$ \downarrow $-1 = i^2$
 $a+ib$ $5+3i$

Real Numbers (वास्तविक संख्याएं)

Rational Numbers
परिमेय संख्याएं
which can be written in $\frac{p}{q}$ form ($q \neq 0$) $p, q \rightarrow$ Integer
जिसे $\frac{p}{q}$ में लिखा जा सकता है

Ex. $\frac{5}{3}, \frac{13}{1}, \frac{-8}{1}, 0.5555, \frac{22}{7}$, $0.1342607532 \dots$, $\sqrt{q}, \pi = 3.141592 \dots$

Irrational Numbers अपरिमेय संख्याएं



❖ **Integers** → All integers are rational no.

$$\left(\frac{p}{q} \right) \text{ where } q = 1$$

पूर्णांक → सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं।

Integers (पूर्णांक)

Negative Integers
ऋणात्मक पूर्णांक
 $\{-\infty, \dots, -4, -3, -2, -1\}$
 $0 \rightarrow$ Neither positive nor negative
सकारात्मक भी नहीं
न ही नकारात्मक

Non-negative Integers
गैर-ऋणात्मक पूर्णांक
 $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \infty\}$
↓
Whole Numbers
पूर्ण संख्या

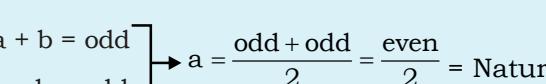
❖ Natural numbers /प्राकृतिक संख्याएं →
 $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, \infty\}$

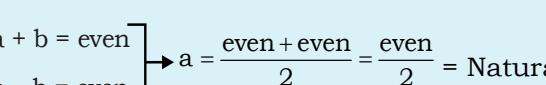
Integers (पूर्णांक)

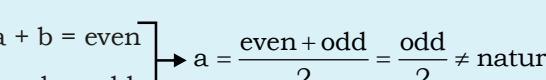
Even / सम
Even → which are divisible by 2. (2K form)
सम → जो 2 से विभाज्य हैं। (2K रूप)
 $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Odd / विषम
Odd → which are not divisible by 2. (2K±1 form)
विषम → जो 2 से विभाज्य नहीं हैं। (2K±1 रूप)
 $\{1, 3, 5, 7, 11\}$

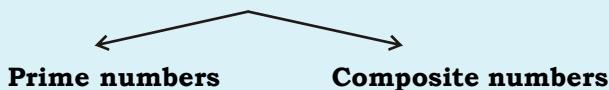
- Odd \times odd \rightarrow odd
 - odd \times even \rightarrow even
 - odd±odd \rightarrow even
 - even \pm even \rightarrow even
 - odd \pm even \rightarrow odd







Natural numbers (प्राकृतिक संख्याएँ)



अभाज्य संख्याएं

भाज्य/समग्र संख्याएं

Prime Numbers

to factors 1 & itsel

Prime Numbers → Only two factors 1 & Itself.

ਅਮਾਯ ਸਥਾਏ → ਕਵਲ ਦਾ ਗੁਣਨਖਡ । ਆਰ ਸਥਾ

2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 61, 67, 97 etc.

2 → even prime no. & smallest prime no.

2 → सम अभाज्य संख्या. और सबसे छोटी अभाज्य संख्या

$3, 5, 7 \rightarrow$ only pair of consecutive odd prime :

3,5,7 → लगातार विषम अभाज्य संख्या का

1-50 → 15

50-100 → 10

1-100 → 25

1-200 → 46

1-1000 → 168

Each prime number can be written in $(6k \pm 1)$ form.

प्रत्येक अभाज्य संख्या को $(6k \pm 1)$ रूप में लिखा जा सकता है।

But every $(6k \pm 1)$ form may not be necessarily prime no.

लेकिन हर $(6k \pm 1)$ रूप आवश्यक रूप से अभाज्य संख्या नहीं हो सकता है।

$13 \rightarrow 6 \times 2 + 1$ (prime)

$25 \rightarrow 6 \times 4 + 1$ (not prime)

- ❖ **Composite Numbers** → more than two factors.
भाज्य संख्या → दो से अधिक कारक (गुणनखंड)।
 - Ex.** 4, 6, 8, 9 etc.
1 → Neither prime nor composite
1 → न तो अभाज्य और न ही भाज्य/समग्र
4 → Smallest composite number.
4 → सबसे छोटी भाज्य संख्या।
9 → Smallest odd composite number.
9 → सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या।
 - ❖ **Relatively prime/co-prime numbers** → Two numbers in which nothing is common i.e. their HCF = 1
सापेक्ष अभाज्य/सह-अभाज्य संख्याएँ → दो संख्याएँ जिनमें कुछ भी उभयनिष्ठ नहीं हैं अर्थात् उनका HCF = 1
(25, 19) (16, 9) (2, 3) (11, 13)
 - ❖ **Twin-prime numbers** → Two prime numbers with a gap of 2.
जुड़वां-अभाज्य संख्याएँ → 2 के अंतराल के साथ दो अभाज्य संख्याएँ।
(3, 5) (5, 7) (11, 13)
 - ❖ only pair of prime no. with a gap of 2 is **3, 5, 7**.
2 के अंतराल के साथ **3, 5, 7** अभाज्य संख्या की केवल एक जोड़ी है।
 - ❖ Smallest 3 digit prime → 101
सबसे छोटी 3 अंकों की अभाज्य संख्या = 101
largest 3 digit prime → 997
सबसे बड़ी 3 अंकों की अभाज्य संख्या → 997

Perfect Numbers (पूर्ण संख्याएँ)

- If the sum of all the factors (excluding that no.) is equal to that number then it is called a perfect no.
यदि सभी गुणनखंडों (उस संख्या को छोड़कर) का योग उस संख्या के बराबर हो तो उसे पूर्ण संख्या एँ कहते हैं।
 $6 \rightarrow 1,2,3,6$ (factors) $\therefore 1+2+3 = 6$
(Smallest perfect no.) $\therefore 6$ is perfect no.
 $28 \rightarrow 1,2,4,7,14,28$
 $(1+2+4+7+14) = 28$
Perfect numbers / पूर्ण संख्या $\rightarrow 6, 28, 496, 8128 \dots$



Divisibility Rules (विभाज्यता के नियम)



Divisibility Rules (विभाज्यता नियम)

- ❖ 1 is not divisible by any number except 1 but 1 is a universal factor.

1, 1 को छोड़कर किसी भी संख्या से विभाज्य नहीं है, लेकिन 1 एक सार्वत्रिक गुणनखंड है।

Divisibility Rule of 2, 4, 8, 16

- 2**→ Last digit should be divisible by 2.
- 2**→ अंतिम अंक 2 से विभाज्य होना चाहिए।
- 4**→ Last 2 digit should be divisible by 4.
- 4**→ अंतिम 2 अंक 4 से विभाज्य होना चाहिए।
- 8**→ Last 3 digit should be divisible by 8.
- 8**→ अंतिम 3 अंक 8 से विभाज्य होना चाहिए।
- 16**→ Last 4 digits should be divisible by 16
- 16**→ अंतिम 4 अंक 16 से विभाज्य होने चाहिए।

Divisibility Rule of 3 and 9

- 3**→ Sum of digits should be divisible by 3.
- 3**→ अंकों का योग 3 से विभाज्य होना चाहिए।
- 9**→ Sum of digits should be divisible by 9.
- 9**→ अंकों का योग 9 से विभाज्य होना चाहिए।

Divisibility Rule of 5, 25, 125

- 5**→ Last digit should be 0 or 5
- 5**→ अंतिम अंक 0 या 5 होना चाहिए।
- 25**→ Last two digit should be divisible by 25.
- 25**→ अंतिम दो अंक 25 से विभाज्य होने चाहिए।
- 125**→ Last 3 digit should be divisible by 125.
- 125**→ अंतिम 3 अंक 125 से विभाज्य होना चाहिए।

Divisibility Rule of 6

- 6**→ $6=2\times 3$ (co-prime factors) / (सह-अभाज्य गुणनखंड)
- ∴ If a number is divisible by 2 & 3 both, that number will also be divisible by 6
- ∴ यदि कोई संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य है, तो वह संख्या 6 से भी विभाज्य होगी

Divisibility Rule of 7

To check divisibility of 7 we apply following method→

- 7 की विभाज्यता चेक करने के लिये हम इस विधि को करते हैं→
- $1071 \rightarrow 107 - 1 \times 2 \rightarrow 105 \rightarrow 10 - 5 \times 2 = 0$
- 0 is divisible by 7.
- 0, 7 से विभाज्य है। ∴ 1071, 7 से विभाज्य होगा

$$17808 \rightarrow 1780 - 2 \times 8 \rightarrow 1764$$

$$176 - 2 \times 4 \rightarrow 168 \rightarrow 16 - 16 = 0$$

17808 is divisible by 7, 17808 7 से विभाज्य होगा।

Divisibility Rule of 13

To check divisibility of 13, we apply following method→

13 की विभाज्यता चेक करने के लिये हम इसे करते हैं-

$$2353 \rightarrow 235 + 3 \times 4 \Rightarrow 235 + 12 = 247$$

$$247 \rightarrow 24 + 7 \times 4 \Rightarrow 24 + 28 = 52$$

52 is divisible by 13, ∴ 2353 will be divisible by 13

52, 13 से विभाज्य है ∴ 2353 भी 13 से विभाज्य होगा।

Divisibility Rule of 17

To check divisibility of 17, we apply following method→

17 की विभाज्यता चेक करने के लिये हम इस विधि को करते हैं→

$$3587 \rightarrow 358 - 7 \times 5 = 358 - 35 \Rightarrow 323$$

$$323 \rightarrow 32 - 3 \times 5 = 32 - 15 = 17$$

3587 will be divisible by 17, 3587, 17 से विभाज्य होगा।

Divisibility Rule of 7, 11, 13

5922 → Make pair of 3 digits from RHS

5922 → RHS से 3 अंकों का युग्म बनाएं

→ Add alternate pairs & take difference

→ वैकल्पिक जोड़े को जोड़ें और अंतर ज्ञात करें

→ If difference is divisible by 7, 11, 13 then number will be divisible by 7, 11, 13 respectively.

यदि अंतर 7, 11, 13 से विभाज्य है तो संख्या क्रमशः 7, 11, 13 से विभाज्य होगी।

7 ✓

$$005922 \rightarrow 922 - 5 = 917 \quad 11 \times$$

13 ×

7 ✓

$$6489 \rightarrow 489 - 6 \rightarrow 483 \quad 11 \times$$

13 ×

7 ✓

$$380247 \rightarrow 380-247 \rightarrow 133 \quad 11 \times$$

13 ×

- ❖ ABAB → divisible by 101

$$73 \times 101 = 7373$$

- ❖ ABCABC → divisible by 1001

$$687 \times 1001 = 687687$$

$$7 \times 11 \times 13 = 1001$$

(Remember)

Divisibility Rule of 11

- If the difference between the sum of the digits at odd places and sum of the digits at even places is zero or multiple of 11.

यदि विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग के बीच का अंतर शून्य या 11 का गुणक है।

Add even place digits → Take diff. → If diff. is 0 or multiple of 11 then no. will be divisible by 11
Add odd place digits

$$\underline{166452} \rightarrow 1+6+5 = 12$$

$$6+4+2 = 12 \text{ diff.} = 0 \therefore \text{div. by 11}$$

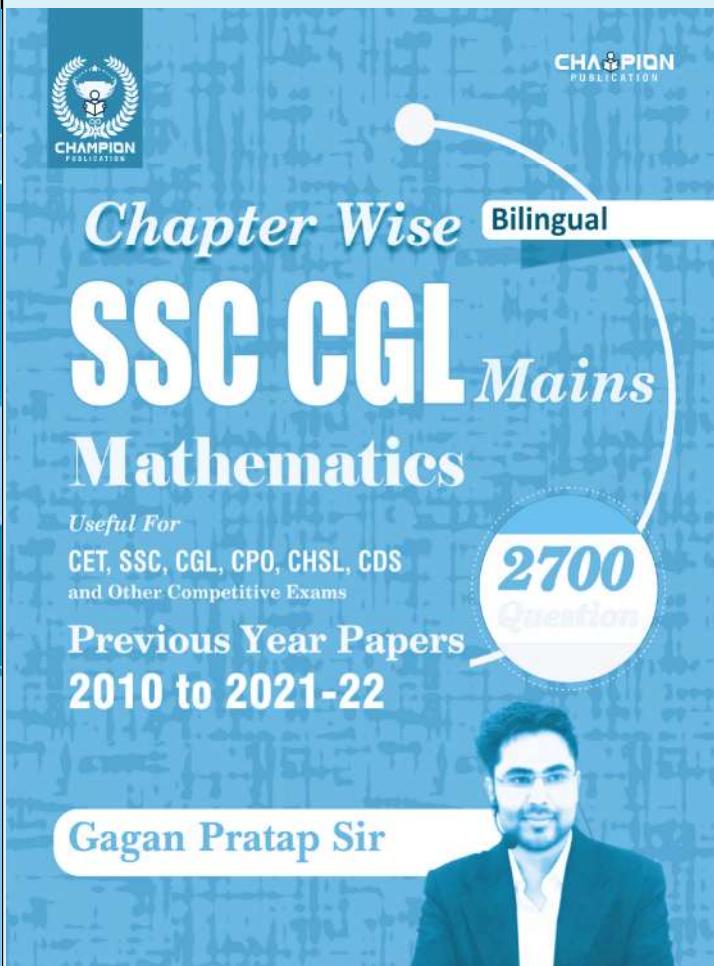
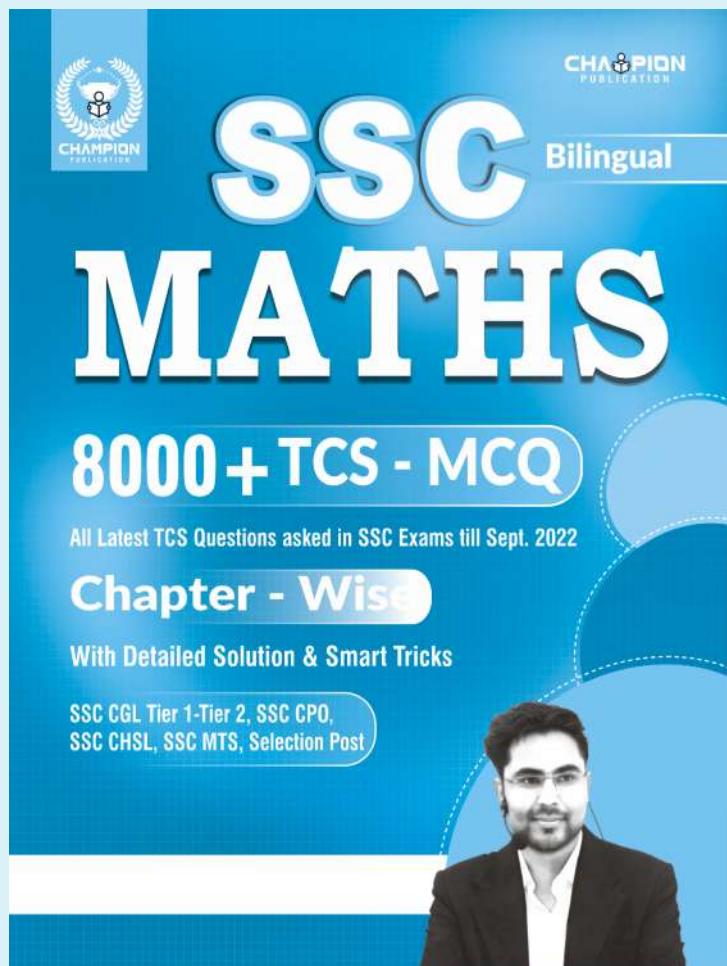
$$\underline{7945938} \rightarrow 28-17 = 11$$

Divisibility Rule of 12

$$12 = 4 \times 3$$

- If a number is divisible by 4 and 3 both then that number will also be divisible by 12.

यदि कोई संख्या 4 व 3 दोनों से विभाजित होती है तो वह संख्या 12 से भी विभाजित होगी।



❖ $100 \rightarrow 2^2 \times 5^2$

$$\Phi 100 \rightarrow 100 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) \rightarrow 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \rightarrow 40$$

❖ $\Phi(P) = P-1$ where P = prime number

$\therefore \Phi(N) \rightarrow N$ से छोटी कितनी संख्याएं N के साथ co-prime हैं।

❖ Product of any ' n ' consecutive (+ve) numbers is always divisible by $n!$

किसी भी ' n ' क्रमागत (+ve) संख्याओं का गुणनफल हमेशा $n!$ से विभाज्य होता है।

❖ $\frac{15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19}{5!} \rightarrow 5$ numbers

$$\Rightarrow \frac{15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19}{120}, R = 0$$

Consecutive Remainder (लगातार शेषफल)

❖ $17 \overline{)8697(511}$
 $\underline{\overline{85}} \quad \text{①}9$
 $\underline{\overline{17}} \quad \text{②}7$
 $\underline{\overline{17}} \quad \text{③}0$

consecutive remainder / लगातार शेष = 1, 2, 10

Divisor \rightarrow HCF [85, 17, 17]

$\rightarrow 17$

8. Successive Division / क्रमिक विभाजन

Divide 620 by 8, 5, 6 successively / क्रमिक

$$8 \overline{)620(77\ 5} \overline{)77(15} \quad 6 \overline{)15(2} \rightarrow \text{Final Quotient}$$

$$\begin{array}{r} \underline{\overline{56}} \\ \underline{\overline{60}} \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{\overline{27}} \\ \underline{\overline{25}} \end{array} \quad \begin{array}{r} \underline{\overline{12}} \\ \underline{\overline{15}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{④} \\ \text{②} \\ \text{③} \end{array}$$

successive remainders / क्रमिक शेषफल $\rightarrow 4, 2, 3$

$$\begin{array}{c|cc|c} 8 & 620 & 4 & \\ \hline 5 & 77 & 2 & \\ \hline 6 & 15 & 3 & \\ \hline 3 & 2 & & \end{array}$$

↓ Successive remainders
OR Final quotient

Some Important points (कुछ महत्वपूर्ण बिंदु)

❖ If two numbers are divided by same divisor the remainders are respectively r_1 and r_2 . If sum of these two numbers are divided by the same divisor the remainder is r_3 . Then divisor is \rightarrow divisor = $r_1 + r_2 - r_3$

यदि दो संख्याओं को एक ही भाजक द्वारा भाग देने पर शेषफल क्रमशः:

r_1 व r_2 आता है तथा यदि दोनों संख्याओं के योग को उसी भाजक द्वारा भाग देने पर शेषफल r_3 है तो \rightarrow भाजक = $r_1 + r_2 - r_3$

❖ $\frac{4^n}{6} \rightarrow \text{Rem} = 4$

❖ $\frac{10^n}{6} \rightarrow \text{Rem} = 4$

Unit digit (UD) (इकाई अंक)

❖ $5 \times \text{odd} \rightarrow \text{U.D} = 5$

$5 \times \text{even} \rightarrow \text{UD} = 0$

one zero = one pair of 5×2

$$875 \times 64 \rightarrow \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{\text{3 pair of 5}} \times \underbrace{7 \times 2 \times 2}_{\text{2 pair of 2}} \times 2 \times 2 \times 2$$

3 pair of 5 & 2

\therefore 3 zero at the end of product / गुणनफल के अंत में 3 शून्य

0 $\rightarrow (1370)^{189} \rightarrow \text{UD} = 0$

No. of zero at the end = 189

❖ 0, 1, 5, 6 की कितनी भी power हो unit digit same ही रहता है।

1 $\rightarrow (371)^{108} \rightarrow 371 \times 371 \dots 108 \text{ times}$

UD = 1

5 $\rightarrow (865)^{99} \rightarrow 865 \times 865 \times \dots 99 \text{ time}$

UD = 5 Any power of 5 \rightarrow UD = 5

6 $\rightarrow (106)^{357} \rightarrow 106 \times 106 \times \dots 357 \text{ times}$

UD = 6

Any power of 0, 1, 5, 6 \rightarrow UD = same

4 $\rightarrow (4)^{\text{odd}} \rightarrow \text{UD} \rightarrow 4$

$(4)^{\text{even}} \rightarrow \text{UD} \rightarrow 6$

9 $\rightarrow (9)^{\text{odd}} \rightarrow \text{UD} = 9$

$(9)^{\text{even}} \rightarrow \text{UD} = 1$

10. Rule of 2, 3, 7, 8

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^{10} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\text{UD} \rightarrow \begin{array}{cccccccccccc} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 & 4 & 8 & 6 & 2 & 4 \end{array}$$

UD repeat after every power 4

\therefore cyclicity = 4

$\therefore \text{UD} \rightarrow 2^n = 2^{n+4}$

❖ $(132)^{25} \rightarrow \frac{25}{4}, R=1 \quad \therefore (132)^1 \rightarrow \text{UD} = 2$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 & 3^7 & 3^8 & 3^9 & 3^{10} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\text{UD} \rightarrow \begin{array}{cccccccccccc} 3 & 9 & 7 & 1 & 3 & 9 & 7 & 1 & 3 & 9 \end{array}$$

\therefore UD repeat after power 4

\therefore cyclicity = 4

❖ $333^{337^{334}} \rightarrow \frac{337^{334}}{4} \rightarrow 1^{334} \rightarrow 1$

$\therefore 333^1 \rightarrow \text{UD} = 3$

❖ Similarly cyclicity of 7 & 8 is also 4.

इसी प्रकार 7 और 8 की चक्रीयता भी 4 होती है।



Number of Factors (गुणनखंडों की संख्या)



Factors (गुणनखंड)

- ❖ Factors are the positive integers that can divide a number exactly.

गुणनखंड धनात्मक पूर्णांक हैं जो किसी संख्या को सटीक रूप से विभाजित कर सकते हैं।

Properties of factors (कारकों के गुण)

1. 1 is a factor of every number.
1 हर संख्या का गुणनखंड है।
2. Every natural number is a factor of itself.
हर प्राकृतिक संख्या स्वयं का एक गुणनखंड है।
3. Apart from 1 all natural numbers have atleast two factors.
1 के अतिरिक्त सभी प्राकृत संख्याओं के कम से कम दो गुणनखंड होते हैं।

Number of Factors (NOF) (गुणनखंडों की संख्या)

- ❖ $12 \rightarrow 12, 24, 36, 48, 60 \dots$ (multiples) / (गुणज)

$12 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 12$ (factors) / (गुणखंड)

NOF of 12 $\rightarrow 6$

perfect square NOF / पूर्ण वर्ग NOF $\rightarrow 2$

Even NOF of 12 $\rightarrow 4$

perfect cube NOF $\rightarrow 1$ / पूर्ण घन NOF = 1.

odd NOF of 12 $\rightarrow 2$

NOF of multiple of 3 $\rightarrow 3$

- ❖ $72 \rightarrow 2^3 \times 3^2$ (write in prime base)

(अभाज्य संख्या के घात में लिखना है)

$$[2^0 \ 2^1 \ 2^2 \ 2^3] \ [3^0 \ 3^1 \ 3^2]$$

OR $4 \times 3 = 12$ combinations /

\therefore NOF $\rightarrow 12$

Direct: NOF = (power + 1) \times (power + 1)

NOF of 72 $\rightarrow (3+1) \times (2+1) \rightarrow 4 \times 3 \rightarrow 12$

- ❖ $N = a^x \times b^y \times c^z$

a,b,c \rightarrow prime number / अभाज्य संख्या

NOF of N = $(x+1)(y+1)(z+1)$

Sum of factors (SOF) (गुणनखंडों का योग)

- ❖ $72 \rightarrow [2^0+2^1+2^2+2^3] \times [3^0+3^1+3^2] = 15 \times 13 = 195$

- ❖ $2160 \rightarrow 2^4 \times 3^3 \times 5^1$

SOF $\rightarrow (2^0+2^1+2^2+2^3+2^4) \times (3^0+3^1+3^2+3^3) \times (5^0+5^1)$

$\rightarrow 31 \times 40 \times 6 \rightarrow 7440$

OR **Sum of factors** / गुणनखंडों का योग $\rightarrow \frac{a[r^n - 1]}{(r-1)}$ \rightarrow GP

$$\therefore \frac{1(2^5 - 1)}{2-1} \times \frac{1(3^4 - 1)}{3-1} \times \frac{1(5^2 - 1)}{5-1}$$

$$\rightarrow 31 \times 40 \times 6 = 7440$$

- ❖ $2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1$

Even factors \rightarrow minimum 2^1 / सम कारक \rightarrow न्यूनतम 2^1

NOF = $5 \times 4 \times 2 = 40$

$$(2^0 \ 2^1 \ 2^2 \ 2^3 \ 2^4) \times (3^0 \ 3^1 \ 3^2 \ 3^3) \times (5^0 \ 5^1)$$

Even NOF $\rightarrow 4 \times 4 \times 2 \rightarrow 32$

$$\text{OR } 2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1 \rightarrow 2(2^3 \times 3^3 \times 5^1)$$

\downarrow

$$4 \times 4 \times 2 = 32$$

Sum of even factors / सम गुणकों का योग $\rightarrow 30 \times 40 \times 6 \rightarrow 7200$

No. of odd factors / विषम कारकों की संख्या $\rightarrow 40 - 32 = 8$

No. of odd factors / विषम कारकों की संख्या \rightarrow Absence of 2

$$\therefore 2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1 \rightarrow 4 \times 2 = 8$$

Sum of odd factors / विषम कारकों का योग $\rightarrow 40 \times 6 = 240$

- ❖ $2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1$

$$(2^0 \ 2^1 \ 2^2 \ 2^3 \ 2^4) \ (3^0 \ 3^1 \ 3^2 \ 3^3) \ (5^0 \ 5^1)$$

Number of factors which are multiple of 18 $\rightarrow 18 = 2^1 \times 3^2$

कारकों की संख्या जो 18 के गुणक हैं \rightarrow

$$18 = 2^1 \times 3^2$$

\therefore minimum 2^1 and 3^2 required for multiple of 18.
 $\rightarrow 4 \times 2 \times 2 = 16$

$$\text{OR } 2160 = 2^4 \times 3^3 \times 5^1 \rightarrow 2 \times 3^2 [2^3 \times 3^1 \times 5^1]$$

\downarrow

$$4 \times 2 \times 2 = 16$$

- ❖ **Sum of reciprocal of all factors**

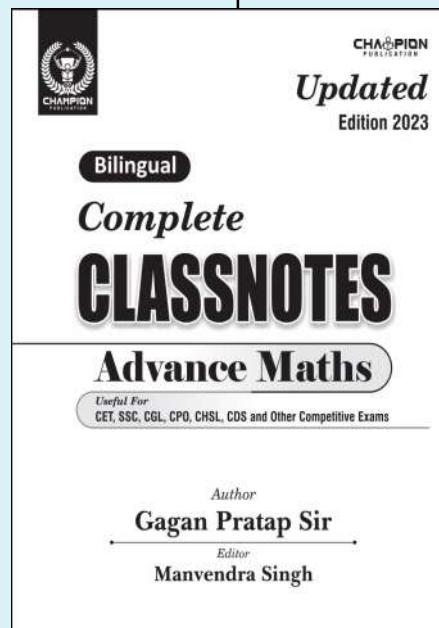
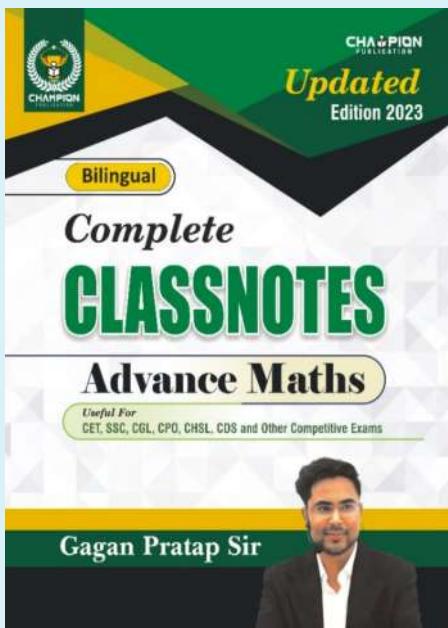
$$(\text{सभी गुणनखंडों के व्युक्ति का योग}) = \frac{\text{sum of factors}}{\text{number}}$$

$8 \rightarrow 1, 2, 4, 8$

$$\text{Sum of reciprocal} \rightarrow \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8+4+2+1}{8}$$

- = $\frac{\text{Sum of factors (गुणनखंडों का योग)}}{\text{number (संख्या)}}$
- ❖ $10800 \rightarrow 2^4 \times 3^3 \times 5^2$
Number of factors which are perfect squares →
गुणनखंडों की संख्या जो पूर्ण वर्ग हैं →
 a^{2n} = perfect square number / पूर्ण वर्ग संख्या
 a^{3n} = perfect cube number / पूर्ण घन संख्या
 a^{6n} = perfect square as well as perfect cube / पूर्ण वर्ग और साथ ही पूर्ण घन
 $(2^0 2^2 2^4) \times (3^0 3^2) \times (5^0 5^2)$
 $\rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$
OR No. of factors (perfect squares) →
या गुणनखंडों की संख्या (पूर्ण वर्ग) →
 $\frac{\text{Power}}{2} \rightarrow \text{Integer} + 1$
 $\rightarrow (2+1)(1+1)(1+1)$
 $\rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$
- ❖ $72 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$
make pairs from 1st & last, NOF = 12
पहले और आखिरी से जोड़े बनाएं,
 $1 \times 72 = 72 \quad 4 \times 18 = 72$
 $2 \times 36 = 72 \quad 6 \times 12 = 72$
 $3 \times 24 = 72 \quad 8 \times 9 = 72$
Product of factors / कारकों का गुणनफल = 72^6
 $\therefore \text{Product of factors of } N / N \text{ के कारकों का } = (N)^{\frac{\text{NOF}}{2}}$
- ❖ Only perfect square number has odd number of factors.
किसी पूर्ण वर्ग संख्या में गुणनखंडों की विषम संख्या होती है।
- ❖ Perfect square number from 1 to 100 → 10
1 से 100 तक पूर्ण वर्ग संख्या = 10
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
 $\therefore \text{Even number of factors / गुणनखंडों की सम संख्या} \rightarrow 100 - 10 = 90$
- ❖ Perfect square of a prime number has exactly 3 factors.
एक अभाज्य संख्या के पूर्ण वर्ग में 3 गुणनखंड होते हैं।
$$\begin{array}{c} 49 \rightarrow \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 49 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 7 \end{array} \rightarrow 7^2 \rightarrow 2 + 1 = ③$$

 $(1-100) \rightarrow 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 \rightarrow 4 \text{ numbers}$
- ❖ Numbers which have exactly 2 factors upto 100 / 100 तक संख्याएँ जिनके ठीक 2 गुणनखंड हैं = 25 (Prime Numbers)
- ❖ Numbers which have exactly 3 factors upto 100 / 100 तक संख्याएँ जिनके ठीक 3 गुणनखंड हैं = 4 (4, 9, 25, 49)
- ❖ Numbers which have more than 3 factors between (1 to 100) = ?
(1 से 100) के बीच 3 से अधिक गुणनखंड वाली संख्या = ?
only 1 factor = 1 (1 has only one factor)
 $\therefore \text{More than 3 factors / 3 से अधिक गुणनखंड} \rightarrow 100 - (1 + 4 + 25) = 70 \text{ numbers}$



INDEX	
GEOMETRY [गeometri]	
(1) Line and angle [रेखा और भिन्न]	1-12
(2) Type of Triangle, Interior and Exterior angle, Inequality of triangle and theorem [त्रिकोण के विवर, अंतर्गत और बाहरी भिन्न, त्रिकोण की असमिक्यातीय विधि]	13-44
(3) Basic Proportionality Theorem, Thales Theorem [बासिक प्रोप्रोरियलिटी थिम, थेल्स थिम]	45-65
(4) Area of Triangle [त्रिकोण का क्षेत्र]	66-79
(5) Similarity of Triangle [त्रिकोण की समानान्दीता]	80-106
(6) Converse of Basic proportionality theorem [बासिक प्रोप्रोरियलिटी थिम का विवरण]	107-122
(7) Centers of triangle [त्रिकोण के केंद्र (केंद्रिक)]	123-141
(8) Circumcenter, Orthocenter, Incenter, Centroid [सर्कुलर केंद्र, ओर्थोकेंद्र, इन्सेंटर, केंट्रोइड]	142-164
(9) Centroid शेंट्रोइड	165-179
(10) Right angled triangle [विलोम त्रिकोण]	180-189
(11) Square, Rectangle [वर्ष, वर्षभृत्य]	190-219
(12) Parallelogram, Rhombus, Trapezium [पारलोग्राम, रोम्बस, ट्रैपेजियम]	220-239
(13) Circle [त्रिकोणीय क्षेत्र के विवरण]	240-263
(14) Circle [Tangent/Chord based questions] [त्रिकोणीय क्षेत्र के विवरण के आधार पर प्रश्न]	264-305
(15) Circle [Diameter based questions] [त्रिकोणीय क्षेत्र के विवरण के आधार पर प्रश्न]	306-335
Co-ordinate Geometry [को-ऑर्डिनेट ज्यामिति]	
(1) Triangle [त्रिकोण]	336-361
(2) Quadrilateral [चतुर्भुज]	362-374
(3) Circle/Semi-circle [वृत्त/अर्धवृत्त]	375-389
(4) Polygon [पॉल्यूण्ड]	390-416
2D Mensuration [2D मैन्युरेशन]	
(1) Triangle [त्रिकोण]	417-427
(2) Cylinder, Hollow Cylinder [बॉल्डर, अंतर्कोण बॉल्डर]	428-441
(3) Cone, Cutting of Cone, Frustum [कोन, कटना कोन, फ्रूस्यम]	442-457
(4) Sphere, Hemisphere [सैर्फ, हेमिसैर्फ]	458-475
(5) Prism [प्रिस्म]	476-488
(6) Pyramid [पायरेमिड]	489-493
3D Mensuration [3D मैन्युरेशन]	
(1) Cube, Cuboid [क्यूब, क्यूबाइड]	494-503
(2) Cylinder, Hollow Cylinder [बॉल्डर, अंतर्कोण बॉल्डर]	504-511
(3) Cone, Cutting of Cone, Frustum [कोन, कटना कोन, फ्रूस्यम]	512-515
(4) Sphere, Hemisphere [सैर्फ, हेमिसैर्फ]	516-524
Algebra [गणित] / 504-659	
Trigonometry [त्रिकोणमिति] / 660-834	
Maxima Minima [माइक्सा मिनिमा]	802-811
Height and Distance [ऊँचाई और दूरी]	812-834
Statistics [स्टैटिस्टिक्स] / 851-850	851-875
Probability [प्रायितिकी] / 851-850	876-896
Permutation and Combination [परमेट्रियन और कॉम्बिनेशन]	897-906



Sequences and Series (अनुक्रम और श्रेणी)



Sequence (अनुक्रम)

- ❖ A sequence is an arrangement of numbers in definite order according to some rule.

अनुक्रम किसी नियम के अनुसार निश्चित क्रम में संख्याओं की व्यवस्था है।

Progression (श्रेणी)

- ❖ A sequence whose terms follow a certain pattern is called a progression.

एक क्रम जिसके पद एक निश्चित पैटर्न का पालन करते हैं, एक श्रेणी कहलाती है।

Series (शृंखला)

- ❖ If $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ is a sequence, then the sum expressed as $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ is called a series.

अगर $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ एक अनुक्रम है, तो $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ के रूप में व्यक्त योग को एक शृंखला कहा जाता है।

- ❖ A series having finite number of terms is called **finite series**.

पदों की परिमित संख्या वाली श्रेणी को परिमित श्रेणी कहते हैं-

- ❖ A series having infinite number of terms is called **infinite series**.

अनंत पदों वाली शृंखला को अनंत श्रेणी कहते हैं।

Special series (विशेष शृंखला)

- ❖ If denominator is same as multiplier
यदि हर गुणक के समान है

$$999 \frac{991}{999} \times 999 = ?$$

Step 1 → जिससे Multiply किया है = 999

Step 2 → आगे जितने 9 है उतनी zero = 000

Step 3 → Diff. of 999 - 991 = 8

$$\therefore 999000 - 8 = 998992$$

$$\text{❖ } \underbrace{\frac{1}{5 \times 6}}_{\text{common difference / सामान्य अंतर}} + \underbrace{\frac{1}{6 \times 7}} + \underbrace{\frac{1}{7 \times 8}} + \underbrace{\frac{1}{8 \times 9}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{24 \times 25}}$$

common difference / सामान्य अंतर = 1

$$\frac{6-5}{5 \times 6} + \frac{7-6}{6 \times 7} + \frac{8-7}{7 \times 8} + \frac{9-8}{8 \times 9} + \dots + \frac{25-24}{24 \times 25}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25}$$

OR $\frac{1}{\text{common difference}} \left[\frac{1}{\text{1st no. of den.}} - \frac{1}{\text{Last no. of den.}} \right]$

$$1 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} \right) = \frac{4}{25}$$

$$\frac{1}{1 \times 4 \times 7} + \frac{1}{4 \times 7 \times 10} + \frac{1}{7 \times 10 \times 13} + \frac{1}{10 \times 13 \times 16} + \frac{1}{13 \times 16 \times 19} = ? \Rightarrow \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 \times 4} - \frac{1}{16 \times 19} \right) = \frac{25}{608}$$

$$\frac{1}{\text{diff. of 1st & 3rd no. in den.}} \left(\frac{1}{\text{1st 2no.}} - \frac{1}{\text{last 2no.}} \right)$$

Series based concepts

$$9 + 99 + 999 + \dots \text{ n}^{\text{th}} \text{ terms} = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9}$$

$$9 (1 + 11 + 111 + \dots \text{ n}^{\text{th}} \text{ terms}) = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{9}$$

$$1 + 11 + 111 + \dots \text{ n}^{\text{th}} \text{ term} = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}$$

Bar based concepts:

Formulae:-

$$0.\bar{p} = \frac{p}{9}$$

$$0.\overline{pq} = \frac{pq}{99}$$

$$0.\overline{pqr} = \frac{pqr - p}{990}$$

$$0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

Arithmetic Progression (AP) (अंकगणितीय श्रेणी)

- ❖ A sequence in which terms increase or decrease regularly by a fixed number. This fixed number is called the common difference of AP.

एक क्रम जिसमें पद एक निश्चित संख्या से नियमित रूप से बढ़ते या घटते हैं। यह निश्चित संख्या AP का सार्व अंतर कहलाती है।

Ex. $a, a + d, a + 2d, \dots$ is an AP

Where a = first term and d = common difference.

जहाँ a = पहला पद और d = सार्व अंतर है।

nth Term (or General Term) of an AP

linear expression in n , i.e. its n th term is given by $A_n + B$, where A and B are constants and $A =$ common difference.

यदि एक अनुक्रम एक AP है, तो इसका n वाँ पद n में एक रैखिक व्यंजक है, अर्थात् इसका n वाँ पद $A_n + B$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ A और B स्थिरांक हैं और $A =$ सार्व अंतर है।

Selection of Terms in an AP (AP में पदों का चयन)

- ❖ Any terms in AP can be taken as AP में कोई भी पद इस रूप में लिया जा सकता है।

- 3 terms $\rightarrow (a-d), a, (a+d)$
- 4 terms $\rightarrow (a-3d), (a-d), (a+d), (a+3d)$
- 5 terms $\rightarrow (a - 2d), (a - d), a, (a + d), (a + 2d)$

Sum of First n Terms of an AP (किसी AP के प्रथम n पदों का योग)

- ❖ Sum of first n terms of AP, is given by AP के पहले n पदों का योग, द्वारा दिया गया है

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d] = \frac{n}{2} [a + l]$$

When l = last term

Note / नोट:-

- A sequence is an AP if the sum of its first n terms is of the form $A_n^2 + B_n$, here A and B are constants and common difference in such case will be $2A$.

एक अनुक्रम एक AP है यदि इसके पहले n पदों का योग $A_n^2 + B_n$ के रूप में है, वहाँ A और B स्थिर हैं और ऐसे मामले में सार्व अंतर $2A$ होगा।

- $a_n = S_n - S_{n-1}$ i.e.

nth term of AP = Sum of first n terms – Sum of first $(n - 1)$ terms

$$a_n = S_n - S_{n-1} \text{ यानी}$$

AP का n वाँ पद = पहले n पदों का योग – प्रथम $(n - 1)$ पदों का योग

- Ex.** $7, \underbrace{11}_{+4}, \underbrace{15}_{+4}, \underbrace{19}_{+4}, 23, \dots$ common difference / सार्व अंतर
 $(d) = 4$

1st term / प्रथम पद (a) = 7

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d$$

$T_n = n$ th term = $a+(n-1)d$ = Last term for n term AP

$T_n = n$ th term = $a+(n-1)d$ = n पद AP का अंतिम पद

$$\text{Sum / जोड़} \rightarrow n \frac{(a+l)}{2} \text{ OR/और } \frac{n}{2} [2a+(n-1)d]$$

$$T^n = l = a + (n-1)d \rightarrow \frac{l-a}{d} = n - 1$$

किसी AP का n वाँ पद (या सार्वान्तर पद)

- ❖ If a is the first term, d is the common difference and l is the last term of an AP, i.e. the given AP is $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, l$, then

यदि a पहला पद है, d सार्व अंतर है और l किसी AP का अंतिम पद है, अर्थात् दिया गया $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, l$, है, तो

- nth term is given by $a_n = a+(n-1)d$

n वाँ पद दिया गया है $a_n = a+(n-1)d$

- nth term of an AP from the last term is given by

$$a_n = l - (n-1)d$$

n वाँ पद किसी AP का अंतिम पद से $a_n = l - (n-1)d$

Note / नोट:-

- $a_n + a_{n-1} = a + l$

i.e. nth term from the beginning + nth term from the end = first term + last term

अर्थात् प्रारंभ से n वाँ पद + अंत से n वाँ पद = पहला पद + अंतिम पद

Properties of Arithmetic Progression (अंकगणितीय श्रेणी के गुण)

- If a constant is added or subtracted from each term of an AP, then the resulting sequence is also an AP with same common difference.

यदि किसी AP के प्रत्येक पद में एक स्थिरांक जोड़ा या घटाया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी समान सार्व अंतर वाला एक AP होता है।

- If each term of an AP is multiplied or divided by a non-zero constant k , then the resulting sequence is also an AP, with common difference kd or $\frac{d}{k}$ respectively, where d = common difference of given AP.

यदि किसी AP के प्रत्येक पद को एक गैर-शून्य स्थिरांक k से गुणा या विभाजित किया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी एक AP होता है,

जिसमें सार्व अंतर क्रमशः kd या $\frac{d}{k}$ होता है, जहाँ d = दिए गए AP का सार्व अंतर होता है।

- If a_n, a_{n+1} and a_{n+2} are three consecutive terms of an AP, then $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$.

यदि a_n, a_{n+1} और a_{n+2} एक AP के लगातार तीन पद हैं, तो $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$.

- If the terms of an AP are chosen at regular intervals, then they form an AP.

यदि किसी AP के पदों को नियमित अंतराल पर चुना जाता है, तो वे एक AP बनाते हैं।

- If a sequence is an AP, then its nth term is a

$$\therefore n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$\sum n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum n^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum n^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

- ❖ Sum of 1st n even natural numbers

1st n सम प्राकृत संख्याओं का योग

$$2+4+6+8+\dots+2n = \frac{n}{2}[2+2n] = n(n+1)$$

Sum of 1st n odd natural numbers

1st n विषम प्राकृतिक संख्या का योग

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1) = \frac{n}{2}[1+2n-1] = n^2$$

Arithmetic Mean (AM) (अंकगणितीय माध्य)

- (i) If a, m and b are in AP, then m is called the arithmetic mean of a and b and it is given by

$$m = \frac{a+b}{2}$$

यदि a, m और b, AP में हैं, तो m को a और b का अंकगणितीय

माध्य कहा जाता है और इसे $m = \frac{a+b}{2}$ द्वारा दिया जाता है

- (ii) If $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ are n numbers, then their AM is given by, $A = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

यदि $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ संख्याएँ हैं, तो उनका AM निम्न द्वारा दिया

जाता है, $A = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

- (iii) If a, A₁, A₂, A₃, ..., A_n, b are in AP, then (a) A₁, A₂, A₃, ..., A_n are called n arithmetic mean between a and b, where

यदि a, A₁, A₂, A₃, ..., A_n, b, AP में हैं

(a) A₁, A₂, A₃, ..., A_n को A और B के बीच अंकगणितीय माध्य कहा जाता है, जहां

$$A_1 = a + d = \frac{na+b}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = \frac{(n-1)a+2b}{n+1}$$

$$\vdots \quad : \quad : \quad :$$

$$A_n = a + nd = \frac{a+nb}{n+1}$$

$$\text{and/और } d = \frac{b-a}{n+1}$$

- (b) Sum of n AM's between a and b is nA

a और b के बीच n AM's का योग nA है

$$\text{i.e. } A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = nA, \text{ where } A = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{यानी } A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = nA, \text{ जहां } A = \frac{a+b}{2}$$

Important Results on AP (AP पर महत्वपूर्ण परिणाम)

- (i) If/यदि $a_p = q$ and/और $a_q = p$, then/तब $a_{p+q} = 0$, $a_r = p+q-r$
- (ii) If/यदि $pa_p = qa_q$, then/तब $a_{p+q} = 0$
- (iii) If/यदि $a_p = \frac{1}{q}$ and/और $a_q = \frac{1}{p}$, then/तब $a_{pq} = 1$
- (iv) If/यदि $S_p = q$ and/और $S_q = p$, then/तब $S_{p+q} = -(p+q)$
- (v) If/यदि $S_p = S_q$, then/तब $S_{p+q} = 0$
- (vi) If/यदि a^2, b^2 and c^2 are/और in AP, then/तब

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ and/और $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ both are also in AP/दोनों भी हैं AP में होंगे।

- (vii) If a_1, a_2, \dots, a_n are the non-zero terms of an AP, then

यदि a_1, a_2, \dots, a_n किसी AP के शून्येतर पद हैं, तब

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

Geometric Progression (GP) (ज्यामितीय श्रेणी)

- ❖ A sequence in which the ratio of any term (except first term) to its just preceding term is constant throughout. The constant ratio is called common ratio (r).

एक अनुक्रम जिसमें किसी भी पद (पहले पद को छोड़कर) का उसके ठीक पहले वाले पद से अनुपात पूरे समय स्थिर रहता है। स्थिर अनुपात (r) कहा जाता है

$$\text{i.e. } \frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \geq 1$$

- ❖ If a is the first term, r is the common ratio and l is the last term of a GP, then the GP can be written as a, ar, ar², ..., arⁿ⁻¹, ..., l.

यदि a पहला पद है, r सार्व अनुपात है और l किसी GP का अंतिम पद है, तो GP को a, ar, ar², ..., arⁿ⁻¹, ..., l के रूप में लिखा जा सकता है।

4, 12, 36, 108 $r = \text{common ratio} / \text{सार्व अनुपात}$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{4} = 3 \quad \textcircled{3}$$

nth Term (Or General Term) of a GP

GP का nवाँ पद (या सामान्य पद)

- ❖ If a is the first term, r is the common ratio and l is the last term, then

यदि a पहला पद है, r सार्व अनुपात है और l अंतिम पद है, तब

- (i) nth term of a GP from the beginning is given by $a_n = ar^{n-1}$

यदि a पहला पद है, n सार्व अनुपात है और l अंतिम पद है, तब $a_n = ar^{n-1}$

- (ii) nth term of a GP from the end is given by $a_n = \frac{l}{r^{n-1}}$

किसी GP का nवाँ पद अंत से दिया जाता है $a_n = \frac{l}{r^{n-1}}$

- (iii) The nth term from the end of a finite GP consisting of m terms is ar^{m-n} .

एक परिमित GP के अंत से nवाँ शब्द जिसमें m शब्द हैं, ar^{m-n} है।

- (iv) $a_n a'_n = al$

i.e. nth term from the beginning \times nth term from the end = first term \times last term

$a_n a'_n = al$

अर्थात् प्रारंभ से nवाँ पद \times अंत से nवाँ पद = पहला पद \times अंतिम पद $a_n a'_n = al$

Properties of Geometric Progression (गुणोत्तर श्रेणी के गुण)

- (i) If all the terms of GP are multiplied or divided by same non-zero constant, then the resulting sequence is also a GP with the same common ratio.

यदि GP की सभी शर्तों को एक ही गैर-शून्य स्थिरांक से गुणा या विभाजित किया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी समान सामान्य अनुपात वाला GP होता है।

- (ii) The reciprocal of terms of a given GP also form a GP.

किसी दिए गए GP की पदों का पारस्परिक भी एक GP बनाता है।

- (iii) If each term of a GP is raised to same power, then the resulting sequence also forms a GP.

यदि किसी GP के प्रत्येक पद को समान घात तक बढ़ाया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी GP बनाता है।

- (iv) If the terms of a GP are chosen at regular intervals, then the resulting sequence is also a GP.

यदि एक GP की पदों को नियमित अंतराल पर चुना जाता है, तो परिणामी क्रम भी एक GP होता है।

- (v) If $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ are non-zero and non-negative term of a GP, then $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \dots, \log a_n$ are in an AP and vice-versa.

यदि $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ किसी GP का शून्येतर और गैर-ऋणात्मक पद हैं, तो $a_3, \dots, \log a_n$ AP में हैं और इसके विपरीत भी सही है।

- (vi) If a, b and c are three consecutive terms of a GP, then $b^2 = ac$.

यदि a, b और c किसी GP के लगातार तीन पद हैं, तो $b^2 = ac$

Selection of Terms in a GP (GP में शर्तों का चयन)

Any terms in a GP can be taken as
GP में पदों को इस रूप में लिया जा सकता है।

- (i) 3 terms $\rightarrow \frac{a}{r}, a$ and ar .

- (ii) 4 terms $\rightarrow \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar$ and ar^3 .

- (iii) 5 terms $\rightarrow \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar$, and ar^2 .

Sum of First n Terms of a GP (a GP के प्रथम n पदों का योग)

- (i) Sum of first n terms of a GP is given by
GP के पहले n पदों का योग किसके द्वारा दिया जाता है

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r}, & \text{if } r < 1 \\ \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, & \text{if } r > 1 \\ na, & \text{if } r = 1 \end{cases}$$

- (ii) $S_n = \frac{a - lr}{1 - r}$, $r < 1$ or $S_n = \frac{lr - a}{r - 1}$, $r > 1$

where, l = last term of the GP.

जहाँ, l = GP का अंतिम पद

Sum of Infinite Terms of a GP (a GP की अनंत पदों का योग)

- (i) If/यदि $|r| < 1$, then/तब $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

- (ii) If/यदि $|r| \geq 1$, then/तब S_∞ does not exist./मौजूद नहीं है।

Geometric Mean GM (ज्यामितीय माध्य)

- (i) If a, G, b are in GP, then G is called the geometric mean of a and b and is given by $G = \sqrt{ab}$.

यदि a, G, b GP में हैं, तो G को A और B का ज्यामितीय माध्य कहा जाता है और $G = \sqrt{ab}$ द्वारा दिया जाता है।

- (ii) GM of n positive numbers $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ are given by $G = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}$

n धनात्मक संख्याओं $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ का GM = $G = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}$ द्वारा दिया जाता है

- (iii) If $a, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$ are in GP, then

यदि $a, G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$ में हैं, GP तो

(a) $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$, are called n GM's between a and b , where

$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$\vdots \quad \vdots$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} \text{ and}$$

$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

(b) Product of n GM's,

$$G_1 \times G_2 \times G_3 \times \dots \times G_n = G^n, \text{ where } G = \sqrt[n]{ab}$$

Harmonic Progression (हरात्मक श्रेणी)

- ❖ A sequence $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ of non-zero numbers is called a Harmonic Progression (HP), if the sequence $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ is in AP.

गैर-शून्य संख्याओं के अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ को एक हरात्मक श्रेणी (HP) कहा जाता है, यदि अनुक्रम $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$ AP में है।

$$\frac{1}{a_n}, \dots \text{ AP में है।}$$

$$a_n = \frac{1}{a + (n-1)d}$$

nth Term (or General Term) of Harmonic Progression (हरात्मक श्रेणी का nवाँ पद या सामान्य पद)

- (i) nth term of the HP from the beginning

HP का nवाँ पद शुरू से

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)}$$

$$= \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}$$

- (ii) nth term of the HP from the end

HP का nवाँ पद अंत से

$$a_n' = \frac{1}{\frac{1}{l} - (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 l}{a_1 a_2 - l(n-1)(a_1 - a_2)}, \text{ where } l \text{ is the last term.}$$

$$(iii) \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{l} = \frac{1}{\text{First term of HP}} + \frac{1}{\text{Last term of HP}}$$

$$(iv) a_n = \frac{1}{a + (n-1)d}, \text{ if } a, d \text{ are the first term and common difference of the corresponding AP.}$$

$$a_n = \frac{1}{a + (n-1)d} \text{ यदि } a, d \text{ संबंधित AP का पहला पद और सार्व अंतर हैं।}$$

Note:- There is no formula for determining the sum of harmonic series.

Note:- हरात्मक शृंखला का योग निर्धारित करने के लिए कोई सूत्र नहीं है।
AP = 2, 5, 8, 11

$$HP = \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$$

Harmonic Mean (हरात्मक माध्य)

- (i) If a, H and b are in HP, then H is called the harmonic mean of a and b and is given by $H = \frac{2ab}{a+b}$

यदि a, H और b HP में हैं, तो H को a और b का हरात्मक माध्य कहा जाता है और $H = \frac{2ab}{a+b}$ द्वारा दिया जाता है।

- (ii) Harmonic Mean (HM) of $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ is given by

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Important Results on HP (HP पर महत्वपूर्ण परिणाम)

- (i) If in a HP, $a_m = n$ and $a_n = m$, then

$$a_{m+n} = \frac{mn}{m+n}, a_{mn} = 1, a_p = \frac{mn}{p}$$

- (ii) If in a HP, $a_p = qr$ and $a_q = pr$, then $a_r = pq$

- (iii) If H is HM between a and b , then

$$(a) (H-2a)(H-2b) = H^2$$

$$(b) \frac{1}{H-a} + \frac{1}{H-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$(c) \frac{H+a}{H-a} + \frac{H+b}{H-b} = 2$$

Properties of AM, GM and HM between Two Numbers (दो संख्याओं के बीच AM, GM और HM के गुण)

1. If A, G and H are arithmetic, geometric and harmonic means of two positive numbers a and b , then

यदि A, G और H दो सकारात्मक संख्याओं a और b के अंकगणितीय, ज्यामितीय और हारात्मक माध्य हैं, तो

- (i) $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$, $H = \frac{2ab}{a+b}$
- (ii) $A \geq G \geq H$
- (iii) $G^2 = AH$ and so A,G,H are in GP.

$$(iv) \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \begin{cases} A, & \text{if } n = 0 \\ G, & \text{if } n = -\frac{1}{2} \\ H, & \text{if } n = -1 \end{cases}$$

Exponential Series (घातीय शृंखला)

- ❖ The sum of the series $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \infty$ is denoted by the number e.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \infty \text{ शृंखला का योग } e \text{ द्वारा दर्शाया जाता है।}$$

$$\therefore e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

- (i) e lies between 2 and 3.
- (ii) e is an irrational number.
- (iii) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \infty, x \in \mathbb{R}$
- (iv) $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \infty, x \in \mathbb{R}$
- (v) For any $a > 0$, $a^x = e^{x \log_a}$

$$= 1 + x(\log_a) + \frac{x^2}{2!} (\log_a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log_a)^3 + \dots \infty, x \in \mathbb{R}$$

- (vi) Sum of first n even natural numbers.

प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योग।

$$\text{i.e. } 2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$$

- (vii) Sum of first n odd natural numbers.

प्रथम n विषम प्राकृतिक संख्याओं का योग।

$$\text{i.e. } 1+3+5+\dots(2n-1) = n^2$$

$$(viii) \sum_{r=1}^n r^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(ix) \sum_{r=1}^n r^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$(x) \sum_{r=1}^n r^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

- (xi) Sum of n terms of series

शृंखला के n पदों का योग

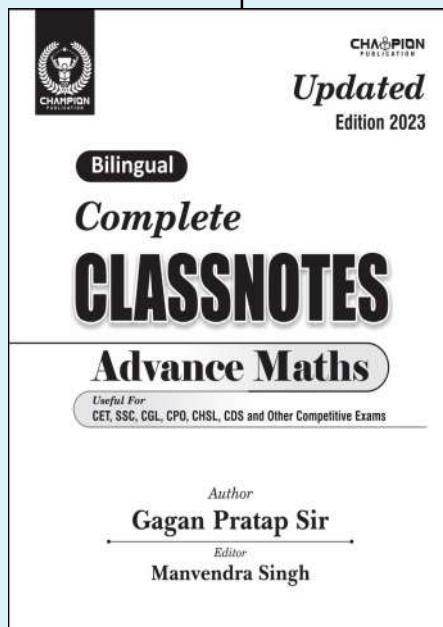
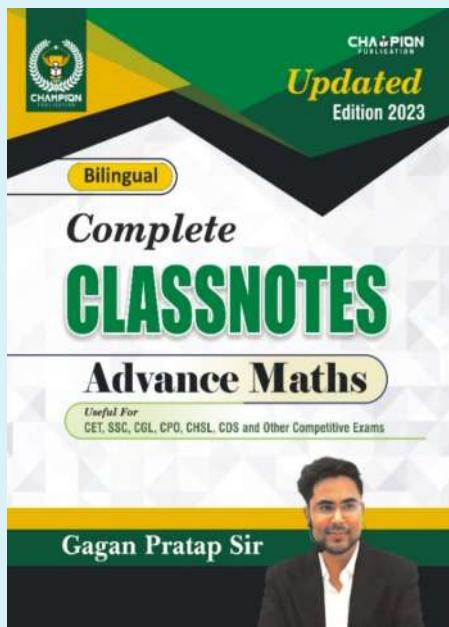
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + \dots$$

$$\text{Case I when n is odd} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{स्थिति I जब n विषम है} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Case II when n is even} = \frac{-n(n+1)}{2}$$

$$\text{स्थिति II जब n सम है} = \frac{-n(n+1)}{2}$$



INDEX	
GEOMETRY [ज्यामिति]	
(1) Line and angle [लाइन एंड एंजल]	3-42
(2) Type of Triangle and Exterior angle, Inequality of triangle and theorem [त्रिभुज के प्रकार, बाहरी वृत्तीय और त्रिभुज की असमिक्यता विद्या]	13-44
(3) Strain Rule, Cosine Rule, Angle bisector theorem [स्ट्राइन रुल, कोसाइन रुल, वृत्तीय विद्या]	45-65
(4) Area of triangle [त्रिभुज का क्षेत्रफल]	66-78
(5) Similarity of triangle [त्रिभुज की समानांतरता]	80-106
(6) Congruency of triangle and Angle postulate [त्रिभुज की उपर्युक्ती विद्या]	107-122
(7) Right angled triangle [वृत्तीय त्रिभुज]	123-141
(8) Circumcentre, Orthocentre [सर्केंट्र, ऑर्थोसेंट्र]	142-164
(9) Centroid [सेंट्रोइड]	165-179
(10) Equilateral triangle/Isosceles triangle [समान त्रिभुज, असमान त्रिभुज]	180-195
(11) Right angled triangle [वृत्तीय त्रिभुज]	196-205
(12) Parallelogram, Rhombus, Trapezium [समानांतर चतुर्भुज, रॉम्बस, ट्रैपेजियम]	206-229
(13) Circle [वृत्त के सभी गुण विद्या]	240-263
(14) Circle (angle based questions) [वृत्त के वृत्तीय विद्या के सभी प्रश्न]	264-305
(15) Circle (Tangent/chord based questions) [वृत्त के वृत्तीय विद्या के सभी प्रश्न]	306-335
Co-ordinate Geometry [को-ऑर्डिनेट ज्यामिति]	
2D Mensuration [2Dी मेसरेशन]	
(1) Triangle [त्रिभुज]	343-374
(2) Quadrilateral [चतुर्भुज]	375-389
(3) Circle/Semi-circle [वृत्त/अर्ध वृत्त]	390-416
(4) Polygon [पॉल्यून]	417-427
3D Mensuration [3Dी मेसरेशन]	
(1) Cube, Cuboid [कॉब, कॉबॉड]	428-441
(2) Cylinder, Hollow Cylinder [सिलेंडर, हॉलो सिलेंडर]	442-457
(3) Cone, Cutting of Cone, Frustum [कॉन, कॉन की काटी, फ्रेस्यूम]	458-475
(4) Sphere, Hemisphere [सैर्फ, हेमिसैर्फ]	476-488
(5) Prism [प्रिज्म]	489-493
(6) Pyramid [पायरेज्म]	494-503
Algebra [बीजगणित] / 504-659	
Trigonometry [रिकोणमिति] / 660-834	
Maxima Minima [माक्सिमा मिनिमा]	802-811
Height and Distance [हाईट एंड डिस्टेन्स]	812-834
Statistics [स्टैटिस्टिक्स] / 835-850	851-875
Permutation and Combination [पर्मियूयन एंड कॉम्बिनेशन] / 876-896	876-896



LCM & HCF (लघुत्तम समापवर्तक और महत्तम समापवर्तक)



LCM (Least Common Multiple) (लघुत्तम समापवर्तक)

- ❖ The least common multiple (LCM) is defined as the smallest multiple that two or more numbers have in common.

लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) को दो या दो से अधिक संख्याओं में उभयनिष्ठ लघुत्तम गुणज के रूप में परिभासित किया जाता है।

- ❖ LCM of the any two numbers is the value that is completely divisible by the two given numbers.

किन्हीं दो संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह मान है जो दो गई दो संख्याओं से पूर्णतः विभाज्य है।

- ❖ Ex. Find LCM of 36, 45.

$36 \rightarrow 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252 \dots$

$45 \rightarrow 45, 90, 135, 180, 225, 270 \dots$

LCM (36, 45) \rightarrow 180 (Least common multiple of both) (दोनों का लघुत्तम समापवर्तक)

- ❖ Find LCM of 24, 30, 36.

$24 \rightarrow 2^3 \times 3^1$

$30 \rightarrow 2^1 \times 3^1 \times 5$

$36 \rightarrow 2^2 \times 3^2$

$LCM = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ (Take max. power of each) / (प्रत्येक की अधिकतम घात लें) $= 8 \times 9 \times 5 = 360$

- ❖ Find LCM of 55, 66, 60.

$55 \rightarrow 5 \times 11$ LCM $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 = 660$

$66 \rightarrow 2 \times 3 \times 11$

$60 \rightarrow 2^2 \times 3 \times 5$

- ❖ Find LCM of 13, 29, 41.

$13 \rightarrow$ LCM (prime no.) \rightarrow their product / उनका गुणनफल

$29 \rightarrow \therefore LCM = 13 \times 29 \times 41$

41 \rightarrow

- ❖ Find LCM of 24, 30, 36.

$24 \rightarrow 12 \times 2$ Let LCM = 36

$30 \rightarrow 6 \times 5$ $\therefore 36 \times 5 \times 2 = 360$

$36 \rightarrow$ 6, 12 included

in 36 so skip them

- ❖ Find LCM of 55, 66, 60.

$55 \rightarrow 11 \times 5$ LCM $= 66 \times 5 \times 2 = 660$

$66 \rightarrow$

$60 \rightarrow 5 \times 6 \times 2$

- ❖ Product of co-prime number = their LCM

सह-अभाज्य संख्या का गुणनफल = उनका LCM

- ❖ The number which when divided by a, b, c leaves remainder 'r' in each case $= LCM(a,b,c) \times k + r$
वह संख्या जिसे a, b, c से भाग देने पर प्रत्येक स्थिति में 'r' शेष बचता है $= LCM(a,b,c) \times k + r$

- ❖ Ex. The least number which when divided by 4, 6, 8, 12, and 16 leaves remainder of 2 in each case.

वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो जिसे 4, 6, 8, 12 and 16 से भाग करने पर प्रत्येक दशा में 2 शेष बचे।

- ❖ Sol. LCM of (4, 6, 8, 12 and 16) $= 16 \times 3 = 48$

Required number $= 48 + 2 = 50$

- ❖ Ex. The least multiple of 13 which on dividing by 4, 5, 6, 7 and 8 leaves remainder 2 in each case?

वह 13 का छोटे से छोटा गुणज क्या होगा जिसे 4, 5, 6, 7 and 8 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 2 शेषफल बचे?

- ❖ Sol. LCM of (4, 5, 6, 7 and 8) $= 8 \times 7 \times 3 \times 5 = 840$

$\therefore (840K + 2)$ will be divisible by 13

(840K + 2) 13 से विभाज्य होगा।

$$\frac{840K+2}{13} = 64K + \frac{8K+2}{13} \quad \text{Put } (K=3)$$

$$\Rightarrow 840 \times 3 + 2 = 2522$$

- ❖ The number which when divided by a, b, c respectively gives remainder x, y, z such that
वह संख्या जिसे क्रमशः a, b, c से विभाजित करने पर शेषफल x, y, z प्राप्त होता है

common difference (d) / सार्व अंतर (d) $= a-x = b-y = c-z$
number = LCM (a, b, c)k - d

- ❖ Ex. Find least number which divided by 35, 45, 55 leaves 18, 28, and 38 remainder respectively?

वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे 35, 45, 55 से भाग करने पर 18, 28 and 38 शेषफल बचे?

- ❖ Sol. LCM of (35, 45, 55) $= 55 \times 9 \times 7 = 55 \times 63 = 3465$

Required number $= 3465 - d$

$d = 35 - 18 = 45 - 28 = 55 - 38 = 17$ (Common difference) सार्वअंतर

Number $= 3465 - 17 = 3448$

HCF (Highest common factor) (महत्तम समापवर्तक)

- ❖ HCF is used to find the highest common factors of any two or more given integers.

किसी भी दो या अधिक दिए गए पूर्णांकों के उच्चतम सामान्य गुणनखंडों को खोजने के लिए HCF का उपयोग किया जाता है।

- In other words HCF is the largest positive integer that divides each of the given integers.

दूसरे शब्दों में HCF सबसे बड़ा धनात्मक पूर्णांक है जो दिए गए पूर्णांकों में से प्रत्येक को विभाजित करता है।

- Ex.** Find HCF of 40, 64.

$$40 \rightarrow (1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40)$$

$$64 \rightarrow (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)$$

common-factors of 40, 64 $\Rightarrow [1, 2, 4, 8]$ HCF = 8

40, 64 के उभयनिष्ठ गुणनखंड $\Rightarrow [1, 2, 4, 8]$ HCF = 8

HCF is the greatest common number which divide all the given numbers.

HCF वह बड़ी से बड़ी समापवर्तक संख्या है जो दी गई सभी संख्याओं को विभाजित करती है।

- $40 \rightarrow 8 \times 5$

$$64 \rightarrow 8 \times 8$$

$$42 \rightarrow 6 \times 7$$

$$66 \rightarrow 6 \times 11$$

यही बचे हुए co-prime no. HCF निकालने के बाद जो no.

दोनों संख्याओं का Ratio बचते हैं उनमें कुछ भी common नहीं बचेगा वे आपस में co-prime होगी।

$$40 : 64$$

$$5 : 8$$

$$42 : 66$$

$$7 : 11$$

- HCF of two no. = H

Numbers = Hx, Hy

$x, y \rightarrow$ co-prime

LCM = Hxy

Ratio of no's = $Hx : Hy$

$x : y$

How to find HCF

Factorization Method (गुणनखंड विधि)

- Find HCF of 168, 294, 420

$$168 \rightarrow 2^3 \times 3 \times 7$$

Take minimum power of common in all /

सभी में समानकी न्यूनतम घात लो

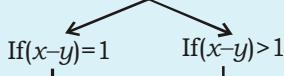
$$294 \rightarrow 2 \times 3 \times 7^2 \quad \therefore \text{HCF} \Rightarrow 2 \times 3 \times 7 = 42$$

$$420 \rightarrow 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Difference Method (अंतर विधि)

- HCF of two numbers = H
Numbers = Hx, Hy
 $x, y \rightarrow$ co-prime
- Diff. = $Hx - Hy$
 $= H(x-y)$
 \downarrow
HCF = diff. का factor

$$\text{Diff.} = H(x-y)$$



$HCF = \text{diff.}$ $HCF = \text{factor of diff.}$

HCF of 2 numbers can not be greater than their difference.

2 संख्याओं का HCF उनके अंतर से अधिक नहीं हो सकता।

- $48 \rightarrow$ Difference = 8 = HCF $\left[\begin{array}{l} 48 = 8 \times 6 \\ 56 = 8 \times 7 \end{array} \right]$ Difference = 1

$$\therefore \text{HCF} = \text{difference} = 8$$

- $306, 391 \quad \therefore \text{HCF} = 17$

$$d = 85 \rightarrow 17 \times 5$$

- $1518 \quad 1840$

$$D = 322 \leftarrow \begin{array}{l} 161 \times 2 \\ (23) \times 7 \times 2 \end{array}$$

\therefore Both number divisible by 23 / दोनों संख्याएँ 23 से विभाज्य हैं

Both are even number / दोनों सम संख्या हैं

$$\therefore \text{HCF} = 23 \times 2 = 46$$

- $323, 456, 703$

$$\overbrace{\begin{array}{c} 133 \\ 19 \times 7 \end{array}}^{19 \text{ divide all 3}}$$

$$\therefore \text{HCF} = 19$$

- $1008, 1323, 1722$

$$d = 315$$

$$(63) \times 5$$

$$3 \times (21)$$

$$\text{HCF of } (1008, 1323) = 63$$

1722 not divisible by 9 \therefore Remove 9 from 63 /

Hence not divisible by 63 / अतः 63 से विभाज्य नहीं है

\rightarrow 1722 divisible by 21 / 1722 21 से विभाज्य है

$$\therefore \text{HCF} (1008, 1323, 1722) = 21$$

Long Division Method (लंबी विभाजन प्रणाली)

- 693, 945

$$\text{HCF} = 63$$

$$\begin{array}{r} 693 \overline{) 945} (1 \\ 693 \\ \hline 252) 693 (2 \\ 504 \\ \hline 189) 252 (1 \\ 189 \\ \hline 189) 189 (3 \\ 189 \\ \hline \end{array}$$

Final divisor $\leftarrow 63$ $\text{HCF} = 189$

1, 2, 1, 3 \rightarrow successive quotient / क्रमिक भागफल

- Note: If 2 or 3 numbers are even their HCF will be even.

If any one number is odd their HCF can not be even.

नोट: यदि 2 या 3 संख्याएँ सम हो तो उनका HCF भी सम होगा।

यदि कोई एक संख्या विषम है तो उनका HCF सम नहीं हो सकता।

- If HCF of 2 numbers = H $\therefore \text{LCM} = Hxy$

Nos. $\rightarrow Hx, Hy$

$x, y \rightarrow$ co-prime

$$\text{Diff.} = H(x-y)$$

$$\text{Sum} = H(x+y)$$

\therefore HCF is present in LCM, difference & sum of the numbers. / HCF, LCM, संख्याओं के अंतर और संख्याओं के योग में मौजूद होता है।

- ❖ 18, 30 HCF = 6
 $\text{LCM} = 90$ All will be divisible by HCF.
 $\text{Diff.} = 12$ सभी HCF से विभाज्य होंगे।
 $\text{Sum} = 48$

- ❖ $Hx \times Hy = Hxy \times H$
 $I \times II = \text{LCM} \times \text{HCF}$
 $H^2xy = H^2xy$
- ❖ $I \times II = \text{LCM} \times \text{HCF}$
 $\Rightarrow 1^{\text{st}} \text{ no.} \times 2^{\text{nd}} \text{ no.} = \text{LCM} \times \text{HCF}$
- ❖ 'K' is the largest number which when divide a,b,c gives same remainder 'r' & quotients are x,y,z respectively

'K' सबसे बड़ी संख्या है जिसे a,b,c से विभाजित करने पर समान शेषफल 'r' और भागफल क्रमशः x,y,z हैं

$$\begin{array}{c} k \overline{) a (x \quad k \overline{) b (y \quad k \overline{) c (z \\ \underline{r} \quad \underline{r} \quad \underline{r} \\ a-b, \quad b-c, \quad c-a \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ k(x-y) \quad k(y-z) \quad k(z-x) \\ a = kx + r \quad b = ky + r \quad c = kz + r \\ \therefore K = \text{HCF} [a-b, b-c, c-a] \end{array}$$

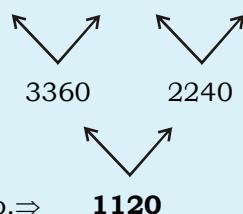
Ex. Let N be greatest number that will divide 1305, 4665, and 6905 leaving same remainder in each case find N?

N वह बड़ी से बड़ी संख्या है जिसे 1305, 4665, तथा 6905 में भाग देने पर समान शेषफल बचता है तब N का मान क्या है।

Sol. $\begin{array}{c} N \overline{) 1305 (\quad N \overline{) 4665 (\quad N \overline{) 6905 (\\ \underline{-x} \quad \underline{-x} \quad \underline{-x} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$

Number जो तीनों को भाग करेगा→

HCF of $\{(1305 - x), (4665 - x), (6905 - x)\}$



∴ Required no.⇒

- ❖ $\text{LCM} \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \right] \rightarrow \frac{\text{LCM}(a,c,e)}{\text{HCF}(b,d,f)}$
- ❖ $\text{HCF} \left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \right] \rightarrow \frac{\text{HCF}(a,c,e)}{\text{LCM}(b,d,f)}$
- ❖ $\text{HCF} [a^n \pm 1, a^m \pm 1] = a^{\text{HCF}(n,m)} \pm 1$

Complete CLASSNOTES
Arithmetic

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

Complete CLASSNOTES
Advance Maths

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir



Calculation (गणना)



Multiply two digit number by 11.

Ex. 1→ $45 \times 11 = ?$

I. Add both digits of two digits number $4 + 5 = 9$

II. Place this result between both digits **495**

Ex. 2→ $87 \times 11 = ?$

I. Add both digits of two digit number $8 + 7 = 15$

II. Add carry 1 to the left digit when result of step 1 is greater than 9

$$8 + 1 = 8$$

III. Place the result between two digits 957

$$\begin{array}{r} 8 & 7 \times 11 = 957 \\ \downarrow & \downarrow \\ 8 & (8+7) & 7 \\ 8 & (15) & 7 \\ 9 & 5 & 7 \end{array}$$

➤ **Multiply two digit number having same tens digit and one's digit sum is 10.**

Ex. 1→ $23 \times 27 = ?$

I. Multiply the first digit by the first digit + 1

$$2 \times (2 + 1) = 6$$

II. Multiply the right most digits (Take two digits, if result is single digit put a zero before it)

$$3 \times 7 = 21$$

III. Place the result of step II next to result of step I

621

Ex. 2→ $46 \times 44 = ?$

$$\begin{array}{r} \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \times (4H) \quad (6 \times 4) \\ 2024 \end{array}$$

Ex. 3→ $71 \times 79 = ?$

$$\begin{array}{r} \downarrow \quad \downarrow \\ 7 \times (7+1) \quad (1 \times 9) \\ 5609 \end{array}$$

Multiply two digit numbers ending in 1.

Ex. 1→ $61 \times 41 = ?$

I. Multiply left most digits $6 \times 4 = 24$

II. Add left most digits $6 + 4 = 10$

III. Take only right digit from step II and forward the carry to step I

$$\begin{array}{r} 24 \quad (10) \\ \swarrow \quad \downarrow \\ 250 \end{array}$$

IV. Put 1 at the end **2501**

$$\begin{array}{r} 51 \times 31 = ? \\ \downarrow \quad \downarrow \\ (5 \times 3) \quad (5+3) \\ 1581 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91 \times 71 = ? \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (9 \times 7) \quad (9+7) \quad (1) \\ (63) \quad (16) \quad (1) \\ 6461 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \times 21 = ? \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (8 \times 2) \quad (8+2) \quad (1) \\ (16) \quad (10) \quad (1) \\ 1701 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91 \times 11 = ? \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (9 \times 1) \quad (9+1) \quad (1) \\ (9) \quad (10) \quad (1) \\ 1001 \end{array}$$

Multiply numbers between 11 and 19.

Ex. 1→ $14 \times 17 = ?$

I. Add the larger no. to the rightmost digit of the other number ($17 + 4 = 21$)

II. Multiply by 10 the result of step I → 210

III. Multiply the rightmost digit of two numbers

$$4 \times 7 = 28$$

IV. Add step II and III

$$210 + 28 = 238$$

Ex. 2→ $14 \times 18 = ?$

$$\begin{array}{r} \downarrow \quad \downarrow \\ (18+4) \times 10 + (4 \times 8) \\ 220 + 32 = 252 \end{array}$$

Ex. 3→ $11 \times 19 = ?$

$$\begin{array}{r} \downarrow \quad \downarrow \\ (19+1) \times 10 + (9 \times 1) \\ 200 + 9 = 209 \end{array}$$

Ex. 4→ $12 \times 18 = ?$

$$\begin{array}{r} \downarrow \quad \downarrow \\ (18+2) \times 10 + (8 \times 2) \\ 200 + 16 = 216 \end{array}$$

Ex. 5→ $12 \times 19 = ?$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ (19 + 2) \times 10 + (9 \times 2) \\ 210 + 18 = 228 \end{array}$$

Ex. 6→ $13 \times 16 = ?$

$$\begin{array}{r} (16 + 3) \times 10 + (6 \times 3) \\ 190 + 18 = 208 \end{array}$$

Multiply by 0.2

Ex. 1→ $432 \times 0.2 = ?$

I. Multiply by 2

$$432 \times 2 = 864$$

II. Divide by 10

$$\frac{864}{10} = 86.4$$

2nd method

$$432 \times 0.2 = 86.4$$

I. Divide by 5

$$\frac{432}{5} = 86.4$$

Ex. 2→ $355 \times 0.2 = ?$

$$\frac{355}{5} = 71$$

Ex. 3→ $283 \times 0.2 = ?$

$$\frac{283}{5} = 56.6$$

Multiply by 0.25

Ex. 1→ $355 \times 0.25 = ?$

I. To multiply the given number by 0.25, divide it by 4

$$\therefore \frac{355}{4} = 88.75$$

Ex. 2→ $884 \times 0.25 = ?$

$$\frac{884}{4} = 221$$

Ex. 3→ $1132 \times 0.25 = ?$

$$\frac{1132}{4} = 283$$

Multiplication by 5

Ex. 1→ $163 \times 5 = 815$

Step-I Put 0 after given no. = 1630

Step-II Divide step I by 2

$$\frac{1630}{2} = 815$$

Square Techniques

➤ Square of the number whose unit digit is 5.

Ex. 1 → Find square of 25

Step-I $(5)^2 = 25$

Step-II (Digits other than 5) × (same digit + 1)

$$2 \times (2 + 1) = 6$$

$$\therefore (25)^2 = 625$$

Ex. 2 → Find square of 125.

$$(125)^2 = 12 \times (12 + 1) (5)^2 \\ (12 \times 13) (25)$$

$$\boxed{15625}$$

Ex. 3 → Find square of 65.

$$(6 \times 7) (5)^2$$

$$\boxed{4225}$$

Ex. 4 → Find square of 85.

$$(8 \times 9) (5)^2$$

$$\boxed{7225}$$

Ex. 5 → Find square of 95.

$$(9 \times 10) (5)^2$$

$$\boxed{9025}$$

Ex. 6 → Find square of 205.

$$(20 \times 21) (5)^2$$

$$\boxed{42025}$$

Ex. 7 → Find square of 145.

$$(14 \times 15) (5)^2$$

$$\boxed{21025}$$

Square of the numbers whose unit digit is 1.

Ex. 1 → Find square of 31.

$$(30)^2 + (30+31)$$

$$900 + 60 = \boxed{961}$$

Ex. 2 → Find square of 21.

$$(20)^2 + (20+21)$$

$$400 + 40 = \boxed{441}$$

Ex. 3 → Find square of 41.

$$(40)^2 + (40+41)$$

$$1600 + 80 = \boxed{1681}$$

Ex. 4 → Find square of 61.

$$(60)^2 + (60+61)$$

$$3600 + 121 = \boxed{3721}$$

Ex. 5 → Find square of 91.

$$(90)^2 + (90+91)$$

$$8100 + 181 = \boxed{8281}$$

Ex. 6 → Find square of 111.

$$(110)^2 + (110+111)$$

$$12100 + 221 = \boxed{12321}$$

Ex. 7 → Find square of 151.

$$(150)^2 + (150+151)$$

$$22500 + 301 = \boxed{22801}$$

Ex. 8 → Find square of 301.

$$(300)^2 + (300+301)$$

$$90000 + 601 = \boxed{90601}$$

Ex. 2 → $287 \times 5 = ?$

I. 2870

II. $\frac{2870}{2} = 1435$

Ex. 3 → $335 \times 5 = ?$

I. 3350

II. $\frac{3350}{2} = 1675$

Ex. 4 → $884 \times 5 = ?$

I. 8840

II. $\frac{8840}{2} = 4420$

Multiplication by 25

Ex. 1 → $182 \times 25 = ?$

Step-I Put 00 at the end of given number 18200

Step-II Divide it by 4

$$\frac{18200}{4} = 4550$$

Ex. 2 → $292 \times 25 = ?$

Step-I 29200

Step-II $\frac{29200}{4} = 7300$

Ex. 3 → $1787 \times 25 = ?$

Step-I 178700

Step-II $\frac{178700}{4} = 44675$

Multiplication by 125

Ex. 1 → $187 \times 125 = ?$

Step-I Put 000 at the end of the number 187000

Step-II Divide by 8

$$\frac{187000}{8} = 23375$$

Ex. 2 → $292 \times 125 = ?$

Step-I 29200

Step-II $\frac{292000}{8} = 36500$

Ex. 3 → $587 \times 125 = ?$

Step-I 587000

Step-II $\frac{587000}{8} = 73,375$

Multiplication by the number whose unit digit is 9

Ex. 1 → $187 \times 19 = ?$

Step-I $187 \times (20 - 1)$

Step-II $187 \times 20 - 187 \times 1$
3740 - 187 = **3553**

Ex. 2 → $163 \times 9 = ?$

Step-I $163 \times (10 - 1)$

Step-II $1630 - 163 = 1467$

Ex. 3 → $467 \times 99 = ?$

Step-I $467 \times (100 - 1)$

Step-II $46700 - 467 = 46233$

Multiply two numbers whose difference is even no.

Ex. 1 → $22 \times 36 = ?$

Step-I $36 - 22 = 14$ (even)

Step-II $\frac{14}{2} = 7$

Step-III $22 + 7$ Or $36 - 7 = 29$

Step-IV $(29)^2 = 841$

Step-V $841 - 7^2 = 792$

Ex. 2 → $78 \times 82 = ?$

I. $82 - 78 = 4$

II. $\frac{4}{2} = 2$

III. $78 + 2 = 80$

IV. $80^2 - 2^2 = 6400 - 4 = 6396$

Vedic method of multiply

Ex. 1 → $27 \times 78 = ?$

$$\begin{array}{r} \text{I. } 2 \quad 7 \\ & \downarrow \\ & 7 \quad 8 \\ & \underline{\quad 6} \quad \textcircled{5}6 \\ \text{II. } 2 \quad 7 & 16 + 49 \\ & \swarrow \quad \searrow \\ & 7 \quad 8 \\ & \underline{0 \quad 6} \quad = \textcircled{7}0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{III. } 2 \quad 7 \\ & \downarrow \\ & 7 \quad 8 \\ & \underline{21 \quad 06} \quad 7 \times 2 = 14 \\ & \quad \quad \quad 14 + 7 = 21 \end{array}$$

Ex. 2 → $21 \times 72 = ?$

$$\begin{array}{r} \text{I. } 2 \times 1 = 2 \\ \text{II. } 2 \times 2 + 7 \times 1 = \textcircled{1}1 \\ \text{III. } 2 \times 7 + 1 = 15 \end{array}$$

Ex. 3 → $73 \times 65 = ?$

$$\begin{array}{r} \text{I. } 5 \times 3 = \textcircled{1}5 \\ \text{II. } (7 \times 5 + 6 \times 3) + 1 = \textcircled{5}4 \\ \text{III. } 7 \times 6 + 5 = 47 \end{array}$$

Ex. 4 → $524 \times 19 = ?$

$$\begin{array}{r} \text{I. } 4 \times 9 = \textcircled{3}6 \\ \text{II. } (9 \times 2 + 1 \times 4) + 3 = \textcircled{2}5 \\ \text{III. } (9 \times 5 + 1 \times 2) + 2 = \textcircled{4}9 \\ \text{IV. } (1 \times 5) + 4 = 9 \end{array}$$

Ex. 5 → $37 \times 66 = ?$

$$\begin{array}{r} \text{I. } 7 \times 6 = \textcircled{4}2 \\ \text{II. } (6 \times 3 + 6 \times 7) + 4 = \textcircled{6}4 \\ \text{III. } (6 \times 3) + 6 = 24 \end{array}$$

Ex. 9→ Find square of 31.

$$(30)^2 + (30+31)$$

$$900 + 60 = \underline{\underline{961}}$$

Square of the numbers whose unit digit is 9.**Ex. 1**→ Find square of 19.

$$(20)^2 - (19+20)$$

$$400 - 39 = \underline{\underline{361}}$$

Ex. 2→ Find square of 29.

$$(30)^2 - (29+30)$$

$$900 - 59 = \underline{\underline{841}}$$

Ex. 3→ Find square of 39.

$$(40)^2 - (39+40)$$

$$1600 - 79 = \underline{\underline{1521}}$$

Ex. 4→ Find square of 59.

$$(60)^2 - (59+60)$$

$$3600 - 119 = \underline{\underline{3481}}$$

Ex. 5→ Find square of 99.

$$(100)^2 - (99+100)$$

$$10000 - 199 = \underline{\underline{9801}}$$

Ex. 6→ Find square of 199.

$$(200)^2 - (199+200)$$

$$40000 - 399 = \underline{\underline{39601}}$$

Ex. 7→ Find square of 249.

$$(250)^2 - (249+250)$$

$$62500 - 499 = \underline{\underline{62001}}$$

Square of the numbers between 40 and 49.**Base = 50****Ex. 1**→ Find square of 48.

Step1→ 25 – (Difference of 50 and given number)

$$25 - (50 - 48) = 23$$

Step2→ (Difference of 50 and given number) $^2 = (2)^2 = 04$

$$\therefore 48^2 = \underline{\underline{2304}}$$

Ex. 2→ Find square of 49.

Step1→ 25 – 1 = 24

Step2→ (1) $^2 = 01$

$$\therefore 49^2 = \underline{\underline{2401}}$$

Ex. 3→ Find square of 47.

Step1→ 25 – 3 = 22

Step2→ (3) $^2 = 09$

$$\therefore 47^2 = \underline{\underline{2209}}$$

Ex. 4→ Find square of 46.

Step1→ 25 – 4 = 21

Step2→ (4) $^2 = 16$

$$\therefore 46^2 = \underline{\underline{2116}}$$

Ex. 5→ Find square of 44.

Step1→ 25 – 6 = 19

Step2→ (6) $^2 = 36$

$$\therefore 44^2 = \underline{\underline{1936}}$$

Square of the numbers between 51 and 59.**Base = 50****Ex. 1**→ Find square of 52.

Step1→ 25 + (Difference of given number and 50)

$$25 + (52 - 50) = 27$$

Step2→ (Difference of given number and 50) $^2 = (2)^2 = 04$

$$\therefore 52^2 = \underline{\underline{2704}}$$

Ex. 2→ Find square of 59.

Step1→ 25 + (59 – 50) = 34

Step2→ (59 – 50) $^2 = (9)^2 = 81$

$$\therefore 59^2 = \underline{\underline{3481}}$$

Ex. 3→ Find square of 58.

Step1→ 25 + 8 = 33

Step2→ (8) $^2 = 64$

$$\therefore 58^2 = \underline{\underline{3364}}$$

Ex. 4→ Find square of 57.

Step1→ 25 + 7 = 32

Step2→ (7) $^2 = 49$

$$\therefore 57^2 = \underline{\underline{3249}}$$

Ex. 5→ Find square of 54.

Step1→ 25 + 4 = 29

Step2→ (4) $^2 = 16$

$$\therefore 54^2 = \underline{\underline{2916}}$$

Ex. 6→ Find square of 53.

Step1→ 25 + 3 = 28

Step2→ (3) $^2 = 09$

$$\therefore 53^2 = \underline{\underline{2809}}$$

Square of the numbers between 90 and 99.**Base = 100****Ex. 1**→ Find square of 92.Step1→ 92 – 8 = 84Step2→ Subtract from 100
100 – 92 = 8Step3→ (8) $^2 = \underline{64}$

$$\therefore (92)^2 = \underline{\underline{8464}}$$

Ex. 2→ Find square of 93.Step1→ 93 – 7 = 86

Step2→ 100 – 93 = 7

Step3→ (7) $^2 = \underline{49}$

$$\therefore (93)^2 = \underline{\underline{8649}}$$

Ex. 3→ Find square of 94.Step1→ 94 – 6 = 88Step2→ (6) $^2 = \underline{36}$

$$\therefore (94)^2 = \underline{\underline{8836}}$$

Ex. 4→ Find square of 96.Step1→ 94 – 4 = 92Step2→ (4) $^2 = \underline{16}$

$$\therefore (96)^2 = \underline{\underline{9216}}$$

Ex. 5→ Find square of 97.Step1→ 97 – 3 = 94Step2→ (3) $^2 = \underline{09}$

$$\therefore (97)^2 = \underline{\underline{9409}}$$

Ex. 6→ Find square of 99.Step1→ 99 – 1 = 98Step2→ (1) $^2 = \underline{01}$

$$\therefore (99)^2 = \underline{\underline{9901}}$$

Square of the numbers more than 100(near 100).**Base = 100****Ex. 1**→ Find square of 104.

Step1→ 104 + (difference of 100 and given number)

$$104 + 4 = \underline{108}$$

Step2→ 4 $^2 = \underline{16}$

$$\therefore (104)^2 = \underline{\underline{10816}}$$

Ex. 2→ Find square of 101.Step1→ 101 + 1 = 102Step2→ 1 $^2 = \underline{01}$

$$\therefore (101)^2 = \underline{\underline{10201}}$$

Ex. 3→ Find square of 102.Step1→ 102 + 2 = 104Step2→ 2 $^2 = \underline{04}$

$$\therefore (102)^2 = \underline{\underline{10404}}$$

Ex. 4→ Find square of 103.Step1→ 103 + 3 = 106Step2→ 3 $^2 = \underline{09}$

$$\therefore (103)^2 = \underline{\underline{10609}}$$

Ex. 5→ Find square of 106.Step1→ 106 + 6 = 112Step2→ 6 $^2 = \underline{36}$

$$\therefore (106)^2 = \underline{\underline{11236}}$$

Ex. 6→ Find square of 111.Step1→ 111 + 11 = 122Step2→ (11) $^2 = \underline{121}$ (take 2 digits)

$$\therefore (106)^2 = (122)(\underline{121}) = \underline{\underline{12321}}$$

Ex. 7→ Find square of 113.Step1→ 113 + 131 = 126Step2→ (13) $^2 = \underline{169}$ (take 2 digits)

$$\therefore (106)^2 = (126)(\underline{169}) = \underline{\underline{12769}}$$

Squares - Cubes - Square Root Chart

Number n	Square n^2	Cube n^3	Square root \sqrt{n}
1	1	1	1.0000
2	4	8	1.4142
3	9	27	1.7321
4	16	64	2.0000
5	25	125	2.2361
6	36	216	2.4495
7	49	343	2.6458
8	64	512	2.8284
9	81	729	3.0000
10	100	1000	3.1623
11	121	1331	3.3166
12	144	1728	3.4641
13	169	2197	3.6056
14	196	2744	3.7417
15	225	3375	3.8730
16	256	4096	4.0000
17	289	4913	4.1231
18	324	5832	4.2426
19	361	6859	4.3589
20	400	8000	4.4721
21	441	9261	4.5826
22	484	10648	4.6904
23	529	12167	4.7958
24	576	13824	4.8990
25	625	15625	5.0000
26	676	17576	5.0990
27	729	19683	5.1962
28	784	21952	5.2915
29	841	24389	5.3852
30	900	27000	5.4772
31	961	29791	5.5678
32	1024	32768	5.6569
33	1089	35937	5.7446
34	1156	39304	5.8310
35	1225	42875	5.9161
36	1296	46656	6.0000
37	1369	50653	6.0828
38	1444	54872	6.1644
39	1521	59319	6.2450
40	1600	64000	6.3246

Number n	Square n^2	Cube n^3	Square root \sqrt{n}
41	1681	68921	6.4031
42	1764	74088	6.4807
43	1849	79507	6.5574
44	1936	85184	6.6332
45	2025	91125	6.7082
46	2116	97336	6.7823
47	2209	103823	6.8557
48	2304	110592	6.9282
49	2401	117649	7.0000
50	2500	125000	7.0711
51	2601	132651	7.1414
52	2704	140608	7.2111
53	2809	148877	7.2801
54	2916	157464	7.3485
55	3025	166375	7.4162
56	3136	175616	7.4833
57	3249	185193	7.5498
58	3364	195112	7.6158
59	3481	205379	7.6811
60	3600	216000	7.7460
61	3721	226981	7.8102
62	3844	238328	7.8740
63	3969	250047	7.9373
64	4096	262144	8.0000
65	4225	274625	8.0623
66	4356	287496	8.1240
67	4489	300763	8.1854
68	4624	314432	8.2462
69	4761	328509	8.3066
70	4900	343000	8.3666
71	5041	357911	8.4261
72	5184	373248	8.4853
73	5329	389017	8.5440
74	5476	405224	8.6023
75	5625	421875	8.6603
76	5776	438976	8.7178
77	5929	456533	8.7750
78	6084	474552	8.8318
79	6241	493039	8.8882
80	6400	512000	8.9443

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275	286	297	308	319	330
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300	312	324	336	348	360
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325	338	351	364	377	390
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350	364	378	392	406	420
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375	390	405	420	435	450
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	391	408	425	442	459	476	493	510
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450	468	486	504	522	540
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532	551	570
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600
21	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	441	462	483	504	525	546	567	588	609	630
22	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550	572	594	616	638	660
23	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575	598	621	644	667	690
24	24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	364	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600	624	648	672	696	720
25	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625	650	675	700	725	750
26	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	546	572	598	624	650	676	702	728	754	780
27	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	567	594	621	648	675	702	729	756	783	810
28	28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	588	616	644	672	700	728	756	784	812	840
29	29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	609	638	667	696	725	754	783	812	841	870
30	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660	690	720	750	780	810	840	870	900



ADDITION/जोड़ना (+)



Type-1 (Find Sum)

1. $19 + 3 = ?$
(a) 12 (b) 16
(c) 20 (d) 22
2. $27 + 8 = ?$
(a) 34 (b) 39
(c) 45 (d) 35
3. $39 + 8 = ?$
(a) 52 (b) 57
(c) 47 (d) 58
4. $43 + 8 = ?$
(a) 49 (b) 55
(c) 51 (d) 53
5. $57 + 8 = ?$
(a) 67 (b) 65
(c) 69 (d) 63
6. $9 + 58 = ?$
(a) 67 (b) 62
(c) 68 (d) 63
7. $7 + 87 = ?$
(a) 99 (b) 97
(c) 95 (d) 94
8. $9 + 97 = ?$
(a) 102 (b) 106
(c) 120 (d) 122
9. $93 + 8 = ?$
(a) 102 (b) 106
(c) 121 (d) 101
10. $67.9 + 5.7 = ?$
(a) 73.6 (b) 76.3
(c) 73.2 (d) 77.8
11. $48.2 + 6.6 = ?$
(a) 54.8 (b) 56.3
(c) 53.6 (d) 57.1
12. $95.7 + 9.0 = ?$
(a) 102.7 (b) 106.7
(c) 100.7 (d) 104.7
13. $47.3 + 18.8 = ?$
(a) 45.1 (b) 66.1
(c) 49.1 (d) 61.1
14. $78.9 + 6.6 = ?$
(a) 84.5 (b) 85.5
(c) 86.5 (d) 87.3
15. $38.5 + 5.5 = ?$
(a) 43.0 (b) 46.0
(c) 49.2 (d) 44.0

Type-2 (Find Sum)

16. $88 + 23 = ?$
(a) 109 (b) 108
(c) 111 (d) 110
17. $79 + 18 = ?$
(a) 99 (b) 98
(c) 97 (d) 96
18. $16 + 49 = ?$
(a) 62 (b) 67
(c) 65 (d) 69
19. $37 + 67 = ?$
(a) 105 (b) 108
(c) 104 (d) 110
20. $39 + 47 = ?$
(a) 70 (b) 86
(c) 73 (d) 77
21. $57 + 78 = ?$
(a) 133 (b) 136
(c) 135 (d) 137
22. $79 + 87 = ?$
(a) 168 (b) 166
(c) 167 (d) 169
23. $97 + 13 = ?$
(a) 113 (b) 122
(c) 100 (d) 110
24. $57 + 71 = ?$
(a) 125 (b) 128
(c) 126 (d) 129
25. $88 + 95 = ?$
(a) 180 (b) 181
(c) 183 (d) 182
26. $88.3 + 27.5 = ?$
(a) 119.8 (b) 108.6
(c) 115.8 (d) 110.8
27. $67.89 + 23.07 = ?$
(a) 90.96 (b) 90.95
(c) 91.96 (d) 93.66
28. $34.10 + 45.64 = ?$
(a) 79.67 (b) 79.74
(c) 80.74 (d) 77.89
29. $12.84 + 91.06 = ?$
(a) 103.9 (b) 108.9
(c) 111.6 (d) 110.8
30. $65.22 + 23.08 = ?$
(a) 88.89 (b) 88.30
(c) 87.30 (d) 89.70

Type-3 (Find Sum)

31. $23 + 64 + 12 + 76 + 97 = ?$
(a) 282 (b) 272
(c) 275 (d) 279
32. $98 + 45 + 93 + 59 + 62 = ?$
(a) 382 (b) 352
(c) 357 (d) 379
33. $19 + 93 + 75 + 73 + 57 = ?$
(a) 328 (b) 317
(c) 375 (d) 379
34. $34 + 76 + 38 + 72 + 52 = ?$
(a) 282 (b) 272
(c) 275 (d) 279
35. $233 + 44 + 126 + 61 + 70 = ?$
(a) 482 (b) 534
(c) 635 (d) 439
36. $634 + 64 + 122 + 76 + 197 = ?$
(a) 1283 (b) 1272
(c) 1093 (d) 1273
37. $86 + 164 + 172 + 726 + 97 = ?$
(a) 1245 (b) 1272
(c) 1275 (d) 1275
38. $23 + 464 + 31 + 576 + 497 = ?$
(a) 1282 (b) 1671
(c) 1575 (d) 1591
39. $923 + 864 + 712 + 676 + 597 = ?$
(a) 2282 (b) 3772
(c) 3275 (d) 4279
40. $457 + 164 + 834 + 432 + 78 + 234 + 923 + 93 = ?$
(a) 3285 (b) 3215
(c) 3275 (d) 3279
41. $723 + 234 + 760 + 219 + 497 + 896 + 542 + 132 = ?$
(a) 4003 (b) 4122
(c) 4200 (d) 4279
42. $233 + 335 + 367 + 764 + 917 + 134 + 124 + 923 + 913 = ?$
(a) 4582 (b) 4710
(c) 6275 (d) 5279
43. $2326 + 1324 + 245 + 799 + 975 + 2356 + 134 + 235 + 2467 = ?$
(a) 11282 (b) 10272
(c) 10861 (d) 13279

ANSWER KEY - ADDITION

1. (d) 2. (d) 3. (c) 4. (c) 5. (b) 6. (a) 7. (d) 8. (b) 9. (d) 10. (a)
11. (a) 12. (d) 13. (b) 14. (b) 15. (d) 16. (c) 17. (c) 18. (c) 19. (c) 20. (b)
21. (c) 22. (b) 23. (d) 24. (b) 25. (c) 26. (c) 27. (a) 28. (b) 29. (a) 30. (b)
31. (b) 32. (c) 33. (b) 34. (b) 35. (b) 36. (c) 37. (a) 38. (d) 39. (b) 40. (b)
41. (a) 42. (b) 43. (c)



SUBTRACTION/घटाव (-)



Type-1 (Find Difference)

1. $100 - 69 = ?$
(a) 21 (b) 41
(c) 31 (d) 19
2. $100 - 37 = ?$
(a) 73 (b) 63
(c) 69 (d) 68
3. $100 - 53 = ?$
(a) 53 (b) 57
(c) 47 (d) 49
4. $100 - 17 = ?$
(a) 83 (b) 41
(c) 31 (d) 19
5. $100 - 78 = ?$
(a) 32 (b) 31
(c) 22 (d) 25
6. $85 - 27 = ?$
(a) 58 (b) 59
(c) 49 (d) 69
7. $93 - 49 = ?$
(a) 51 (b) 41
(c) 44 (d) 49
8. $71 - 57 = ?$
(a) 21 (b) 41
(c) 14 (d) 15
9. $73 - 35 = ?$
(a) 51 (b) 38
(c) 48 (d) 58
10. $67 - 39 = ?$
(a) 28 (b) 29
(c) 31 (d) 19
11. $123 - 69 = ?$
(a) 54 (b) 41
(c) 51 (d) 73
12. $183 - 56 = ?$
(a) 123 (b) 141
(c) 131 (d) 127
13. $148 - 67 = ?$
(a) 61 (b) 88
(c) 81 (d) 87
14. $175 - 88 = ?$
(a) 67 (b) 77
(c) 87 (d) 82
15. $143 - 69 = ?$
(a) 67 (b) 74
(c) 77 (d) 78

Type-2 (Find Difference)

16. $529 - 452 = ?$
(a) 87 (b) 78
(c) 77 (d) 79
17. $956 - 629 = ?$
(a) 334 (b) 327
(c) 431 (d) 319
18. $823 - 286 = ?$
(a) 613 (b) 534
(c) 537 (d) 593
19. $581 - 396 = ?$
(a) 189 (b) 141
(c) 185 (d) 182
20. $923 - 232 = ?$
(a) 691 (b) 641
(c) 731 (d) 719
21. $2574 - 869 = ?$
(a) 1721 (b) 1841
(c) 1705 (d) 1819
22. $6724 - 4573 = ?$
(a) 2121 (b) 2147
(c) 2151 (d) 2229
23. $2343 - 2269 = ?$
(a) 86 (b) 175
(c) 74 (d) 78
24. $9134 - 8623 = ?$
(a) 723 (b) 511
(c) 923 (d) 634
25. $8362 - 6969 = ?$
(a) 1921 (b) 1741
(c) 1393 (d) 1419
26. $2345 - 1069 = ?$
(a) 1521 (b) 1841
(c) 1276 (d) 1319
27. $4475 - 1389 = ?$
(a) 4021 (b) 3086
(c) 3831 (d) 3119
28. $32624 - 4569 = ?$
(a) 28055 (b) 29341
(c) 28631 (d) 27119
29. $54218 - 34642 = ?$
(a) 18544 (b) 19641
(c) 19576 (d) 19526
30. $82453 - 27878 = ?$
(a) 54203 (b) 54575
(c) 52331 (d) 59219

Type-3 (Find Difference)

31. $9666 - 335 - 234 - 423 - 97 = ?$
(a) 8345 (b) 8577
(c) 8766 (d) 8345
32. $8245 - 2352 - 292 - 2423 - 597 = ?$
(a) 3345 (b) 3477
(c) 2581 (d) 2845
33. $7252 - 2335 - 3234 - 423 - 1197 = ?$
(a) 45 (b) 177
(c) 63 (d) 103
34. $6234 - 2114 - 1234 - 1423 - 997 = ?$
(a) 345 (b) 536
(c) 663 (d) 466
35. $1968 - 126 - 383 - 393 - 523 = ?$
(a) 345 (b) 543
(c) 726 (d) 835
36. $999 - 112 - 544 - 123 - 97 = ?$
(a) 295 (b) 577
(c) 123 (d) 373
37. $8340 - 134 - 913 - 1344 - 3331 = ?$
(a) 2618 (b) 3577
(c) 1766 (d) 2345
38. $4965 - 764 - 1765 - 953 - 1075 = ?$
(a) 1045 (b) 1577
(c) 408 (d) 845
39. $8153 - 2974 - 1066 - 854 - 967 = ?$
(a) 1345 (b) 2292
(c) 3766 (d) 3345
40. $8754 - 754 - 521 - 431 - 865 - 234 - 239 - 672 = ?$
(a) 5038 (b) 4577
(c) 5766 (d) 4845
41. $4233 - 1035 + 231 - 423 + 497 + 234 - 342 + 628 - 922 = ?$
(a) 3342 (b) 3101
(c) 4766 (d) 4345
42. $9476 - 3310 + 3134 - 833 - 257 + 133 - 932 + 442 = ?$
(a) 7853 (b) 8577
(c) 8766 (d) 7345
43. $397 - 357 - 239 + 836 - 727 - 913 - 385 + 1370 + 923 = ?$
(a) 845 (b) 877
(c) 905 (d) 395

ANSWER KEY - SUBTRACTION

1. (c) 2. (b) 3. (c) 4. (a) 5. (c) 6. (a) 7. (c) 8. (c) 9. (b) 10. (a)
11. (a) 12. (d) 13. (c) 14. (c) 15. (b) 16. (c) 17. (b) 18. (c) 19. (c) 20. (a)
21. (c) 22. (c) 23. (c) 24. (b) 25. (c) 26. (c) 27. (b) 28. (a) 29. (c) 30. (b)
31. (b) 32. (c) 33. (c) 34. (d) 35. (b) 36. (c) 37. (a) 38. (c) 39. (b) 40. (a)
41. (b) 42. (a) 43. (c)



MULTIPLICATION/ગુણ (×)



Type-1 (Find the Product)

1. $98 \times 7 = ?$
(a) 692 (b) 686
(c) 855 (d) 696
2. $87 \times 9 = ?$
(a) 793 (b) 783
(c) 781 (d) 883
3. $47 \times 3 = ?$
(a) 141 (b) 151
(c) 221 (d) 146
4. $67 \times 4 = ?$
(a) 258 (b) 268
(c) 255 (d) 218
5. $89 \times 6 = ?$
(a) 544 (b) 684
(c) 534 (d) 494
6. $97 \times 8 = ?$
(a) 734 (b) 776
(c) 556 (d) 866
7. $83 \times 7 = ?$
(a) 581 (b) 681
(c) 751 (d) 691
8. $78 \times 6 = ?$
(a) 578 (b) 468
(c) 558 (d) 698
9. $89 \times 5 = ?$
(a) 615 (b) 545
(c) 445 (d) 555
10. $167 \times 7 = ?$
(a) 1299 (b) 1169
(c) 1519 (d) 1099
11. $296 \times 5 = ?$
(a) 1480 (b) 1500
(c) 1640 (d) 1140
12. $798 \times 8 = ?$
(a) 6924 (b) 6384
(c) 6855 (d) 6694

13. $626 \times 9 = ?$

(a) 6124 (b) 5686
(c) 5634 (d) 5694

14. $297 \times 6 = ?$

(a) 1602 (b) 1782
(c) 1852 (d) 1692

15. $555 \times 7 = ?$

(a) 4695 (b) 4685
(c) 3885 (d) 3105

Type-2 (Find the Product)

16. $88 \times 23 = ?$

(a) 2224 (b) 2154
(c) 2024 (d) 2444

17. $56 \times 74 = ?$

(a) 4394 (b) 4294
(c) 4144 (d) 4444

18. $69 \times 48 = ?$

(a) 3312 (b) 3922
(c) 2922 (d) 3342

19. $97 \times 59 = ?$

(a) 6123 (b) 5723
(c) 5893 (d) 5373

20. $73 \times 47 = ?$

(a) 3641 (b) 3511
(c) 3901 (d) 3431

21. $25 \times 68 = ?$

(a) 1700 (b) 1540
(c) 1900 (d) 1440

22. $95 \times 41 = ?$

(a) 4125 (b) 3895
(c) 3325 (d) 4255

23. $71 \times 59 = ?$

(a) 4189 (b) 4419
(c) 3999 (d) 4109

24. $39 \times 61 = ?$

(a) 2229 (b) 2159
(c) 2379 (d) 2449

25. $57 \times 83 = ?$

(a) 4731 (b) 3911
(c) 4241 (d) 4111

26. $29 \times 72 = ?$

(a) 2228 (b) 2088
(c) 2828 (d) 2448

27. $68 \times 42 = ?$

(a) 2996 (b) 2106
(c) 2026 (d) 2856

28. $87 \times 54 = ?$

(a) 4698 (b) 5108
(c) 4908 (d) 5448

29. $65 \times 85 = ?$

(a) 6225 (b) 5525
(c) 5925 (d) 5445

30. $56 \times 78 = ?$

(a) 4368 (b) 5158
(c) 5028 (d) 4448

31. $23 \times 17 = ?$

(a) 381 (b) 371
(c) 391 (d) 401

32. $49 \times 51 = ?$

(a) 2399 (b) 2499
(c) 2489 (d) 2469

33. $97 \times 103 = ?$

(a) 9981 (b) 9891
(c) 9971 (d) 9991

34. $999 \times 99 = ?$

(a) 98901 (b) 99901
(c) 99801 (d) 98801

35. $85 \times 75 = ?$

(a) 6475 (b) 6325
(c) 6375 (d) 6425

ANSWER KEY - MULTIPLICATION

1. (b) 2. (b) 3. (a) 4. (b) 5. (c) 6. (b) 7. (a) 8. (b) 9. (c) 10. (b)
11. (a) 12. (b) 13. (c) 14. (b) 15. (c) 16. (c) 17. (c) 18. (a) 19. (b) 20. (d)
21. (a) 22. (b) 23. (a) 24. (c) 25. (a) 26. (b) 27. (d) 28. (a) 29. (b) 30. (a)
31. (c) 32. (b) 33. (d) 34. (a) 35. (c)



SQUARE AND CUBE/वर्ग और घन



Exercise- Type 1 (Find Square)

1. $(21)^2 = ?$
(a) 461 (b) 441
(c) 471 (d) 391
2. $(45)^2 = ?$
(a) 2755 (b) 3025
(c) 2025 (d) 2445
3. $(84)^2 = ?$
(a) 7806 (b) 7726
(c) 7476 (d) 7056
4. $(49)^2 = ?$
(a) 2401 (b) 2441
(c) 2471 (d) 2301
5. $(63)^2 = ?$
(a) 3969 (b) 4419
(c) 3719 (d) 3919
6. $(86)^2 = ?$
(a) 7616 (b) 7416
(c) 7396 (d) 7716
7. $(97)^2 = ?$
(a) 9409 (b) 9909
(c) 9099 (d) 9399
8. $(29)^2 = ?$
(a) 861 (b) 841
(c) 871 (d) 891
9. $(37)^2 = ?$
(a) 1509 (b) 1419
(c) 1369 (d) 1399
10. $(43)^2 = ?$
(a) 1849 (b) 1989
(c) 1809 (d) 1759
11. $(71)^2 = ?$
(a) 5111 (b) 5441
(c) 5041 (d) 5391
12. $(52)^2 = ?$
(a) 3344 (b) 3004
(c) 2004 (d) 2704
13. $(74)^2 = ?$
(a) 5476 (b) 4486
(c) 5716 (d) 4916
14. $(48)^2 = ?$
(a) 2214 (b) 2304
(c) 2716 (d) 2106
15. $(77)^2 = ?$
(a) 5619 (b) 6419
(c) 5929 (d) 4919

Exercise- Type 2

16. $(111)^2 = ?$
(a) 12001 (b) 12031
(c) 12321 (d) 12861
17. $(167)^2 = ?$
(a) 27889 (b) 25039
(c) 26399 (d) 28569

18. $(123)^2 = ?$
(a) 16239 (b) 16099
(c) 15129 (d) 15869
19. $(279)^2 = ?$
(a) 76001 (b) 75031
(c) 77841 (d) 78861
20. $(527)^2 = ?$
(a) 277729 (b) 282039
(c) 283299 (d) 312869
21. $(294)^2 = ?$
(a) 86436 (b) 88206
(c) 82326 (d) 82866
22. $(361)^2 = ?$
(a) 130091 (b) 130321
(c) 140321 (d) 132861
23. $(369)^2 = ?$
(a) 136161 (b) 122031
(c) 132321 (d) 132861
24. $(721)^2 = ?$
(a) 512001 (b) 519841
(c) 512321 (d) 512861
25. $(896)^2 = ?$
(a) 802816 (b) 812036
(c) 812526 (d) 802566

Exercise- Type 3

26. $(23)^3 = ?$
(a) 12167 (b) 12857
(c) 12127 (d) 12997
27. $(14)^3 = ?$
(a) 2144 (b) 2744
(c) 2694 (d) 2994
28. $(19)^3 = ?$
(a) 6969 (b) 6349
(c) 6859 (d) 6929
29. $(37)^3 = ?$
(a) 50653 (b) 52853
(c) 52123 (d) 51293
30. $(17)^3 = ?$
(a) 4163 (b) 4913
(c) 4123 (d) 4593
31. $(33)^3 = ?$
(a) 35937 (b) 35857
(c) 32127 (d) 32997
32. $(29)^3 = ?$
(a) 24389 (b) 24859
(c) 22129 (d) 22999
33. $(43)^3 = ?$
(a) 82167 (b) 79507
(c) 72127 (d) 81297
34. $(27)^3 = ?$
(a) 19163 (b) 19853
(c) 19123 (d) 19683
35. $(53)^3 = ?$
(a) 154478 (b) 147787
(c) 147755 (d) 148877

Exercise- Type 4

36. $8^2 \times 9 = ?$
(a) 516 (b) 576
(c) 676 (d) 556
37. $9^2 \times 18 = ?$
(a) 1528 (b) 1408
(c) 1458 (d) 1558
38. $12^2 \times 23 = ?$
(a) 3312 (b) 3762
(c) 3672 (d) 3052
39. $42^2 \times 4 = ?$
(a) 6616 (b) 6876
(c) 7056 (d) 7556
40. $39^2 \times 8 = ?$
(a) 12168 (b) 15768
(c) 16768 (d) 10568
41. $61^2 \times 3 = ?$
(a) 9163 (b) 11163
(c) 16763 (d) 15563
42. $33^2 \times 18 = ?$
(a) 19602 (b) 18762
(c) 19762 (d) 18562
43. $57^2 \times 8 = ?$
(a) 22162 (b) 25992
(c) 26762 (d) 20562
44. $67^2 \times 3 = ?$
(a) 13467 (b) 15767
(c) 14767 (d) 14567
45. $35^2 \times 47 = ?$
(a) 52165 (b) 55775
(c) 56765 (d) 57575
46. $41^2 \times 19 = ?$
(a) 32169 (b) 35769
(c) 31939 (d) 30569
47. $23^2 \times 37 = ?$
(a) 18163 (b) 19573
(c) 19763 (d) 18563
48. $38^2 \times 23 = ?$
(a) 32163 (b) 33212
(c) 33762 (d) 33563
49. $83^2 \times 23 = ?$
(a) 158447 (b) 133217
(c) 153767 (d) 163567
50. $78^2 \times 23 = ?$
(a) 132162 (b) 139932
(c) 133762 (d) 133562

Exercise- Type 5

51. $42^2 \times 18^2 = ?$
(a) 587776 (b) 571536
(c) 598846 (d) 527986
52. $28^2 \times 35^2 = ?$
(a) 998770 (b) 982240
(c) 960400 (d) 927980

- 53.** $19^3 \times 12^2 = ?$
 (a) 928776 (b) 987696
 (c) 929884 (d) 927984
- 54.** $24^3 \times 17^2 = ?$
 (a) 3928774 (b) 3528224
 (c) 3995136 (d) 3827984
- 55.** $74^2 \times 14^3 = ?$
 (a) 15528774 (b) 16128224
 (c) 15629884 (d) 15026144
- 56.** $81^2 \times 9^3 = ?$
 (a) 4782969 (b) 4828229
 (c) 4429889 (d) 5027984
- 57.** $37^2 \times 16^3 = ?$
 (a) 6028774 (b) 5607424
 (c) 5529884 (d) 5227984
- 58.** $43^2 \times 13^3 = ?$
 (a) 4128773 (b) 4062253
 (c) 3929883 (d) 4279843
- 59.** $28^3 \times 18^3 = ?$
 (a) 133287734
 (b) 123282324
 (c) 128024064
 (d) 134237984
- 60.** $37^3 \times 21^3 = ?$
 (a) 428774463
 (b) 428368224
 (c) 424488423
 (d) 469097433

Exercise- Type 6 (Find Squareroot)

- 61.** Find square root of 441.
 (a) 21 (b) 31
 (c) 29 (d) 27
- 62.** Find square root of 484.
 (a) 26 (b) 22
 (c) 32 (d) 42
- 63.** Find square root of 529.
 (a) 29 (b) 27
 (c) 23 (d) 26
- 64.** Find square root of 576.
 (a) 26 (b) 34
 (c) 28 (d) 24
- 65.** Find square root of 1521.
 (a) 39 (b) 31
 (c) 37 (d) 41
- 66.** Find square root of 1681.
 (a) 31 (b) 41
 (c) 39 (d) 49
- 67.** Find square root of 3969.
 (a) 53 (b) 67
 (c) 63 (d) 59
- 68.** Find square root of 5929.
 (a) 73 (b) 79
 (c) 76 (d) 77
- 69.** Find square root of 9801.
 (a) 99 (b) 101
 (c) 91 (d) 89

- 70.** Find square root of 8281.
 (a) 89 (b) 91
 (c) 99 (d) 81
- 71.** Find square root of 7921.
 (a) 89 (b) 81
 (c) 99 (d) 91
- 72.** Find square root of 4761.
 (a) 79 (b) 71
 (c) 81 (d) 69
- 73.** Find square root of 5929.
 (a) 71 (b) 73
 (c) 77 (d) 67
- 74.** Find square root of 10201.
 (a) 93 (b) 99
 (c) 91 (d) 101
- 75.** Find square root of 11881.
 (a) 109 (b) 111
 (c) 101 (d) 107
- 76.** Find square root of 12321.
 (a) 101 (b) 111
 (c) 121 (d) 107
- 77.** Find square root of 39601.
 (a) 191 (b) 201
 (c) 199 (d) 189
- 78.** Find square root of 40401.
 (a) 189 (b) 191
 (c) 199 (d) 201
- 79.** Find square root of 14161.
 (a) 119 (b) 121
 (c) 111 (d) 117
- 80.** Find square root of 1296.
 (a) 46 (b) 36
 (c) 39 (d) 33
- 81.** Find square root of 2116.
 (a) 36 (b) 56
 (c) 46 (d) 66
- 82.** Find square root of 3136.
 (a) 66 (b) 46
 (c) 59 (d) 56
- 83.** Find square root of 4356.
 (a) 66 (b) 56
 (c) 54 (d) 44
- 84.** Find square root of 5776.
 (a) 74 (b) 76
 (c) 66 (d) 64
- 85.** Find square root of 7396.
 (a) 82 (b) 88
 (c) 86 (d) 84

Exercise- Type 7 (Find Cuberoot)

- 86.** Find cube root of 1331.
 (a) 11 (b) 12
 (c) 13 (d) 14
- 87.** Find cube root of 1728.
 (a) 14 (b) 11
 (c) 12 (d) 13
- 88.** Find cube root of 2197.
 (a) 11 (b) 13
 (c) 12 (d) 14
- 89.** Find cube root of 2744.
 (a) 24 (b) 16
 (c) 17 (d) 14
- 90.** Find cube root of 3375.
 (a) 15 (b) 17
 (c) 25 (d) 19
- 91.** Find cube root of 4096.
 (a) 26 (b) 16
 (c) 14 (d) 18
- 92.** Find cube root of 4913.
 (a) 27 (b) 13
 (c) 17 (d) 19
- 93.** Find cube root of 5832.
 (a) 13 (b) 22
 (c) 16 (d) 18
- 94.** Find cube root of 6859.
 (a) 19 (b) 17
 (c) 13 (d) 18
- 95.** Find cube root of 9261.
 (a) 31 (b) 23
 (c) 21 (d) 19
- 96.** Find cube root of 10648.
 (a) 26 (b) 22
 (c) 24 (d) 28
- 97.** Find cube root of 12167.
 (a) 21 (b) 27
 (c) 26 (d) 23
- 98.** Find cube root of 13824.
 (a) 24 (b) 21
 (c) 22 (d) 26
- 99.** Find cube root of 15625.
 (a) 35 (b) 25
 (c) 15 (d) 33
- 100.** Find cube root of 17576.
 (a) 36 (b) 32
 (c) 26 (d) 38
- 101.** Find cube root of 19683.
 (a) 29 (b) 37
 (c) 33 (d) 27
- 102.** Find cube root of 21952.
 (a) 28 (b) 38
 (c) 26 (d) 29
- 103.** Find cube root of 24389.
 (a) 27 (b) 31
 (c) 29 (d) 39
- 104.** Find cube root of 29791.
 (a) 41 (b) 31
 (c) 37 (d) 39
- 105.** Find cube root of 32768.
 (a) 34 (b) 38
 (c) 36 (d) 32

106. Find cube root of 35937.

- (a) 33 (b) 31
(c) 27 (d) 29

107. Find cube root of 39304.

- (a) 32 (b) 34
(c) 36 (d) 28

108. Find cube root of 42875.

- (a) 45 (b) 42
(c) 29 (d) 35

109. Find cube root of 46656.

- (a) 38 (b) 34
(c) 36 (d) 42

110. Find cube root of 50653.

- (a) 41 (b) 37
(c) 39 (d) 38

Square root of irrational number

111. Find square root of $7 + 4\sqrt{3}$.

- (a) $2 + \sqrt{3}$ (b) $2 - \sqrt{3}$
(c) $4 + 2\sqrt{3}$ (d) $4 - 2\sqrt{3}$

112. Find square root of $28 + 10\sqrt{3}$.

- (a) $6 + 2\sqrt{2}$ (b) $5 - \sqrt{3}$
(c) $5 + \sqrt{3}$ (d) $6 - 2\sqrt{2}$

113. Find square root of $43 - 24\sqrt{3}$.

- (a) $4 - 3\sqrt{3}$ (b) $5 - 3\sqrt{3}$
(c) $3\sqrt{3} - 5$ (d) $3\sqrt{3} - 4$

114. Find square root of $99 - 70\sqrt{2}$.

- (a) $5\sqrt{2} - 7$ (b) $7 - 5\sqrt{2}$
(c) $8 - 3\sqrt{2}$ (d) $6\sqrt{2} - 5$

115. Find square root of $124 + 70\sqrt{3}$.

- (a) $5\sqrt{3} + 7$ (b) $6\sqrt{3} + 7$
(c) $5\sqrt{3} + 9$ (d) $6\sqrt{3} + 5$

116. Find square root of $21 - 12\sqrt{3}$.

- (a) $3\sqrt{3} - 3$ (b) $2\sqrt{3} - 3$
(c) $2\sqrt{3} - 2$ (d) $3\sqrt{3} - 2$

117. Find square root of $189 + 36\sqrt{5}$.

- (a) $5\sqrt{5} + 4$ (b) $6\sqrt{5} + 3$
(c) $3\sqrt{5} + 6$ (d) $9\sqrt{2} + 2$

118. Find square root of $21 + 4\sqrt{5}$.

- (a) $2\sqrt{5} + 1$ (b) $3\sqrt{5} + 1$
(c) $2\sqrt{5} + 3$ (d) $3\sqrt{5} + 3$

119. Find square root of $86 - 60\sqrt{2}$.

- (a) $5\sqrt{2} - 7$ (b) $6\sqrt{2} - 5$
(c) $5\sqrt{2} - 6$ (d) $6\sqrt{2} - 7$

120. Find square root of $57 + 24\sqrt{3}$.

- (a) $4\sqrt{3} + 2$ (b) $3\sqrt{3} + 4$
(c) $4\sqrt{3} + 5$ (d) $4\sqrt{3} + 3$

ANSWER KEY - SQUARE AND CUBE

- | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1. (b) | 2. (c) | 3. (d) | 4. (a) | 5. (a) | 6. (c) | 7. (a) | 8. (b) | 9. (c) | 10. (a) |
| 11. (c) | 12. (d) | 13. (a) | 14. (b) | 15. (c) | 16. (c) | 17. (a) | 18. (c) | 19. (c) | 20. (a) |
| 21. (a) | 22. (b) | 23. (a) | 24. (b) | 25. (a) | 26. (a) | 27. (b) | 28. (c) | 29. (a) | 30. (b) |
| 31. (a) | 32. (a) | 33. (b) | 34. (d) | 35. (d) | 36. (b) | 37. (c) | 38. (a) | 39. (c) | 40. (a) |
| 41. (b) | 42. (a) | 43. (b) | 44. (a) | 45. (d) | 46. (c) | 47. (b) | 48. (b) | 49. (a) | 50. (b) |
| 51. (b) | 52. (c) | 53. (b) | 54. (c) | 55. (d) | 56. (a) | 57. (b) | 58. (b) | 59. (c) | 60. (d) |
| 61. (a) | 62. (b) | 63. (c) | 64. (d) | 65. (a) | 66. (b) | 67. (c) | 68. (d) | 69. (a) | 70. (b) |
| 71. (a) | 72. (d) | 73. (c) | 74. (d) | 75. (a) | 76. (b) | 77. (c) | 78. (d) | 79. (a) | 80. (b) |
| 81. (c) | 82. (d) | 83. (a) | 84. (b) | 85. (c) | 86. (a) | 87. (c) | 88. (b) | 89. (d) | 90. (a) |
| 91. (b) | 92. (c) | 93. (d) | 94. (a) | 95. (c) | 96. (b) | 97. (d) | 98. (a) | 99. (b) | 100. (c) |
| 101. (d) | 102. (a) | 103. (c) | 104. (b) | 105. (d) | 106. (a) | 107. (b) | 108. (d) | 109. (c) | 110. (b) |
| 111. (a) | 112. (c) | 113. (d) | 114. (a) | 115. (a) | 116. (b) | 117. (b) | 118. (a) | 119. (c) | 120. (d) |



DIVISION/विभाजन/भाग (÷)



Exercise- Type-1

1. $120 \div 8 = ?$
(a) 10 (b) 11
(c) 15 (d) 13
2. $621 \div 27 = ?$
(a) 20 (b) 23
(c) 25 (d) 21
3. $1494 \div 83 = ?$
(a) 15 (b) 19
(c) 18 (d) 12
4. $1178 \div 31 = ?$
(a) 40 (b) 44
(c) 38 (d) 48
5. $688 \div 86 = ?$
(a) 10 (b) 11
(c) 8 (d) 9
6. $693 \div 99 = ?$
(a) 7 (b) 8
(c) 9 (d) 10
7. $444 \div 37 = ?$
(a) 10 (b) 11
(c) 12 (d) 13
8. $301 \div 7 = ?$
(a) 42 (b) 43
(c) 45 (d) 51
9. $496 \div 16 = ?$
(a) 30 (b) 31
(c) 45 (d) 33
10. $688 \div 43 = ?$
(a) 14 (b) 16
(c) 15 (d) 13
11. $672 \div 16 = ?$
(a) 40 (b) 41
(c) 42 (d) 43
12. $322 \div 7 = ?$
(a) 47 (b) 41
(c) 55 (d) 46
13. $2491 \div 47 = ?$
(a) 63 (b) 61
(c) 55 (d) 53
14. $2208 \div 23 = ?$
(a) 98 (b) 96
(c) 86 (d) 106

15. $3192 \div 152 = ?$

(a) 20 (b) 21
(c) 25 (d) 23

Exercise- Type-2

16. $15 \div 10 = ?$
(a) 1.2 (b) 1.4
(c) 1.5 (d) 1.6
17. $117 \div 4 = ?$
(a) 29.95 (b) 29.25
(c) 25.45 (d) 23.85
18. $448 \div 25 = ?$
(a) 14.67 (b) 15.62
(c) 17.92 (d) 18.82
19. $103 \div 8 = ?$
(a) 10.875 (b) 11.975
(c) 12.875 (d) 13.235
20. $735 \div 75 = ?$
(a) 10.1 (b) 11.8
(c) 9.8 (d) 11.1
21. $111 \div 11 = ?$
(a) 10.09 (b) 11.01
(c) 12.09 (d) 13.01
22. $112 \div 12 = ?$
(a) 10.33 (b) 11.33
(c) 9.33 (d) 13.33
23. $97 \div 9 = ?$
(a) 10.77 (b) 11.33
(c) 15.77 (d) 13.33
24. $357 \div 35 = ?$
(a) 10.2 (b) 11.2
(c) 15.2 (d) 13.2
25. $58 \div 11 = ?$
(a) 4.68 (b) 7.23
(c) 5.27 (d) 6.63
26. $143 \div 4 = ?$
(a) 33.65 (b) 35.75
(c) 37.95 (d) 38.98
27. $106 \div 11 = ?$
(a) 10.26 (b) 11.47
(c) 9.63 (d) 10.85
28. $95 \div 7 = ?$
(a) 10.47 (b) 11.74
(c) 15.47 (d) 13.57

29. $156 \div 36 = ?$

(a) 5.33 (b) 4.33
(c) 4.85 (d) 4.80

30. $286 \div 18 = ?$

(a) 18 (b) 16.18
(c) 15.88 (d) 17.98

31. $999999 \div 1001 = ?$

(a) 989 (b) 899
(c) 999 (d) 909

32. $256256 \div 1001 = ?$

(a) 236 (b) 256
(c) 246 (d) 266

33. $9999 \div 101 = ?$

(a) 99 (b) 189
(c) 101 (d) 109

34. $2424 \div 101 = ?$

(a) 26 (b) 24
(c) 34 (d) 27

35. $99 \div 0.1 = ?$

(a) 980 (b) 1099
(c) 990 (d) 1090

36. $199 \div 0.5 = ?$

(a) 398 (b) 399
(c) 385 (d) 395

37. $355355 \div 91 = ?$

(a) 3901 (b) 3905
(c) 3906 (d) 3910

38. $3444344 \div 1001 = ?$

(a) 366 (b) 346
(c) 344 (d) 354

39. $999999 \div 99 = ?$

(a) 10100 (b) 10101
(c) 11001 (d) 10111

40. $9801 \div 99 = ?$

(a) 98 (b) 69
(c) 99 (d) 101

ANSWER KEY - DIVISION

1. (c) 2. (b) 3. (c) 4. (c) 5. (c) 6. (a) 7. (c) 8. (b) 9. (b) 10. (b)
11. (c) 12. (d) 13. (d) 14. (b) 15. (b) 16. (c) 17. (b) 18. (c) 19. (c) 20. (c)
21. (a) 22. (c) 23. (c) 24. (a) 25. (c) 26. (b) 27. (c) 28. (d) 29. (b) 30. (c)
31. (c) 32. (b) 33. (a) 34. (b) 35. (c) 36. (a) 37. (b) 38. (c) 39. (b) 40. (c)



DECIMAL/दशमलव (.)



Exercise- Type-1

1. $12.32 \div 4 = ?$
(a) 3.8 (b) 3.08
(c) 3.24 (d) 3.88
2. $52.56 \div 5 = ?$
(a) 10.51 (b) 11.41
(c) 12.71 (d) 12.08
3. $95.95 \div 4 = ?$
(a) 23.90 (b) 23.08
(c) 23.99 (d) 33.88
4. $172.6 \div 33 = ?$
(a) 5.83 (b) 5.23
(c) 6.23 (d) 4.53
5. $221 \div 52 = ?$
(a) 4.50 (b) 4.25
(c) 5.24 (d) 5.18
6. $233.9 \div 15 = ?$
(a) 15.59 (b) 16.08
(c) 18.29 (d) 10.78
7. $65.9 \div 18 = ?$
(a) 3.8 (b) 3.08
(c) 3.66 (d) 3.88
8. $111.11 \div 19 = ?$
(a) 5.84 (b) 5.98
(c) 4.24 (d) 4.48
9. $56.89 \div 6.6 = ?$
(a) 8.33 (b) 8.61
(c) 8.24 (d) 7.89
10. $586.95 \div 18.9 = ?$
(a) 31.05 (b) 30.08
(c) 32.24 (d) 33.88
11. $279.63 \div 83.5 = ?$
(a) 3.96 (b) 3.78
(c) 3.34 (d) 3.26
12. $526.95 \div 16.8 = ?$
(a) 31.36 (b) 30.06
(c) 35.96 (d) 32.16
13. $97.23 \div 12.17 = ?$
(a) 6.88 (b) 8.28
(c) 7.98 (d) 7.88
14. $9.732 \div 2.23 = ?$
(a) 4.36 (b) 5.39
(c) 5.24 (d) 4.58
15. $98.29 \div 27.37 = ?$
(a) 3.85 (b) 3.59
(c) 3.26 (d) 3.81

Exercise- Type-2

16. $61.9 \times 5 = ?$
(a) 300.3 (b) 309.5
(c) 305.5 (d) 300.45
17. $256.93 \times 12 = ?$
(a) 3080.33 (b) 3083.76
(c) 3088.58 (d) 3083.16
18. $117.95 \times 19 = ?$
(a) 2241.05 (b) 2204.73
(c) 2009.51 (d) 3109.40
19. $98.92 \times 23 = ?$
(a) 2909.35 (b) 3197.57
(c) 2275.16 (d) 2906.75
20. $96.56 \times 34.5 = ?$
(a) 3222.43 (b) 3331.32
(c) 3223.48 (d) 2332.45
21. $72.6 \times 13.59 = ?$
(a) 980.27 (b) 986.63
(c) 1005.57 (d) 1100.49
22. $447.39 \times 19 = ?$
(a) 9100.36 (b) 8990.58
(c) 8500.41 (d) 8300.45
23. $59.26 \times 63.29 = ?$
(a) 3750.56 (b) 3809.59
(c) 3305.59 (d) 3340.45
24. $579.9 \times 13 = ?$
(a) 7900.30 (b) 7889.50
(c) 7772.70 (d) 7538.7
25. $187.43 \times 47 = ?$
(a) 8838.39 (b) 8809.21
(c) 8923.58 (d) 8694.45
26. $88.26 \times 23.8 = ?$
(a) 2100.58 (b) 2286.59
(c) 2305.56 (d) 2300.95
27. $98.19 \times 39 = ?$
(a) 3709.37 (b) 3928.59
(c) 3829.41 (d) 3899.45
28. $93.88 \times 29.2 = ?$
(a) 2945.38 (b) 2856.37
(c) 2803.59 (d) 2741.29
29. $59.73 \times 23.47 = ?$
(a) 1800.39 (b) 1401.86
(c) 1305.53 (d) 1600.45
30. $249.83 \times 28.8 = ?$
(a) 7195.10 (b) 7809.54
(c) 7748.59 (d) 8174.43

Exercise- Type-3

31. $98.26 - 56.59 = ?$
(a) 40.83 (b) 41.67
(c) 45.87 (d) 42.82
32. $59.036 - 26.685 = ?$
(a) 30.831 (b) 31.671
(c) 32.351 (d) 32.823
33. $70.26 - 17.63 = ?$
(a) 52.63 (b) 51.63
(c) 55.83 (d) 52.83
34. $1209.68 - 455.93 = ?$
(a) 740.83 (b) 741.63
(c) 745.87 (d) 753.75
35. $999.19 - 589.65 = ?$
(a) 409.54 (b) 410.67
(c) 405.85 (d) 402.87
36. $1256 - 125.63 = ?$
(a) 1130.37 (b) 1128.72
(c) 1357.08 (d) 1234.85
37. $85.95 - 8.236 = ?$
(a) 79.832 (b) 78.672
(c) 77.714 (d) 72.822
38. $536.56 - 43.86 + 23.95 - 455.95 = ?$
(a) 68.83 (b) 61.67
(c) 65.87 (d) 60.70
39. $256.364 - 59.11 + 94.023 - 109.26 = ?$
(a) 180.832 (b) 182.017
(c) 145.872 (d) 192.823
40. $23.62 - 586.95 - 59.62 + 256.95 + 903.49 = ?$
(a) 549.83 (b) 537.49
(c) 545.87 (d) 542.82
41. $737 - 56.03 + 245.97 - 547.08 + 197.63 + 25.25 = ?$
(a) 590.83 (b) 610.67
(c) 602.74 (d) 612.82
42. $10.97 + 239 + 29.089 - 187.22 + 63.87 - 26.91 = ?$
(a) 180.836 (b) 241.674
(c) 145.873 (d) 128.799
43. $591.26 - 67.95 + 15.98 - 29.54 + 3.26 - 9.38 - 123.45 = ?$
(a) 375.63 (b) 380.18
(c) 345.87 (d) 349.82

ANSWER KEY - DECIMAL

1. (b) 2. (a) 3. (c) 4. (b) 5. (b) 6. (a) 7. (c) 8. (a) 9. (b) 10. (a)
11. (c) 12. (a) 13. (c) 14. (a) 15. (b) 16. (b) 17. (d) 18. (a) 19. (c) 20. (b)
21. (b) 22. (c) 23. (a) 24. (d) 25. (b) 26. (a) 27. (c) 28. (d) 29. (b) 30. (a)
31. (b) 32. (c) 33. (a) 34. (d) 35. (a) 36. (a) 37. (c) 38. (d) 39. (b) 40. (b)
41. (c) 42. (d) 43. (b)



SURDS AND INDICES/घातांक और करणी



Exercise- Type-1

1. $(2 \times \sqrt{5})^2 = ?$
(a) 25 (b) 24
(c) 20 (d) 22
2. $6 \times (\sqrt{81})^2 = ?$
(a) 485 (b) 486
(c) 480 (d) 482
3. $5 \times (\sqrt{36})^2 = ?$
(a) 180 (b) 184
(c) 170 (d) 122
4. $9 \times (\sqrt{12})^2 = ?$
(a) 110 (b) 108
(c) 120 (d) 98
5. $7 \times (\sqrt{19})^2 = ?$
(a) 135 (b) 124
(c) 133 (d) 122
6. $15 \times (\sqrt{18})^2 = ?$
(a) 270 (b) 240
(c) 250 (d) 262
7. $21 \times \sqrt{10})^2 = ?$
(a) 250 (b) 220
(c) 210 (d) 222
8. $7 \times (\sqrt{31})^2 = ?$
(a) 215 (b) 214
(c) 212 (d) 217
9. $5 \times (\sqrt{50})^2 = ?$
(a) 250 (b) 240
(c) 200 (d) 220
10. $7 \times (\sqrt{49})^2 = ?$
(a) 325 (b) 343
(c) 329 (d) 322
11. $7 \times (\sqrt{121})^2 = ?$
(a) 885 (b) 829
(c) 847 (d) 882
12. $9 \times (\sqrt{64})^2 = ?$
(a) 576 (b) 524
(c) 560 (d) 582
13. $12 \times (\sqrt{100})^2 = ?$
(a) 1225 (b) 1200
(c) 1220 (d) 1222
14. $3 \times (\sqrt{99})^2 = ?$
(a) 325 (b) 297
(c) 230 (d) 252
15. $13 \times (\sqrt{43})^2 = ?$
(a) 559 (b) 524
(c) 573 (d) 527

Exercise- Type-2

16. $(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{4})^2 = ?$
(a) $\sqrt{11}$ (b) 11
(c) $\sqrt{28}$ (d) 28
17. $(\sqrt{11})^2 - (\sqrt{7})^2 = ?$
(a) $\sqrt{14}$ (b) 4
(c) $\sqrt{77}$ (d) 77
18. $(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{34})^2 = ?$
(a) $\sqrt{47}$ (b) 47
(c) $\sqrt{48}$ (d) 48
19. $(8 \times \sqrt{7})^2 \div (\sqrt{4})^2 = ?$
(a) $\sqrt{112}$ (b) 112
(c) $\sqrt{118}$ (d) 118
20. $(7 \times \sqrt[3]{125})^2 \times (9 \div 35) = ?$
(a) 321 (b) 315
(c) 330 (d) 320
21. $\sqrt{(125 \times \sqrt[3]{64}) \times (4 \div 5)} = ?$
(a) 14 (b) 12
(c) 8 (d) 20
22. $(2 \times \sqrt{2})^2 + \sqrt{64} = ?$
(a) 14 (b) 20
(c) 18 (d) 16
23. $17 \times \sqrt{36} \div 3 = ?$
(a) 34 (b) 38
(c) 28 (d) 36
24. $(7 \times \sqrt{5})^2 \div (49 \times \sqrt{9}) = ?$
(a) $1\frac{1}{5}$ (b) $5\frac{1}{3}$
(c) $5\frac{5}{8}$ (d) $3\frac{3}{8}$
25. $(5)^3 \times \sqrt{25} \div \sqrt[3]{125} = ?$
(a) 121 (b) 135
(c) 155 (d) 125
26. $\sqrt{(36 \times 16)} + \sqrt{(5^2 + 11)} = ?$
(a) 16 (b) 36
(c) 30 (d) 28
27. $(8 \times \sqrt{6})^2 \div (4)^2 = ?$
(a) 32 (b) 20
(c) 24 (d) 27
28. $\sqrt{121} \times 7 \div \sqrt{16} = ?$
(a) $12\frac{1}{2}$ (b) $7\frac{7}{4}$
(c) $70\frac{1}{2}$ (d) 16

29. $(\sqrt{5})^2 + (2 \times \sqrt{2})^2 - 7 \times \sqrt{(16 \div 49)} = ?$
(a) 11 (b) 14
(c) 9 (d) 10

30. $(\sqrt{37})^3 \div \sqrt{37} + (8 \times \sqrt{2})^2 = ?$
(a) 155 (b) 165
(c) 175 (d) 170

Exercise- Type-3

31. $\sqrt{6.24} \times \sqrt{1.70} = ?$
(a) 3.70 (b) 4.60
(c) 4.58 (d) 3.25
32. $\sqrt[3]{3.375} \times \sqrt{0.49} = ?$
(a) 1.05 (b) 2.20
(c) 1.23 (d) 1.21
33. $\sqrt[3]{1.331} \times \sqrt{0.36} = ?$
(a) 0.79 (b) 0.66
(c) 0.53 (d) 0.75
34. $8 \times \sqrt[3]{0.064} = ?$
(a) 7.9 (b) 6.6
(c) 2.3 (d) 3.2
35. $\sqrt{3} \times \sqrt{0.216} = ?$
(a) 1.05 (b) 1.08
(c) 1.03 (d) 1.75
36. $\sqrt{1.20} \times \sqrt[3]{1.330} = ?$
(a) 0.79 (b) 0.66
(c) 2.24 (d) 0.75
37. $\sqrt[3]{1.331} \times \sqrt{0.36} = ?$
(a) 1.21 (b) 0.66
(c) 1.51 (d) 1.15
38. $\sqrt[3]{0.026} \times \sqrt{2.88} = ?$
(a) 1.5 (b) 0.51
(c) 2 (d) 0.75
39. $(3 \times \sqrt{2}) \times \sqrt[3]{1.728} = ?$
(a) 7.29 (b) 6.96
(c) 5.10 (d) 5.50
40. $\sqrt[3]{1331} \times \sqrt{0.36} = ?$
(a) 0.79 (b) 0.66
(c) 0.53 (d) 0.75
41. $\sqrt[3]{0.520} = ?$
(a) 0.804 (b) 0.876
(c) 0.853 (d) 0.825
42. $\sqrt[3]{0.008} \times \sqrt{0.81} = ?$
(a) 0.20 (b) 0.18
(c) 0.51 (d) 0.25

ANSWER KEY - SURDS AND INDICES

- | | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (c) | 2. (b) | 3. (a) | 4. (b) | 5. (c) | 6. (a) | 7. (c) | 8. (d) | 9. (a) | 10. (b) |
| 11. (c) | 12. (a) | 13. (b) | 14. (b) | 15. (a) | 16. (b) | 17. (b) | 18. (b) | 19. (b) | 20. (b) |
| 21. (d) | 22. (d) | 23. (a) | 24. (b) | 25. (d) | 26. (c) | 27. (c) | 28. (b) | 29. (c) | 30. (b) |
| 31. (a) | 32. (b) | 33. (b) | 34. (d) | 35. (c) | 36. (c) | 37. (b) | 38. (c) | 39. (c) | 40. (b) |



LCM AND HCF/ल.स.व. और म.स.व.



Exercise- Type-1

1. What is the LCM of 12, 18, and 24?
 (a) 12 (b) 24
 (c) 36 (d) 72
2. What is the LCM of 15, 20, and 25?
 (a) 100 (b) 200
 (c) 300 (d) 400
3. What is the LCM of 8, 12, and 16?
 (a) 16 (b) 24
 (c) 48 (d) 96
4. What is the LCM of 21, 28, and 35?
 (a) 210 (b) 420
 (c) 630 (d) 840
5. What is the LCM of 10, 12, and 15?
 (a) 30 (b) 60
 (c) 120 (d) 180

Find the LCM

6. LCM of $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, and $\frac{5}{6}$ = ?
 (a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{5}{12}$
 (c) $\frac{10}{1}$ (d) $\frac{5}{36}$
7. LCM of $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, and $\frac{7}{8}$ = ?
 (a) $\frac{105}{32}$ (b) $\frac{21}{8}$
 (c) $\frac{21}{1}$ (d) $\frac{21}{10}$
8. LCM of $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, and $\frac{4}{5}$ = ?
 (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$
 (c) 1 (d) $\frac{12}{1}$
9. LCM of $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, and $\frac{3}{4}$ = ?
 (a) $\frac{5}{8}$ (b) $\frac{5}{12}$
 (c) $\frac{15}{2}$ (d) $\frac{5}{18}$

10. LCM of $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, and $\frac{3}{4}$ = ?

- (a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{3}{4}$
 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{6}{1}$

11. LCM of $1\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ and $3\frac{3}{4}$ = ?

- (a) 9 (b) $18/1$
 (c) 27 (d) $120/1$

12. LCM of $\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{4}$, and $\frac{5}{6}$ = ?

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{30}{1}$
 (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{5}{6}$

13. LCM of $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{4}$, and $3\frac{1}{5}$ = ?

- (a) $8\frac{5}{6}$ (b) $9\frac{1}{10}$
 (c) $10\frac{1}{15}$ (d) $\frac{720}{1}$

21. HCF of 640, 800, and 960 = ?

- (a) 40 (b) 80
 (c) 160 (d) 320

22. HCF of 1260, 1800, and 2310 = ?

- (a) 90 (b) 180
 (c) 30 (d) 360

23. HCF of 1764, 2352, and 2940 = ?

- (a) 84 (b) 168
 (c) 252 (d) 336

24. HCF of $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, and $\frac{7}{24}$ = ?

- (a) $\frac{1}{24}$ (b) $\frac{7}{12}$
 (c) $\frac{5}{24}$ (d) $\frac{7}{8}$

25. HCF of $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, and $\frac{3}{10}$ = ?

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{5}$
 (c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{1}{30}$

26. HCF of $2\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, and $4\frac{1}{3}$ = ?

- (a) $11\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{12}$
 (c) $18\frac{1}{4}$ (d) $19\frac{1}{2}$

27. HCF of $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{3}$, and $3\frac{1}{5}$ = ?

- (a) $7\frac{1}{2}$ (b) $9\frac{1}{2}$
 (c) $\frac{1}{60}$ (d) $15\frac{3}{4}$

28. HCF of $3\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, and $5\frac{1}{6}$ = ?

- (a) $31\frac{1}{12}$ (b) $33\frac{1}{2}$
 (c) $35\frac{1}{12}$ (d) $\frac{1}{12}$

29. HCF of $2\frac{3}{8}$, $3\frac{1}{5}$, and $4\frac{1}{6}$ = ?

- (a) $\frac{1}{120}$ (b) $38\frac{5}{24}$
 (c) $40\frac{5}{24}$ (d) $42\frac{3}{8}$

Exercise- Type-2

Find HCF

14. HCF of 12, 18, and 24 = ?

- (a) 2 (b) 3
 (c) 4 (d) 6

15. HCF of 20, 25, and 35 = ?

- (a) 5 (b) 10
 (c) 15 (d) 20

16. HCF of 36, 54, and 90 = ?

- (a) 6 (b) 9
 (c) 18 (d) 27

17. HCF of 72, 96, and 120 = ?

- (a) 12 (b) 24
 (c) 36 (d) 48

18. HCF of 15, 35, and 45 = ?

- (a) 3 (b) 5
 (c) 15 (d) 45

19. HCF of 1232, 1848, and 2624 = ?

- (a) 8 (b) 32
 (c) 64 (d) 128

20. HCF of 369, 492, and 615 = ?

- (a) 3 (b) 123
 (c) 27 (d) 81

ANSWER KEY - LCM AND HCF

- | | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (d) | 2. (c) | 3. (c) | 4. (b) | 5. (b) | 6. (c) | 7. (c) | 8. (d) | 9. (c) | 10. (d) |
| 11. (d) | 12. (b) | 13. (d) | 14. (d) | 15. (a) | 16. (c) | 17. (b) | 18. (b) | 19. (a) | 20. (b) |
| 21. (c) | 22. (c) | 23. (a) | 24. (a) | 25. (d) | 26. (b) | 27. (c) | 28. (d) | 29. (a) | |



FRACTION/भिन्न



Exercise- Type-1

1. $\frac{1+2}{3} = ?$
 (a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$
 (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$
2. $\frac{22}{7} = ? + \frac{1}{7}$
 (a) 20 (b) 23
 (c) 3 (d) 5
3. $\frac{90}{7} - \frac{6}{7} = ?$
 (a) 12 (b) 23
 (c) 15 (d) 25
4. $\frac{17}{36} = 1 - ?$
 (a) $\frac{4}{30}$ (b) $\frac{19}{36}$
 (c) $\frac{4}{6}$ (d) $\frac{3}{18}$
5. $\frac{19}{3} = \frac{7}{3} + ?$
 (a) 4 (b) 5
 (c) 3 (d) 7
6. $\frac{28}{65} = 2 - ?$
 (a) $\frac{4}{65}$ (b) $\frac{102}{65}$
 (c) $\frac{105}{65}$ (d) $\frac{3}{65}$
7. $\frac{22}{45} = 1 - \frac{23}{?}$
 (a) 23 (b) 53
 (c) 45 (d) 35
8. $\frac{67}{3} + \frac{2}{3} = ?$
 (a) 43 (b) 53
 (c) 23 (d) 35
9. $\frac{46}{7} = 6 + ?$
 (a) 7 (b) $\frac{5}{7}$
 (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{3}{7}$
10. $\frac{45}{6} = 7 + ?$
 (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$
 (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{7}$

Exercise- Type-2

11. $\frac{5}{8} \times 7 = ?$
 (a) $4\frac{4}{3}$ (b) $3\frac{5}{3}$
 (c) $3\frac{4}{5}$ (d) $4\frac{3}{8}$
12. $\frac{9}{5} \times 4 = ?$
 (a) $7\frac{4}{3}$ (b) $6\frac{5}{3}$
 (c) $7\frac{1}{5}$ (d) $5\frac{3}{5}$
13. $\frac{7}{9} \times 7 = ?$
 (a) $5\frac{4}{3}$ (b) $5\frac{4}{9}$
 (c) $5\frac{4}{5}$ (d) $5\frac{3}{5}$
14. $\frac{10}{7} \times 13 = ?$
 (a) $18\frac{4}{30}$ (b) $8\frac{19}{36}$
 (c) $16\frac{4}{6}$ (d) $18\frac{4}{7}$
15. $\frac{10}{19} \times 7 =$
 (a) $16\frac{4}{30}$ (b) $7\frac{19}{36}$
 (c) $16\frac{4}{6}$ (d) $3\frac{13}{19}$
16. $\frac{15}{4} \times 11 =$
 (a) $18\frac{4}{7}$ (b) $41\frac{1}{4}$
 (c) $\frac{4}{6}$ (d) $\frac{3}{18}$
17. $22 \times \frac{4}{5} = ?$
 (a) 7 (b) $17\frac{5}{7}$
 (c) $17\frac{3}{5}$ (d) $17\frac{3}{7}$
18. $27 \times \frac{5}{11} = ?$
 (a) $12\frac{3}{11}$ (b) $17\frac{5}{7}$
 (c) $17\frac{3}{5}$ (d) $17\frac{3}{7}$

19. $17 \times \frac{7}{5} = ?$

- (a) $15\frac{4}{3}$ (b) $3\frac{5}{3}$
 (c) $13\frac{4}{5}$ (d) $21\frac{4}{5}$

20. $23 \times \frac{3}{4} = ?$

- (a) $17\frac{4}{3}$ (b) $17\frac{1}{4}$
 (c) $17\frac{4}{5}$ (d) $21\frac{4}{5}$

Exercise- Type-3

21. $9\frac{1}{4} \times 12 = ?$
 (a) 231 (b) 531
 (c) 451 (d) 111
22. $4\frac{1}{11} \times 12 = ?$
 (a) $49\frac{1}{11}$ (b) $8\frac{10}{11}$
 (c) $16\frac{4}{6}$ (d) $18\frac{4}{7}$
23. $4\frac{1}{11} \times 12 = ?$
 (a) $49\frac{1}{12}$ (b) $8\frac{10}{11}$
 (c) $16\frac{4}{6}$ (d) $49\frac{1}{11}$
24. $4\frac{2}{3} \times 3 = ?$
 (a) 21 (b) 13
 (c) 14 (d) 16
25. $91\frac{3}{4} \times 8 = ?$
 (a) 743 (b) 734
 (c) 723 (d) 735
26. $102\frac{3}{7} \times 7 = ?$
 (a) 743 (b) 734
 (c) 717 (d) 735
27. $66\frac{2}{3} \times 3 = ?$
 (a) 243 (b) 200
 (c) 217 (d) 235
28. $11\frac{1}{9} \times 10 = ?$
 (a) $49\frac{1}{12}$ (b) $8\frac{10}{11}$
 (c) $111\frac{1}{3}$ (d) $111\frac{1}{9}$

29. $7\frac{1}{3} \times 5 = ?$

- (a) $12\frac{3}{11}$ (b) $36\frac{5}{7}$
 (c) $17\frac{3}{5}$ (d) $36\frac{2}{3}$

30. $15\frac{2}{7} \times 4 = ?$

- (a) $61\frac{1}{7}$ (b) $66\frac{5}{7}$
 (c) $67\frac{3}{5}$ (d) $36\frac{2}{3}$

Exercise- Type-4

31. $\frac{95}{13} \times \frac{1}{5} = ?$

- (a) $6\frac{1}{7}$ (b) $6\frac{5}{7}$
 (c) $1\frac{19}{13}$ (d) $1\frac{12}{13}$

32. $\frac{126}{14} \times \frac{1}{5} = ?$

- (a) $\frac{9}{5}$ (b) $\frac{5}{7}$
 (c) $1\frac{19}{13}$ (d) $1\frac{12}{13}$

33. $\left(26\frac{2}{3}\right) \times \frac{7}{13} = ?$

- (a) $14\frac{12}{13}$ (b) $16\frac{5}{7}$
 (c) $67\frac{3}{13}$ (d) $14\frac{14}{39}$

34. $\left(33\frac{1}{3}\right) \times \frac{6}{11} = ?$

- (a) $14\frac{12}{13}$ (b) $18\frac{5}{7}$
 (c) $18\frac{2}{11}$ (d) $14\frac{14}{39}$

35. $\left(101\frac{4}{7}\right) \times \frac{5}{17} = ?$

- (a) $14\frac{12}{13}$ (b) 29
 (c) $28\frac{2}{119}$ (d) $29\frac{104}{119}$

36. $\left(150\frac{5}{8}\right) \times \frac{16}{17} = ?$

- (a) $14\frac{12}{13}$ (b) $29\frac{13}{17}$
 (c) $141\frac{13}{17}$ (d) $29\frac{104}{119}$

37. $\left(23\frac{3}{7}\right) \times \frac{14}{23} = ?$

- (a) $14\frac{12}{13}$ (b) $1\frac{13}{17}$
 (c) $14\frac{13}{17}$ (d) $14\frac{6}{23}$

38. $\left(93\frac{11}{12}\right) \times \frac{3}{31} = ?$

- (a) $6\frac{11}{124}$ (b) $6\frac{5}{7}$
 (c) $14\frac{13}{17}$ (d) $9\frac{11}{124}$

39. $14\frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = ?$

- (a) $10\frac{2}{7}$ (b) $10\frac{5}{7}$
 (c) $10\frac{13}{17}$ (d) $9\frac{11}{124}$

40. $\left(55\frac{4}{7}\right) \times \frac{14}{15} = ?$

- (a) $50\frac{2}{7}$ (b) $51\frac{13}{15}$
 (c) $51\frac{13}{17}$ (d) $51\frac{11}{15}$

Exercise- Type-5

41. $\frac{9}{12} - \frac{5}{8} = ?$

- (a) $\frac{9}{5}$ (b) $\frac{1}{8}$
 (c) $\frac{19}{13}$ (d) $\frac{12}{13}$

42. $75\frac{1}{2} + 11\frac{5}{6} = ?$

- (a) $87\frac{2}{6}$ (b) $87\frac{1}{8}$
 (c) $80\frac{19}{13}$ (d) $87\frac{12}{13}$

43. $2\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{14} \times 1\frac{4}{5} = ?$

- (a) $4\frac{1}{2}$ (b) $4\frac{1}{8}$
 (c) $2\frac{19}{13}$ (d) $1\frac{12}{13}$

44. $6\frac{2}{9} \div \frac{1}{6} = ?$

- (a) $4\frac{1}{2}$ (b) $36\frac{1}{8}$
 (c) $2\frac{19}{13}$ (d) $37\frac{1}{3}$

45. $43\frac{2}{3} + 36\frac{3}{9} = ?$

- (a) 83 (b) 80
 (c) 75 (d) 85

46. $2\frac{3}{4} \div 5\frac{9}{7} = ?$

- (a) $\frac{9}{5}$ (b) $\frac{1}{8}$
 (c) $\frac{7}{8}$ (d) $\frac{12}{13}$

47. $7\frac{3}{5} \div \frac{1}{20} = ?$

- (a) 183 (b) 152
 (c) 175 (d) 185

48. $3\frac{5}{6} \times 4\frac{2}{3} = ?$

- (a) $6\frac{11}{12}$ (b) $6\frac{5}{7}$
 (c) $14\frac{8}{9}$ (d) $17\frac{8}{9}$

49. $17\frac{3}{8} \div \frac{1}{16} = ?$

- (a) 188 (b) 158
 (c) 178 (d) 278

50. $33\frac{1}{3} \div 7\frac{1}{7} = ?$

- (a) $4\frac{11}{12}$ (b) $4\frac{5}{7}$
 (c) $4\frac{2}{3}$ (d) $17\frac{8}{9}$

ANSWER KEY - FRACTION

- | | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (c) | 2. (b) | 3. (a) | 4. (b) | 5. (c) | 6. (a) | 7. (c) | 8. (c) | 9. (c) | 10. (*) |
| 11. (d) | 12. (c) | 13. (b) | 14. (d) | 15. (d) | 16. (b) | 17. (c) | 18. (a) | 19. (d) | 20. (b) |
| 21. (d) | 22. (a) | 23. (d) | 24. (c) | 25. (b) | 26. (c) | 27. (b) | 28. (d) | 29. (d) | 30. (*) |
| 31. (c) | 32. (a) | 33. (d) | 34. (c) | 35. (d) | 36. (c) | 37. (d) | 38. (d) | 39. (a) | 40. (b) |
| 41. (b) | 42. (a) | 43. (a) | 44. (d) | 45. (b) | 46. (c) | 47. (b) | 48. (d) | 49. (d) | 50. (c) |



PERCENTAGE/प्रतिशत



Type-1 (Calculate the %)

1. 1% of 6.04 = ?
(a) 0.064 (b) 0.256
(c) 3.55 (d) 0.0604
2. 200% of 3.5 = ?
(a) 2.8 (b) 12
(c) 35 (d) 7
3. 50% of 122 = ?
(a) 28 (b) 70
(c) 61 (d) 50
4. 50% of 511 = ?
(a) 250.5 (b) 150.2
(c) 350.9 (d) 255.5
5. 10% of 37 = ?
(a) 2.8 (b) 1.2
(c) 3.7 (d) 3.5
6. 13% of 30 = ?
(a) 2.8 (b) 1.2
(c) 3.9 (d) 1.5
7. 15% of 80 = ?
(a) 10 (b) 12
(c) 20 (d) 15
8. 12% of 600 = ?
(a) 80 (b) 72
(c) 70 (d) 75
9. 18% of 500 = ?
(a) 80 (b) 12
(c) 20 (d) 90
10. 25% of 250 = ?
(a) 70 (b) 62.5
(c) 60 (d) 55.5

Type-2 (Convert into decimal)

11. $\frac{4}{5} = ?$
(a) 0.08 (b) 0.8
(c) 0.6 (d) 0.7
12. $\frac{9}{11} = ?$
(a) 0.08 (b) 0.81
(c) 0.61 (d) 0.71
13. $\frac{7}{13} = ?$
(a) 0.51 (b) 0.81
(c) 0.53 (d) 0.71
14. $\frac{8}{15} = ?$
(a) 0.51 (b) 0.81
(c) 0.53 (d) 0.61
15. $\frac{17}{6} = ?$
(a) 2.51 (b) 2.81
(c) 2.53 (d) 2.83

16. $\frac{19}{21} = ?$
(a) 0.51 (b) 0.80
(c) 0.83 (d) 0.90

17. $\frac{17}{9} = ?$
(a) 1.51 (b) 1.80
(c) 1.88 (d) 1.90

18. $\frac{13}{12} = ?$
(a) 1.51 (b) 1.80
(c) 1.88 (d) 1.08

19. $\frac{21}{25} = ?$
(a) 0.84 (b) 1.80
(c) 0.88 (d) 1.08

20. $\frac{5}{7} = ?$
(a) 0.51 (b) 0.70
(c) 0.71 (d) 0.90

Type-3 (Convert into fraction)

21. $33\frac{1}{3}\% = ?$
(a) 7 (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{3}{7}$

22. $66\frac{2}{3}\% = ?$

(a) 7 (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{4}{7}$ (d) $\frac{2}{3}$

23. $34\% = ?$
(a) $\frac{17}{50}$ (b) $1\frac{1}{3}$
(c) $10\frac{4}{7}$ (d) $2\frac{2}{3}$

24. $65\% = ?$
(a) $\frac{17}{50}$ (b) $12\frac{1}{3}$
(c) $\frac{17}{20}$ (d) $\frac{13}{20}$

25. $85\% = ?$
(a) $\frac{17}{50}$ (b) $12\frac{1}{3}$
(c) $\frac{17}{20}$ (d) $\frac{13}{20}$

26. $42\frac{6}{7}\% = ?$
(a) $\frac{17}{50}$ (b) $1\frac{1}{3}$

(c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{13}{20}$

27. $142\frac{6}{7}\% = ?$
(a) $\frac{10}{7}$ (b) $\frac{13}{20}$

(c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{1}{3}$

28. $57\frac{1}{7}\% = ?$
(a) $\frac{10}{7}$ (b) $\frac{13}{20}$

(c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{4}{7}$

29. $81\frac{9}{11}\% = ?$
(a) $\frac{10}{7}$ (b) $\frac{9}{11}$

(c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{4}{7}$

30. $18\frac{3}{4}\% = ?$
(a) $\frac{3}{16}$ (b) $\frac{9}{11}$

(c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{4}{7}$

Type-4 (Convert in to Fraction)

31. $47.5\% = ?$
(a) $\frac{9}{11}$ (b) $\frac{3}{16}$

(c) $\frac{19}{40}$ (d) $\frac{2}{6}$

32. $21.21\% = ?$
(a) $\frac{9}{11}$ (b) $\frac{19}{90}$

(c) $\frac{19}{40}$ (d) $\frac{7}{33}$

33. $73.33\% = ?$

(a) $\frac{9}{11}$ (b) $\frac{19}{90}$

(c) $\frac{19}{40}$ (d) $\frac{11}{15}$

34. $72.5\% = ?$

(a) $\frac{9}{11}$ (b) $\frac{19}{90}$

(c) $\frac{29}{40}$ (d) $\frac{11}{15}$

35. $83.33\% = ?$

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{4}{3}$

(c) $\frac{2}{4}$ (d) $\frac{11}{15}$

36. $100.90\% = ?$

(a) $\frac{112}{110}$ (b) $\frac{111}{110}$

(c) $\frac{112}{118}$ (d) $\frac{11}{15}$

37. $55.45\% = ?$

(a) $\frac{62}{110}$ (b) $\frac{64}{112}$

(c) $\frac{61}{110}$ (d) $\frac{11}{15}$

38. $34.28\% = ?$

(a) $\frac{12}{35}$ (b) $\frac{64}{112}$

(c) $\frac{61}{110}$ (d) $\frac{11}{15}$

39. $46.66\% = ?$

(a) $\frac{12}{35}$ (b) $\frac{9}{12}$

(c) $\frac{11}{10}$ (d) $\frac{7}{15}$

40. $81.4\% = ?$

(a) $\frac{57}{70}$ (b) $\frac{9}{12}$

(c) $\frac{11}{10}$ (d) $\frac{7}{15}$

Exercise-Type-5

41. $70\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{57}{70}$ (b) $\frac{17}{10}$

(c) $\frac{11}{10}$ (d) $\frac{7}{15}$

42. $60\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{8}{5}$ (b) $\frac{19}{90}$

(c) $\frac{19}{40}$ (d) $\frac{2}{6}$

43. $75\% \downarrow = ?$

(a) $\frac{8}{5}$ (b) $\frac{3}{7}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{2}{6}$

44. $25\% \downarrow = ?$

(a) $\frac{8}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{2}{6}$

45. $5\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{18}{14}$ (b) $\frac{20}{22}$

(c) $\frac{12}{14}$ (d) $\frac{21}{20}$

46. $11\frac{1}{9}\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{18}{14}$ (b) $\frac{20}{22}$

(c) $\frac{12}{14}$ (d) $\frac{10}{9}$

47. $9\frac{1}{11}\% \downarrow = ?$

(a) $\frac{10}{11}$ (b) $\frac{20}{22}$

(c) $\frac{12}{14}$ (d) $\frac{10}{9}$

48. $8\frac{1}{3}\% \downarrow = ?$

(a) $\frac{10}{11}$ (b) $\frac{20}{22}$

(c) $\frac{11}{12}$ (d) $\frac{10}{9}$

49. $87\frac{1}{2}\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{10}{11}$ (b) $\frac{20}{22}$

(c) $\frac{15}{8}$ (d) $\frac{10}{9}$

50. $44\frac{4}{9}\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{10}{11}$ (b) $\frac{13}{9}$

(c) $\frac{15}{8}$ (d) $\frac{10}{9}$

Exercise-Type-6

51. $16\frac{2}{3}\% \downarrow \text{ & } 10\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{8}{5}$ (b) $\frac{1}{12}$

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{2}{6}$

52. $11\frac{1}{9}\% \uparrow \text{ & } 20\% \uparrow = ?$

(a) 32.33% (b) 44.33%

(c) 30.33% (d) 33.33%

53. $6\frac{1}{4}\% \uparrow \text{ & } 45\frac{5}{11}\% \uparrow = ?$

(a) 54.54% (b) 54.32%

(c) 40.20% (d) 50.52%

54. $12\frac{1}{2}\% \uparrow \text{ & } 37\frac{1}{2}\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{18}{14}$ (b) $\frac{35}{64}$

(c) $\frac{12}{14}$ (d) $\frac{21}{20}$

55. $30\% \uparrow \text{ & } 14\frac{2}{7}\% \downarrow = ?$

(a) 11.42% (b) 11.48%

(c) 40.20% (d) 20.52%

56. $11\frac{1}{9}\% \downarrow \text{ & } 25\% \uparrow = ?$

(a) 11.42% (b) 11.48%

(c) 12.20% (d) 11.11%

57. $42\frac{6}{7}\% \uparrow \text{ & } 30\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{10}{11}$ (b) $\frac{20}{22}$

(c) $\frac{6}{7}$ (d) $\frac{10}{9}$

58. $55\frac{5}{9}\% \uparrow \text{ & } 28\frac{4}{7}\% \uparrow = ?$

(a) 100% (b) 110%

(c) 114% (d) 98%

59. $2\frac{1}{2}\% \uparrow \text{ & } 10\% \downarrow = ?$

(a) 7.12% (b) 7.75%

(c) 8.90% (d) 8.80%

60. $57\frac{1}{7}\% \uparrow \text{ & } 16\frac{2}{3}\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{4}{3}$

(c) $\frac{2}{4}$ (d) $\frac{11}{15}$

41. $70\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{57}{70}$ (b) $\frac{17}{10}$

(c) $\frac{11}{10}$ (d) $\frac{7}{15}$

42. $60\% \uparrow = ?$

(a) $\frac{8}{5}$ (b) $\frac{19}{90}$

(c) $\frac{19}{40}$ (d) $\frac{2}{6}$

Type-7 (Find net increase%)

- 61.** $10\% \uparrow$ and $5\% \uparrow = ?$
 (a) 13.5% (b) 15.8%
 (c) 15.5% (d) 16.5%
- 62.** $10\% \uparrow$ and $20\% \uparrow = ?$
 (a) 31% (b) 32%
 (c) 34% (d) 35%
- 63.** $8\% \uparrow$ and $5\% \uparrow = ?$
 (a) 13.20% (b) 12.40%
 (c) 12.60% (d) 13.04%
- 64.** $10\% \uparrow$ and $15\% \uparrow = ?$
 (a) 26.5% (b) 24.5%
 (c) 27.5% (d) 23.5%
- 65.** $10\% \uparrow$ and $10\% \uparrow = ?$
 (a) 99% (b) 23%
 (c) 22% (d) 21%
- 66.** $20\% \uparrow$ and $30\% \uparrow = ?$
 (a) 55% (b) 57%
 (c) 56% (d) 54%
- 67.** $25\% \uparrow$ and $4\% \uparrow = ?$
 (a) 29% (b) 30%
 (c) 28% (d) 31%
- 68.** $30\% \uparrow$ and $10\% \uparrow = ?$
 (a) 43% (b) 42%
 (c) 44% (d) 45%
- 69.** $24\% \uparrow$ and $10\% \uparrow = ?$
 (a) 35.40% (b) 33.60%
 (c) 37.40% (d) 36.40%
- 70.** $15\% \uparrow$ and $12\% \uparrow = ?$
 (a) 28.80% (b) 29.80%
 (c) 27.60% (d) 27.80%
- 71.** $12\% \uparrow$ and $10\% \uparrow = ?$
 (a) 21.60% (b) 24.20%
 (c) 23.20% (d) 22.20%
- 72.** $8\% \uparrow$ and $5\% \uparrow = ?$
 (a) 13.20% (b) 13.40%
 (c) 12.60% (d) 13.60%
- 73.** $4\% \uparrow$ and $5\% \uparrow = ?$
 (a) 9.02% (b) 10.20%
 (c) 9.80% (d) 9.60%

74. $20\% \uparrow$ and $25\% \uparrow = ?$

- (a) 55% (b) 45%
 (c) 52% (d) 50%
- 75. $50\% \uparrow$ and $20\% \uparrow = ?$**
- (a) 80% (b) 85%
 (c) 75% (d) 77%

Type-8 (Find net decrease%)

- 76. $25\% \downarrow$ and $20\% \downarrow = ?$**
- (a) 40% (b) 35%
 (c) 45% (d) 47%
- 77. $25\% \downarrow$ and $25\% \downarrow = ?$**
- (a) 44.75% (b) 43.75%
 (c) 43.25% (d) 46.25%
- 78. $15\% \downarrow$ and $10\% \downarrow = ?$**
- (a) 22.5% (b) 23.8%
 (c) 23.7% (d) 23.5%
- 79. $10\% \downarrow$ and $20\% \downarrow = ?$**
- (a) 28% (b) 27%
 (c) 29% (d) 32%
- 80. $25\% \downarrow$ and $30\% \downarrow = ?$**
- (a) 48.5% (b) 47.25%
 (c) 48.75% (d) 47.5%
- 81. $15\% \downarrow$ and $9\% \downarrow = ?$**
- (a) 23.65% (b) 24.25%
 (c) 22.65% (d) 22.75%
- 82. $24\% \downarrow$ and $10\% \downarrow = ?$**
- (a) 32.6% (b) 31.6%
 (c) 31.4% (d) 32.4%
- 83. $16\% \downarrow$ and $15\% \downarrow = ?$**
- (a) 24.6% (b) 29.4%
 (c) 28.4% (d) 28.6%
- 84. $30\% \downarrow$ and $10\% \downarrow = ?$**
- (a) 37% (b) 36%
 (c) 38% (d) 39%
- 85. $28\% \downarrow$ and $5\% \downarrow = ?$**
- (a) 32.6% (b) 31.4%
 (c) 31.6% (d) 32.4%
- 86. $25\% \downarrow$ and $4\% \downarrow = ?$**
- (a) 27% (b) 29%
 (c) 28% (d) 27.5%

87. $8\% \downarrow$ and $6\% \downarrow = ?$

- (a) 14.52% (b) 13.52%
 (c) 13.32% (d) 13.62%
- 88. $5\% \downarrow$ and $5\% \downarrow = ?$**
- (a) 10.25% (b) 9.50%
 (c) 9.25% (d) 9.75%

89. $2\% \downarrow$ and $3\% \downarrow = ?$

- (a) 4.96% (b) 4.92%
 (c) 4.94% (d) 4.98%
- 90. $5\% \downarrow$ and $10\% \downarrow = ?$**
- (a) 14.5% (b) 13.5%
 (c) 14.75% (d) 13.75%

Type-8 (Find net inc. or dec.)

- 91. $15\% \uparrow$ and $12\% \downarrow = ?$**
- (a) -1.2% (b) +2.3%
 (c) +1.2% (d) -2.3%
- 92. $50\% \uparrow$ and $20\% \downarrow = ?$**
- (a) +20% (b) +25%
 (c) +28% (d) +30%
- 93. $20\% \uparrow$ and $15\% \downarrow = ?$**
- (a) +2% (b) +4%
 (c) -1.2% (d) +2.5%
- 94. $30\% \uparrow$ and $20\% \downarrow = ?$**
- (a) +6% (b) +5%
 (c) +3% (d) +4%
- 95. $20\% \uparrow$ and $10\% \downarrow = ?$**
- (a) +9% (b) +7%
 (c) +8% (d) +10%
- 96. $15\% \uparrow$ and $10\% \downarrow = ?$**
- (a) +3% (b) +3.5%
 (c) +4% (d) +2.5%
- 97. $25\% \uparrow$ and $4\% \downarrow = ?$**
- (a) +16% (b) +18%
 (c) +22% (d) +20%
- 98. $10\% \uparrow$ and $5\% \downarrow = ?$**
- (a) +4% (b) +5%
 (c) +4.5% (d) +5.5%
- 99. $15\% \downarrow$ and $10\% \uparrow = ?$**
- (a) -6.5% (b) -5.5%
 (c) -4.5% (d) -5%
- 100. $25\% \uparrow$ and $20\% \downarrow = ?$**
- (a) +5% (b) 0%
 (c) +4.5% (d) +4%

ANSWER KEY - PERCENTAGE

1. (d) 2. (d) 3. (c) 4. (d) 5. (c) 6. (c) 7. (b) 8. (b) 9. (d) 10. (b)
 11. (b) 12. (b) 13. (c) 14. (c) 15. (d) 16. (d) 17. (c) 18. (d) 19. (a) 20. (c)
 21. (b) 22. (d) 23. (a) 24. (d) 25. (c) 26. (c) 27. (a) 28. (d) 29. (b) 30. (a)
 31. (c) 32. (d) 33. (d) 34. (c) 35. (a) 36. (b) 37. (c) 38. (a) 39. (d) 40. (a)
 41. (b) 42. (a) 43. (c) 44. (b) 45. (d) 46. (d) 47. (a) 48. (a) 49. (c) 50. (b)
 51. (b) 52. (d) 53. (a) 54. (b) 55. (a) 56. (d) 57. (c) 58. (a) 59. (b) 60. (a)
 61. (c) 62. (b) 63. (d) 64. (a) 65. (d) 66. (c) 67. (b) 68. (a) 69. (d) 70. (a)
 71. (c) 72. (b) 73. (a) 74. (d) 75. (a) 76. (a) 77. (b) 78. (d) 79. (a) 80. (d)
 81. (c) 82. (b) 83. (d) 84. (a) 85. (c) 86. (c) 87. (b) 88. (d) 89. (c) 90. (a)
 91. (c) 92. (a) 93. (a) 94. (d) 95. (c) 96. (b) 97. (d) 98. (c) 99. (a) 100. (b)



PROFIT AND LOSS/लाभ और हानि



Find the profit or loss % given marked price and discount.

लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करो यदि अंकित मूल्य और बट्टा दिया गया है।

Exercise- Type-1

1. $MP = 16\frac{2}{3}\%$, $Dis. = 11\frac{1}{9}\%$

P/L% = ?

- (a) 3.60% (b) 3.0%
- (c) 3.40% (d) 3.70%

2. $MP = 16\frac{2}{3}$ & $Dis. = 28\frac{4}{7}\%$

P/L% = ?

- (a) 23.60% (b) 16.66%
- (c) 13.40% (d) 3.70%

3. $MP = 45\%$ & $Dis. = 16.66\%$

P/L% = ?

- (a) 20.83% (b) 30%
- (c) 18.40% (d) 23.50%

4. $MP = 20\% \uparrow$ & $Dis. = 10\%$

P/L% = ?

- (a) 4% (b) 6%
- (c) 8% (d) 10%

5. $MP = 11\frac{1}{9}\%$ & $Dis. = 9\frac{1}{11}\%$

P/L% = ?

- (a) 4% (b) 1%
- (c) 8% (d) 3%

6. $MP = 50\%$ & $Dis. = 25\%$

P/L% = ?

- (a) 12.5% (b) 11%
- (c) 9.5% (d) 12.5%

Exercise- Type-2

7. $MP = 50\%$ & $L = 25\%$

Dis- = ?

- (a) 45% (b) 40%
- (c) 50% (d) 52%

8. $MP = 100\%$ & $P = 25\%$

Dis- = ?

- (a) 37.5% (b) 39.5%
- (c) 33.5% (d) 43.5%

9. $MP = 33\frac{1}{3}\%$ & $P = 10\%$

Dis.% = ?

- (a) 23.5% (b) 17.5%
- (c) 33.5% (d) 19.5%

10. $MP = 40\%$ $L = 9\%$

Dis. = ?

- (a) 35% (b) 37%
- (c) 33.5% (d) 27%

19. $MP = 25\%$ $Dis. = 40\%$
P/L% = ?

- (a) 20% (b) 26%
- (c) 25% (d) 22%

20. $MP = 60\%$ & $Dis. = 25\%$
P/L% = ?

- (a) 20% (b) 24%
- (c) 25% (d) 22%

Exercise- Type-3

11. $MP = 27.9\%$ & $Dis. = 0\%$

P/L% = ?

- (a) 35.9% (b) 37.9%
- (c) 33.5% (d) 27.9%

12. $MP = 35\%$ & $Dis. = 20\%$

P/L% = ?

- (a) 8% (b) 6%
- (c) 2% (d) 4%

13. $MP = ?$ (20%)

$P = 8\%$ $Dis. = ?$

- (a) 6% (b) 4%
- (c) 10% (d) 12%

14. $MP = 30\%$ $P = 4\%$

Dis. = ?

- (a) 6% (b) 20%
- (c) 10% (d) 12%

15. $MP = 35\%$ $Dis. = 15\%$

P/L% = ?

- (a) 11% (b) 15%
- (c) 13% (d) 17%

16. $MP = 36\%$ $Dis. = 40\%$

P/L% = ?

- (a) 18.4% (b) 15%
- (c) 17.3% (d) 15.3%

17. $MP = 37\frac{1}{2}\%$ & $Dis. = 18\frac{2}{11}\%$

P/L% = ?

- (a) 18.4% (b) 12.5%
- (c) 17.3% (d) 15.3%

18. $MP = 15\%$ & $Dis. = 20\%$

P/L% = ?

- (a) 8% (b) 6%
- (c) 2% (d) 4%

ANSWER KEY - PROFIT AND LOSS

- | | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (d) | 2. (b) | 3. (a) | 4. (c) | 5. (b) | 6. (d) | 7. (c) | 8. (a) | 9. (b) | 10. (a) |
| 11. (d) | 12. (a) | 13. (c) | 14. (b) | 15. (b) | 16. (a) | 17. (b) | 18. (a) | 19. (c) | 20. (a) |



CI AND SI/चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज



Find Effective Rate of Interest (Compound Interest)

Exercise- Type-1

1. 6% @ CI 2 years = ?
(a) 12% (b) 12.30%
(c) 11.64% (d) 12.36%
2. 12% @ CI 2 years = ?
(a) 22% (b) 25.30%
(c) 25.44% (d) 12.36%
3. 13% @ CI 2 years = ?
(a) 12% (b) 27.69%
(c) 26.64% (d) 22.36%
4. 7% @ CI 2 years = ?
(a) 14% (b) 14.49%
(c) 14.64% (d) 14.36%
5. $33\frac{1}{3}\%$ @ CI 2 years = ?
(a) $\frac{9}{16}$ (b) $\frac{5}{16}$
(c) $\frac{7}{9}$ (d) $\frac{7}{18}$
6. 25% @ CI 2 years = ?
(a) 55% (b) 56.25%
(c) 50.64% (d) 52.36%
7. 5% @ CI $2\frac{1}{2}$ years = ?
(a) 10.002% (b) 12.000%
(c) 12.004% (d) 13.006%
8. 14% @ CI $2\frac{5}{7}$ years
(a) 42% (b) 42.30%
(c) 42.64% (d) 42.96%
9. $10 \times CI 2\frac{2}{5}$ years = ?
(a) 25.84% (b) 25.42%
(c) 26% (d) 26.84%
10. 20% @ CI $2\frac{2}{5}$ years = ?
(a) 55.52% (b) 62.30%
(c) 51.64% (d) 52.36%

Exercise- Type-2

- #### Difference of Interest (CI-SI)
11. 5% for 2 years = ?
(a) 0.30% (b) 0.25%
(c) 0.15% (d) 0.20%
 12. 13% for 2 years = ?
(a) 1.5% (b) 1.67%
(c) 0.15% (d) 1.69%

13. 9% for 2 years = ?
(a) 0.81% (b) 1.67%
(c) 0.15% (d) 1.69%
14. 11% for 2 years = ?
(a) 0.81% (b) 1.31%
(c) 0.15% (d) 1.21%
15. 17% for 2 years = ?
(a) 2.89% (b) 1.31%
(c) 2.15% (d) 2.21%
16. 5% for 3 years = ?
(a) 0.81% (b) 0.7625%
(c) 0.225% (d) 0.221%
17. 10% for 3 years = ?
(a) 2.1% (b) 1.31%
(c) 3.1% (d) 1.21%
18. $11\frac{1}{9}\%$ for 3 years = ?
(a) 2.1% (b) 3.31%
(c) 3.1% (d) 3.84%
19. 10% for 2 years = ?
(a) 2.1% (b) 1.31%
(c) 3.1% (d) 1%
20. $16\frac{2}{3}\%$ for 1st & $33\frac{1}{3}\%$ for 2nd
= ?
(a) $\frac{11}{18}$ (b) $\frac{5}{18}$
(c) $\frac{7}{18}$ (d) $\frac{1}{18}$

Exercise- Type-3

Half Yearly

21. 6% HY in 1 year = ?
(a) 3.1% (b) 2.31%
(c) 3.09% (d) 3.5%
22. 12% HY in 1 year = ?
(a) 9.11% (b) 13.31%
(c) 11.09% (d) 12.36%
23. 20% HY in 1 year = ?
(a) 21% (b) 23%
(c) 19% (d) 11%
24. $33\frac{1}{3}\%$ HY in 1.5 year = ?
(a) 40.58% (b) 50.8%
(c) 58.79% (d) 42.56%
25. $16\frac{2}{3}\%$ @ CI for 2nd year = ?
(a) 15.58% (b) 19.44%
(c) 18.79% (d) 17.56%

ANSWER KEY - CI AND SI

- | | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (d) | 2. (c) | 3. (b) | 4. (b) | 5. (c) | 6. (b) | 7. (d) | 8. (d) | 9. (a) | 10. (a) |
| 11. (b) | 12. (d) | 13. (a) | 14. (d) | 15. (a) | 16. (b) | 17. (c) | 18. (d) | 19. (d) | 20. (d) |
| 21. (c) | 22. (d) | 23. (a) | 24. (c) | 25. (b) | 26. (a) | 27. (b) | 28. (d) | 29. (c) | 30. (d) |
| 31. (a) | 32. (b) | 33. (d) | 34. (c) | 35. (b) | | | | | |



Simplification (सरलीकरण)



Conditions to be a perfect square number (एक पूर्ण वर्ग संख्या होने की शर्तें)

- ❖ If a no. ends with 2,3,7,8 it can't be a perfect square.
यदि कोई संख्या 2,3,7,8 के साथ समाप्त होती है यह एक पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती।
- ❖ If unit digit is 5 then ten's digit always 2.
यदि इकाई का अंक 5 है तो दहाई का अंक हमेशा 2 होता है।
- ❖ No number can be a perfect square unless its digital root is 0, 1, 4, 7 or 9.
कोई भी संख्या तब तक पूर्ण वर्ग नहीं हो सकती जब तक उसका अंकीय मूल 0, 1, 4, 7 या 9 न हो।
- ❖ Last 2 digit of a perfect square number = last two digits from the squares of numbers between (1 to 24).
एक पूर्ण वर्ग संख्या के अंतिम 2 अंक = (1 से 24) के बीच की संख्याओं के वर्गों के अंतिम 2 अंक।
- ❖ $n \begin{cases} \rightarrow 2K(\text{even}) \rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \rightarrow \text{multiple of 4} \\ \rightarrow 2K+1(\text{odd}) \rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \rightarrow 4(k^2 + 1) + 1 \end{cases}$
 \downarrow
R=1 after divisible by 4

 $\therefore n^2 \rightarrow 4K, 4K + 1$
 $51767 \rightarrow \text{Not a perfect square} / \text{पूर्ण वर्ग नहीं}$
 $\left(\frac{67}{4}, R = 3 \right)$

Find squares (वर्ग खोजें)

- ❖ Base / आधार 100 →
 $102^2 = 102 + 2 | \underline{2^2} = 10404$
 $107^2 = 107 + 7 | \underline{7^2} = 11449$
 $113^2 = 113 + 13 | \underline{13^2} = 126 | \underline{169} \rightarrow 12769$
 $121^2 = 121 + 21 | \underline{21^2} = 142 | \underline{441} \rightarrow 14641$
 $97^2 = 97 - 3 | \underline{3^2} = 9409$
 $92^2 = 92 - 8 | \underline{8^2} = 8464$
 $83^2 = 83 - 17 | \underline{17^2} = 66 | \underline{289} \rightarrow 6889$
- Base / आधार 50 → $\frac{1}{2} \times 100$

$$59^2 = \frac{1}{2} (59 + 9) | \underline{9^2} \rightarrow 3481$$

$$54^2 = \frac{1}{2} (54 + 4) | \underline{4^2} \rightarrow 2916$$

$$48^2 = \frac{1}{2} (48 - 2) | \underline{2^2} \rightarrow 2304$$

$$44^2 = \frac{1}{2} (44 - 6) | \underline{6^2} \rightarrow 1936$$

$$38^2 = \frac{1}{2} (38 - 12) | \underline{12^2} \rightarrow 13 | \underline{144} \rightarrow 1444$$

$$67^2 = \frac{1}{2} (67 + 17) | \underline{17^2} \rightarrow 42 | \underline{289} \rightarrow 4489$$

Base / आधार 200 → 2×100

$$208^2 = 2(208 + 8) | \underline{8^2} = 43264$$

$$219^2 = 2(219 + 19) | \underline{19^2} = 476 | \underline{361} \rightarrow 47961$$

$$194^2 = 2(194 - 6) | \underline{6^2} = 37636$$

$$182^2 = 2(182 - 18) | \underline{18^2} = 328 | \underline{324} \rightarrow 33124$$

Base / आधार 150 → $\frac{3}{2} \times 100$

$$152^2 = \frac{3}{2} (152 + 2) | \underline{2^2} \rightarrow 23104$$

$$141^2 = \frac{3}{2} (141 - 9) | \underline{9^2} \rightarrow 19881$$

$$614^2 = 6(614 + 14) | \underline{14^2} \rightarrow 6 \times 628 | \underline{196} \rightarrow 376996$$

$$793^2 = 8(793 - 7) | \underline{7^2} \rightarrow 8 \times 786 | \underline{49} \rightarrow 628849$$

❖ Last 2 digits of / के अंतिम 2 अंक →

$$18^2, 32^2, 68^2, 82^2, 118^2, 368^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$(50 - 18)^2 \qquad (100 - 18)^2 \qquad (350 + 18)^2 = 24$$

$\therefore x^2, (50k \pm x)^2, (100k \pm x)^2 \rightarrow$ Last 2 digits same. / अंतिम 2 अंक समान।

❖ $x(x+a)(x+2a)(x+3a) + k$ is a perfect square then $k = ?$

$x(x+a)(x+2a)(x+3a) + k$ तब एक पूर्ण वर्ग है $k = ?$

$$\rightarrow (x^2 + 3ax) (\underline{x^2 + 3ax + 2a^2})$$

$$\rightarrow \underbrace{(x^2 + 3ax)^2}_{a^2} + 2 \times a^2 \times \underbrace{(x^2 + 3ax)}_{+2ab} + b^2 = (a+b)^2$$

\therefore to make perfect square add $(a^2)^2 = a^4$

\therefore पूर्ण वर्ग बनाने के लिए $(a^2)^2 = a^4$ जोड़ें।

$$\therefore (\underline{x^2 + 3ax + a^2})^2 \& k = a^4$$

- ❖ If I, II, III, IV are in AP with common difference d
यदि If I, II, III, IV सार्व अंतर d के साथ AP में हैं
Then $I \times II \times III \times IV + d^4 = (I \times IV + d^2)^2$
- ❖ To make perfect square what should add from:
पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें से क्या जोड़ना चाहिए:
 $1119 \times 1126 \times 1133 \times 1140$
 \therefore Gap between these consecutive numbers = 7
इन क्रमागत संख्याओं के बीच का अंतर = 7
 $\therefore 7^4 = 2401$ should be added.
- ❖ To make perfect square what should subtract from:
पूर्ण वर्ग बनाने के लिए इसमें से क्या घटाना चाहिए:
 $841 \times 846 \times 851 \times 856 + 700$
 $\therefore 841 \times 846 \times 851 \times 856 \rightarrow$ to make square $5^4 = 625$ should be added
 $\therefore 841 \times 846 \times 851 \times 856 \rightarrow$ को वर्ग बनाने के लिए $5^4 = 625$ जोड़ा जाना चाहिए
- C. Unit digit of N Unit digit of N^2
N का इकाई अंक N^2 का इकाई अंक

$N=1, 9$	1
$N=2, 8$	4
$N=3, 7$	9
$N=4, 6$	6
$N=5$	5
- ❖ If 3 is repeated n times
I → Before 0 (n-1) times 1
II → Before 9 (n-1) times 8

eg. $\rightarrow 3^2 = 09, \underline{3333}^2 = \underline{1111}0\underline{8888}9$
 $\underline{33}^2 = \underline{1089}$
 $\underline{333}^2 = \underline{110889}$
- ❖ 6 is repeated n times
I → Before 3 (n-1) times 4
II → Before 6 (n-1) times 5

eg. $\rightarrow 6^2 = 36$
 $\underline{66}^2 = \underline{4356}$
 $\underline{666}^2 = \underline{443556}$
 $\underline{66666}^2 = \underline{444443555556}$
- ❖ $9^2 = 81$ $9999^2 = 99980001$
 $\underline{99}^2 = \underline{9801}$
 $\underline{999}^2 = \underline{998001}$
- ❖ $\sqrt{9999800001} + \sqrt{1111088889} - \sqrt{4444355556} = ?$
 $9999 + 33333 - 66666 = \mathbf{66666}$

	n^3	UD
	1^3	1
	2^3	8
	3^3	7
	4^3	4
	5^3	5
	6^3	6
	7^3	3
	8^3	2
	9^3	9
❖	$\sqrt[3]{571787}$ → UD = 3	
	→ Ignore last 3 digit / अंतिम 3 अंकों को अनदेखा करें	
	→ Smaller than 571 perfect cube number = $512 = 8^3$	
	→ 571 से छोटा पूर्ण घन संख्या = $512 = 8^3$	
	$\therefore \sqrt[3]{571787} = 83$	
❖	$N^2 \rightarrow$ odd no. of digits $N^2 \rightarrow$ even no. of digits	
	$N \rightarrow \frac{\text{odd no. of digits} + 1}{2}$ $N \rightarrow \frac{\text{even no. of digits}}{2}$	
❖	$N^2 \rightarrow 17$ digits	
	$N \rightarrow \frac{17+1}{2} = 9$ digits	
	$N^2 \rightarrow 24$ digits	
	$N \rightarrow \frac{24}{2} = 12$ digits	
Square Mirrors (वर्ग दर्पण)		
❖	$14^2 + 87^2 = 78^2 + 41^2$ $15^2 + 75^2 = 57^2 + 51^2$ $17^2 + 84^2 = 48^2 + 71^2$ $26^2 + 97^2 = 79^2 + 62^2$ $27^2 + 96^2 = 69^2 + 72^2$	
Non-terminating repeating decimal (गैर-समाप्ति/अशांत आवर्ती दशमलव)		
	Let $x = 0.55555 \dots$ $(-) \cancel{10x = 5.55555 \dots}$ $9x = 5 \quad \therefore x = \frac{5}{9}$	
❖	$0.77777 \dots = 0.\bar{7} \rightarrow \frac{7}{9}$ (no. of bar = no. of 9) $0.838383 \dots = 0.\bar{83} \rightarrow \frac{83}{99}$ $0.514514514 \dots = 0.\overline{514} \rightarrow \frac{514}{999}$ $0.6823232323 \dots = 0.\overline{6823} \rightarrow \frac{6823-68}{9900} \rightarrow \frac{6755}{9900}$ (no. of non bar digit = no. of zero)	

$$7.518651865186 \dots = 7 + \frac{5186}{9999}$$

$$\diamond \quad 0.866666 \dots = 0.\bar{86} = \frac{86-8}{90} = \frac{78}{90} = \frac{13}{15}$$

$$0.531313131 \dots = 0.\bar{531} = \frac{531-5}{990} = \frac{526}{990}$$

$$0.43777777 \dots = 0.43\bar{7} = \frac{437-43}{900} = \frac{394}{900}$$

$$0.81\overline{69}169 \dots = 0.81\overline{69} = \frac{8169-8}{9990} = \frac{8161}{9990}$$

$$7.581\bar{6} \rightarrow 7 + \frac{5816-581}{9000} \rightarrow 7 \frac{5235}{9000}$$

$$\text{OR } \frac{75816-7581}{9000} = \frac{68235}{9000}$$

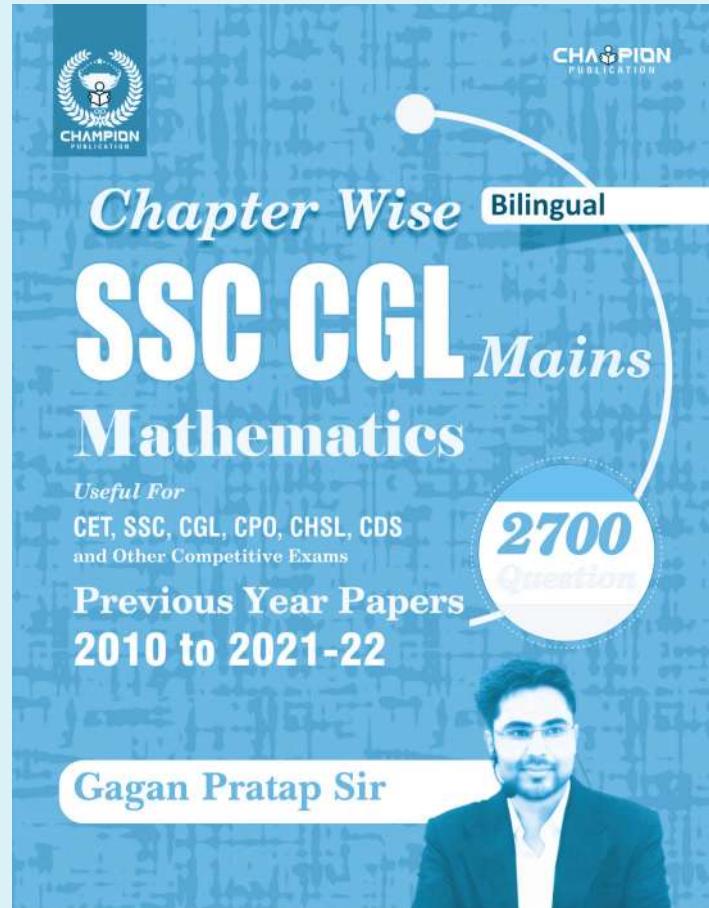
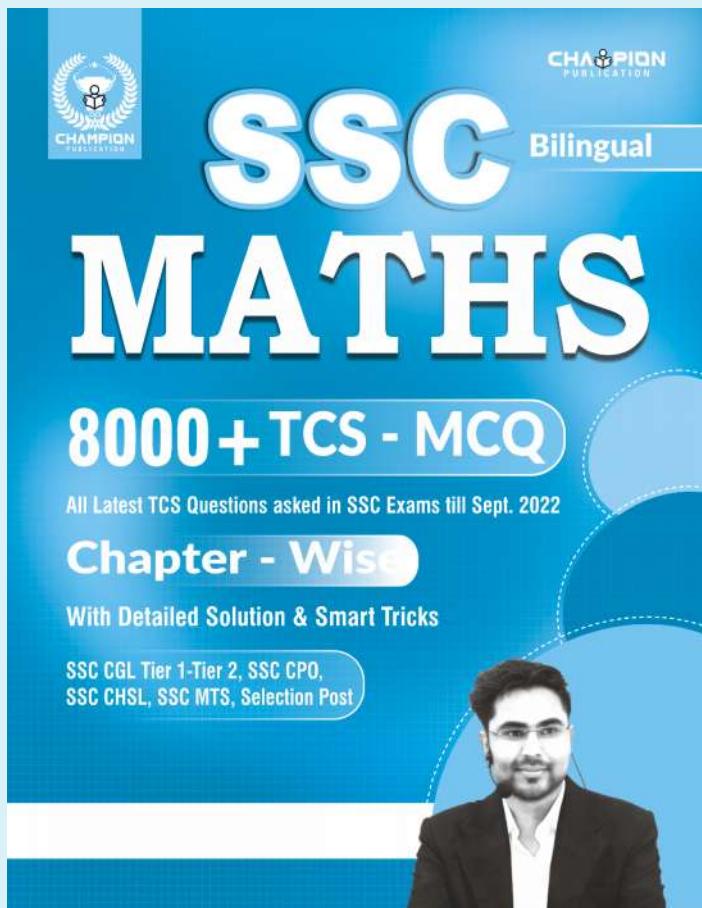
$$11.43\overline{25} \rightarrow 11 + \frac{4325-43}{9900} \rightarrow 11 \frac{4282}{9900} \rightarrow 11 \frac{2141}{4950}$$

$$\text{OR } \frac{114325-1143}{9900} = \frac{113182}{9900}$$

❖ B O D M A S
 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
 Brackets of div. multiply Add subtract
 ↓
 small / ()
 middle / {}
 Larger / []
 of means multiplication

Series Formulae

- $\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{(b-a)} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$
- $\frac{1}{a \times b \times b} = \frac{1}{(c-a)} \left[\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} \right]$
- $\frac{1}{a \times b \times c \times d} = \frac{1}{(d-a)} \left[\frac{1}{abc} - \frac{1}{bcd} \right]$





Surds & Indices (घातांक और करणी)



Law of Indices (करणी का नियम)

- ❖ $a \times a \times a \times \dots n \text{ times} = a^n$
- $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$ ($a \neq 0$)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n)$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}} \quad (n > m)$$

$$= 1 \quad (m = n)$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{n \times m} = (a^n)^m$$

$$(abc)^n = a^n \times b^n \times c^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

$$(a^m)^n \neq a^{m^n}$$

$$(3^2)^4 \neq 3^{2^4}$$

$$3^8 \neq 3^{16}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q} \times p} = \left(a^{\frac{1}{q}} \right)^p = \left(a^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

- ❖ If $a^m = a^n$ then $m = n$
- If $a^m = b^m$ then $a = b$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \& \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$$

$$(-1)^n = +1 \quad (n = \text{even}) \\ = -1 \quad (n = \text{odd})$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{a^2 b} = a \sqrt{b}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$$

- ❖ $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, where a and b are positive

Useful Result/महत्वपूर्ण परिणाम

$$\text{❖ If } x = \frac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\frac{x+2\sqrt{a}}{x-2\sqrt{a}} + \frac{x+2\sqrt{b}}{x-2\sqrt{b}} = 2$$

$$\text{❖ If } x = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\text{Then, } \frac{x+\sqrt{a}}{x-\sqrt{a}} + \frac{x+\sqrt{b}}{x-\sqrt{b}} = 2$$

Laws of Surds (घातांक के नियम)

$$\text{❖ } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{❖ } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{❖ } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

❖ $\sqrt[n]{a}$ → Radicand
↓ order of surd

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{mn}}$$

$$\sqrt[z]{\sqrt[y]{\left(\sqrt[x]{a}\right)^m}} = a^{\frac{m}{xyz}}$$

Find Square Root (वर्गमूल ज्ञात करें)

$$\text{❖ } \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{ab}} \\ = (2+\sqrt{3}) \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\text{❖ } \sqrt{28+10\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \rightarrow 2 \times 5 \sqrt[5]{3} \\ 5^2 + \sqrt{3}^2 = 28$$

$$xy = a$$

$$x+y = \sqrt{4a+b^2}$$

$$\diamond \quad x = \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \dots}}} = \frac{\sqrt{4a-3}+1}{2}$$

$$y = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \dots}}} = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$$

$$x-y = 1 \quad xy = 2(a-1)$$

$$\diamond \quad \sqrt{a + \sqrt[3]{a - \sqrt[3]{a + \dots}}} = \frac{\sqrt{4a-3b^2} + b}{2}$$

$$\sqrt{a - \sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a - \dots}}} = \frac{\sqrt{4a-3b^2} - b}{2}$$

$$\diamond \quad \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5} \text{ Powers } \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \Rightarrow \text{LCM} = 12$$

$$\therefore (\sqrt{2})^{12}, (\sqrt[3]{3})^{12}, (\sqrt[4]{5})^{12}$$

$$\rightarrow 2^6, 3^4, 5^3 \quad \therefore \sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$$

↓ ↓ ↓

64 81 125

$$\diamond \quad \text{If } x+y = 12 \text{ (constant)}$$

$$(xy)_{\max} = \text{diff. of } x \text{ & } y \text{ should be min.} = 6 \times 6 = 36$$

$$(xy)_{\min} = \text{diff. of } x \text{ & } y \text{ should be max.} = 1 \times 11 = 11$$

$$\diamond \quad a > b > c$$

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$$

$$\diamond \quad a \times b = 16 \text{ (constant)}$$

$$\therefore (a+b)_{\min} = 4 + 4 = 8 \quad 1 \times 16 \rightarrow 16+1=17$$

$$(a^2+b^2)_{\min} = 4^2+4^2=32$$

$$* a \times b \times c = 125 \text{ (constant) for min } a=b=c=5 /$$

$$(a^2+b^2+c^2)_{\min} = 25+25+25 = 75 /$$

Approx Root Value (लगभग वर्गमूल मान)

$$\diamond \quad \begin{array}{c} \sqrt{13} \\ \sqrt{9} \leftarrow \sqrt{16} \\ \textcircled{3} \qquad \textcircled{4} \end{array}$$

$$\therefore 3 < \sqrt{13} < 4$$

$$3 + \frac{13-9}{16-9} \Rightarrow 3 + \frac{4}{7} \Rightarrow 3 \frac{4}{7} \Rightarrow 3.57$$

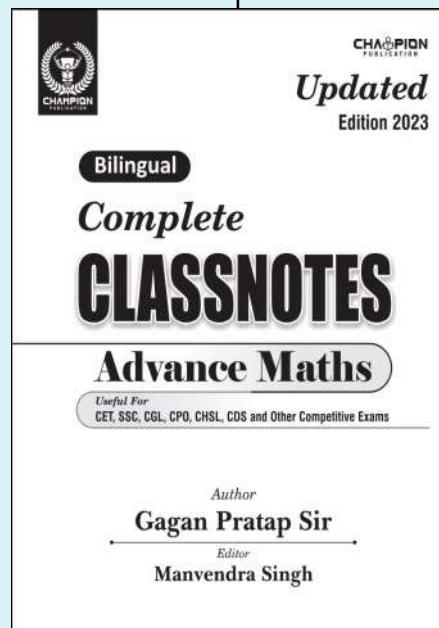
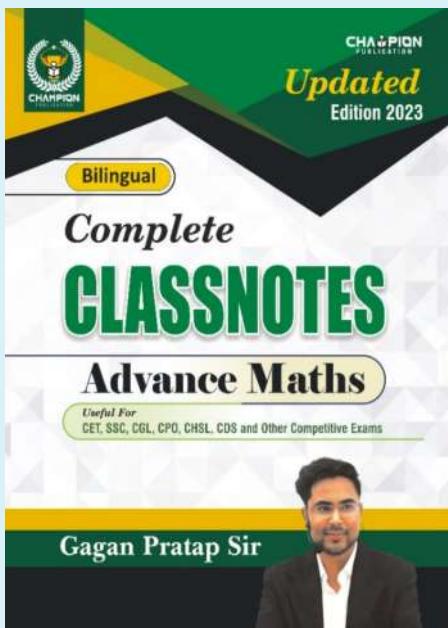
$$\begin{array}{c} \sqrt{16} \\ \sqrt{21} \leftarrow \sqrt{25} \quad 4 + \frac{5}{9} \rightarrow 4 \frac{5}{9} \rightarrow 4.55 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{27} \\ \sqrt{53} \leftarrow \sqrt{64} \quad \rightarrow 3 + \frac{26}{37} \approx 3.7 \end{array}$$

$$\diamond \quad \sqrt{121} = 11 \quad \sqrt{1234321} = 1111$$

$$\sqrt{12321} = 111 \quad \sqrt{1234567654321} = 1111111$$

$$\diamond \quad \text{If I, II, III, IV are in AP with common diff. } d \text{ then } I \times II \times III \times IV + d^4 = (I \times IV + d^2)^2$$



INDEX	
GEOMETRY [गeometri]	
(1) Line and angle [लाइन और थोर्ड]	3-12
(2) Type of Triangle, Interior and Exterior angle, Inequality of triangle and theorem [त्रिकोण के प्रकार, अंतर्बोन और बाहरी कोण, त्रिकोण की असमिक्यालीय विधि]	13-44
(3) Basic Proportionality Theorem [बासिक प्रोपोर्शनलिटी थेमेंसन]	45-65
(4) Area of Triangle [त्रिकोण का क्षेत्रफल]	66-79
(5) Similarity of Triangle [त्रिकोण की समानान्दीता]	80-106
(6) Converse of Basic Proportionality Theorem [बासिक प्रोपोर्शनलिटी थेमेंसन का विवरणीय]	107-122
(7) Centers of triangle [इनसेंट्रल] [त्रिकोण के केंद्र (इनसेंट्रल)]	123-141
(8) Circumcenter, Orthocenter [सिरकेंटर, ओर्थोकेंटर]	142-164
(9) Centroid [सेंट्रोइड]	165-179
(10) Altitude, Median, Angle bisector [उच्चार्ता, मीडिन, कोण विभाजक]	180-199
(11) Right angle triangle [वायु कोण का त्रिकोण]	200-219
(12) Square, Rectangle [एस्क्यूर, रेक्टेङ्कल]	220-239
(13) Parallelogram, Rhombus, Trapezium [पारलेलोग्राम, रॉम्बस, ट्रैपेजियम]	240-263
(14) Circle [angle based questions] [जैविक कोणों के विषयी वायर्सन के प्रश्न]	264-305
(15) Circle [Tangent/chord based questions] [जैवि क्यूंडन वायर्सन के प्रश्न]	306-335
Co-ordinate Geometry [को-ऑर्डिनेट ज्यामिति]	
(1) Point [पॉइंट]	336-361
2D Mensuration [2D मैन्युरेशन]	
(1) Triangle [त्रिकोण]	362-374
(2) Quadrilateral [क्वारेलेटरल]	375-389
(3) Circle/Semi-circle [सेमी-साईर्कल]	390-416
(4) Polygon [पॉलिगोन]	417-427
3D Mensuration [3D मैन्युरेशन]	
(1) Cube, Cuboid [क्यूब, क्यूबाइड]	428-441
(2) Cylinder, Hollow Cylinder [सिलेंडर, हॉलो सिलेंडर]	442-457
(3) Cone, Cutting of Cone, Frustum [कॉन, कॉन का कटाव, फ्रूस्यम]	458-475
(4) Sphere, Hemisphere [स्फेर, हेमिस्फेर]	476-488
(5) Prism [प्रिज्म]	489-493
(6) Pyramid [पायरामिड]	494-503
Algebra [गणितशास्त्र] / 504-659	
Trigonometry [त्रिकोणमिति] / 660-834	
Maxima Minima [माइक्सा मिनिमा वायर्सन]	802-811
Height and Distance [हाईट और डिस्टेन्स]	812-834
Statistics [स्टैटिस्टिक्स] / 833-850	
Probability [प्रॉबिलिटी] / 851-875	
Permutation and Combination [परमेट्रियन और कॉम्बिनेशन] / 876-896	



Algebra (बीजगणित)



Square Formulae

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
2. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
3. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
4. $ab = \frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$
5. $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$
6. $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$
7. $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$
8. $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$
9. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (a - b)^2 + 2ab$
10. $(a^2 - b^2)^2 = a^4 + b^4 - 2a^2b^2$
11. $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$
12. $a^4 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2$
13. $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$
14. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)}$
15. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

Cube Formulae

1. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$
2. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
3. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
4. $a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$
6. $a^2 + b^2 - ab = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$
7. $a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - ab}$
8. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$
9. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
10. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
11. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$
12. $a^3 - b^3 = (a - b)[(a - b)^2 + 3ab]$
13. $a^2 + b^2 + ab = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$
14. $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab}$

15. $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b^3 + 6a^2b = 2b(b^2 + 3a^2)$

16. $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2 = 2a(a^2 + 3b^2)$

Componendo & Dividendo Rule (योगांतरानुपात नियम)

$$\text{If } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\text{If } \frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{2x}{2y} = \frac{a+b}{a-b} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a+b}{a-b}$$

How to find Conjugate

अगर square का difference 1 है तो conjugate में सिर्फ sign change होगा अगर difference 1 नहीं है तो square के difference से divide कर देंगे।

- ❖ If $x = 15 + 4\sqrt{14}$ then $\frac{1}{x} = ?$

$$(15)^2 - (4\sqrt{14})^2 \Rightarrow 225 - 224 \Rightarrow 1$$

$\therefore \frac{1}{x} = 15 - 4\sqrt{14}$ (square का diff. 1 है इसलिए सिर्फ sign change होगा)

- ❖ If $x > \frac{1}{x}$

$$\text{Then } x + \frac{1}{x} = 2 \times \text{Bigger no.} = 2 \times 15 = 30$$

$$x - \frac{1}{x} = 2 \times \text{smaller no.} = 2 \times 4\sqrt{14} = 8\sqrt{14}$$

If $x < \frac{1}{x}$ then $x + \frac{1}{x} = 2 \times \text{Big number}$

$$x - \frac{1}{x} = -2 \times \text{small number}$$

Power 2 Formulae

1. If $x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 - 2$

- ❖ If $x + \frac{1}{x} = k$

Then $x(x - k) = -1$ (Important)

or $x(x - k) + 1 = 0$

or $x^2 - kx + 1 = 0$

2. If $x - \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = k^2 + 2$

Then

$$x - k = \frac{1}{x}$$

$$x(x - k) = 1$$

$$x^2 - kx - 1 = 0$$

3. If $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{2}$ then $x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$

$$x^4 + 1 = 0$$

Power difference 4 results in zero

$$\therefore x^4 + x^0 = 0$$

4. $x + \frac{1}{x} = k$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} + 2 = k + 2$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \pm\sqrt{k+2}$$

5. $x^2 + \frac{1}{x^2} = k$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = k + 2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\sqrt{k+2}$$

6. $x^2 + \frac{1}{x^2} = k$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = k - 2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm\sqrt{k-2}$$

Same Power Formulae

❖ If $x + \frac{1}{x} = k$, then $x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{k^2 - 4}$

❖ If $x - \frac{1}{x} = k$, then $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{k^2 + 4}$

❖ If $\frac{A+B}{\sqrt{AB}} = a$, then $\frac{A-B}{\sqrt{AB}} = \pm\sqrt{a^2 - 4}$

❖ If $\sqrt{\frac{A}{B}} + \sqrt{\frac{B}{A}} = a$, then $\sqrt{\frac{A}{B}} - \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{a^2 - 4}$

Power 3 Formulae

1. If $x - \frac{1}{x} = k$, then $x^3 - \frac{1}{x^3} = k^3 + 3k$

2. If $x + \frac{1}{x} = k$ then $x^3 + \frac{1}{x^3} = k^3 - 3k$

$$x + \frac{1}{x} = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2, 18, 52, 110, 198, 322, 488, 702, 970$$

$$x - \frac{1}{x} = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 14, 36, 76, 140, 234, 364, 536, 756, 1030$$

3. $x + \frac{1}{x} = \sqrt{t}$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (\sqrt{t})^3 - 3\sqrt{t} = t\sqrt{t} - 3\sqrt{t} = (t-3)\sqrt{t}$$

4. If $x - \frac{1}{x} = \sqrt{t}$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = (t+3)\sqrt{t}$$

5. If $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = a$, then $x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = a^3 - 3a$

6. If $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = a$, then $x\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = a^3 + 3a$

7. If $\frac{a-b}{\sqrt{ab}} = k$ or $\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = k$,

$$\text{then } \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = k^3 + 3k$$

8. If $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} = k$ or $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = k$

$$\text{then } \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = k^3 - 3k$$

9. If $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{3}$, then $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$$

$$x^6 + 1 = 0$$

$$x^6 = -1$$

7. $(a^5 - b^5) = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$
 $(a^5 + b^5) = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

Higher Power Formulae

1. $x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

2. $x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

3. $\left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right)$

4. $x^7 + \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

5. $x^7 - \frac{1}{x^7} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)$

6. $x^8 - \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

Formulae based on $x + \frac{1}{x}$

1. If $x + \frac{1}{x} = 2$, then $x = 1$

2. If $x + \frac{1}{x} = -2$, then $x = -1$

3. If $x + \frac{1}{x} = 1$, then $x^3 = -1$

❖ If $x + \frac{1}{x} = 1$ then $x^2 - x + 1 = 0$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0(x+1)$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$x^3 + x^0 = 0$ power difference 3 results in zero

$$x^3 = -1$$

4. If $x + \frac{1}{x} = -1$ or $x^2 + x + 1 = 0$

$$\text{Then } x^3 = 1$$

$$\text{or } x^2 + x + 1 = 0$$

Relation between Power 2 and Power 4

1. $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$

$$(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = x^4 + y^4 + x^2y^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = x^4 + y^4 + x^2y^2$$

$$(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) = x^4 + y^4 + x^2y^2$$

2. $x^2 + y^2 + xy = A$ and $x^2 + y^2 - xy = B$

$$x^2 + y^2 = \frac{A+B}{2}, xy = \frac{A-B}{2}$$

❖ If $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 189$, $x^2 + xy + y^2 = 21$

(i) $x^2 - xy + y^2 = \frac{189}{21} = 9$

(ii) $x^2 + y^2 = \frac{21+9}{2} = 15$

(iii) $xy = \frac{21-9}{2} = 6$

(iv) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{21+9}{21-9} = \frac{5}{2}$

(v) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 = \frac{17}{4}$

(vi) $x + y = ?$

$$x^2 + xy + y^2 + xy = 21 + 6$$

$$(x + y)^2 = 27 \therefore x + y = 3\sqrt{3}$$

(vii) $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = ?$

$$x^2 - xy + y^2 - xy = 9 - 6 = 3$$

$$(x - y)^2 = 3$$

$$(x - y) = \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

3. $\frac{x^6 - y^6}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2)^3 - (y^2)^3}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + y^4 + x^2y^2)}{(x^2 - y^2)} = x^4 + y^4 + x^2y^2$

4. $a^2 + b^2 + ab = (a+b+\sqrt{ab})(a+b-\sqrt{ab})$

5. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

6. $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = x^4 + y^4$$

$$(x^2 + y^2)^2 - (\sqrt{2}xy)^2 = x^4 + y^4$$

$$(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy) = x^4 + y^4$$

Concept of Root Value

❖ $(x)^2 = (-x)^2 = x^2$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{x^2} & = +x & \text{Root के बाहर} \\ \sqrt{49} & = 7 & \text{(+ve) value जायेगी} \end{array}$$

$$(7)^2 = 49$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ (a-b) & & (b-a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{if } a > b & & \text{if } b > a \end{array}$$

Concept of Degree

$$3x^3 - 7x^2y + 8zx^2 \rightarrow \text{Degree} = 3 \text{ (highest powers)}$$

$$8x + 7 \rightarrow \text{Degree} = 1$$

$$25x^2 - 10x^3 + 19z^{26}x^1 + 48w^1$$

$$\text{Degree} = 27$$

Multiply में power add होगी।

Divide में power subtract होगी।

$xy \rightarrow \text{Degree} = 2$

$$\frac{x^8}{y^3} \rightarrow \text{Degree} = 8 - 3 = 5$$

Symmetric Function

- ❖ Degree of each term is same on both sides.
 $a + b + c, a^2bc + b^2ca + c^2ab$
 $\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2 \rightarrow \text{Both side degree is 2}$
- ❖ $\frac{a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)} = ab + bc + ca$
- ❖ $\frac{a^3 \times (b + c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3 \times (c + a)}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^3 \times (a + b)}{(c - a)(c - b)}$
 $= ab + bc + ca$
- ❖ $\frac{a \times (b - c)^2}{(c - a)(a - b)} + \frac{b \times (c - a)^2}{(a - b)(b - c)} + \frac{c \times (a - b)^2}{(b - c)(c - a)}$
 $= a + b + c$
- ❖ If $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ then $\frac{x^m + y^m + z^m + w^m}{x^{-m} + y^{-m} + z^{-m} + w^{-m}} = (xyzw)^{m/2}$
- ❖ If $x = a + \frac{1}{a}$ and $y = a - \frac{1}{a}$ then $\sqrt{x^4 + y^4 - 2x^2y^2} = 4$
- ❖ If $x + y = 2z$, then the value of $\frac{z}{x - z} + \frac{y}{y - z} = 0$
- ❖ If $x + y = 2z$, then $\frac{x}{x - z} + \frac{y}{y - z} = 2$

If $a + b + c = 0$, then following results follows

1. Then $\frac{1}{(a + b)(b + c)} + \frac{1}{(a + c)(b + a)} + \frac{1}{(c + a)(c + b)} = 0$
2. Then $\frac{a^2}{a^2 - bc} + \frac{b^2}{b^2 - ca} + \frac{c^2}{c^2 - ab} = 2$
3. Then $\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} = 1$
4. Then $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2} = \frac{1}{3}$
5. Then $\frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2} = 0$
6. Then $\frac{2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} = 4$
7. Then $\frac{a + b}{ab}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{b + c}{bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c + a}{ca}(c^2 + a^2 - b^2) = 0$
8. Then $\frac{2a^2}{(b^2 + c^2 - a^2)} + \frac{2b^2}{(a^2 + c^2 - b^2)} + \frac{2c^2}{(a^2 + b^2 - c^2)} = -3$

Some other results

- ⇒ $(x^2 + ax + bx + ab) = (x + a)(x + b)$
- ⇒ $1 + A + B + AB = (1 + A)(1 + B)$
- ⇒ $(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc$
- ⇒ If $xy = 1$ or $x = \frac{1}{y}$ then $\frac{1}{1+x^n} + \frac{1}{1+y^n} = 1$
- ❖ If $a + b + c = 2s$, then $\frac{(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$
- ❖ If $xy + yz + zx = 0$, then $\left(\frac{1}{x^2 - yz} + \frac{1}{y^2 - zx} + \frac{1}{z^2 - xy}\right) = 0$ ($x, y, z \neq 0$)
- ❖ If $pq + qr + rp = 0$, then $\left(\frac{p^2}{p^2 - qr} + \frac{q^2}{q^2 - rp} + \frac{r^2}{r^2 - pq}\right) = 1$
- ❖ If $\left[\sqrt{(a^2 + b^2 + ab)} + \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}\right] = 1$, then $(1 - a^2)(1 - b^2) = \frac{3}{4}$
- ❖ If $(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1$, where x and y are real numbers, then $(x + y)^2 = 0$
- ❖
$$\frac{x^4}{(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)} + \frac{y^4}{(y^2 - x^2)(y^2 - z^2)} + \frac{z^4}{(z^2 - x^2)(z^2 - y^2)} = 1$$
- ❖ If $a + b + c = abc$, then $\frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{ab} + \frac{(1 - b^2)(1 - c^2)}{bc} + \frac{(1 - c^2)(1 - a^2)}{ca} = 4$
- ❖ If $bc + ca + ab = abc$, then $\frac{b+c}{bc(a-1)} + \frac{c+a}{ca(b-1)} + \frac{a+b}{ab(c-1)} = 1$
- ❖ If $xy + yz + xz = 1$, then $\left(\frac{x+y}{1-xy} + \frac{y+z}{1-yz} + \frac{z+x}{1-xz}\right) = \frac{1}{xyz}$
- ❖ If $x = \frac{a-b}{a+b}, y = \frac{b-c}{b+c}, z = \frac{c-a}{c+a}$, then $\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{(1+x)(1+y)(1+z)} = 1$
- ❖ If $x^2 + y^2 = z + 1, y^2 + z^2 = x + 1, z^2 + x^2 = y + 1$, then $xyz = 1$ or $-\frac{1}{8}$
- ❖ $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) = (b - a)(b - c)(c - a)$

- ❖ $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = (a + b)(b + c)(c + a)$
- ❖ $(a + b + c)(ab + bc + ca) = a^2b + b^2a + b^2c + bc^2 + a^2c + a^2c + 3abc$
- ❖ $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$
- ❖ $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = a^2b + b^2a + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + 2abc = (a + b)(b + c)(c + a)$
- ❖ If $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ (where $a \neq b \neq c$) then abc is equal to ± 1

3 Variable Formulae

1. If $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, then $x = 0, y = 0, z = 0$
2. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$
 $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
 $ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$
 $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$
 $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$
3. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
 \downarrow

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca] \\ & \frac{1}{2} [a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + a^2 + c^2 - 2ca] \\ & \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

4. If $\underbrace{a, b, c}_{+d+d}$ are in A.P. with common difference d

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2} [d^2 + d^2 + (2d)^2] = 3d^2$$

5. If $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$
OR $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
6. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
 $= \frac{1}{2} (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
 $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2} = \frac{a+b+c}{2}$
 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) [(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$
 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} (a+b+c)[3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2]$

7. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$
If $a+b+c=0$ then $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
OR $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
8. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} (a+b+c) [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
If $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
OR $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ a+b+c = 0 & & a = b = c \end{array}$$

- ❖ If a, b, c are distinct integers & $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ then $a+b+c=0$
- ❖ If a, b, c are +ve integers & $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ then $a = b = c$
- ❖ If a, b, c are in A.P. then
 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 9bd^2$ (d = common difference)
- 9. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$
 $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3[a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)] + 2abc$
 $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$
- 10. If $x + \frac{1}{y} = a, y + \frac{1}{z} = b, z + \frac{1}{x} = c$
then $xyz + \frac{1}{xyz} = abc - (a + b + c)$

11. If $x - \frac{1}{y} = a, y - \frac{1}{z} = b, z - \frac{1}{x} = c$
then $xyz - \frac{1}{xyz} = abc + (a + b + c)$
12. If $a + b + c = x$
and $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = y$
Then $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = xy - 3$



Theory of Equations (समीकरणों का सिद्धांत)



Polynomial (बहुपद)

- An algebraic expression of the form $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, where $n \in N$, is called a polynomial. It is generally denoted by $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $g(x)$ etc.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ के रूप का एक बीजगणितीय व्यंजक, जहाँ $n \in N$, बहुपद कहलाता है। इसे आमतौर पर $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $g(x)$ आदि द्वारा दर्शाया जाता है।

Real Polynomial (वास्तविक बहुपद)

Let $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ be real numbers and x is a real variable, then, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ is called a real polynomial of real variable x with real coefficients.

माना कि $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं और x एक वास्तविक चर है, फिर, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ को वास्तविक गुणांक के साथ वास्तविक चर x का वास्तविक बहुपद कहा जाता है।

Degree of a Polynomial (एक बहुपद की डिग्री)

- A Polynomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, real or complex is a polynomial of degree n , if $a_n \neq 0$.

एक बहुपद $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, वास्तविक या जटिल डिग्री n का एक बहुपद है, अगर एक $a_n \neq 0$

Some Important Deduction

- Linear Polynomial** → A polynomial of degree one is known as linear polynomial.

रैखिक बहुपद → एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं।

- Quadratic Polynomial** → A polynomial of second degree is known as quadratic polynomial.

द्विघात बहुपद → दो घात वाली बहुपद को द्विघात बहुपद के रूप में जाना जाता है।

- Cubic Polynomial** → A polynomial of degree three is known as cubic polynomial.

त्रिघात बहुपद → तीन घात वाली बहुपद को त्रिघात बहुपद के रूप में जाना जाता है।

- Biquadratic Polynomial** → A polynomial of degree four is known as biquadratic polynomial.

द्विवर्गीय बहुपद → चार घात वाली बहुपद को द्विवर्गीय बहुपद के रूप में जाना जाता है।

Polynomial Equation / बहुपद समीकरण

If $f(x)$ is a polynomial, real or complex, then $f(x)=0$ is called a polynomial equation.

अगर $f(x)$ एक बहुपद, वास्तविक या जटिल है, तो $f(x)=0$ एक बहुपद समीकरण कहा जाता है।

Quadratic Equation (द्विघात समीकरण)

- A quadratic polynomial $f(x)$ when equated to zero is called quadratic equation.

एक द्विघात बहुपद $f(x)$ जब शून्य के बराबर हो तो द्विघात समीकरण कहलाता है।

i.e. $ax^2 + bx + c = 0$, where $a, b, c \in R$ and $a \neq 0$.

Roots of a Quadratic Equation

एक द्विघात समीकरण की मूल

The values of variable x which satisfy the quadratic equation is called roots of quadratic equation.

चर x के वे मान जो द्विघात समीकरण को संतुष्ट करते हैं, द्विघात समीकरण के मूल कहलाते हैं।

Solution of Quadratic Equation

द्विघात समीकरण का हल

1. Factorisation Method / गुणनखंडन विधि

Let $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$. Then, $x = \alpha$ and $x = \beta$ will satisfy the given equation.

मान लीजिए $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$. तब, $x = \alpha$ और $x = \beta$ दिए गए समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

2. Direct Formula / प्रत्यक्ष सूत्र

Quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) has two roots, given by

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) के दो मूल हैं, जो निम्नलिखित हैं

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{or } \alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

where, $D = \Delta = b^2 - 4ac$ is called discriminant of the equation.

जहाँ, $D = \Delta = b^2 - 4ac$ समीकरण का विविक्तक कहलाता है।

Above formulas also known as **Sridharacharya formula**.

उपरोक्त सूत्रों को श्रीधराचार्य सूत्र के नाम से भी जाना जाता है।

Given quadratic equation→

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$px^2 + qx + r = 0$$

Condition for common root/**समान मूल के लिये शर्त/स्थिति**

One root common/**जब एक मूल समान हो**→ $(aq - pb)(br - qc) = (cp - ra)^2$

Both root common/**जब दोनों मूल समान हो**→ $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

Formation of new quadratic equation by changing the roots of a given quadratic equation

दिये हुये द्विघात समीकरण के मूल को बदलकर नयी द्विघात समीकरण बनाना-

- If new roots are $(\alpha + p)$ and $(\beta + p)$

यदि नये मूल $(\alpha + p)$ और $(\beta + p)$ हैं।

तब Required equation→ $a(x - p)^2 + b(x - p) + c = 0$

- If new roots are $(\alpha - p)$ and $(\beta - p)$

यदि नये मूल $(\alpha - p)$ और $(\beta - p)$ हैं।

Then required equation→ $a(x + p)^2 + b(x + p) + c = 0$

- If new root are $\frac{1}{\alpha}$ and $\frac{1}{\beta}$

यदि नये मूल $\frac{1}{\alpha}$ और $\frac{1}{\beta}$ हैं।

Then required equation→ $a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + b\frac{1}{x} + c = 0$

- If new roots are α^2 and β^2

यदि नये मूल α^2 और β^2 हैं।

Then required equation→ $a(\sqrt{x})^2 + b\sqrt{x} + c = 0$

- If new roots are $p\alpha$ and $p\beta$

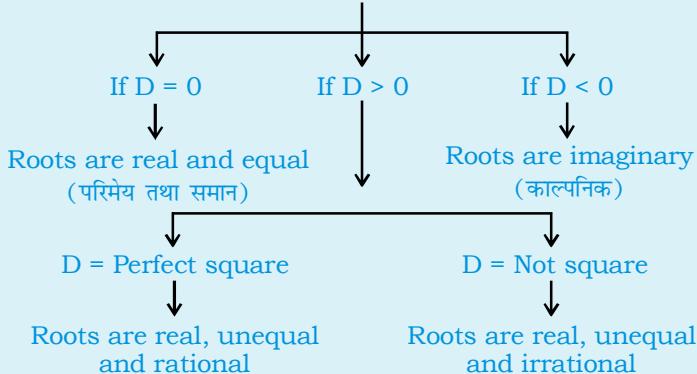
यदि नये मूल $p\alpha$ और $p\beta$ हैं।

Then required equation⇒ $a\left(\frac{x}{p}\right)^2 + b\frac{x}{p} + c = 0$

Nature of Roots (मूल की प्रकृति)

- Let quadratic equation be $ax^2 + bx + c = 0$, whose discriminant is D.

Nature of Roots



- Conjugate Roots**→ The irrational (complex) roots of a quadratic equation, whose coefficients are rational (real) always occur in conjugate pairs. Thus,

संयुग्मी मूल→ द्विघात समीकरण के अपरिमेय (जटिल) मूल, जिनके गुणांक परिमेय (वास्तविक) होते हैं, सदैव संयुग्म युग्मों में होते हैं। इस प्रकार,

- If one root be $\alpha + i\beta$, then other root will be $\alpha - i\beta$.
यदि एक मूल $\alpha + i\beta$ है तो दूसरा मूल $\alpha - i\beta$ पड़े होगा।
- If one root be $\alpha + \sqrt{\beta}$, then other root will be $\alpha - \sqrt{\beta}$.
यदि एक मूल $\alpha + \sqrt{\beta}$ है, तो दूसरा मूल $\alpha - \sqrt{\beta}$ होगा।

Relation between Roots and Coefficients

(मूल और गुणांक के बीच संबंध)

- Quadratic Equation / द्विघात समीकरण**

If roots of quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) are α and β , then

यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) के मूल α और β हैं, तो

Sum of roots / मूलों का योग = $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

= $-\frac{\text{Coefficient of } x (x \text{ का गुणांक})}{\text{Coefficient of } x^2 (x^2 \text{ का गुणांक})}$

Product of roots / मूलों का गुणनफल

= $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{constant term} / (\text{अचर पद})}{\text{coefficient of } x^2 (x^2 \text{ का गुणांक})}$

Also, $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$

- Cubic Equation / घन समीकरण**

If α, β and γ are the roots of cubic equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

यदि α, β और γ घन समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के मूल हैं।

Then, $\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

- Biquadratic Equation / द्विवर्गीय समीकरण**

If α, β, γ and δ are the roots of the biquadratic equation

यदि α, β, γ और δ द्विवर्गीय समीकरण के मूल हैं

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, then

$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$,

$$S_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$$

$$= (-1)^2 \frac{c}{a} = \frac{c}{a}$$

$$\text{or } S_2 = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) + \alpha\beta + \gamma\delta = \frac{c}{a}$$

$$S_3 = \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \alpha\beta\delta$$

$$= (-1)^3 \frac{d}{a} = -\frac{d}{a}$$

$$\text{or } S_3 = \alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) = -\frac{d}{a}$$

$$\text{and } S_4 = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta = (-1)^4 \frac{e}{a} = \frac{e}{a}$$

Formation of Polynomial Equation from Given Roots

दिए गए मूलों से बहुपद समीकरण का निर्माण

- If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ are the roots of an n th degree equation, then the equation is $x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \dots + (-1)^n S_n = 0$, where S_n denotes the sum of the products of roots taken n at a time.

यदि $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ दिग्री समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण $x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \dots + (-1)^n S_n = 0$, जहाँ S_n एक समय में ली गई मूलों के गुणनफल के योग को दर्शाता है।

1. Quadratic Equation / द्विघात समीकरण

If α and β are the roots of a quadratic equation, then the equation is $x^2 - S_1x + S_2 = 0$, where S_1 = sum of roots and S_2 = product of roots

यदि α और β द्विघात समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण $x^2 - S_1x + S_2 = 0$ है, जहाँ S_1 = मूलों का योग और S_2 = मूलों का गुणनफल

2. Cubic Equation / घन समीकरण

If α, β and γ are the roots of cubic equation, then the equation is

यदि α, β और γ घन समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण है

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

$$\text{i.e. } x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

3. Biquadratic Equation / द्विवर्गीय समीकरण

If α, β, γ and δ are the roots of a biquadratic equation, then the equation is

यदि α, β, γ और δ द्विवर्गीय समीकरण के मूल हैं, तो समीकरण है

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

$$\text{i.e. } x^4 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha)x^2 - (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha)x + \alpha\beta\gamma\delta = 0$$

Maximum and Minimum Values of Quadratic Expression (द्विघात व्यंजक का अधिकतम और न्यूनतम मान)

- If $a > 0$, quadratic expression has least value at

$$x = \frac{-b}{2a}. \text{ This least value is given by } \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

But their is no greatest value.

यदि $a > 0$, $x = \frac{-b}{2a}$ पर द्विघात व्यंजक का मान न्यूनतम है, तो यह

न्यूनतम मान = $\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ लेकिन उनका कोई अधिकतम मान नहीं है।

- If $a < 0$, quadratic expression has greatest value at $x = -\frac{b}{2a}$. This greatest value is given by $\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$. But their is no least value.

यदि $a < 0$, द्विघात व्यंजक का $x = -\frac{b}{2a}$ पर सबसे बड़ा मान है, तो

यह सबसे बड़ा मान = $\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ लेकिन उनका कोई न्यूनतम मान नहीं है।

Inequality (असमानता)

- A statement involving the symbols $>$, $<$, \leq or \geq is called an inequality or in equation. Here, the symbols $<$ (less than), $>$ (greater than), \leq (less than or equal to) and \geq (greater than or equal to) are known as symbol of inequalities.

$>$, $<$, \leq या \geq प्रतीकों को शामिल करने वाले एक कथन को असमानता या समीकरण कहा जाता है। यहाँ, प्रतीक $<$ (इससे कम), $>$ (इससे बड़ा), \leq (इससे कम या इसके बराबर) और \geq (इससे बड़ा या इसके बराबर) को असमानताओं के प्रतीक के रूप में जाना जाता है।

e.g. $5 < 7$, $x \leq 2$, $x + y \geq 11$

Types of Inequalities / असमानताओं के प्रकार

- Numerical inequality** → An inequality which does not involve any variable is called a numerical inequality.

संख्यात्मक असमानता → एक असमानता जिसमें कोई चर शामिल नहीं होता है, संख्यात्मक असमानता कहलाती है।

e.g. $4 > 2$, $8 < 21$

- Literal inequality** → An inequality which have variables is called literal inequality.

शाब्दिक असमानता → एक असमानता जिसमें चर होते हैं, शाब्दिक असमानता कहलाती है।

e.g. $x < 7$, $y \geq 11$, $x - y \leq 4$

- Strict inequality** → An inequality which have only $<$ or $>$ is called strict inequality.

कठोर असमानता → ऐसी असमानता जिसमें केवल $<$ या $>$ हो, कठोर असमानता कहलाती है।

e.g. $3x + y < 0$, $x > 7$

- Slack inequality** → An inequality which have only

सुस्त असमानता → एक असमानता जो केवल है

\geq or \leq is called slack inequality.

\geq या \leq को सुस्त असमानता कहा जाता है।

e.g. $3x + 2y \leq 0$, $y \geq 4$



Maximum and Minimum value in Algebra

(बीजगणित में अधिकतम एवं न्यूनतम मान)



MAXIMUM AND MINIMUM VALUES (अधिकतम और न्यूनतम मान)

❖ Concept-1

Max. value Min. value

Odd power $\rightarrow (x)$	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow -\infty$
Even power $\rightarrow (x^2)$	$\rightarrow +\infty$	0

Ex.(i) $10 + x^2$ Max $\rightarrow +\infty$
Min $\rightarrow 0$

Min. value of $(10 + x^2) = 10 + 0 = 10$

Max. value of $(10 + x^2) = 10 + \infty = +\infty$

(ii) $10 + x^3$ Max $\rightarrow -\infty$
Min $\rightarrow +\infty$

Min. value of $(10 + x^3) = 10 - \infty = -\infty$

Max. value of $(10 + x^3) = 10 + \infty = +\infty$

(iii) $10 - x^2$ Max $\rightarrow +\infty$
Min $\rightarrow 0$

Min. value of $10 - x^2 = 10 - \infty = -\infty$

Max. value of $10 - x^2 = 10 - 0 = 10$

❖ If $x + y = a$ then the value of $x \times y$ will be maximum at $x = y$

Ex. If a, b, c, d are + we number such that $a + b + c + d = 1$ then find the maximum value of abcd?

Sol. $a + b + c + d = 1$ (abcd)max.

$$a = b = c = d = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$$

S. no.	Pair of lines or equation	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	Compare of ratios	Graphical representation	Algberic representation
1.	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	Intersecting lines	Exactly one solution (unique)
2.	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	Coincident lines	Many solutions
3.	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	Parallel lines	No. solution

❖ Quadratic equation and positive/negative roots

Quadratic equation

Positive/Negative roots

If quadratic equation is like Then

(a) $ax^2 + bx + c = 0$

both value of x is
negative

(b) $ax^2 - bx + c = 0$

both value of x is positive

(c) $ax^2 + bx - c = 0$

One value of x is positive

and one is negative

(d) $ax^2 - bx - c = 0$

One value of x is positive

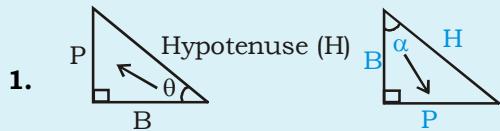
and one is negative



Trigonometry (त्रिकोणमिति)



Basic Triplets Theory (मूल त्रिक सिद्धांत)



P → Perpendicular / लम्ब

B → Base / आधार

$H^2 = P^2 + B^2 \rightarrow$ Pythagoras Theorem / पाइथागोरस प्रमेय

2. A Pythagoras triplet is a set of Positive integers a, b and c that fits the rule : $a^2 + b^2 = c^2$

एक पाइथागोरस त्रिगुण धन पूर्णांकों a, b और c का एक सेट है जो $a^2 + b^2 = c^2$ नियम का पालन करता है:

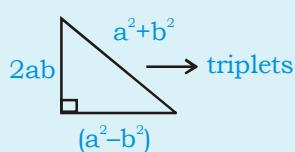
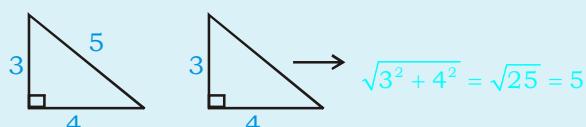
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$\therefore 3, 4, 5$ are triplets / त्रिगुण हैं

3. Some Pythagorean Triplets / कुछ पाइथागोरस त्रिक :

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)
(8, 15, 17)	(9, 40, 41)	(11, 60, 61)
(12, 35, 37)	(13, 84, 85)	(16, 63, 65)
(20, 21, 29)	(28, 45, 53)	(33, 56, 65)
(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)
(65, 72, 97)	(20, 99, 101)	

- ❖ In a triplet largest side is hypotenuse
एक त्रिक में सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है



- ❖ $a^2-b^2, 2ab, a^2+b^2$
 $x^2-1, 2x, x^2+1$] Triplets form
 $a-b, 2\sqrt{ab}, a+b$]

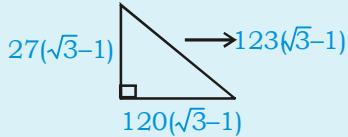
4. Multiplication and division of basic triplets results into other triplets

मूल त्रिक का गुणन और विभाजन अन्य त्रिक में बदल जाता है

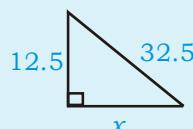
$$(3, 4, 5) \xrightarrow{\times 2} (6, 8, 10)$$

$$(5, 12, 13) \xrightarrow{\times 2} (10, 24, 26) \xrightarrow{\times 1.5} (15, 36, 39)$$

$$(3, 4, 5) \xrightarrow{\times \sqrt{2}} (3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$$



$$\begin{array}{ccc} 9, & 40, & 41 \rightarrow \text{Triplet} \\ \downarrow \times 3 & \downarrow \times 3 & \downarrow \times 3 \\ 27 & 120 & 123 \end{array}$$

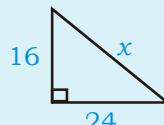


$$12.5 : 32.5 \quad 5, 12, 13 \rightarrow \text{Triplet}$$

$$5 : 13$$

$$\therefore x = 12 \times 2.5 = 30$$

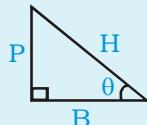
जब Triplet ना बने



$$16 : 24 : x$$

$$8 \times 2 : 8 \times 3 : 8\sqrt{9+4} = 8\sqrt{13}$$

Basic Trigonometry Ratios (मूल त्रिकोणमिति अनुपात)



$$\sin \theta = \frac{P}{H} \quad \cot \theta = \frac{B}{P}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{H} \quad \sec \theta = \frac{H}{B}$$

$$\tan \theta = \frac{P}{B} \quad \cosec \theta = \frac{H}{P}$$

$$2. \quad \cosec \theta = \frac{1}{\sin \theta} \Rightarrow \sin \theta \times \cosec \theta = 1$$

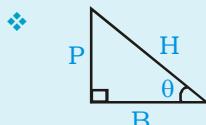
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta \times \sec \theta = 1$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \Rightarrow \tan \theta \times \cot \theta = 1$$

$$3. \ Tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\csc\theta}{\sec\theta}$$

Basic Trigonometric Identities (मूल त्रिकोणमितीय पहचान)



$$P^2 + B^2 = H^2$$

$$1. \left(\frac{P}{H}\right)^2 + \left(\frac{B}{H}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \rightarrow \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \rightarrow \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 = 1^2$$

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$$

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 = (1)^3$$

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$$

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$2. \ (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \div \cos^2\theta$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \rightarrow \tan^2\theta = (\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)$$

$$\frac{\tan\theta}{(\sec\theta + 1)} = \frac{(\sec\theta - 1)}{\tan\theta}$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$$

$$(\sec\theta - \tan\theta) = \frac{1}{(\sec\theta + \tan\theta)}$$

$$(\sec^2\theta - \tan^2\theta)^2 = (1)^2$$

$$\sec^4\theta + \tan^4\theta - 2\sec^2\theta\tan^2\theta = 1$$

$$\sec^4\theta + \tan^4\theta = 1 + 2\sec^2\theta\tan^2\theta$$

$$(\sec^2\theta - \tan^2\theta)^3 = (1)^3$$

$$\sec^6\theta - \tan^6\theta - 3\sec^2\theta\tan^2\theta \times 1 = 1$$

$$\sec^6\theta - \tan^6\theta = 1 + 3\sec^2\theta\tan^2\theta$$

$$3. \ (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1) \div \sin^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \cosec^2\theta$$

$$\cot^2\theta = \cosec^2\theta - 1 \Rightarrow \frac{\cot\theta}{\cosec\theta + 1} = \frac{\cosec\theta - 1}{\cot\theta}$$

$$\cosec^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$(\cosec\theta + \cot\theta)(\cosec\theta - \cot\theta) = 1$$

$$(\cosec\theta + \cot\theta) = \frac{1}{(\cosec\theta - \cot\theta)}$$

$$\cosec^4\theta + \cot^4\theta = 1 + 2\cosec^2\theta\cot^2\theta$$

$$\cosec^6\theta - \cot^6\theta = 1 + 3\cosec^2\theta\cot^2\theta$$

Trigonometry Ratio Table (त्रिकोणमिति अनुपात तालिका)

Angle (In Degrees)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Angle (In Radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Not Defined	0	Not Defined	0
cot	Not Defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Not Defined	0	Not Defined
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	Not Defined	-1	Not Defined	1
cosec	Not Defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	Not Defined	-1	Not Defined

❖ $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

$\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$

$\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta \cos^2\theta$

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta \cos\theta}$$

$$= \sec\theta \operatorname{cosec}\theta = 2 \operatorname{cosec}2\theta$$

Range

1. $-1 \leq \sin\theta \leq +1$

$$\sin\theta = \frac{P}{H}, H > P (\therefore \text{Always between } -1 \text{ and } +1)$$

$-1 \leq \cos\theta \leq +1 \quad (-1)^2 = 1$

$-\infty \leq \tan\theta, \cot\theta \leq +\infty$

$\therefore 0 \leq \sin^2\theta, \cos^2\theta \leq +1$

$0^\circ \rightarrow 90^\circ \sin\theta$ increases from 0 to 1

$0^\circ \rightarrow 90^\circ \cos\theta$ decreases from 1 to 0

$$\sin 61^\circ > \cos 32^\circ \Rightarrow \cos 32^\circ = \sin 58^\circ$$

$$\therefore \sin 61^\circ > \sin 58^\circ$$

$$\therefore \sin 61^\circ > \cos 32^\circ$$

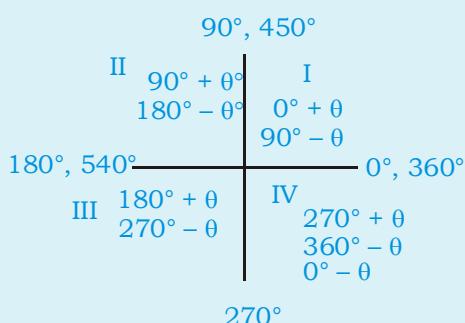
2. $0^\circ < \theta < 45^\circ \quad \sin\theta < \cos\theta \quad \sin 19^\circ < \cos 19^\circ$

$45^\circ < \theta < 90^\circ \quad \sin\theta > \cos\theta \quad \sin 71^\circ > \cos 71^\circ$

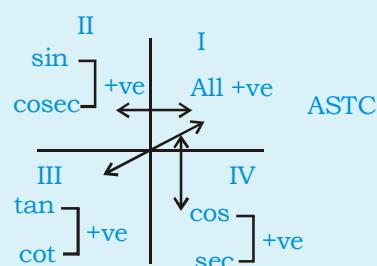
3. If $0 < x < 1, \quad x > x^2$

Quadrant theory (चतुर्थांश सिद्धांत)

1.



$\theta \rightarrow$ Any Acute Angle / कोई न्यून कोण



sin पर → sin +ve in I, II

cos खड़ा → cos +ve in I, IV

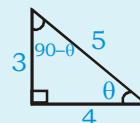
tan तिरछा → Tan +ve in I, III

2. Change of T-Ratio / त्रिकोणमिति-अनुपात का परिवर्तन

$90^\circ, 270^\circ \dots (90^\circ \text{ के odd multiple पर change})$

$180^\circ, 360^\circ \dots \text{no change} (90^\circ \text{ के even multiple पर no change})$

$\sin \leftrightarrow \cos, \tan \leftrightarrow \cot, \sec \leftrightarrow \operatorname{cosec}$



$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{4}{5} = \cos\theta$$

$$\therefore \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$

❖ $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$$

$$\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$$

$$\sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$$

$$\tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

❖ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

$$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$$

$$\sec 150^\circ = \sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

❖ $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cot 240^\circ = \cot(270^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

❖ $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$

$$\tan(270^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\operatorname{cosec}(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$$

$$\sec 240^\circ = \sec(270^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{cosec} 30^\circ = -2$$

❖ $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$

$\tan(270^\circ + \theta) = -\cot\theta$

$$\sin 300^\circ = \sin(270^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$\cot 315^\circ = \cot(270^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

$\text{cosec } 330^\circ = \text{cosec}(360^\circ - 30^\circ) = -\text{cosec } 30^\circ = -2$

❖ $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\tan 780^\circ = \tan(360^\circ \times 2 + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\text{cosec } 1125^\circ = \text{cosec}(360^\circ \times 3 + 45^\circ) = \text{cosec } 45^\circ = \sqrt{2}$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin 180^\circ = 0$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\cos 180^\circ = -1$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\tan 180^\circ = 0$

$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\theta$

If A+B = 90° then

1. If A+B=90° \Rightarrow A, B are complementary to each other

2. $\sin A = \cos B \rightarrow \sin A \sec B = 1$

3. $\tan A = \cot B \rightarrow \tan A \tan B = 1$ or $\cot A \cot B = 1$

4. $\sec A = \cosec B \rightarrow \cos A \cosec B = 1$

$\tan 31^\circ \times \tan 59^\circ = 1$

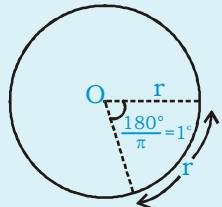
5. $\sin^2 A + \sin^2 B = 1 \rightarrow \sin^2 A + \sin^2(90^\circ - A) = 1$

6. $\cos^2 A + \cos^2 B = 1 \rightarrow \cos^2 A + \cos^2(90^\circ - A) = 1$

Radian Angle Theory (रेडियन कोण सिद्धांत)

1. $\frac{\text{circumference}}{\text{diameter}} = \text{fixed number}$

= π (Irrational number)



$2\pi r \rightarrow 360^\circ$

$$r \rightarrow \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 1 \text{ radian}$$

circle के Radius की बराबर की Arc centre पर 1 radian का Angle बनाएगी।

$\pi \text{ radian } (\pi^\circ) = 180^\circ$

$1^\circ = 60'$, $1' = 60''$

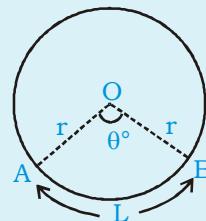
2. $1^\circ \approx 57^\circ 16' 22''$

$\pi \text{ radian} = 180^\circ$

$$1 \text{ rad} (1^\circ) = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ \times 7}{22} = \frac{630^\circ}{11} = 57^\circ + \frac{3^\circ}{11}$$

$$\Rightarrow 3^\circ = 180' \rightarrow \frac{180'}{11} = 16' + \frac{4'}{11} \quad \therefore 1^\circ = 57^\circ 16' 22''$$

$$\Rightarrow 4' = 240'' \rightarrow \frac{240}{11} = 22''$$



$$\overline{AB} = L = 2\pi r \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$L = r \times \frac{\pi\theta^\circ}{180^\circ}$$

$$L = r \times \theta^\circ$$

$$\theta^\circ = \theta^\circ \times \frac{\pi}{180}$$

Some Important Properties (कुछ महत्वपूर्ण गुण)

1. If $a \sin\theta + b \cos\theta = c$ and $a \cos\theta - b \sin\theta = x$ (let)] square and add

$$a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta + 2 \times a \sin\theta \times b \cos\theta = c^2$$

$$a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - 2 \times a \sin\theta \times b \cos\theta = x^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2 + x^2$$

$$x^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

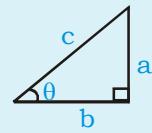
❖ If $a \sin\theta + b \cos\theta = c$ and $a^2 + b^2 = c^2$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$P \quad B \quad H$$

$\frac{a}{c} \sin\theta + \frac{b}{c} \cos\theta = 1$] compare
 $\sin\theta \sin\theta + \cos\theta \cos\theta = 1$

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \cos\theta = \frac{b}{c}$$



❖ If $48\sin\theta + 55\cos\theta = 73$ then $\cot\theta = \frac{55}{48}$

↓ ↓ ↓
P B H

❖ $(\sin\theta + \sec\theta)^2 + (\cos\theta + \csc\theta)^2 = (1 + \sec\theta \csc\theta)^2$

❖ $(1 - \sec\theta + \tan\theta)(1 + \csc\theta + \cot\theta) = 2$

2. If $a\sec A + b\tan A = c$
Then $a\tan A + b\sec A = x$ (Let)

$$a^2 - b^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = c^2 - a^2 + b^2$$

$$x = \pm \sqrt{c^2 - a^2 + b^2}$$

❖ If $a\sec A - b\tan A = c$

$$a\tan A - b\sec A = x$$
 (let)

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - x^2$$

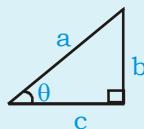
❖ If $a\sec\theta - b\tan\theta = c$ and $a^2 = b^2 + c^2$

$$\frac{a}{c}\sec\theta - \frac{b}{c}\tan\theta = 1 \quad \left(\text{compare } \frac{a}{c} \right)$$

$$\sec\theta \sec\theta - \tan\theta = 1 \quad \left(\text{compare } \frac{b}{c} \right)$$

$$\therefore a\sec\theta - b\tan\theta = c$$

↓ ↓ ↓
H P B



3. If $\sec x + \tan x = \frac{a}{b}$ then $\csc x + \cot x = \frac{a+b}{a-b}$ ($a > b$)

$$\sec x + \tan x = \frac{a}{b}$$

$$\sec x - \tan x = \frac{b}{a}$$

$$2\sec x = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$\sec x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

$$\sec x = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \rightarrow H$$

$$\therefore P = a^2 - b^2$$

↓

$$\frac{H}{P} + \frac{B}{P} = \frac{H+B}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 - b^2}$$

$$= \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}$$

Formula form - (A+B)

1. $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

2. $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

3. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$

$$= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$$

$$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$$

4. $\sin C + \sin D = 2\sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$

❖ $\sin C - \sin D = 2\cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$

❖ $\cos C + \cos D = 2\cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$

❖ $\cos C - \cos D = 2\sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$

❖ $\cos C - \cos D = 2\sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$

Multiples of Angle (कोण के गुणक)

1. $\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

$$\sin A = 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}}$$

$$\cosec 2A = \frac{\sec A \cosec A}{2}$$

2. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

$$= \frac{\cot^2 A - 1}{\cot^2 A + 1}$$

$$\cos A = \sqrt{\frac{1 + \cos 2A}{2}}$$

$$3. \ Tan2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$4. \ Sin3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\Cos3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$5. \ Tan3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$6. \ Tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$7. \ Tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$8. \ Cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$9. \ Cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

Some special formulae (कुछ खास सूत्र)

$$1. \ Tan(45-\theta) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}, \ Tan(45+\theta) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

$$2. \ If A+B = 45^\circ \ or \ 225^\circ \Rightarrow (1+TanA)(1+TanB) = 2$$

$$\tan(A+B) = \tan 45^\circ$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1 \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$$

$$1 + \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1 + 1$$

$$\Rightarrow (1+\tan A)(1+\tan B) = 2$$

$$3. \ If A+B = 45^\circ \ or \ 225^\circ \Rightarrow (\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$$

$$OR (1-\cot A)(1-\cot B) = 2$$

$$4. \ Tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

$$Put B = C = 'A' \Rightarrow \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$If A+B+C=90^\circ$$

$$\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

$$\Rightarrow \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$$

$$OR \cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$$

$$5. \ If A+B+C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$\Rightarrow \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

$$6. \ Tan4\theta = \frac{4\tan\theta(1-\tan^2\theta)}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}$$

$$7. \ \cos^2\theta + \cos^2(60-\theta) + \cos^2(60+\theta) = \frac{3}{2}$$

$$7. \ \cos^3 A + \cos^3(120^\circ - A) + \cos^3(120^\circ + A) = \frac{3}{4} \cos 3A$$

$$8. \ Tan\theta - \tan(60-\theta) + \tan(60+\theta) = 3\tan 30^\circ$$

$$\cot\theta - \cot(60-\theta) + \cot(60+\theta) = 3\cot 30^\circ$$

$$9. \ \sin\theta \sin(60-\theta) \sin(60+\theta) = \frac{1}{4} \sin 3\theta$$

$$\cos\theta \cos(60-\theta) \cos(60+\theta) = \frac{1}{4} \cos 3\theta$$

$$\tan\theta \tan(60-\theta) \tan(60+\theta) = \tan 3\theta$$

$$10. \ \cos\theta \cos 2\theta \cos 2^2\theta \cos 2^3\theta \dots \cos 2^n\theta = \frac{\sin 2^{n+1}\theta}{2^{n+1} \sin \theta}$$

$$11. \ \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$12. \ \sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\diamond \ Tan 75^\circ = \cot 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\diamond \ Tan 15^\circ = \cot 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

Some other formulae (कुछ अन्य सूत्र)

$$1. \ (\sin^2 A + \cos^2 A - \sin A \cos A) (\sin A + \cos A) \\ = \sin^3 A + \cos^3 A$$

$$2. \ \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \tan B \cot A \quad (\text{ऊपर वाली term direct multiply में लिख देते हैं})$$

$$3. \ \left(\frac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2 = \tan^2\theta$$

$$4. \ \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \tan\theta$$

$$5. \ \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \times \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \\ = \cosec\theta + \cot\theta$$

$$6. \ \sqrt{\frac{\cosec A + 1}{\cosec A - 1}} = \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$$

7. $\sqrt{\frac{\sec \alpha + \tan \alpha}{\sec \alpha - \tan \alpha}} = \sqrt{(\sec \alpha + \tan \alpha)^2} = \sec \alpha + \tan \alpha$

8. $\sqrt{\frac{\cot \theta + \cos \theta}{\cot \theta - \cos \theta}} = \sec \theta + \tan \theta$

9. $\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \dots \sin 180^\circ = 0$
 $\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ \dots \cos 90^\circ = 0$
 $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ = 1$

If $A + B = 30^\circ$, $(\sqrt{3} + \tan A)(\sqrt{3} + \tan B) = 4$

If $A + B = 60^\circ$, $(1 + \sqrt{3} \tan A)(1 + \sqrt{3} \tan B) = 4$

If angles are in AP/यदि कोण समान्तर श्रेणी में हैं-

$\sin \theta + \sin (\theta + \beta) + \sin (\theta + 2\beta) + \dots \sin (\theta + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(\theta + \frac{(n-1)\beta}{2} \right)$$

$\cos \theta + \cos (\theta + \beta) + \cos (\theta + 2\beta) + \dots \cos (\theta + (n-1)\beta)$

$$= \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos \left(\theta + \frac{(n-1)\beta}{2} \right)$$

Relation between degree, radian, and grade →

22 radian = 1260 degree

100 grade = 90 degree

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2C}{\pi}$$

Some important Results (कुछ महत्वपूर्ण परिणाम)

If $A+B+C = 180^\circ$,

1. $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

2. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = H \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

3. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -(1 + 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$

4. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

5. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$

➤ $(\sec^2 \theta - 1)(\cosec^2 \theta - 1) = 1$

➤ $\cos^2 \theta + \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} = 1$

➤ $\sin^2 A + \frac{1}{1 + \tan^2 A} = 1$

➤ $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \sec \theta \cosec \theta$

➤ $\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} = 2 \sec^2 \theta$

➤ $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$

➤ $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

➤ $\cosec^2 \theta + \sec^2 \theta = \cosec^2 \theta \sec^2 \theta$

➤ $(1 + \tan^2 \theta)(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = 1$

➤ $(1 + \cot^2 \theta)(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) = 1$

➤ $\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \cosec \theta - \cot \theta$

➤ $\sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \sec \theta - \tan \theta$

➤ $\sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \cosec \theta + \cot \theta$

➤ $\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = (\sec \theta - \tan \theta)^2$

➤ $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

➤ $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \cosec \theta + \cot \theta$

➤ $\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\cosec \theta - \cot \theta)^2$

➤ $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = 2 \sec \theta$

➤ $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta + 2 = \sec^2 \theta + \cosec^2 \theta$

$\sqrt{\sec^2 \theta + \cosec^2 \theta} = \tan \theta + \cot \theta$

➤ $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B \cos^2 A} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$

➤ $\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$

➤ $\frac{1}{1 + \sin A} + \frac{1}{1 - \sin A} = 2 \sec^2 A$

➤ $\frac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A} + \frac{\cot^2 A}{1 + \cot^2 A} = 1$

➤ $\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B$

➤ $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \tan B$

➤ $\frac{\tan A + \tan B}{\cot A + \cot B} = \tan A \tan B$

- $\cot^2 A \operatorname{cosec}^2 B - \cot^2 B \operatorname{cosec}^2 A = \cot^2 A - \cot^2 B$
- $\tan^2 A \sec^2 B - \sec^2 A \tan^2 B = \tan^2 A - \tan^2 B$
- $(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)(1 + \tan \theta + \sec \theta) = 2$

Proof:-

$$(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)(1 + \tan \theta + \sec \theta) = 2$$

L.H.S

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta}\right) \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta}\right) \left(\frac{\cos + \sin \theta + 1}{\cos \theta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta) - 1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = 2 \text{ Hence proved.}$$

- If $\tan \theta + \sin \theta = m$ and $\tan \theta - \sin \theta = n$ then $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

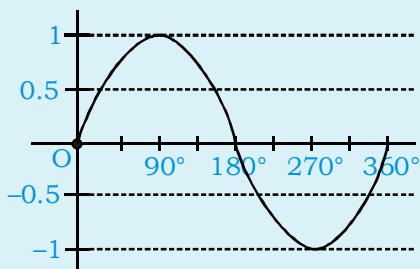
- If $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta$
then $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta$
- If $x = a \sin \theta$
 $y = b \tan \theta$
then $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$
- If $x \sin^3 \theta + y \cos^3 \theta = \sin \theta \cos \theta$ and $x \sin \theta = y \cos \theta$
then $x^2 + y^2 = 1$
or $\Rightarrow x = \cos \theta$ and $y = \sin \theta$
- If $\frac{\sin A}{\sin B} = p$ and $\frac{\cos A}{\cos B} = q$
then $\tan A = \pm \frac{p}{q} \sqrt{\frac{q^2 - 1}{1 - p^2}}$
 $\tan B = \pm \sqrt{\frac{q^2 - 1}{1 - p^2}}$

Interchange of Trigonometry Ratio Table (त्रिकोणमिति अनुपात तालिका का बदलाव)

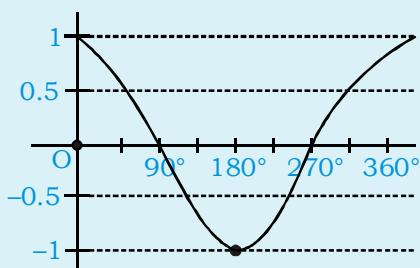
	$\sin \phi$	$\cos \phi$	$\tan \phi$	$\cot \phi$	$\sec \phi$	$\operatorname{cosec} \phi$
$\sin \phi$	$\sin \theta$	$\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$
$\cos \phi$	$\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$	$\cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}}{\operatorname{cosec} \theta}$
$\tan \phi$	$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\cot \theta}$	$\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}}$
$\cot \phi$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$	$\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\cot \theta$	$\frac{1}{\sec^2 \theta - 1}$	$\operatorname{cosec}^2 \theta - 1$
$\sec \phi$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$	$\sec \theta$	$\frac{\operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}$
$\operatorname{cosec} \phi$	$\frac{1}{\sin \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\sqrt{1 + \cot^2 \theta}$	$\frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\operatorname{cosec} \theta$

Trigonometric Functions, Identities and Equations Graph of Trigonometric Functions

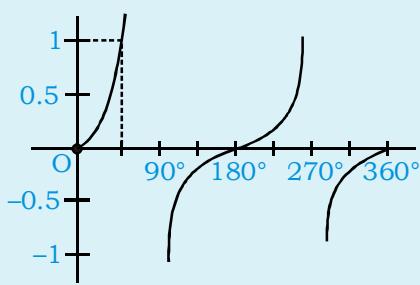
त्रिकोणमितीय कार्य, पहचान और समीकरण त्रिकोणमितीय कार्यों का ग्राफ

1. Graph of $\sin x$ 

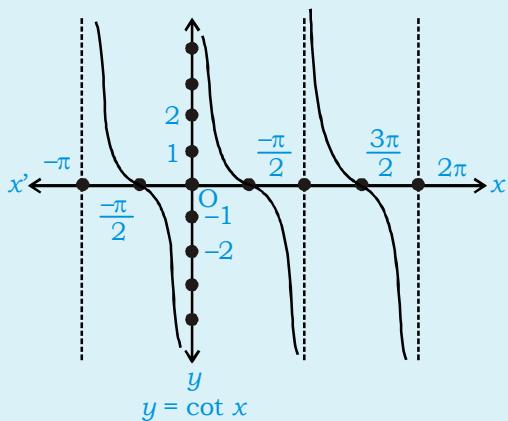
- (i) Domain = R (ii) Range = $[-1, 1]$ (iii) Period = 2π

2. Graph of $\cos x$ 

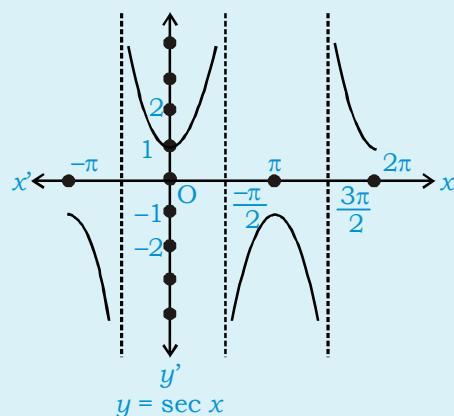
- (i) Domain = R (ii) Range = $[-1, 1]$
(iii) Period = 2π

3. Graph of $\tan x$ 

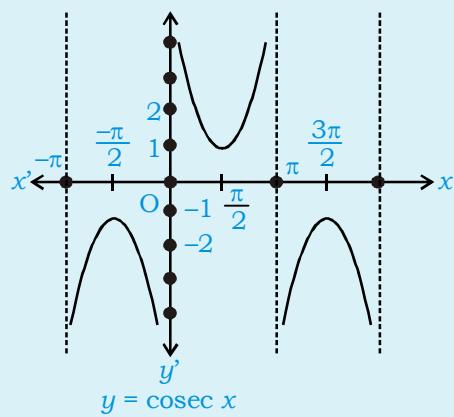
- (i) Domain = $R \sim (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in I$
(ii) Range = $(-\infty, \infty)$
(iii) Period = π

4. Graph of $\cot x$ 

- (i) Domain = $R \sim n\pi$, $n \in I$ (ii) Range = $(-\infty, \infty)$
(iii) Period = π

5. Graph of $\sec x$ 

- (i) Domain = $R \sim (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in I$
(ii) Range = $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
(iii) Period = 2π

6. Graph of cosec x

- (i) Domain = $R \sim n\pi$, $n \in I$
(ii) Range = $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
(iii) Period = 2π

Note $|\sin\theta| \leq 1$, $|\cos\theta| \leq 1$, $|\sec\theta| \geq 1$, $|\cosec\theta| \geq 1$ for all values of θ , for which the functions are defined.



Maxima & Minima (अधिकतम और न्यूनतम)



1. $-1 \leq \sin \theta \leq +1$ $\sin \theta = \frac{P}{H}$, $H \geq P$

$$-1 \leq \cos \theta \leq +1$$

$$-\infty \leq \tan \theta \leq +\infty \quad \tan \theta = \frac{P}{B} \quad (\text{We can take any value of } P \text{ and } B)$$

$$-\infty \leq \cot \theta \leq +\infty$$

$-\infty \leq \sec \theta, \cosec \theta \leq +\infty$ But -1 से 1 के बीच नहीं होगी।

$$\cosec \theta = \frac{H}{P} \dots H \geq (B, P)$$

$$\sec \theta = \frac{H}{B}$$

2. If $x = \text{Real} \Rightarrow x^2 \rightarrow +\text{ve}$

$$x_{\min}^2 = 0 \text{ at } x = 0$$

$$0 \leq \sin^2 \theta, \cos^2 \theta \leq +1$$

$$-1 \leq \sin^3 \theta, \cos^3 \theta \leq +1$$

$$0 \leq \tan^2 \theta, \cot^2 \theta \leq +\infty$$

$$-\infty \leq \tan^3 \theta, \cot^3 \theta \leq +\infty$$

$$+1 \leq \sec^2 \theta, \cosec^2 \theta \leq +\infty$$

$-\infty \leq \sec^3 \theta, \cosec^3 \theta \leq +\infty$ But -1 से $+1$ के बीच नहीं होगी।

3. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \rightarrow \text{max value} = \text{max } [a, b]$

→ min value = min [a, b]

$$37 \sin^2 \theta + 45 \cos^2 \theta \Rightarrow \text{maximum} = 45$$

minimum = 37

4. $\sin^n \theta \cos^n \theta \begin{cases} \max = \frac{1}{2n} \\ \min = -\frac{1}{2n} \end{cases} \quad \text{when } n=\text{odd}$

$\sin^n \theta \cos^n \theta \begin{cases} \max = \frac{1}{2n} \\ \min = 0 \end{cases} \quad \text{when } n=\text{even}$

5. $a \sin \theta + b \cos \theta \rightarrow \max = +\sqrt{a^2 + b^2}$
 $\rightarrow \min = -\sqrt{a^2 + b^2}$

6. $a \sin^2 \theta + b \cosec^2 \theta \quad \min = 2\sqrt{ab} \quad (\text{when } a>b)$
 $a \cos^2 \theta + b \sec^2 \theta \quad \min = a+b \quad (\text{when } a < b)$
 $\max = \infty$

7. $a \sec^2 \theta + b \cosec^2 \theta \xrightarrow{\text{min value}} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

❖ If a and b are positive numbers then the value of $a \sec \theta - b \tan \theta = ?$

$$\text{Min. value} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\text{Max. value} = \infty$$

8. $\sin^{2m} \theta + \cos^{2n} \theta \rightarrow \max = +1 \quad m, n \in \text{natural no.}$

9. If $y = \cos^2 x + \sec^2 x$ then $y \geq 2$

	T - ratio	min	max
1.	$\sin \theta, \cos \theta$ (odd power)	-1	+1
2.	$\sin^2 \theta, \cos^2 \theta$ (even power)	0	+1
3.	$\tan \theta, \cot \theta$ (odd power)	$-\infty$	$+\infty$
4.	$\tan^2 \theta, \cot^2 \theta$ (even power)	0	∞
5.	$\sec \theta, \cosec \theta$ (odd power)	$-\infty$	$+\infty$
6.	$\sec^2 \theta, \cosec^2 \theta$ (even power)	1	∞

10. $\sin^{2m} \theta + \cos^{2n} \theta$

$$\text{max value} = 1$$

$$\text{min value} = \text{put } \theta \rightarrow 45^\circ$$

11. $\tan^2 \theta + b \cot^2 \theta$

$$\text{min value} = 2\sqrt{ab}$$

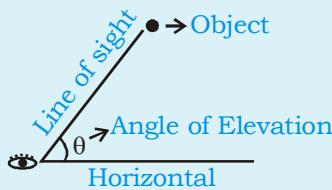
$$\text{max value} = \infty$$



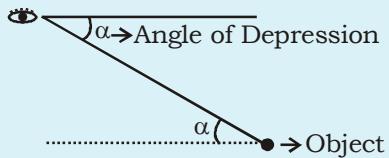
Height & Distance (लंबाई और दूरी)



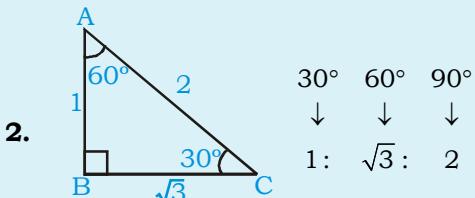
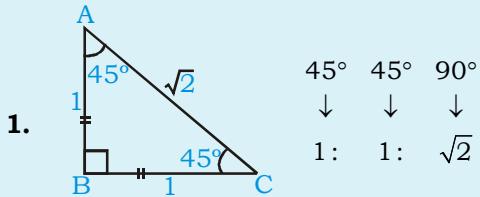
Elevation Angle (उन्नयन कोण)



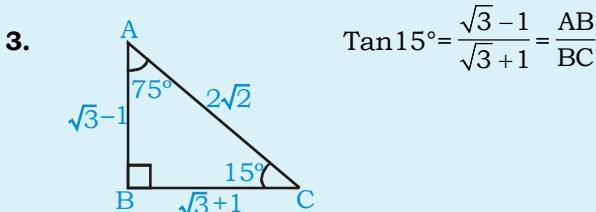
Angle of Depression (अवनमन कोण)



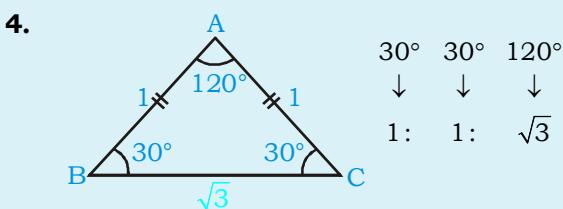
Angle-side Ratio (कोण-भुजा अनुपात)



$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{BC}$$

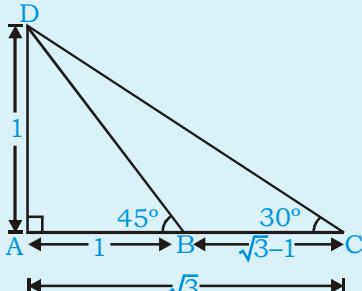


$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{AB}{BC}$$

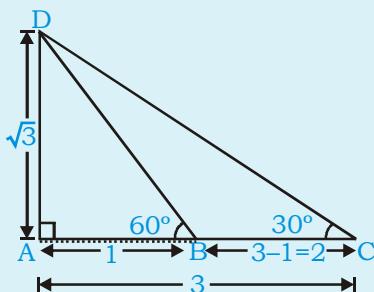


Change of Angle (कोण का परिवर्तन)

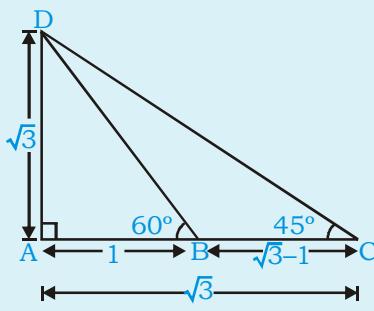
1. When elevation angle changes from 30° to 45°
जब उन्नयन कोण 30° से 45° हो जाता है



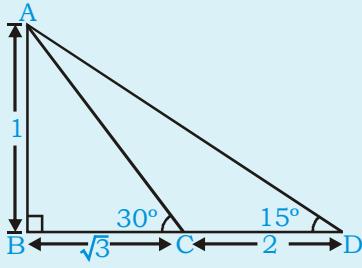
2. When elevation angle changes from 30° to 60°
जब उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है



3. When elevation angle changes from 45° to 60°
जब उन्नयन कोण 45° से 60° हो जाता है

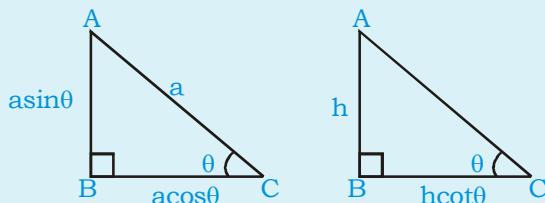


4. When elevation angle changes from 15° to 30°
जब उन्नयन कोण 15° से 30° हो जाता है



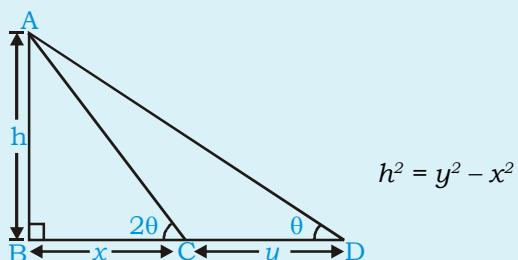
5. When elevation angle changes from

जब उन्नयन कोण से बदलता है

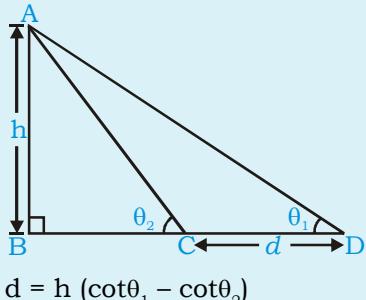


6. When elevation angle changes from θ° to 2θ .

जब उन्नयन कोण θ° से बदलकर 2θ हो जाता है



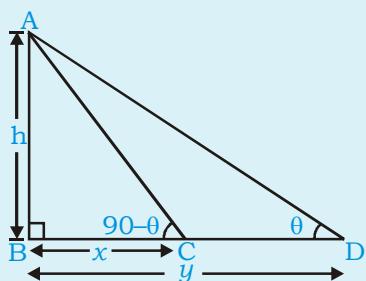
- 7.



Some other results (कुछ अन्य परिणाम)

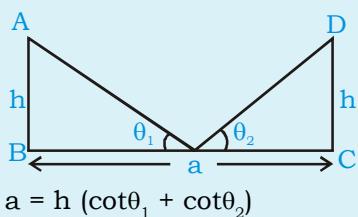
1. If Angles of elevation are complimentary

यदि उन्नयन कोण पूरक हैं

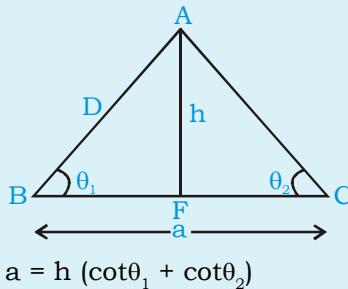


$$h = \sqrt{xy}$$

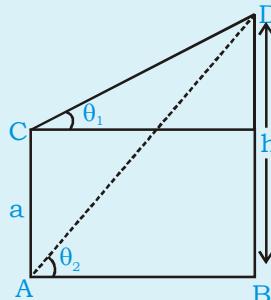
- 2.



- 3.

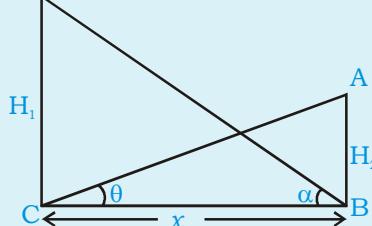


- 4.



$$h = \frac{a \cot \theta_1}{\cot \theta_1 - \cot \theta_2}$$

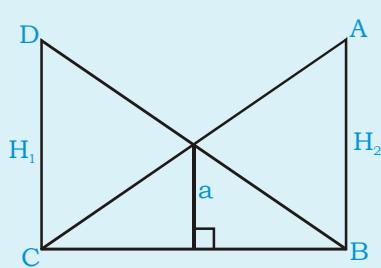
- 5.



$$\theta + \alpha = 90^\circ$$

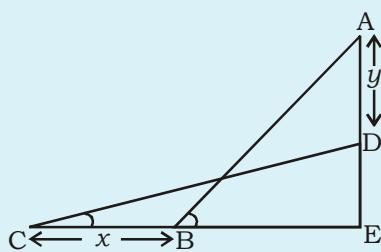
$$x = \sqrt{H_1 H_2}$$

- 6.

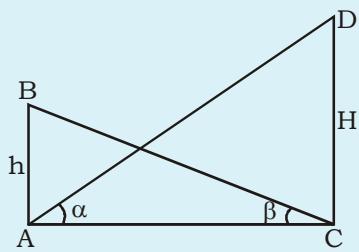


$$\frac{1}{a} = \frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}$$

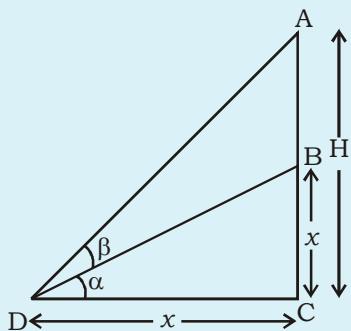
❖ If $AB = CD$, then $x = y \tan \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$



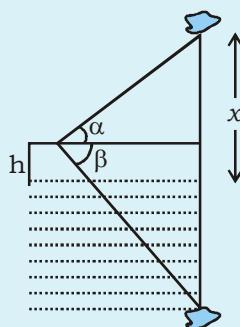
$$\diamond \quad H = \frac{h \cot \beta}{\cot \alpha}$$



$$\diamond \quad H = x \cot \alpha \tan (\alpha + \beta)$$



$$\diamond \quad x = \frac{h(\cot \alpha + \cot \beta)}{(\cot \alpha - \cot \beta)}$$



 CHAMPION PUBLICATION

Bilingual

Complete CLASSNOTES

Arithmetic

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams



Gagan Pratap Sir

CHAMPION PUBLICATION

Bilingual

Complete CLASSNOTES

Advance Maths

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams



Gagan Pratap Sir



Percentage (प्रतिशत)



Percentage is a number or ratio expressed as a fraction of 100.

प्रतिशत एक संख्या या अनुपात है जिसे 100 के अंश के रूप में व्यक्ति किया जाता है।

$$15\% = \frac{15}{100} \quad 400\% = \frac{400}{100}$$



Fraction percentage chart (भिन्न प्रतिशत चार्ट)

Fraction	Percentage	Percentage	Fraction	Percentage	Percentage
1	100%	100%	$\frac{1}{21}$	4.76%	$4\frac{16}{21}\%$
$\frac{1}{2}$	50%	50%	$\frac{1}{22}$	4.54%	$4\frac{6}{11}\%$
$\frac{1}{3}$	33.33%	$33\frac{1}{3}\%$	$\frac{1}{23}$	4.34%	$4\frac{8}{23}\%$
$\frac{1}{4}$	25%	25%	$\frac{1}{24}$	4.16%	$4\frac{1}{6}\%$
$\frac{1}{5}$	20%	20%	$\frac{1}{25}$	4%	4%
$\frac{1}{6}$	16.66%	$16\frac{2}{3}\%$	$\frac{1}{40}$	2.5%	$2\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{7}$	14.28%	$14\frac{2}{7}\%$	$\frac{3}{8}$	37.5%	$37\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{8}$	12.5%	$12\frac{1}{2}\%$	$\frac{5}{8}$	62.5%	$62\frac{1}{2}\%$
$\frac{1}{9}$	11.11%	$11\frac{1}{9}\%$	$\frac{4}{7}$	57.14%	$57\frac{1}{7}\%$
$\frac{1}{10}$	10%	10%	$\frac{5}{7}$	71.42%	$71\frac{3}{7}\%$
$\frac{1}{11}$	9.09%	$9\frac{1}{11}\%$	$\frac{2}{3}$	66.66%	$66\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{12}$	8.33%	$8\frac{1}{3}\%$	$\frac{4}{5}$	80%	80%
$\frac{1}{13}$	7.69%	$7\frac{9}{13}\%$	$\frac{3}{4}$	75%	75%
$\frac{1}{14}$	7.14%	$7\frac{1}{7}\%$	$\frac{5}{11}$	45.45%	$45\frac{5}{11}\%$
$\frac{1}{15}$	6.66%	$6\frac{2}{3}\%$	$\frac{7}{11}$	63.63%	$63\frac{7}{11}\%$
$\frac{1}{16}$	6.25%	$6\frac{1}{4}\%$	$\frac{10}{11}$	90.90%	$90\frac{10}{11}\%$
$\frac{1}{17}$	5.88%	$5\frac{15}{17}\%$	$\frac{4}{9}$	44.44%	$44\frac{4}{9}\%$
$\frac{1}{18}$	5.55%	$5\frac{5}{9}\%$	$\frac{7}{9}$	77.77%	$77\frac{7}{9}\%$
$\frac{1}{19}$	5.26%	$5\frac{5}{19}\%$			
$\frac{1}{20}$	5%	5%			

Derived fraction from base fractions (आधार भिन्न से व्युत्पन्न भिन्न)

❖ $\frac{1}{4} = 25\%$
 $\downarrow \times 3$
 $\frac{3}{4} = 75\%$

❖ $\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$
 $\frac{4}{7} = 57\frac{1}{7}\%$
 $\frac{5}{7} = 71\frac{3}{7}\%$

❖ $\frac{1}{5} = 20\%$
 $\frac{3}{5} = 3 \times 20\% = 60\%$

❖ $\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$
 $\frac{5}{6} = 5 \times 16\frac{2}{3}\% = 83\frac{1}{3}\%$

❖ $\frac{1}{15} = 6\frac{2}{3}\%$
 $\frac{11}{15} = 11 \times 6\frac{2}{3}\% = 73\frac{1}{3}\%$

❖ $\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$
 $\frac{11}{16} = 11 \times 6\frac{1}{4}\% = 68\frac{3}{4}\%$

❖ $\frac{1}{24} = 4\frac{1}{6}\%$
 $\frac{1}{48} = 2\frac{1}{12}\%$
 $\frac{17}{48} = 17 \times 2\frac{1}{12}\% = 35\frac{5}{12}\%$

❖ $\frac{1}{16} = 6\frac{1}{4}\%$
 $\frac{13}{16} = 13 \times 6\frac{1}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%$

or $\frac{13}{16} = 1 - \frac{3}{16} = 100\% - 18\frac{3}{4}\% = 81\frac{1}{4}\%$

❖ $\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$
 $\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7} = 100\% - 14\frac{2}{7}\% = 85\frac{5}{7}\%$

❖ $\frac{1}{12} = 8\frac{1}{3}\%$

$\frac{11}{12} = 1 - \frac{1}{12} = 100\% - 8\frac{1}{3}\% = 91\frac{2}{3}\%$

❖ $\frac{19}{24} = 1 - \frac{5}{24} = 100\% - 5\left(4\frac{1}{6}\%\right)$
 $\Rightarrow 100\% - 20\frac{5}{6}\% = 79\frac{1}{6}\%$

❖ $\frac{40}{9} = 4 + \frac{4}{9} = 400\% + 44.44\% = 444.44\%$

❖ $\frac{43}{6} = 7 + \frac{1}{6} = 700\% + 16.66\% = 716.66\%$

❖ $\frac{13}{7} = 1 + \frac{6}{7} = 100\% + 85\frac{5}{7}\% = 185\frac{5}{7}\%$

❖ $\frac{35}{6} = 5 + \frac{5}{6} = 500\% + 83\frac{1}{3}\% = 583\frac{1}{3}\%$

❖ $\frac{29}{3} = 9 + \frac{2}{3} = 900\% + 66\frac{2}{3}\% = 966\frac{2}{3}\%$

❖ $\frac{71}{12} = 5 + \frac{11}{12} = 500\% + 11\left(8\frac{1}{3}\%\right) = 500\% + 91\frac{2}{3}\%$
 $\rightarrow 591\frac{2}{3}\%$

❖ $\frac{37}{15} = 2 + \frac{7}{15} = 200\% + 46\frac{2}{3}\% = 246\frac{2}{3}\%$

Percentage to fraction conversion

(भिन्न रूपांतरण का प्रतिशत)

❖ $17.5\% \rightarrow 17.5 \times \frac{1}{100} \rightarrow \frac{7}{40}$ or

$\left(2.5\% = \frac{1}{40}\right) \times 7 \rightarrow 17.5\% = \frac{7}{40}$

❖ $164\% \rightarrow \frac{164}{100} \rightarrow \frac{41}{25}$

❖ $15\frac{5}{8}\% \rightarrow \frac{125}{8}\% \rightarrow \frac{125}{800} \rightarrow \frac{5}{32}$

❖ $35\frac{5}{7}\% \rightarrow 5 \times 7\frac{1}{7}\% \rightarrow 5 \times \frac{1}{14} \rightarrow \frac{5}{14}$

❖ $29\frac{1}{6}\% \rightarrow 25\% + 4\frac{1}{6}\% \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \rightarrow \frac{7}{24}$

❖ $23.33\% \rightarrow 20\% + 3.33\% \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}$

❖ $78\frac{1}{3}\% \rightarrow 75\% + 3\frac{1}{3}\% \rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{30} \rightarrow \frac{47}{60}$

❖ $46.66\% \rightarrow 40\% + 6.66\% \rightarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{15} \rightarrow \frac{7}{15}$

❖ $82.5\% \rightarrow 80\% + 2.5\% \rightarrow \frac{4}{5} + \frac{1}{40} \rightarrow \frac{33}{40}$

❖ $83\frac{1}{3}\% \rightarrow 100\% - 16\frac{2}{3}\% \rightarrow 1 - \frac{1}{6} \rightarrow \frac{5}{6}$

- ❖ $237.5\% \rightarrow 200\% + 37.5\% \rightarrow 2 + \frac{3}{8} \rightarrow \frac{19}{8}$
- ❖ $342.84\% \rightarrow 300\% + 42.84\% \rightarrow 3 + \frac{3}{7} \rightarrow \frac{24}{7}$
- ❖ $756.25 \rightarrow 7 + \frac{9}{16} \rightarrow \frac{121}{16}$
- ❖ $538.33 \rightarrow 500\% + 30\% + 8.33\% \rightarrow 5 + \frac{3}{10} + \frac{1}{12} \rightarrow \frac{323}{60}$
- ❖ $528.56\% \rightarrow 5 + \frac{2}{7} \rightarrow \frac{37}{7}$

Some Rules of percentage

- $(a + b)\% \text{ of } x = a\% \text{ of } x + b\% \text{ of } x$
- $(a + b)\% \text{ of } (x + y) = a\% \text{ of } (x + y) + b\% \text{ of } (x + y)$
- If you have to find the $y\%$ of a number x .

It will be $\rightarrow \frac{y}{100} \times x$

Eg. → Find 25% of 300

$$\frac{25}{100} \times 300 = 75$$

- If x is to be expressed as a percentage of y . Then required percentage $= \frac{x}{y} \times 100\%$

Ex. 99 is what % of 135

$$\frac{99}{135} \times 100\% = 73\frac{1}{3}\%$$

or

$$135 \longrightarrow 100\%$$

$$1 \longrightarrow \frac{100}{135}\%$$

$$99 \longrightarrow 99 \times \frac{100}{135}\%$$

or

$$15 : 11$$

$$\frac{1}{15} = 6\frac{2}{3}\%$$

$$\frac{11}{15} = 73\frac{1}{3}\%$$

- If a fraction is to be converted into a percentage multiply the fraction by 100 and put a % sign.

$$\text{eg.} \rightarrow \frac{4}{5} \rightarrow \frac{4}{5} \times 100\% = 80\%$$

- To convert a percentage to a fraction or decimal fraction, remove the % sign and divide by 100.

$$\text{eg.} \rightarrow 15\% \rightarrow \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

- If A is reduced to A_o , Then

$$\text{reduce\%} = \frac{A - A_o}{A} \times 100\%$$

eg. → If cost of an item is reduced from 100 to 80
find. reduce%

$$\therefore \text{Reduce\%} = \frac{100 - 80}{100} \times 100\% = 20\%$$

- If A is increased to A_1 , Then

$$\text{Increase\%} = \frac{A_1 - A}{A} \times 100\%$$

eg. → If cost of an item is increased from 120 to 150. Find increase %

$$\text{Sol. Increase\%} = \frac{150 - 120}{120} \times 100\% = 25\%$$

- $a\% \text{ of } b = b\% \text{ of } a$

$$\text{Ex. } 840\% \text{ of } 62.5 \rightarrow 62.5\% \text{ of } 840 \rightarrow \frac{5}{8} \times 840 \rightarrow 525$$

$$\text{Ex. } 7.44\% \text{ of } 3750 \rightarrow 37.50\% \text{ of } 744 \rightarrow \frac{3}{8} \times 744 \rightarrow 279$$

- ❖ 99 is what % less than 135

$$\begin{array}{r} 99 \\ - 36 \\ \hline 135 \end{array} \rightarrow \frac{36}{135} \times 100\% \quad \text{or}$$

$$15 : 4 \rightarrow \frac{4}{15} = 26\frac{2}{3}\%$$

- ❖ 180 is what % of 125

$$\frac{180}{125} \times 100\% = 144\%$$

or

$$\begin{array}{ccc} 125 & : & 180 \\ \downarrow \times 0.8 & & \downarrow \\ 100 & & 144 \\ \curvearrowright & & +44\% \end{array}$$

Scaling factor/multiplying factor

$$\text{❖ } K \xrightarrow{+x\%} K + kx\% = K(1 + x\%) = K \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

↓ ↓
multiplying multiplying
factor factor

$$\begin{array}{ccc} \text{Initial} & & \text{Final} \\ 100\% & & 128\% \\ \downarrow & & \downarrow \\ +1.28 & & \end{array}$$

$$28\% = \frac{+7}{25}$$

↑ Change in value
↑ Initial value

$$\begin{array}{ccc} \text{Initial} & & \text{Final} \\ 25 & & 32 \\ \downarrow & & \downarrow \\ +7 & & \end{array}$$

Change in net income & tax will be same

शुद्ध आय और कर में परिवर्तन समान होगा

Constant Concept

$$\diamond \quad A \times B = \text{Constant}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \times \downarrow \\ \downarrow \times \uparrow \end{array}$$

Expenditure/खर्च = Price/मूल्य × Consumption/खपत

Work/कार्य = Men/आदमी × Time/समय

Distance/दूरी = Speed/चाल × Time/समय

Income tax/आयकर = Income/आय × Rate/दर

Area/क्षेत्रफल = Length/लंबाई × Breadth/चौड़ाई

Volume/आयतन = Area/क्षेत्रफल × Height/ऊँचाई

Ex. Expenditure/खर्च = Price/मूल्य × Consumption/खपत

$$450 = ₹25 \times ₹18$$

$$\downarrow +20\% \quad \downarrow -16.66\%$$

$$450 = ₹30 \quad 15\text{kg}$$

$$\begin{array}{c} P \rightarrow 5 : 6 \\ C \rightarrow 6 : 5 \end{array} \rightarrow \text{Reverse Ratio}$$

$$\begin{array}{c} A \times B \\ 5 : 9 \\ \times 2 \quad \downarrow \times \frac{1}{2} \\ 10 : 4.5 = 45 \end{array}$$

$$A = 1 : 2$$

$$B = 2 : 1$$

(Reverse ratio में chance होगे।)

Concept of deviation (विचलन की अवधारणा)

	Rice	Dal	Sugar
Exp (खर्च) →	7	: 13	: 5
% Change →	+17%	+20%	+19%
Deviation →	-1%	+2%	+1%

Let overall change is 18% / माना कुल परिवर्तन 18% है

$$\begin{array}{c} \text{Deviation in rice} \quad \text{Deviation in dal} \quad \text{Deviation in sugar} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ (-1\% \times 7 + 2\% \times 13 + 1\% \times 5) \\ \hline 7+13+5 \end{array}$$

Total deviation को सब में divide कर देंगे।

$$\therefore 18\% + \left(\frac{-7 + 26 + 5}{25} \% \right)$$

$$18\% + 0.96\% = 18.96\%$$

or

	Rice	: Dal	: Sugar
Exp →	7	: 13	: 5
% Change	17%	17+3%	17%+2%

Let overall % change = 17%

deviation = $13 \times 3\% + 5 \times 2\% = 49\%$

इसको सभी में divide कर देंगे।

$$\therefore \text{overall } \% \text{ change} \rightarrow 17\% + \frac{49}{25}\% \\ \rightarrow 17\% + 1.96\% \rightarrow 18.96\%$$

$$\diamond \quad -44\% \rightarrow 44\% = \frac{-11}{25}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Initial value} & \text{Final value} \\ 25 & 14 \\ \hline -11 \end{array}$$

$$\diamond \quad +35\% \rightarrow 35\% = \frac{+7}{20}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Initial value} & \text{Final value} \\ 20 & 27 \\ \hline +7 \end{array}$$

$$\diamond \quad -22.5\% \rightarrow \frac{-9}{40} \rightarrow \frac{40}{-9} : 31$$

$$\diamond \quad x \xrightarrow{+26\%} (x + x \times 26\%)$$

$$\begin{aligned} x + x \times \frac{26}{100} &= x \left(1 + \frac{26}{100}\right) \\ &= x \times 1.26 \end{aligned}$$

multiplying factor (m.F)

Initial value	Change	Final value
x	+37%	$1.37x = \left(1 + \frac{37}{100}\right)x$
y	-45%	$0.55y = \left(1 - \frac{45}{100}\right)y$
z	+45.45%	$z + z \times \frac{5}{11}$
w	+31.25%	$\left(1 + \frac{5}{16}\right)w = \frac{21}{16}w$
u	$-46\frac{2}{3}\%$	$\left(1 - \frac{7}{15}\right)u = \frac{8}{15}u$
		$\left(\frac{7}{15}\right)$

Net income = Income – Income Tax

शुद्ध आय = आय – आयकर

Ex. ₹700 = ₹800 – ₹100

Rate of income tax /आयकर की दर =

$$\text{Ex. } \frac{100}{800} \times 100\% = 12.5\%$$

$$= \frac{\text{Income Tax}}{\text{Total Income}} \times 100\%$$

Net Income = Income – Income Tax

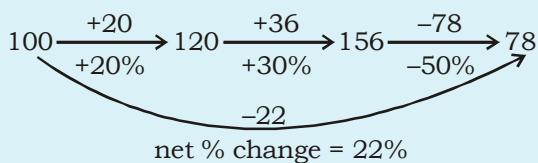
शुद्ध आय = आय – आयकर

$$700 = 800 - 100$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow -50 & & \downarrow +50 \\ 650 & = & 800 - 150 \end{array}$$

Annual increment/decrement (वार्षिक वेतन वृद्धि/कमी)**❖ Successive percentage change:-**

क्रमिक प्रतिशत परिवर्तन

**Second Method / दूसरा तरीका:-**

Initial: Final

$$100 : ((100 \times 1.2) \times 1.3) \times 0.5$$

$$100 : 78$$

↓

22% Change (Decrease)

Third Method / तीसरा तरीका:-

	Initial	:	Final
+20%→	5	:	6
+30%→	10	:	13
-50%→	2	:	1
	100	:	78

↑ ↑
-22%

Fourth Method / चौथा तरीका:-If $x\%$ and $y\%$ change occurs successively then

$$\text{overall change \%} = \left(x + y + \frac{xy}{100} \right) \%$$

Step-1→ Find percentage change of 20% and 30%

$$\left(20 + 30 + \frac{20 \times 30}{100} \right) \% = 56\%$$

Step-2→ Find percentage change of 56% and -50%

$$\left(56 - 50 + \frac{56 \times 50}{100} \right) \% = (6 - 28)\% = -22\%$$

Fifth Method / पांचवा तरीका:-If $x\%$, $y\%$, $z\%$ change occurs successively.

Then overall change% =

$$\left[(x + y + z) + \frac{xy + yz + zx}{100} + \frac{xyz}{10000} \right] \%$$

$$\therefore \text{Overall change \%} = (20 + 30 - 50) +$$

$$\frac{600 - 1000 - 1500}{100} + \frac{20 \times 30 \times (-50)}{10000}$$

$$\Rightarrow \left(0 - \frac{1900}{100} - \frac{30000}{10000} \right) \% \Rightarrow (-19 - 3)\% \Rightarrow -22\%$$

1. If the population/cost of a certain town/article, is P and annual increment rate is r%, then

यदि किसी कस्बे/वस्तु की जनसंख्या/वस्तु की लागत P है और वार्षिक वृद्धि दर r% है, तो-

$$(i) \text{ After 't' years population/cost} = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$$

$$'t' \text{ वर्षों के बाद जनसंख्या/लागत} = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$$

$$(ii) \text{ Before 't' years population/cost} = \frac{P}{\left(1 + \frac{r}{100} \right)^t}$$

$$'t' \text{ वर्ष से पहले जनसंख्या/लागत} = \frac{P}{\left(1 + \frac{r}{100} \right)^t}$$

2. If we change a number by $x\%$ & $y\%$ successively
Then, net% change

यदि हम कोई संख्या क्रमशः $x\%$ और $y\%$ द्वारा बदलते हैं फिर, शुद्ध% परिवर्तन

$$= \left(x + y + \frac{xy}{100} \right) \%$$

Proof:-If 100 is successively increased by $x\%$ and $y\%$.

$$100 \left(1 + \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{y}{100} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{100 \left(1 + \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{y}{100} \right) - 100}{100} \times 100$$

$$\Rightarrow 100 \left[\left(1 + \frac{x}{100} \right) \left(1 + \frac{y}{100} \right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \left[1 + \frac{y}{100} + \frac{x}{100} + \frac{xy}{100 \times 100} - 1 \right]$$

$$\text{Now, } \left(x + y + \frac{xy}{100} \right) \%$$

3. If the population of a town /cost of a article is P and it decreases/reduces at the rate of r% annually, then.

यदि किसी कस्बे की जनसंख्या / वस्तु की लागत P है और यह r% वार्षिक दर से घटती है, तो-

$$(i) \text{ After 't' years population/cost} = P \left(1 - \frac{r}{100} \right)^t$$

$$'t' \text{ वर्षों के बाद जनसंख्या/लागत} = P \left(1 - \frac{r}{100} \right)^t$$

$$(ii) \text{ Before 't' years population/cost} = \frac{P}{\left(1 - \frac{r}{100} \right)^t}$$

$$'t' \text{ वर्ष से पहले जनसंख्या/लागत} = \frac{P}{\left(1 - \frac{r}{100} \right)^t}$$

4. Net % change of $x\%$, $y\%$ and $z\%$ is

 $x\%$, $y\%$ और $z\%$ का शुद्ध परिवर्तन है

$$\left[(x + y + z) + \frac{xy + yz + zx}{100} + \frac{xyz}{10000} \right] \%$$

5. If the present population of a town is P and the population increases or decreases at rate of $R_1\%$, $R_2\%$ and $R_3\%$ in first, second and third year respectively.

यदि किसी कस्बे की वर्तमान जनसंख्या P है और जनसंख्या क्रमशः पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष में $R_1\%$, $R_2\%$ और $R_3\%$ की दर से बढ़ती या घटती है।

then the population of town after 3 years
तो 3 वर्ष बाद शहर की जनसंख्या

$$= P \left(1 \pm \frac{R_1}{100} \right) \left(1 \pm \frac{R_2}{100} \right) \left(1 \pm \frac{R_3}{100} \right)$$

'+' is used when population increases

जनसंख्या बढ़ने पर '+' का प्रयोग किया जाता है

'-' is used when population decreases.

जनसंख्या घटने पर '-' का प्रयोग होता है।

The above formula may be extended for n number of years.

उपरोक्त सूत्र n वर्षों के लिए बढ़ाया जा सकता है।

\Rightarrow Population after 'n' years / 'n' वर्षों के बाद जनसंख्या

$$= P \left(1 \pm \frac{R_1}{100} \right) \left(1 \pm \frac{R_2}{100} \right) \dots \left(1 \pm \frac{R_n}{100} \right)$$

6. $+30\% \quad +35\% \quad -48\%$

$= +35\% \quad -48\% \quad +30\%$

Initial $\times 1.3 \times 1.35 \times 0.52 =$ Initial $\times 1.35 \times 0.52 \times 1.3$

- ❖ कैसे भी sequence change करो, किसी में भी successive change बराबर ही आयेगा।

Important Points (महत्वपूर्ण बिंदु)

❖ Based on increase/decrease

वृद्धि/कमी के आधार पर

1. If an amount is increased by $x\%$ and then it is reduced by $x\%$ again, then percentage change will

be a decrease of $\frac{x^2}{100}\%$

यदि किसी राशि में $x\%$ की वृद्धि की जाती है और फिर इसे फिर से $x\%$

घटाया जाता है, तो प्रतिशत परिवर्तन में $\frac{x^2}{100}\%$ की कमी होगी

- Ex. Price of an article is increased by 10% and then reduced by 10%. What will be net percentage change?

एक वस्तु के मूल्य में 10% की वृद्धि की जाती है और फिर 10% की कमी की जाती है। कुल प्रतिशत परिवर्तन क्या होगा?

$$\therefore \text{Price will be decrease by } \frac{10^2}{100}\% = 1\%$$

2. If a number is increased by $a\%$ and then it is decreased by $b\%$, then resultant change in

percentage will be $\left(a - b - \frac{ab}{100} \right)\%$

यदि एक संख्या में $a\%$ की वृद्धि की जाती है और फिर इसे $b\%$ से घटा दिया जाता है, तो प्रतिशत में परिणामी परिवर्तन $\left(a - b - \frac{ab}{100} \right)\%$ होगा

(Negative for decrease, Positive for increase)
(घटने के लिए ऋणात्मक, वृद्धि के लिए धनात्मक)

3. If a number is decreased by $a\%$ and then it is increased by $b\%$, then net increase or decrease percent is

यदि किसी संख्या में $a\%$ की कमी की जाती है और फिर इसे $b\%$ से बढ़ा दिया जाता है, तो शुद्ध वृद्धि या कमी प्रतिशत है

$$\left(-a + b - \frac{ab}{100} \right)\%$$

(Negative sign for decrease)
(Positive sign for increase)

4. If a number is first decreased by $a\%$ and then by

$b\%$, then net decrease percent is $\left(-a - b + \frac{ab}{100} \right)\%$

(-ve sign for decrease)

यदि किसी संख्या में पहले $a\%$ और फिर $b\%$ की कमी की जाती है, तो शुद्ध कमी प्रतिशत है $\left(-a - b + \frac{ab}{100} \right)\%$ (-ve संकेत कमी के लिए)

5. If a number is first increased by $a\%$ and then again increased by $b\%$, then total increase percent is

यदि किसी संख्या में पहले $a\%$ की वृद्धि की जाती है और फिर $b\%$ की वृद्धि की जाती है, तो कुल वृद्धि प्रतिशत है

$$\left(a + b + \frac{ab}{100} \right)\%$$

6. If the cost of an article is increased by $A\%$, then how much to decrease the consumption of article, so that expenditure remains same is given by

यदि किसी वस्तु की कीमत में $A\%$ की वृद्धि की जाती है, तो वस्तु की खपत को कितना कम किया जाए, ताकि व्यय समान रहे

OR

If the income of a man is $A\%$ more than another man, then income of another man is less in comparison to the 1st man by

यदि एक आदमी की आय दूसरे आदमी की तुलना में $A\%$ अधिक है, तो दूसरे आदमी की आय पहले आदमी की तुलना में कितनी कम है?

$$\left(\frac{A}{(100+A)} \times 100 \right)\%$$

7. If the cost of an article is decreased by $A\%$, then the increase in consumption of article to maintain the expenditure will be?

यदि किसी वस्तु की लागत में $A\%$ की कमी की जाती है, तो व्यय को बनाए रखने के लिए वस्तु की खपत में वृद्धि होगी?

OR

If 'x' is A% less than 'y'. then y is more than 'x' by

$$\text{Required\%} = \left(\frac{A}{(100-A)} \times 100 \right) \% \text{ (increase)}$$

$$\text{यदि } 'x', 'y' \text{ से A\% \ कम है। तो } y 'x' \text{ से } \left(\frac{A}{(100-A)} \times 100 \right) \% \text{ अधिक है}$$

- 8.** If the length of a rectangle is increase by a% and breadth is increased by b%, then the area of rectangle will increase by

यदि एक आयत की लंबाई में a% की वृद्धि की जाती है और चौड़ाई में b% की वृद्धि की जाती है, तो आयत के क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि होगी?

$$\text{Required Increase / आवश्यक वृद्धि} = \left(a + b + \frac{ab}{100} \right) \%$$

- 9.** If the side of a square is increases by a% then, its area will increase by

यदि किसी वर्ग की भुजा में a% की वृद्धि कर दी जाए, तो उसका क्षेत्रफल कितना बढ़ जाएगा

$$\left(2a + \frac{a^2}{100} \right) \%$$

- 10.** If radius of circle is increased by a% then its area

$$\text{will be increased by} = \left(2a + \frac{a^2}{100} \right) \%$$

यदि वृत्त की त्रिज्या में a% की वृद्धि की जाती है तो इसके क्षेत्रफल में

$$= \left(2a + \frac{a^2}{100} \right) \% \text{ वृद्धि होगी}$$

- 11.** If the side of a square is decreased by a%, then the area of square will decrease by

यदि किसी वर्ग की भुजा को a% कम कर दिया जाए, तो वर्ग का क्षेत्रफल कितना कम हो जाएगा?

$$\therefore \text{Decrease} = \left(-2a + \frac{a^2}{100} \right) \%$$

This formula is also applicable for circles where decrease % of radius is given.

यह सूत्र उन वृत्तों के लिए भी लागू होता है जहाँ त्रिज्या का घटा हुआ प्रतिशत दिया गया है।

- 12.** If the length, breadth and height of a cuboid are increased by a%, b% and c% respectively, then, Increase% in volume

यदि एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई में क्रमशः a%, b% और c% की वृद्धि की जाती है, तो, आयतन में वृद्धि?

$$= \left[a + b + c + \frac{ab + bc + ca}{100} + \frac{abc}{(100)^2} \right] \%$$

- 13.** If every side of cube or radius of sphere is increased by a%, then increase % in volume

यदि घन की प्रत्येक भुजा या गोले की त्रिज्या में a% की वृद्धि की जाती है, तो आयतन में % की वृद्धि होती है

$$= \left(3a + \frac{3a^2}{100} + \frac{a^3}{(100)^2} \right) \%$$

- 14.** If a% of a certain sum is taken by 1st man and b% of remaining sum is taken by 2nd man and finally c% of remaining sum is taken by 3rd man, then if 'x' rupee is the remaining amount then,

यदि एक निश्चित राशि का a% पहले आदमी द्वारा लिया जाता है और शेष राशि का b% दूसरे आदमी द्वारा लिया जाता है और अंत में शेष राशि का c% तीसरे आदमी द्वारा लिया जाता है, तो यदि 'x' रुपये शेष राशि है, तो,

Initial amount / शुरुआती रकम

$$x \times \frac{100}{100-a} \times \frac{100}{100-b} \times \frac{100}{100-c}$$

- Ex.** If 20% of a certain amount is given to A and 25% of the remaining amount is given to B and the 50% of remaining amount is given to C. If ₹1500 is the remaining amount now then what is the initial amount?

यदि किसी निश्चित राशि का 20% A को दिया जाता है तथा शेष राशि का 25% B को उसके बाद बची हुई शेष राशि का 50% C को दिया जाता है यदि अब ₹1500 बचे हैं तो शुरुआत में राशि कितनी थी?

$$\text{Sol. } 1500 \times \frac{100}{(100-20)} \times \frac{100}{(100-25)} \times \frac{100}{(100-50)}$$

$$= 1500 \times \frac{100}{80} \times \frac{100}{75} \times \frac{100}{50}$$

$$\Rightarrow \frac{100 \times 100 \times 2}{4} = ₹5000$$

- 15.** If an amount is increased by a% and then again increased by b% and finally increased by c%. So, that resultant amount is 'x' rupees, then

यदि किसी राशि में a% की वृद्धि की जाती है और फिर से b% की वृद्धि की जाती है और अंत में c% की वृद्धि की जाती है। तो, वह परिणामी राशि 'x' रुपए है, तब

Initial amount / शुरुआती रकम

$$x \times \frac{100}{100+a} \times \frac{100}{100+b} \times \frac{100}{100+c}$$

- 16.** On increasing/decreasing the cost of a certain article by x%, a person can buy 'a' kg article less/more in 'y' rupees, then

किसी वस्तु के मूल्य में x% की वृद्धि/कमी करने पर, एक व्यक्ति 'y' रुपये में 'a' किग्रा वस्तु कम/अधिक खरीद सकता है, तो Increased/decreased cost of the article

$$\text{वस्तु की लागत में वृद्धि/कमी} = \left(\frac{xy}{100 \times a} \right)$$

$$\text{And initial cost / और प्रारंभिक लागत} = \frac{xy}{(100 \pm x)a}$$

[Negative sign when decreasing and positive sign when increasing]

[घटने पर ऋणात्मक चिन्ह और बढ़ने पर धनात्मक चिन्ह]

- Ex.** Price of sugar reduced by 20%. Now a person can buy 500 gm more sugar for ₹36. What is the original price?

चीनी की कीमत 20% कम हो जाती है अब एक व्यक्ति ₹36 में 500 gm चीनी अधिक खरीद सकता है वास्तविक मूल्य क्या है?

$$\text{Sol. } \frac{20 \times 36}{(100 - 20)1/2} = \frac{20 \times 36}{40} = \text{₹18 per kg}$$

- 17.** If a person saves 'R' rupees after spending $x\%$ on food, $y\%$ on cloth and $z\%$ on entertainment of his income then.

यदि एक व्यक्ति अपनी आय का $x\%$ भोजन पर, $y\%$ कपड़े पर और $z\%$ मनोरंजन पर खर्च करने के बाद 'R' रुपये बचाता है तो।

$$\text{Monthly income / मासिक आय} = \frac{100}{100 - [x + y + z]} \times R$$

Examination based (परीक्षा आधारित)

- 1.** In an examination, $a\%$ candidates failed in Maths and $b\%$ candidates failed in English. If $c\%$ candidate failed in both the subjects, then

एक परीक्षा में, $a\%$ अभ्यर्थी गणित में तथा $b\%$ अभ्यर्थी अंग्रेजी में अनुत्तीर्ण हुए। यदि $c\%$ अभ्यर्थी दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण हैं, तो

- (i) Passed candidates in both the subjects

दोनों विषयों में उत्तीर्ण उम्मीदवार

$$= 100 - (a + b - c)\%$$

- (ii) Percentage of candidates who failed in either subject

किसी भी विषय में असफल होने वाले उम्मीदवारों का प्रतिशत

$$= (a + b - c)\%$$

- 2.** In a certain examination passing marks is $a\%$. If any candidate obtains 'b' marks and fails by 'c' marks then,

एक निश्चित परीक्षा में उत्तीर्ण अंक $a\%$ है। यदि कोई अभ्यर्थी 'b' अंक प्राप्त करता है और 'c' अंक से अनुत्तीर्ण हो जाता है तो,

$$\text{Total marks} = \frac{100(b + c)}{a}$$

- Ex.** In an examination passing marks are 35%. A person got 80 marks and fail by 25 marks. Find total marks?

एक परीक्षा में उत्तीर्ण अंक 35% हैं। एक व्यक्ति 80 अंक प्राप्त करता है और 25 अंकों से अनुत्तीर्ण हो जाता है। कुल अंक ज्ञात कीजिये?

$$\text{Total marks} = \frac{100(80 + 25)}{35} = \frac{100 \times 105}{35} = \text{300}$$

- 3.** In a certain examination, 'B' boy and 'G' girls participated $x\%$ of boys and $y\%$ of girls passed the examination, then.

एक निश्चित परीक्षा में, 'B' लड़के और 'G' लड़कियों ने भाग लिया। $x\%$ लड़कों और $y\%$ लड़कियों ने परीक्षा उत्तीर्ण की तब औसत

$$= \left(\frac{B.x + G.y}{B + G} \right) \%$$

- 4.** If a candidate got $A\%$ votes in a poll and he won or defeated by ' x ' votes, then, what was the total no. of votes which was casted in poll?

यदि एक उम्मीदवार को एक मतदान में $A\%$ मत मिले और वह ' x ' मतों से जीता या पराजित हुआ, तो मतदान में डाले गए वोटों की संख्या कितनी थी?

$$\therefore \text{Total number of votes / मतों की कुल संख्या} = \frac{50 \times x}{(A - 50)}$$

- Ex.** A candidate got 55% votes in an election and won by 3600 votes. Find total number of votes?

एक उम्मीदवार ने एक चुनाव में 55% मत प्राप्त किए और 3600 मतों से जीत गया। वोटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए?

$$\therefore \text{Total no. of votes} = \frac{50 \times 3600}{55 - 50} = \text{36000}$$

Price increase/decrease (मूल्य वृद्धि/कमी)

- ❖ If the price of an article is reduced by $a\%$ and buyer gets c kg more for some Rs. b , the new price per

$$\text{kg of article} = \frac{ab}{100 \times c}$$

यदि किसी वस्तु की कीमत $a\%$ कम कर दी जाती है और खरीदार को b रुपये में c किलो अधिक मिलता है। तो नई कीमत प्रति किग्रा

$$= \frac{ab}{100 \times c}$$

- Ex.** Price of an article is reduced by 10% and buyer gets 8 kg more for Rs. 300. Find new price per kg?

एक वस्तु की कीमत 10% कम हो जाती है और खरीदार को 300 रुपये में 8 किलो अधिक मिलता है। प्रति किलो नया मूल्य ज्ञात करें?

$$\text{New price per kg} = \frac{10 \times 300}{100 \times 8} = \frac{15}{4} = \text{3}\frac{3}{4} \text{Rs / kg}$$

Miscellaneous (मिश्रित)

- 1.** If two numbers are respectively $x\%$ and $y\%$ less than the third number, first number as a

$$\text{percentage of second is} \frac{100 - x}{100 - y} \times 100\%$$

यदि दो संख्याएँ तीसरी संख्या से क्रमशः $x\%$ और $y\%$ कम हैं, तो दूसरी संख्या के प्रतिशत के रूप में पहली संख्या $\frac{100 - x}{100 - y} \times 100\%$ है।

- 2.** If two numbers are respectively $x\%$ and $y\%$ more than a third number the first as percentage of second is

यदि दो संख्याएँ एक तीसरी संख्या से क्रमशः $x\%$ और $y\%$ अधिक हैं, तो दूसरी संख्या के प्रतिशत के रूप में पहली संख्या है

$$\frac{100+x}{100+y} \times 100\%$$

3. If a number 'a' is increased or decreased by $b\%$, then the new number will be

यदि किसी संख्या 'a' में $b\%$ की वृद्धि या कमी की जाती है, तो नई संख्या होगी-

$$\left(\frac{100 \pm b}{100}\right) \times a$$

- Ex.** An agent get 12.5% commission on sale up to

₹24000 and $8\frac{1}{3}\%$ commission on sale more than

it. If he gives ₹65000 to company after deducting his commission on total sale then how much sale he did?

एक एजेंट 12.5% की कमीशन 24000 की बिक्री तक कमाता है

और उसके ऊपर की बिक्री पर $8\frac{1}{3}\%$ की कमीशन कमाता है यदि वह

अपना कमीशन काटने के बाद कंपनी को ₹65000 देता है तो उसने कितनी बिक्री की होगी-

24000	24000+
↓ 12.5%	↓ 8.33%

His commission on ₹24000 = $24000 \times \frac{1}{8} = ₹3000$

If he gets 8.33% on total sales, then his

commission on ₹24000 = $24000 \times \frac{1}{12} = ₹2000$

In this case company gets $(3000 - 2000) = ₹1000$ more

$\therefore = 65000 + 1000 = ₹66000$

$\therefore 8.33\% = \frac{1}{12} \rightarrow \text{Salesman commision}$

$\therefore \text{Company gets} = 12 - 1 = 11 \text{ unit } \xrightarrow{\times 6000} ₹66000$

$\therefore \text{Total sales} = 12 \text{ unit } \xrightarrow{\times 6000} ₹72000$

- Ex.** A company allows 9% commission on total sales to his salesman and a bonus of 1% on sales over ₹20,000. If salesman deposited ₹63200 in company after deduction his earning on total sales find total sales of company?

एक कंपनी अपने सेल्समैन को कुल बिक्री पर 9% कमीशन देती है तथा 20,000 से ऊपर की बिक्री पर 1% का अतिरिक्त लाभ भी देती है यदि सेल्समैन अपनी कमाई काटने के बाद कंपनी में ₹63200 जमा करता है तो कुल बिक्री क्या है।

20,000	20,000
↓ 9%	↓ 10%

If he gets 10% on all sale, then his benefit =

$$20000 \times \frac{1}{100} = ₹200$$

$\therefore \text{Company gets} = 63200 - 200 = ₹63000$

$\therefore 10\% = \frac{1}{10} \rightarrow \text{Salesman commision}$

$\therefore \text{Company gets} = 10 - 1 = 9 \text{ unit } \xrightarrow{\times 7000} ₹63000$

$\text{Total sales} = 10 \text{ unit } \xrightarrow{\times 7000} ₹70000$

Some Important Points

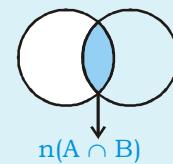
1. Price \times consumetion = Expenditure

मूल्य \times खपत = खर्च

2. Gross income – Income tax = Net Income.

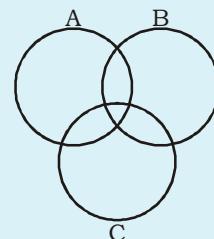
सकल आय – आयकर = शुद्ध आय

3. Venn diagram



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

4. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$



5. Income/आय = Expenditure/खर्च + Saving/बचत

6. Earning/आय = Time/समय \times wages/वेतन



Profit & Loss (लाभ और हानि)



➤ **Cost price (CP)** → Cost price is the total amount of money that it costs a manufacturer to produce a given product.

लागत मूल्य (CP) → लागत मूल्य वह कुल राशि है जो किसी निर्माता द्वारा किसी दिए गए उत्पाद का उत्पादन करने के लिए खर्च की जाती है।

➤ **Selling price (SP)** → The selling price is the final price of a product. It is the price at which something is sold.

विक्रय मूल्य (SP) → विक्रय मूल्य किसी उत्पाद का अंतिम मूल्य है। यह वह कीमत है जिस पर कोई चीज बेची जाती है।

➤ **Marked price/List price/Label price (MP)** → It is the price which is quoted or appears on product in the form of a label. This is the price at which product is intended to be sold.

अंकित मूल्य/सूची मूल्य/लेबल मूल्य (MP) → यह वह मूल्य है जो उद्घृत किया गया है या लेबल के रूप में उत्पाद पर दिखाई देता है। यह वह कीमत है जिस पर उत्पाद बेचने का इरादा है।

➤ **Profit** → When selling price is more than the cost price.

लाभ → जब विक्रय मूल्य लागत मूल्य से अधिक हो।

Then it is a situation of profit for the seller.

तब यह विक्रेता के लिए लाभ की स्थिति होती है।

Profit = Selling price - cost price

लाभ = विक्रय मूल्य - लागत मूल्य

$$\text{Profit/लाभ\%} = \frac{\text{Profit/लाभ}}{\text{Cost price/लागत मूल्य}} \times 100\%$$

इसकी गणना सदैव लागत मूल्य पर की जाती है।

It is always calculated on cost price

➤ **Loss** → When cost price is more than the selling price. Then it is the situation of loss for the seller.

Loss = Cost price - selling price

हानि → जब लागत मूल्य विक्रय मूल्य से अधिक हो। तब यह विक्रेता के लिए घाटे की स्थिति होती है।

$$\text{Loss/हानि\%} = \frac{\text{Loss/हानि}}{\text{Cost price/लागत मूल्य}} \times 100\%$$

It is always calculated on cost price

इसकी गणना सदैव लागत मूल्य पर की जाती है।

➤ **Discount** → It is the amount that seller offers to the customer to increase his sales.

बट्टा/छूट → यह वह राशि है जो विक्रेता अपनी बिक्री बढ़ाने के लिए ग्राहक को प्रदान करता है।

Discount = marked price - selling price

छूट = अंकित मूल्य - विक्रय मूल्य

$$\text{Discount/छूट\%} = \frac{\text{Discount/छूट}}{\text{Marked price/अंकित मूल्य}} \times 100\%$$

It is always calculated on marked price.

इसकी गणना सदैव अंकित मूल्य पर की जाती है।

❖ **Cost price (CP)** = Total investment for a product.

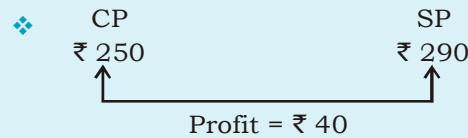
लागत मूल्य (CP) = किसी उत्पाद के लिए कुल निवेश

1. $\text{SP} > \text{CP} \rightarrow \text{Profit} = \text{SP} - \text{CP}$

$\text{SP} < \text{CP} \rightarrow \text{Loss} = \text{CP} - \text{SP}$

$\text{SP} = \text{CP} \rightarrow \text{No profit No loss}$

Profit % (लाभ %)



$$\text{Profit\%} = \frac{40}{250} \times 100\% = 16\%$$

$$\text{Profit\%} = \frac{\text{Profit(Rs)}}{\text{CP}} \times 100\% = \frac{\text{SP} - \text{CP}}{\text{CP}} \times 100\%$$

₹250 → ₹40 Profit

₹1 → $\frac{40}{250}$ Profit

₹100 → $\frac{40}{250} \times 100 = ₹16$ Profit

❖ $15\% \text{ Profit} \rightarrow 15\% = \frac{3}{20} \rightarrow \text{Profit}$

CP : SP

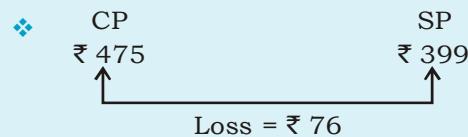
20 : 23

CP : SP

100% : 115%

For SP → $\times 1.15$ or $\times \left(1 + \frac{3}{20}\right) = \frac{23}{20}$

Loss % (हानि %)



$$\text{Loss\%} = \frac{76}{475} \times 100 = 16\%$$

$$\text{Loss\%} = \frac{\text{Loss}}{\text{CP}} \times 100 = \frac{\text{CP} - \text{SP}}{\text{CP}} \times 100\%$$

❖ CP SP
475 : 399
25 : 21

$$\text{Loss\%} = \frac{25-21}{25} \times 100\% = 16\%$$

❖ 35% Loss $\rightarrow \frac{7}{20} \rightarrow \text{Loss}$

$$\begin{array}{ll} \text{CP} & : \text{SP} \\ 20 & : (20-7) \\ 20 & : 13 \\ \text{OR} & \\ 100\% & : 65\% \end{array}$$

$$\text{For SP} \rightarrow \times 0.65 \text{ or } \times \left(1 - \frac{7}{20}\right) = \frac{13}{20}$$

❖ **Label price/marked price** = printed price on a product

लेबल मूल्य/चिह्नित मूल्य = उत्पाद पर मुद्रित मूल्य

The cost price of an article is ₹500 and its mark price is ₹800, then find markup percentage?

एक वस्तु का क्रय मूल्य ₹500 और इसका मुद्रित मूल्य ₹800 है, तो मुद्रित मूल्य प्रतिशत ज्ञात कीजिये?

$$\begin{array}{ll} \text{CP} & \text{MP} \\ \text{Rs.} 500 & \text{Rs.} 800 \end{array}$$

$$\text{Mark-up} = \text{MP} - \text{CP} = ₹300$$

$$\text{मार्क-अप} = \text{MP} - \text{CP} = ₹300$$

$$\begin{aligned} \text{Mark-up\%} &= \frac{\text{mark-up(rs)}}{\text{CP}} \times 100\% \\ &= \frac{\text{MP} - \text{CP}}{\text{CP}} \times 100\% \\ &= \frac{800 - 500}{500} \times 100\% = 60\% \end{aligned}$$

❖ If an object is sold on r% Profit.

यदि कोई वस्तु r% लाभ पर बेची जाती है।

$$\text{then, S.P.} = \text{C.P.} \left[\frac{100 + \text{Profit\%}}{100} \right] \text{ or}$$

$$\text{C.P.} = \text{S.P.} \left[\frac{100}{100 + \text{Profit\%}} \right]$$

Similarly, if an object is sold on r% loss, then

इसी प्रकार, यदि कोई वस्तु r% हानि पर बेची जाती है, तो

$$\text{S.P.} = \text{C.P.} \left[\frac{100 - \text{Loss\%}}{100} \right] \text{ or } = \text{S.P.} \left[\frac{100}{100 - \text{Loss\%}} \right]$$

Successive profit/loss (क्रमिक लाभ/हानि)

1. **Successive Profits** : If A sells an article to B at a% profit and B sells it to C at b% profit

क्रमिक लाभः यदि A एक वस्तु B को a% लाभ पर बेचता है और B इसे C को b% लाभ पर बेचता है

OR

If a% and b% are two successive profits

यदि a% और b% दो क्रमिक लाभ हैं

$$\text{then Total Profit / फिर कुल लाभ} = \left(a + b + \frac{ab}{100} \right)\%$$

1. If A sells an article to B at 20% profit and B sells it to C at 25% profit then successive profit?

यदि A किसी वस्तु को B को 20% लाभ पर बेचता है और B उसे C को 25% लाभ पर बेचता है, तो क्रमिक लाभ?

$$\text{Successive profit \%} = \left(20 + 25 + \frac{20 \times 25}{100} \right) = 50\%$$

2. If A sells an article to B at a% profit and B sells it to C at b% profit and if C paid Rs. x, then amount

$$\text{paid by A} = x \times \left(\frac{100}{100+a} \right) \left(\frac{100}{100+b} \right)$$

यदि A एक वस्तु B को a% लाभ पर बेचता है और B इसे C को b% लाभ पर बेचता है और यदि C, x रुपये का भुगतान करता है। A द्वारा

$$\text{भुगतान की गई राशि} = x \times \left(\frac{100}{100+a} \right) \left(\frac{100}{100+b} \right)$$

Ex. If A sells an article to B at 20% profit and B sells it to C at 25% profit and if C paid ₹225. Then what is the cost price for A?

यदि A, B को एक वस्तु 20% लाभ पर बेचता है और B उसे 25% लाभ पर C को बेचता है और यदि C ने ₹225 का भुगतान किया है। तो फिर A का लागत मूल्य क्या है?

$$\text{Amount paid by A} = 225 \times \left(\frac{100}{100+20} \right) \left(\frac{100}{100+25} \right) = ₹150$$

3. If a% profit and b% loss occur, simultaneously

$$\text{then overall loss or profit\% is } \left(a - b - \frac{ab}{100} \right)\%$$

यदि a% लाभ और b% हानि एक साथ होती है, तो कुल हानि या लाभ% है $\left(a - b - \frac{ab}{100} \right)\%$

(-ve sign for loss, +ve sign for profit)

(हानि के लिए -ve चिह्न, लाभ के लिए +ve चिह्न)

Ex. If 30% profit and 20% loss occurred, simultaneously then what is the overall profit or loss %?

यदि 30% लाभ और 20% की हानि एक साथ होती है, तो कुल लाभ या हानि % क्या है?

$$\begin{aligned} \text{Overall profit or loss \%} &= 30 - 20 + \frac{30 \times (-20)}{100} \\ &= 10 - 6 = 4\% \text{ profit} \end{aligned}$$

Based on number of article (वस्तुओं की संख्या के आधार पर)

1. If cost price of 'x' articles is equal to selling price of 'y' articles, then
Selling Price = x. Cost Price = y

यदि 'x' वस्तु का क्रय मूल्य 'y' वस्तु के विक्रय मूल्य के बराबर है, तो
विक्रय मूल्य = x , लागत मूल्य = y

$$\text{Hence, Profit and Loss\%} = \frac{x-y}{y} \times 100$$

$$\text{इसलिए, लाभ और हानि\%} = \frac{x-y}{y} \times 100$$

2. On selling ' x ' articles the profit or loss is equal to selling of ' y ' articles, then Profit\% $\frac{y \times 100}{x-y}$

' x ' वस्तु को बेचने पर लाभ या हानि ' y ' वस्तु को बेचने के बराबर है,
तो लाभ\% = $\frac{y \times 100}{x-y}$

$$\text{Loss\%} = \frac{y \times 100}{x+y}$$

- Ex.** On selling 12 articles the profit earned is equal to selling of 4 articles. Find profit\%.

12 वस्तुओं को बेचने पर अर्जित लाभ 4 वस्तुओं को बेचने के बराबर है। लाभ\% ज्ञात कीजिए।

$$\text{Profit\%} = \frac{4 \times 100}{12-4} \Rightarrow 50\%$$

3. If a man sells two similar objects one at a loss of $x\%$ and another at a gain of $x\%$, then he always incures loss in this transaction and loss\% is

$$\frac{x^2}{100}\%$$

यदि एक व्यक्ति दो समान वस्तुओं को एक $x\%$ की हानि पर और दूसरी को $x\%$ के लाभ पर बेचता है, तो उसे इस लेनदेन में हमेशा हानि होती

$$\text{है और हानि\%} \frac{x^2}{100}\% \text{ है}$$

- Ex.** If a man sells two similar objects one at a loss of 19% and another at a gain of 19% then what is the overall percentage gain or loss?

यदि एक व्यक्ति दो समान वस्तुओं को एक 19% की हानि पर और दूसरी को 19% के लाभ पर बेचता है तो इस लेनदेन में कुल लाभ/हानि % ज्ञात करें?

$$\text{Overall loss\%} = \frac{-x^2}{100} = -\frac{19 \times 19}{100} = -3.61\%$$

4. A man sells his items at a profit/loss of $x\%$. If he had sold it for Rs. R more, he would have gained/loss $y\%$. Then.

एक आदमी अपनी वस्तुओं को $x\%$ के लाभ/हानि पर बेचता है। अगर उसने इसे R अधिक रुपये में बेचा होता। उसे $y\%$ का लाभ/हानि होती। फिर।

$$\text{C.P. of items} = \frac{R}{(y \pm x)} \times 100$$

'+' = when one is profit and other is loss.

'+' = जब एक लाभ और दूसरा हानि हो।

'-' = When both are either profit or loss.

'-' = जब दोनों लाभ या हानि हों।

- Ex.** A man sells his items at 10% profit. If he had sold for Rs. 40 more then he would have gained 15% profit. Find cost price of item.

एक आदमी अपनी वस्तुओं को 10% लाभ पर बेचता है। अगर उसने 40 रुपये अधिक में बेचा होता। तो उसे 15% का लाभ होता। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

$$\text{CP} = \frac{40}{(15-10)} \times 100 \Rightarrow ₹800$$

- Ex.** Two article are sold for ₹2508 each. There is a gain of 14% on first article and a loss of 12% on second. What is the overall gain or loss percent?

दो वस्तुएँ ₹2508 में बेची जाती हैं, पहली वस्तु पर 14% का लाभ होता है और दूसरी पर 12% की हानि होती है। कुल लाभ या हानि प्रतिशत क्या है?

$$\begin{aligned} \text{Overall profit or loss\%} &= \frac{100(14-12) + 2 \times (-14 \times 12)}{200+14-12} \\ &= \frac{100 \times 2 - 2 \times 168}{202} = \frac{-136}{202} \\ &= 0.7\% \text{ loss} \end{aligned}$$

5. If a man purchases 'a' items for Rs. x and sells 'b' items for Rs. y , then his profit or loss per cent is given by

अगर एक आदमी x रुपये में 'a' वस्तुएँ खरीदता है। और y रुपये में 'b' वस्तुएँ बेचता है। लाभ या हानि प्रतिशत है

$$\left(\frac{ay - bx}{bx} \right) \times 100\%$$

- Ex.** If a man purchase 5 item for ₹20 and sells 3 items for ₹21, then his profit or loss percent is?

यदि एक आदमी 5 वस्तुएँ ₹20 में खरीदता है और 3 वस्तुएँ ₹21 में बेचता है, तो उसका लाभ या हानि प्रतिशत क्या है?

$$\begin{aligned} \text{Profit or loss\%} &= \left(\frac{5 \times 21 - 3 \times 20}{3 \times 20} \right) \times 100 \\ &= \frac{45}{6} \times 100 = 75\% \end{aligned}$$

Dishonest Shopkeeper (बेईमान दुकानदार)

1. A dishonest shopkeeper sells his goods at C.P. but uses false weight, then his profit =

एक बेईमान दुकानदार अपना माल क्रय मूल्य पर बेचता है। लेकिन झूठे वजन का उपयोग करता है, फिर उसका

$$\text{Gain\% / लाभ\%} = \frac{\text{True weight} - \text{False weight}}{\text{False weight}} \times 100$$

$$\text{or Gain\% /} = \frac{\text{Error}}{\text{True value} - \text{Error}} \times 100$$

(Positive and negative sign conventions are used for profit and loss.)

(सकारात्मक और नकारात्मक चिह्न परिपाटियों का उपयोग लाभ और हानि के लिए किया जाता है।)

- Ex.** A dishonest shopkeeper sells his goods at CP but uses 750 gm weight instead of 1000 gm. Find his profit percent?

एक बेईमान दुकानदार क्रय मूल्य पर अपना सामान बेचता है लेकिन 1000 ग्राम के बजाय 750 ग्राम वजन का उपयोग करता है। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिये?

$$\text{Gain\%} = \frac{1000 - 750}{750} \times 100\%$$

$$= \frac{250}{750} \times 100\% = 33\frac{1}{3}\%$$

- 2.** If a vendor used to sell his articles at $x\%$ loss on cost price but uses y grams instead of z grams, then his profit or loss% is

यदि एक विक्रेता अपने सामान को लागत मूल्य के $x\%$ हानि पर बेचता है लेकिन z ग्राम के बजाय y ग्राम का उपयोग करता है, तो उसका लाभ या हानि% है

$$\left[(100 - x) \frac{z}{y} - 100 \right] \%$$

[Profit or loss as per positive or negative sign).

[लाभ या हानि सकारात्मक या नकारात्मक संकेत के अनुसार।]

- Ex.** If a vendor used to sell his articles at 13% loss but uses 150 gm instead of 200 gm. Then his profit/loss% is?

यदि एक विक्रेता अपने सामान को 13% हानि पर बेचता है लेकिन 200 ग्राम के बजाय 150 ग्राम का उपयोग करता है। तो उसका लाभ/हानि% है?

$$\left[(100 - 13) \times \frac{200}{150} - 100 \right] \%$$

$$= \left(87 \times \frac{3}{4} - 100 \right) \% = (116 - 100)\% = 16\% \text{ profit}$$

- 3.** If $a\%$ and $b\%$ are two successive losses then (negative sign shows loss and positive sign shows profit).

यदि $a\%$ और $b\%$ लगातार दो नुकसान हैं तो (नकारात्मक चिह्न हानि दर्शाता है और धनात्मक चिह्न लाभ दर्शाता है)

$$\text{Total loss\% / कुल हानि\%} = \left(-a - b + \frac{ab}{100} \right) \%$$

- 4.** If $a\%$ loss and $b\%$ profit occur then, total loss/profit is

यदि $a\%$ हानि और $b\%$ लाभ होता है, तो कुल हानि/लाभ है

$$\left(-a + b - \frac{ab}{100} \right) \%$$

(negative sign for loss and positive sign for profit)
(हानि के लिए ऋणात्मक चिह्न और लाभ के लिए धनात्मक चिह्न)

- Two article sold for rupees z each. on one, there is a gain of $x\%$ and on the other, is a loss of $y\%$. What is the overall gain or loss percent.

दो वस्तुओं में से प्रत्येक को z रुपये के मूल्य पर बेचा जाता है। उनमें से एक वस्तु पर विक्रेता को $x\%$ लाभ होता है और दूसरी वस्तु पर $y\%$ की हानि होती है। विक्रेता को कुल मिलाकर कितने प्रतिशत लाभ अथवा हानि हुई।

$$\text{Overall Profit and Loss\%} = \frac{100(x+y) + 2xy}{200 + x + y}$$

If the value is positive then it will be profit percent and if negative then it will be loss percent.

यदि मान धनात्मक हो तो लाभ प्रतिशत एवं ऋणात्मक हो तो हानि प्रतिशत होगा।

- If two items are bought at same price each as Rs. x one at a profit of $y\%$ and other at a loss of $y\%$ then.

यदि दो वस्तुएं समान मूल्य x रुपये तथा एक को लाभ $y\%$ और दूसरी को हानि $y\%$ पर खरीदी जाए तो

No. Profit. No Loss

- In an article is sold for Rs. x , the loss is as much as the profit is if it is sold for Rs. y , then the cost price

किसी वस्तु को x रु. में बेचने पर उतनी ही हानि होती है जितना कि y

$$\text{रु. में बेचने पर लाभ होता है, तो क्रय मूल्य} = \frac{x+y}{2}$$

- If the profit earned by selling an article for Rs. x is n times the loss incurred by selling it for Rs. y , then the cost price of the article

यदि किसी वस्तु को x रु. में बेचने से प्राप्त लाभ उसे y रु. में बेचने पर

$$\text{उठाए गए हानि का } n \text{ गुना हो, तो वस्तु का क्रय मूल्य} \frac{x+ny}{n+1}$$



Discount (बट्टा/छूट)



Discount (छूट)

- ❖ Discount/छूट → It is the amount that seller offers to the customer to increase his sales./यह वह राशि है जो विक्रेता अपनी बिक्री बढ़ाने के लिए ग्राहक को प्रदान करता है।
- ❖ Discount = Mark price – Selling price
- ❖ Always calculated on marked price हमेशा अंकित मूल्य पर गणना की जाती है
- ❖ Can not be greater than 100% 100% से अधिक नहीं हो सकता

$$\begin{array}{lll} \text{CP} & \text{SP} & \text{MP} \\ 500 & 700 & 800 \\ \text{Discount} = \text{MP} - \text{SP} & = 100 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Discount\%} &= \frac{\text{Discount}}{\text{MP}} \times 100\% \\ &= \frac{\text{MP} - \text{SP}}{\text{MP}} \times 100\% \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{100}{800} \times 100\% = 12.5\%$$

2. If shopkeeper does not allow any discount अगर दुकानदार कोई छूट नहीं देता है

$$\text{MP} = \text{SP} \Rightarrow \text{Mark-up\%} = \text{Profit\%}$$

3. $\text{SP} = \text{CP} + \text{Profit} = \text{MP} - \text{Discount}$
 $700 = 500 + 200 = 800 - 100$

4. $\begin{array}{ccc} \text{CP} & \text{SP} & \text{MP} \\ \swarrow +P\% & \searrow -d\% & \\ \text{Profit} & \text{discount} & \end{array}$

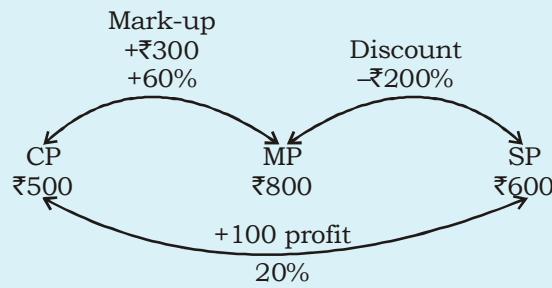
$$\text{SP} = \text{CP} \times (100 + P)\% = \text{MP} \times (100 - d)\%$$

$$\therefore \frac{\text{CP}}{\text{MP}} = \frac{100 - d\%}{100 + p\%} \text{ Or } \frac{100 - d\%}{100 - L\%}$$

5. Net effect (successive) of mark up% and discount% is profit % मार्क अप% और छूट% का शुद्ध प्रभाव (क्रमिक) लाभ% है

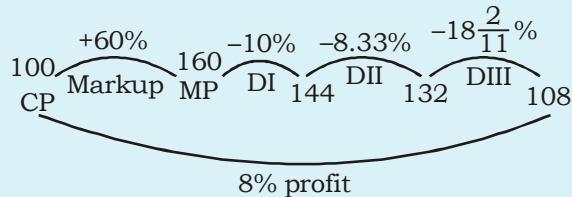
$$P\% = \left(M - D - \frac{M \times D}{100} \right) \%$$

Ex.



Successive Discount (क्रमिक छूट)

1.



$$60\% = \frac{+3}{5}$$

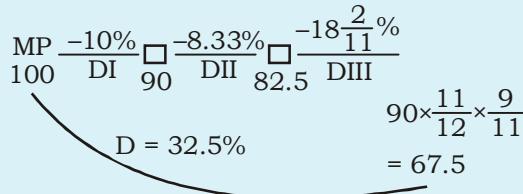
$$10\% = \frac{-1}{10}$$

$$8.33\% = \frac{-1}{12}$$

$$18 \frac{2}{11}\% = \frac{-2}{11}$$

$$\rightarrow \frac{2}{25} \times 100 = 8\% \text{ profit}$$

2.



$$\begin{aligned} \text{Equivalent discount of } 10\%, 8.33\% \& 18 \frac{2}{11}\% = 32.5\% \\ 90 \times \frac{11}{12} \times \frac{9}{11} &= 67.5 \end{aligned}$$

3. Successive discount → $x\%, y\%$

$$\text{Net discount} - \left(x + y - \frac{xy}{100} \right) \%$$

4. Successive discount / लगातार छूट → $x\%, y\%, z\%$

Net discount / शुद्ध छूट

$$= (x + y + z) - \frac{xy + yz + zx}{100} + \frac{xyz}{10000}$$

Ex:- 5%, 7%, 8%

Net discount / शुद्ध छूट

$$\begin{aligned} &= 20 - \left(\frac{35 + 56 + 40}{100} \right) + \frac{5 \times 7 \times 8}{10000} \\ &= 20 - 1.31 + 0.0280 \\ &= 18.718\% \end{aligned}$$

Free Article (मुफ्त वस्तु)

- ❖ Buy 4 get 1 free / 4 खरीदें 1 मुफ्त पाएं :-

1 Article MP = Rs. 1

$$D = 1$$

$$MP = 5$$

$$D\% = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$$

Note: Any kind of Discount is calculated only on marked price and not on selling price or cost price.
नोट: किसी भी प्रकार की छूट की गणना केवल अंकित मूल्य पर की जाती है न कि विक्रय मूल्य या लागत मूल्य पर।

'y' articles (quantity/number) are given free on purchasing 'x' articles. Then,

'x' वस्तु खरीदने पर 'y' वस्तु (मात्रा/संख्या) निःशुल्क दी जाती है। फिर,

$$\text{Discount\%} / \text{छूट\%} = \frac{y \times 100}{x + y}$$

- Ex.** If 2 articles are given free on purchase of 8 articles then find discount %.

यदि 8 वस्तुओं की खरीद पर 2 वस्तुएं मुफ्त दी जाती हैं तो छूट प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

$$\text{Discount \%} = \frac{2}{(2+8)} \times 100\% = 20\%$$

Miscellaneous (विविध)

1. If article is sold on D% discount, then

यदि वस्तु को D% छूट पर बेचा जाता है, तो

$$SP = \frac{MP(100 - D)}{100}.$$

$$MP = \frac{SP \times 100}{100 - D}$$

2. A tradesman marks his goods r% above his cost price. If he allows his customers a discount of r₁% on the marked price. Then the profit or loss percent is

एक व्यापारी अपने माल पर क्रय मूल्य से r% अधिक मूल्य अंकित करता है। यदि वह अपने ग्राहकों को अंकित मूल्य पर r₁% की छूट देता है। तो लाभ या हानि प्रतिशत है

$$\frac{r \times (100 - r_1)}{100} - r_1$$

(Positive sign signifies profit and negative sign signifies loss).

(सकारात्मक चिन्ह लाभ को दर्शाता है और ऋणात्मक चिन्ह हानि को दर्शाता है)।

- Ex.** A shopkeeper marks his goods 30% above the cost price. If he allows a discount of 15% on the mark price. Then his profit or loss percent is?

एक दुकानदार अपने सामान पर क्रय मूल्य से 30% अधिक मूल्य अंकित करता है। यदि वह अंकित मूल्य पर 15% की छूट देता है। तो उसका लाभ या हानि प्रतिशत है?

$$\Rightarrow \frac{30 \times (100 - 15)}{100} - 15$$

$$\Rightarrow \frac{255}{10} - 15 \Rightarrow 25.5 - 15 = 10.5\% \text{ profit}$$

3. The marked price of an article is fixed in such a way that after allowing a discount of r% a profit of R% is obtained. Then the marked price of the article is $\left(\frac{r+R}{100-r} \times 100\right)\%$ more than its cost price.

एक वस्तु का अंकित मूल्य इस प्रकार निर्धारित किया जाता है कि r% की छूट देने के बाद R% का लाभ प्राप्त होता है। तब वस्तु का अंकित मूल्य उसके क्रय मूल्य से $\left(\frac{r+R}{100-r} \times 100\right)\%$ अधिक है।

- Ex.** The MP of an article is fixed in such a way that after allowing a discount of 20% a profit of 30% is obtained. Then mark-up percent is?

एक वस्तु का अंकित मूल्य इस प्रकार निर्धारित किया जाता है कि 20% की छूट देने के बाद 30% का लाभ प्राप्त होता है। तो मार्क-अप प्रतिशत है?

$$\text{Mark-up\%} = \left(\frac{20 + 30}{(100 - 20)} \times 100\right)\%$$

$$= \frac{50}{80} \times 100\% = 62.5\%$$

- Ex.** A trader marks his goods 20% above his cost price if he allows his customers a discount of 25% on the mark price. Then profit or loss percent is?

एक व्यापारी अपने माल पर लागत मूल्य से 20% अधिक मूल्य अंकित करता है यदि वह अपने ग्राहकों को अंकित मूल्य पर 25% की छूट देता है। तो लाभ या हानि प्रतिशत है?

$$\text{Profit or Loss \%} = \frac{20 \times (100 - 25)}{100} - 25$$

$$= \frac{75}{5} - 25 = - 10\% \text{ loss}$$

(-ve sign means loss)

- Ex.** Three equal successive discount% allows on an articles affect as single discount of 65.7%. Find each equal discount?

एक वस्तु पर तीन समान क्रमिक छूट% की अनुमति 65.7% की एकल छूट के रूप में होती है। प्रत्येक समान छूट ज्ञात करें?

$$\text{Discount} = 100\% - 65.7\% = 34.3\%$$

$$\sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{(100 - D\%)}$$

$$\sqrt[3]{1000} : \sqrt[3]{343}$$

$$\begin{array}{ccc} 10 & : & 7 \\ \swarrow & & \searrow \\ -3 & & \end{array}$$

$$\text{Single discount \%} = \frac{3}{10} \times 100 = 30\%$$



Simple interest (साधारण ब्याज)



Important Points (महत्वपूर्ण बिंदु)

- ❖ **Principal** → Borrowed money is called Principal and it is denoted by 'P'.
मूलधन → उधार लिया हुआ पैसा मूलधन कहलाता है और इसे 'P' से दर्शाया जाता है।
- ❖ **Time** → Money is borrowed for certain time period, that time is called interest time and it is denoted by 'T' or 't'.
समय → पैसा एक निश्चित समय अवधि के लिए उधार लिया जाता है, उस समय को ब्याज समय कहा जाता है और इसे 'T' या 't' द्वारा दर्शाया जाता है।
- ❖ **Amount** → The principal becomes Amount when interest is added to it. Amount is represented as A.
मिश्रधन → मूलधन तब बन जाता है जब इसमें ब्याज जोड़ा जाता है मिश्रधन को A के रूप में दर्शाया जाता है।
- ❖ **Interest** → It is the amount to be paid on the borrowed money or the amount received on the money lent.
ब्याज → यह उधार लिए गए पैसे पर भुगतान की जाने वाली राशि या उधार दिए गए पैसे पर प्राप्त होने वाली राशि है।
- ❖ So, Amount = Principal + Interest $\Rightarrow A = P + S.I.$
इसलिए, मिश्रधन = मूलधन + ब्याज $\Rightarrow A = P + S.I.$
OR
Interest = Amount - Principal $\Rightarrow S.I. = A - P$
ब्याज = मिश्रधन - मूलधन $\Rightarrow S.I. = A - P$

Simple interest calculation

Basis	Rate	Time
1. Annually	r%	t years
2. Half yearly	$\frac{r}{2}\%$	2t years
3. Quarterly year	$\frac{r}{4}\%$	4t years
4. Monthly	$\frac{r}{12}\%$	12t years

➤ Different amounts invested in different time periods

$$\begin{array}{ccc} A & : & B \\ (A \times T) & : & (B_1 \times t_1 + B_2 \times t_2) \end{array}$$

B invests twice, for different periods

Simple Interest (SI) (साधारण ब्याज)

- ❖ $SI = \frac{\text{Principal} \times \text{Rate} \times \text{Time}}{100}$
or,

$$S.I. = \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$P = \frac{S.I. \times 100}{R \times T}$$

$$R = \frac{S.I. \times 100}{P \times T}$$

$$T = \frac{S.I. \times 100}{P \times R}$$

$$A = P + S.I.$$

or,

$$S.I. = A - P$$

Case-I → If P and R are constant, then $S.I. \propto T$

Case-II → If R and T are constant, then $S.I. \propto P$

Case-III → If P and T are constant, then $S.I. \propto R$

- ❖ If there are distinct rates of interest for distinct time periods i.e.

यदि अलग-अलग समय अवधि के लिए ब्याज की अलग-अलग दरें हैं यानी

Rate for 1st t_1 years $\rightarrow R_1\%$

पहले t_1 वर्ष के लिए दर $\rightarrow R_1\%$

Rate for 2nd t_2 years $\rightarrow R_2\%$

दूसरे t_2 वर्षों के लिए दर $\rightarrow R_2\%$

Rate for 3rd t_3 years $\rightarrow R_3\%$

तीसरे t_3 वर्षों के लिए दर $\rightarrow R_3\%$

Then, Total S.I. for 3 years

फिर, 3 साल के लिए कुल S.I.

$$= \frac{P(R_1 t_1 + R_2 t_2 + R_3 t_3)}{100}$$

Rate of Interest (ब्याज की दर)

- ❖ Interest on ₹100 in one year is called Rate of Interest.

₹100 पर एक वर्ष में ब्याज को ब्याज की दर कहा जाता है।

- ❖ If a certain sum becomes 'n' times of itself in T years on Simple Interest, then the rate per cent per annum is.

यदि एक निश्चित राशि साधारण ब्याज पर T वर्ष में स्वयं की 'n' गुनी हो जाती है, तो वार्षिक दर प्रतिशत है।

$$R\% = \frac{(n-1)}{T} \times 100\% \text{ and,}$$

$$T = \frac{(n-1)}{R} \times 100\%$$

- Ex. If a certain sum becomes 3 times of itself in 4 years on simple interest. Find rate percent per annum.

यदि कोई राशि साधारण ब्याज पर 4 वर्ष में स्वयं की 3 गुनी हो जाती है। प्रति वर्ष दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

$$R = \frac{(3-1)}{4} \times 100\% = 50\%$$

- ❖ If Simple Interest (S.I.) becomes 'n' times of principal i.e.

यदि साधारण ब्याज (S.I.) मूलधन का 'n' गुना हो जाता है अर्थात् S.I. = P × n then.

$$RT = n \times 100$$

- ❖ If an Amount (A) becomes 'n' times of certain sum (P) i.e.

यदि कोई राशि (A) निश्चित राशि (P) का 'n' गुना हो जाती है यानी A = Pn then

$$RT = (n - 1) \times 100$$

- ❖ If the difference between two simple interests is 'x' calculated at different annual rates and times, then principal (P) is

यदि दो साधारण ब्याज के बीच के अंतर 'x' की गणना अलग-अलग वार्षिक दरों और समय पर की जाती है, तो मूलधन (P) है

$$P = \frac{x \times 100}{(\text{diff. in rate}) \times (\text{diff. in time})}$$

- ❖ If a sum amounts to x_1 in t years and then this sum amounts to x_2 in another t yrs. Then the sum is given by

यदि कोई राशि t वर्षों में x_1 हो जाती है और फिर यह राशि अगले t वर्षों में x_2 हो जाती है। तब मूलधन =

$$P = \frac{(\text{Diff in amount}) \times 100}{(\text{Change in interest Rate}) \times \text{time}}$$

- ❖ If a sum with simple interest rate, amounts to 'A' in t_1 years and 'B' in t_2 years, then.

यदि साधारण ब्याज दर वाली राशि t_1 वर्षों में 'A' और t_2 वर्षों में 'B' हो जाती है, तो।

$$R\% = \frac{(B-A) \times 100}{A.t_2 - B.t_1} \text{ and}$$

$$P = \frac{At_2 - Bt_1}{t_2 - t_1}$$

Installment (किश्त)

- ❖ If a sum is to be deposited in equal installments, then / यदि कोई राशि समान किस्तों में जमा करनी है, तो

$$\text{Equal installments/ समान किश्त} = \frac{A \times 200}{T[200 + (T-1)r]}$$

where / जहाँ

T = no. of years / वर्षों की संख्या

A = amount / राशि

r = Rate of Interest / ब्याज दर

- ❖ To find the rate of interest under current deposit plan,

वर्तमान जमा योजना के तहत ब्याज दर का पता लगाने के लिए,

$$r = \frac{\text{S.I.} \times 2400}{n(n+1) \times (\text{deposited amount})}$$

where n = no. of months

- ❖ The difference between the S.I. for a certain sum P_1 deposited for time T_1 at R_1 rate of interest and another sum P_2 deposited for time T_2 at R_2 rate of interest is

ब्याज की R_1 दर पर T_1 समय के लिए जमा की गई एक निश्चित राशि P_1 के लिए साधारण ब्याज और R_2 ब्याज दर पर T_2 समय के लिए जमा की गई दूसरी राशि P_2 के बीच का अंतर है

$$\text{S.I.} = \frac{P_2 R_2 T_2 - P_1 R_1 T_1}{100}$$

- If simple interest is $\frac{x}{y}$ of principal amount and rate of interest and time is equal then,

यदि संख्या ब्याज + मूल राशि का $\frac{x}{y}$ है और ब्याज की दर और समय

बराबर है, तो

$$\text{Time} = \text{Rate} = \sqrt{\frac{x}{y} \times 100}$$

- If a sum (P) becomes amount (A_1) at $r\%$ in t years on SI. Then the difference between the amount (A_2) if the P is lent at $(r + 1)\%$ for t years is:

मूलधन (P), $r\%$ की दर से t सालों में साधारण ब्याज पर मिश्रधन (A_1) बन जाता है तो समान राशि (P) को $(r + 1)\%$ की दर से t सालों के लिए साधारण ब्याज पर लगाने से प्राप्त हुई राशि (A_2) के बीच अंतर-

$$\text{Difference } (A_2 - A_1) = \frac{P \times 1 \times t}{100}$$

- If a sum 'P' divided in 3 parts i.e. P_1 , P_2 , P_3 and then each part lent at $r_1\%$, $r_2\%$, $r_3\%$ rates for t_1 , t_2 , t_3 years respectively at simple interest and

यदि किसी मूलधन 'P' को तीन भागों i.e. P_1 , P_2 , P_3 में बाट कर $r_1\%$, $r_2\%$, $r_3\%$ की दर से t_1 , t_2 , t_3 सालों के लिए साधारण ब्याज पर दिया जाता है, और

- (a) If SI received from all 3 parts are equal, then

यदि 3 भागों से साधारण ब्याज समान प्राप्त हो, तो

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{r_1 t_1} : \frac{1}{r_2 t_2} : \frac{1}{r_3 t_3}$$

- (b) If amount ($P + SI$) received from all 3 parts are equal, then

यदि 3 भागों से मिश्रधन ($P + SI$) समान प्राप्त हो, तो

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{1}{100 + r_1 t_1} : \frac{1}{100 + r_2 t_2} : \frac{1}{100 + r_3 t_3}$$



Compound interest (चक्रवृद्धि व्याज)



- The interest on a loan or deposit calculated based on both the initial principal and the accumulated interest from previous periods and it is denoted by 'CI'.

किसी ऋण या जमा पर व्याज की गणना प्रारंभिक मूलधन और पिछली अवधि के संचित व्याज दोनों के आधार पर की जाती है और इसे 'CI' द्वारा दर्शाया जाता है।

- If $P = 100$, $T = 4$, $R = 10\%$

$$\begin{array}{ccccccc} P & \xrightarrow{\text{SI}} & A \\ 100 & +40 & \longrightarrow & 140 \\ & 4 \text{ years} & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{SI/CI for 2nd year} & & \text{CI for 3rd year} & & \text{CI for 4th year} \\ P & \xrightarrow{\text{SI/CI}} & P & \xrightarrow{\text{CI}} & P & \xrightarrow{\text{CI}} & P \\ 100 & +10 & \longrightarrow & +11 & \longrightarrow & +12.1 & \longrightarrow & +13.31 \\ & 1 \text{ yr} & & 1 \text{ yr} & & 1 \text{ yr} & & 1 \text{ yr} \\ A_1 & & & A_2 & & A_3 & & A_4 \end{array}$$

$CI = 146.41 - 100 = 46.41\%$

- Successive increase (4 years):-

$$\begin{array}{ccccc} 10\% & & 10\% & & 10\% \\ \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\ 21\% & & & & 21\% \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 21 + 21 + \frac{21 \times 21}{100} = 46.41\% & & \end{array}$$

- In compound interest amount is in Geometric progression (GP).

चक्रवृद्धि व्याज की राशि ज्यामितीय श्रेणी (GP) में होती है।

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{SI/CI for 2nd year} & & \text{CI for 3rd year} & & \text{CI for 4th year} \\ P & \xrightarrow{\text{SI/CI}} & P & \xrightarrow{\text{CI}} & P & \xrightarrow{\text{CI}} & P \\ 100 & \times 1.1 & \longrightarrow & \times 1.1 & \longrightarrow & \times 1.1 & \longrightarrow & \times 1.1 \\ & 1 \text{ yr} & & 1 \text{ yr} & & 1 \text{ yr} & & 1 \text{ yr} \\ 10\% & & & 10\% & & 10\% & & 10\% \\ A_1 & & & A_2 & & A_3 & & A_4 \end{array}$$

$$P \xrightarrow[1 \text{ yr}]{+R\%} \frac{P(1+R\%)^1}{A_1} \xrightarrow[1 \text{ yr}]{+R\%} \frac{P(1+R\%)^2}{A_2} \xrightarrow[1 \text{ yr}]{+R\%} \frac{P(1+R\%)^3}{A_3} \dots \xrightarrow[1 \text{ yr}]{+R\%} \frac{P(1+R\%)^n}{A_n}$$

- Amount after years $A_n = P(1 + R\%)^n = P \left(\frac{1+R}{100} \right)^n$

$$CI_n = A_n - P = P(1 + R\%)^n - P = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^n - 1 \right]$$

Compound interest is the interest you earn on interest
(चक्रवृद्धि व्याज वह व्याज है जो आप व्याज पर कमाते हैं)

- If rate of interest in first and 2nd cycle are $x\%$ & $y\%$ respectively

यदि पहले और दूसरे चक्र में व्याज दर क्रमशः $x\%$ और $y\%$ है

$$CI_2 = \left(x + y + \frac{xy}{100} \right) \%$$

- If rate is same / यदि दर समान है = $r\%$

$$CI_2 = \left(2r + \frac{r^2}{100} \right) \%$$

SI and CI table for 2 years

Rate p.a	SI	CI	CI-SI
2%	4%	4.04%	0.04%
3%	6%	6.09%	0.09%
4%	8%	8.16%	0.16%
5%	10%	10.25%	0.25%
6%	12%	12.36%	0.36%
7%	14%	14.49%	0.49%
8%	16%	16.64%	0.64%
9%	18%	18.81%	0.81%
10%	20%	21%	1%
11%	22%	23.21%	1.21%
12%	24%	25.44%	1.44%
15%	30%	32.25%	2.25%
20%	40%	44%	4%
25%	50%	56.25%	6.25%
30%	60%	69%	9%

SI and CI table for 3 years

Rate p.a	SI	CI	CI-SI
2%	6%	6.12%	0.12%
3%	9%	9.27%	0.27%
4%	12%	12.48%	0.48%
5%	15%	15.76%	0.76%
6%	18%	19.1%	1.1%
7%	21%	22.5%	1.5%
8%	24%	25.97%	1.97%
9%	27%	29.50%	2.50%
10%	30%	33.1%	3.1%

11%	33%	36.76%	3.76%
12%	36%	40.49%	4.49%
15%	45%	52.08%	7.08%
20%	60%	72.80%	12.80%
25%	75%	95.31%	20.31%
30%	90%	119.70%	29.70%

❖ Difference between CI & SI for 2 years = $\frac{r^2}{100}\%$

$$\text{Rate } CI_2 \left(2r + \frac{r^2}{100} \right) \quad \text{Difference between CI and SI}$$

Ex.	5%	10.25%	0.25%
	10%	21%	1%
	15%	32.25%	2.25%
	20%	44%	4%
	25%	56.25%	6.25%
	30%	69%	9%

3. Rate = $x\%$, $y\%$, $z\%$ for 3 cycles.

$$CI = \left[(x + y + z) + \frac{(xy + yz + zx)}{100} + \frac{xyz}{10000} \right] \%$$

❖ P = Rs. 4000

R = 2%, 3%, 5%

$$CI = (10 + 0.31 + 0.0030)\% = 10.313\%$$

$$\therefore 4000 \times 10.313\% = \text{Rs. } 412.52$$

⇒ If r% for 3 consecutive years / लगातार वर्ष
r%, r%, r%

$$CI_3 = \left(3r + \frac{3r^2}{100} + \frac{r^3}{10000} \right) \%$$

❖ P = Rs. 10, 000

R = 7% p.a.

CI₃ = ?

$$\text{Eff. Rate} = (21 + 1.47 + 0.0343)\% = 22.0543\%$$

$$\therefore CI_3 \rightarrow 10, 000 \times 22.5043\%$$

$$= \text{Rs. } 2250.43$$

4.	Rate	CI ₃	CI ₃ - SI ₃
	5%	15.7625%	0.7625%
	10%	33.1%	3.1%
	15%	52.0875%	7.0875%
	20%	72.8%	12.8%
	25%	95.3125%	20.3125%
	30%	119.7%	29.7%

❖ P = Rs. 7500

R = 7%, 8%

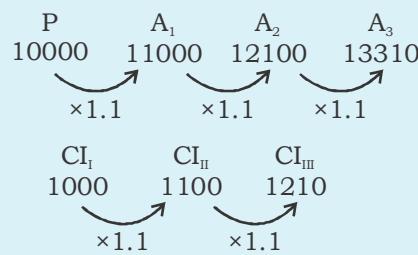
$$CI_2 - SI_2 \rightarrow \frac{7 \times 8}{100}\% = 0.56\%$$

$$7500 \times 0.56\% \Rightarrow \text{Rs. } 42$$

5. P = 10.000

T = 3 years

$$R = 10\% \text{ p.a.} = \frac{1}{10} \quad \therefore \frac{11}{10} \text{ or } 1.1$$



Amount & CI_I, CI_{II}, CI_{III} G.P में होंगे

Golden Ratio Method

$$\begin{aligned} \text{❖ } CI_{3\text{rd yr}} &= CI_3 \text{ yr} - CI_2 \text{ yr} \\ &= 3 : 3 : 1 \quad (CI_3 \text{ yr}) \\ &= 2 : 1 \quad (CI_2 \text{ yr}) \\ \hline 1 : 2 : 1 \end{aligned}$$

Ex. P = 25000, R = 6% p.a CI for 3rd year = ?

$$\begin{array}{ccccc} 1500 & & 1500 & & 1500 \\ & \nearrow 90 & & \searrow 90 \times 2 & \\ & 90 & & 5.4 & \end{array}$$

Alternatively:-

$$\begin{array}{ccccc} 1 & : & 2 & : & 1 \\ 1500 & & 90 & & 5.4 \\ \Rightarrow 1500 + 180 + 5.4 & = & \text{₹}1685.4 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{❖ } CI_{4\text{th yr}} &= CI_4 \text{ yr} - CI_3 \text{ yr} \\ &= 4 : 6 : 4 : 1 \quad (CI_3 \text{ yr}) \\ &= 3 : 3 : 1 \quad (CI_2 \text{ yr}) \\ \hline 1 : 3 : 3 : 1 \end{aligned}$$

Ex. P = ₹20,000

R = 5%

$$\begin{array}{ccccc} CI_4 \text{ yr} - CI_3 \text{ yr} & = & CI_{4\text{th yr}} & = ? \\ 1 & : & 3 & : & 3 : 1 \end{array}$$

$$1000 : 50 : 2.5 : 0.125$$

$$\Rightarrow 1000 + 150 + 7.5 + 0.125$$

$$\text{₹}1157.6250$$

$$\text{❖ Rate} = R\% = \frac{1}{x}$$

Let P = x^3 unit

$$I = x^2$$

$$II = x^2 \quad x$$

$$III = x^2 \quad 2x \quad 1$$

$$\frac{CI_3 - SI_3}{P} = \frac{3x + 1}{x^3}$$

$$\text{❖ } R = 20\% \text{ p.a} \rightarrow \frac{1}{5}, \left(\times \frac{6}{5} \right)$$

$$\begin{array}{ccccccc} P & \xrightarrow{+20\%} & P \times \frac{6}{5} & \xrightarrow{+20\%} & P \times \left(\frac{6}{5} \right)^2 + 20\% & \xrightarrow{+20\%} & P \times \left(\frac{6}{5} \right)^3 + 20\% \cdots \cdots P \times \left(\frac{6}{5} \right)^n \\ A_1 & & A_2 & & A_3 & & A_n \end{array}$$

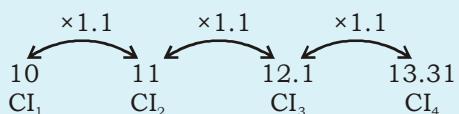
$$\frac{A_7}{A_5} = \frac{P \times \left(\frac{6}{5} \right)^7}{P \times \left(\frac{6}{5} \right)^5} = \frac{36}{25}$$

$$\begin{array}{ccccc} 5 \text{ yr} & & 2 \text{ yr} & & \\ P & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & A_5 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & A_7 \\ & & \times \left(\frac{6}{5} \right) & & \end{array}$$

CI of Particular years is also in Geometric progression (GP).

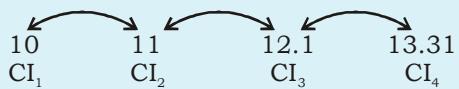
विशेष वर्ष का CI भी ज्यामितीय श्रेणी (GP) में होते हैं।

R = 10% p.a



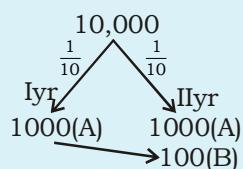
Note:- Interest is not in Geometric progression (GP).

ब्याज ज्यामितीय श्रेणी (GP) में नहीं होते हैं।



Tree Method

❖ P = 10000, R = 10% p.a., T = 2 years

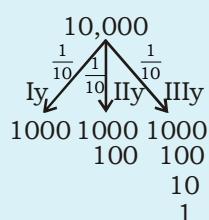


$$CI \text{ of } 2 \text{ year} = 2 \times 1000 + 100 = 2100$$

$$CI_2 - SI_2 = 100$$

Note:- Golden ratio of 2 year = 2 : 1 (2A : B)

P = 10000, R = 10% p.a., T = 3 years



$$SI_3 = 3000$$

$$CI_3 = 3 \times 1000 + 3 \times 100 + 1 \times 100 = 3310$$

Note:- Golden Ratio of 3 years = 3 : 3 : 1

Proof:- $A_3 = P(1+R\%)^3$

$$CI_3 = P(1+R^3\% + 3R\% + 3R^2\%) - P \\ = 3 \times PR\% + 3R^2\% + 1PR^2\%$$

6. Ratio of CI of

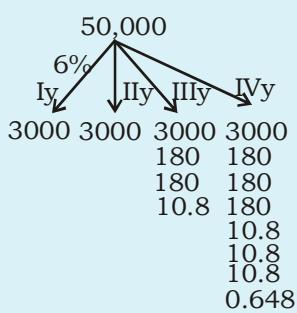
2 years $\rightarrow 2 : 1$

3 years $\rightarrow 3 : 3 : 1$

4 years $\rightarrow 4 : 6 : 4 : 1$

5 years $\rightarrow 5 : 10 : 10 : 5 : 1$

Ex. P = ₹50,000, R = 6% p.a., T = 4 years



Ratio	Arithmetic			
	4 ↓×	6 ↓×	4 ↓×	1 ↓×
3000	:	180	:	10.8
12000	:	1080	:	43.2

$$CI_4 = ₹13123.848$$

Some important points (कुछ महत्वपूर्ण बिंदु)

1. If / यदि

A = Amount / मिश्रधन,

P = Principal / मूलधन

r = Rate of Compound Interest (C.I.)

चक्रवृद्धि ब्याज की दर (C.I.)

t = no. of years / समय अवधि

then / तब,

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t, C.I. = A - P$$

$$C.I. = P \left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t - 1 \right]$$

2. Compound interest is calculated on four basis:

चक्रवृद्धि ब्याज की गणना चार आधारों पर की जाती है

Rate **Time(n)**

Annually / हर साल r% t years

Half-yearly / अर्धवार्षिक $\frac{r}{2}\%$ t × 2 years

Quarterly / त्रैमासिक $\frac{r}{4}\%$ t × 4 years

Monthly / महीने के $\frac{r}{12}\%$ t × 12 years

3. If there are distinct 'rates of interest' for distinct time periods i.e.

अगर अलग-अलग समय अवधि के लिए अलग-अलग 'ब्याज की दरें' हैं,

Rate for 1st year / प्रथम वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_1\%$

Rate for 2nd year / द्वितीय वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_2\%$

Rate for 3rd year / तीसरे वर्ष के लिए दर $\rightarrow r_3\%$ and so on / और इसी तरह

Then / फिर

$$A = P \left(1 + \frac{r_1}{100}\right) \left(1 + \frac{r_2}{100}\right) \left(1 + \frac{r_3}{100}\right) \dots$$

$$C.I. = A - P$$

4. If the time is in fractional form i.e.,

यदि समय भिन्नात्मक रूप में है अर्थात्,

$$t = nF, \text{ then}$$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \left(1 + \frac{rF}{100}\right) \text{ e.g. } t = 3\frac{5}{7} \text{ yrs, then}$$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 \left(1 + \frac{r}{100} \times \frac{5}{7}\right)$$

5. A certain amount becomes 't' times of itself in 'm' years on compound interest then the time it will take to becomes m^n times of itself is $t \times n$ years.

एक निश्चित राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 'm' वर्षों में स्वयं का 't' गुना हो जाती है तो इसे स्वयं का m^n गुना होने में लगने वाला समय $t \times n$ वर्ष है।

- Ex.** A certain sum becomes 3 times of itself in 5 years on compound interest. Then the time it will take to becomes 81 times of itself is →

एक निश्चित राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 5 वर्ष में स्वयं की 3 गुनी हो जाती है। तो इसे स्वयं का 81 गुना होने में कितना समय लगेगा।

$$81 = 3^4$$

$$\therefore \text{Time} = 5 \times 4 = \mathbf{20 \text{ years}}$$

6. The difference between C.I. and S.I. on a sum 'P' in 2 years at the rate of R% rate of compound interest will be

किसी राशि 'P' पर 2 वर्ष में R% की चक्रवृद्धि ब्याज की दर से साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अंतर =

$$\text{For 2 year, } \text{C.I.} - \text{S.I.} = P \left(\frac{R}{100} \right)^2 = \frac{\text{S.I.} \times R}{200}$$

$$\text{For 3 years, } \text{C.I.} - \text{S.I.} = P \left(\frac{R}{100} \right)^2 \times \left(3 + \frac{R}{100} \right)$$

- Ex.** If the difference between CI and SI is ₹91 in three years and the principal is ₹27000. Find the rate of interest if compounded annually.

यदि तीन वर्षों में CI और SI के बीच का अंतर ₹91 है और मूलधन ₹27000 है। यदि ब्याज की दर वार्षिक रूप से संयोजित हो तो ब्याज की दर ज्ञात कीजिए?

$$\frac{3x+1}{x^3} = \frac{30 \times 3 + 1}{(30)^3} = \frac{91}{27000}, \quad x = 30$$

$$R\% = \frac{1}{x} = \frac{1}{30} \times 100 = \mathbf{3\frac{1}{3}\%}$$

7. If on compound interest, a sum becomes Rs. A in 'a' years and Rs. B in 'b' years then,

यदि चक्रवृद्धि ब्याज पर, एक राशि 'a' साल में A रुपये हो जाती है। और 'b' साल में B रु. हो जाती है तब-

$$(i) \text{If } b - a = 1, \text{ then } R\% = \left(\frac{B}{A} - 1 \right) \times 100\%$$

$$(ii) \text{If } b - a = 2, \text{ then } R\% = \left(\sqrt{\frac{B}{A}} - 1 \right) \times 100\%$$

$$(iii) \text{If } b - a = n \text{ then, } R\% = \left[\left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \times 100\%$$

where n is a whole number.

जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

8. If a sum becomes 'n' times of itself in 't' years on compound interest, then $R\% = \left[n^{\frac{1}{t}} - 1 \right] \times 100\%$

यदि कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 't' वर्षों में स्वयं का 'n' गुना हो जाती है, तो $R\% = \left[n^{\frac{1}{t}} - 1 \right] \times 100\%$

- Ex.** If a sum becomes 3 times of itself in 2 years on compound interest then R% is →

यदि कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज पर 2 वर्ष में स्वयं की 3 गुनी हो जाती है तो R% है

$$R\% = \left(3^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \times 100\%$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} - 1) \times 100\%$$

9. (i) for n = 2. Each annual installment

$n = 2$ के लिए प्रत्येक वार्षिक किस्त

$$= \frac{P}{\left(\frac{100}{100+r} \right) + \left(\frac{100}{100+r} \right)^2}$$

- (ii) For n = 3. Each annual installment

$n = 3$ के लिए प्रत्येक वार्षिक किस्त

$$= \frac{P}{\left(\frac{100}{100+r} \right) + \left(\frac{100}{100+r} \right)^2 + \left(\frac{100}{100+r} \right)^3}$$

10. The simple interest for a certain sum for 2 years at an annual rate of interest R% is S.I., then

वार्षिक ब्याज दर R% पर 2 वर्षों के लिए एक निश्चित राशि के लिए साधारण ब्याज S.I. है, तो

$$\text{C.I.} = \text{S.I.} \left(1 + \frac{R}{200} \right)$$

11. A certain sum at C.I., becomes x times in n_1 year and y times in n_2 years then $x^{\frac{1}{n_1}} = y^{\frac{1}{n_2}}$.

चक्रवृद्धि ब्याज पर एक निश्चित राशि, n_1 वर्ष में x गुना और n_2 वर्षों में y गुना हो जाती है। तो $x^{\frac{1}{n_1}} = y^{\frac{1}{n_2}}$

Effective/Successive rate in Compound Interest

प्रभावी दर चक्रवृद्धि ब्याज में

For 2 years/दो साल के लिए-

- (a) If rate of interest in 1st year is x% and in 2nd year is y%, then effective rate/प्रभावी दर =

$$\left[x + y + \frac{xy}{100} \right] \%$$

Interest rates to remember

Rates for	CI 2 yr.	CI-SI for 2 yr.	For 3 yr.	CI-SI for 3 yr.
1%	2.01%	0.01%	3.0301%	0.0301%
2%	4.04%	0.04%	6.1208%	0.1208%
3%	6.09%	0.09%	9.2727%	0.2727%
4%	8.16%	0.16%	12.4864%	0.4864%
5%	10.25%	0.25%	15.7625%	0.7625%
10%	21%	1%	33.1%	3.1%
15%	32.25%	2.25%	52.0875%	7.0875%
20%	44%	4%	72.8%	12.8%
25%	56.25%	6.25%	95.3125%	20.3125%
30%	69%	9%	119.7%	29.7%

- (b) If rate is same in both years, then/यदि दोनों साल की दर समान हो, तो

$$\text{Effective rate/प्रभावी दर} = \left[2r + \frac{r^2}{100} \right] \%$$

For 3 years/तीन साल के लिए

- (a) If rate is $x\%$, $y\%$ and $z\%$ in 1st year, 2nd year and 3rd year respectively, then
यदि पहले साल, दूसरे साल और तीसरे साल की दर $x\%$, $y\%$ और $z\%$ है, तो effective rate/प्रभावी दर

$$= \left[(x+y+z) + \frac{(xy+yz+zx)}{100} + \frac{xyz}{10000} \right] \%$$

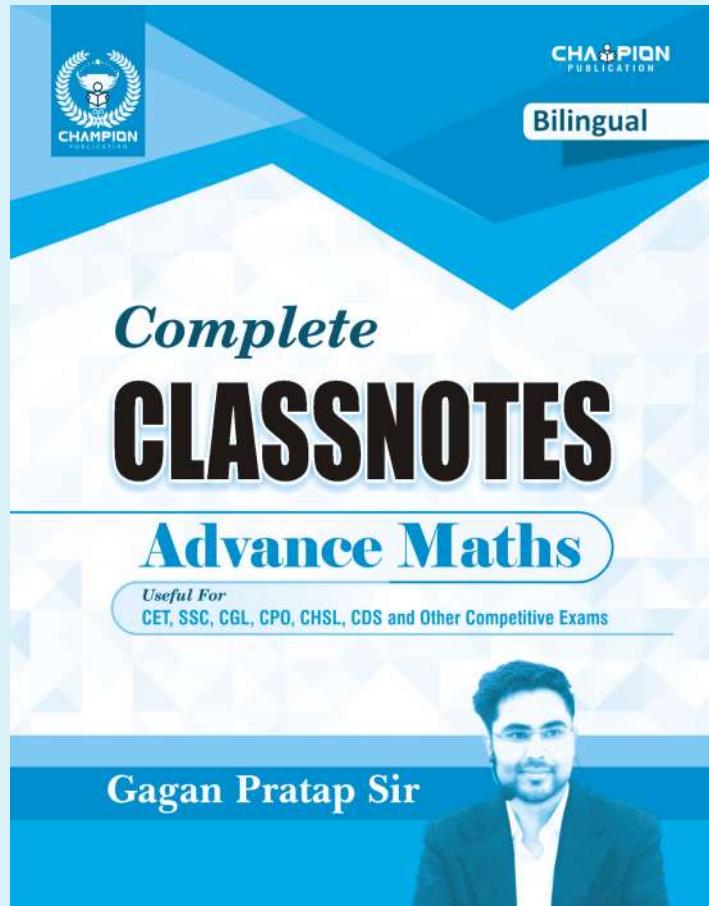
- (b) If rate is $r\%$ for each 3 years

यदि प्रत्येक 3 साल की दर $r\%$ है

$$\text{Effective rate/प्रभावी दर} = \left[3r + \frac{3r^2}{100} + \frac{r^3}{(100)^2} \right] \%$$

Some General Results

Amount		
a	<u>t year</u>	b
a^2	<u>2t year</u>	b^2
a^3	<u>3t year</u>	b^3
Amount		
1	<u>t year</u>	b
$\sqrt[3]{a}$	$\frac{t}{2}$ year	$\sqrt[3]{b}$
$\sqrt[3]{a}$	$\frac{t}{3}$ year	$\sqrt[3]{b}$





Ratio & Proportion (अनुपात तथा समानुपात)



Concept of Ratio (अनुपात की अवधारणा)

- The comparative relation between two amounts/ quantities of same type is called ratio.

एक ही प्रकार की दो राशियाँ/मात्राओं के बीच के तुलनात्मक संबंध को अनुपात कहते हैं।

- Ratio always occurs between units, as- अनुपात हमेशा समान इकाइयों के बीच होता है, जैसे-

Rupees : Rupees	रुपये : रुपये
kg : kg	किग्रा : किग्रा
Hour : Hour	घंटा : घंटा
Second : Second etc.	सेकंड : सेकंड आदि।

- Let an amount be x and another is y , then the ratio between them is $x : y$ or $x \div y$.

माना एक राशि x और दूसरी y है, तो उनके बीच का अनुपात $x : y$ या $x \div y$ है।

- In ratio 1st number i.e. 'x' is called "antecedent" and 2nd number i.e., 'y' is called "consequent".

अनुपात में पहली संख्या यानी 'x' को "पूर्ववर्ती" कहा जाता है और दूसरी संख्या यानी 'y' को "अनुवर्ती" कहा जाता है।

- If $a : b :: c : d$, then a and d are called extremes and b and c are called means.

यदि $a : b :: c : d$, तो a और d चरम कहलाते हैं और b और c मध्य कहलाते हैं।

∴ Product of extremes = Product of means.

$$\text{i.e., } ad = bc$$

- It does not change the ratio, when we multiply or divide antecedent and consequent of the ratio by a same non-zero number as-

यह अनुपात में परिवर्तन नहीं करता है, जब हम पूर्ववर्त को तथा परिणामी को एक ही गैर-शून्य संख्या से गुणा या विभाजित करते हैं-

$$\text{e.g. } a : b = \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} = ac : bc = a : b$$

- What should be added to all of a, b, c, d (numbers) so that these become proportional respectively?

सभी a, b, c, d (संख्याओं) में क्या जोड़ा जाए कि ये क्रमशः समानुपातिक हो जाएँ?

Let x should be added / माना x जोड़ा जाना चाहिए :

$$\text{Then / फिर } \frac{a+x}{b+x} :: \frac{c+x}{d+x}$$

- If an amount R is to be divided between A and B in the ratio $m : n$ then

यदि एक राशि R को A और B के बीच $m : n$ के अनुपात में विभाजित किया जाना है, तो

$$(i) \text{ Part of } A = \frac{m}{m+n} \times R$$

$$(ii) \text{ Part of } B = \frac{n}{m+n} \times R$$

$$(iii) \text{ Difference of part of } A \text{ and } B = \frac{m-n}{m+n} \times R$$

where $m > n$

- If the ratio of A and B is $m : n$ and the difference in their share is ' R' units then,

यदि A और B का अनुपात $m : n$ है और उनके हिस्से का अंतर ' R' इकाई है, तो,

$$(i) \text{ Part of } A = \frac{m}{m-n} \times R$$

$$(ii) \text{ Part of } B = \frac{n}{m-n} \times R$$

$$(iii) \text{ The sum of parts of } A \text{ and } B = \frac{m+n}{m-n} \times R$$

where $m > n$

- If the ratio of alligation of milk and water in a glass is $m : n$ and in other glass alligation is $p : q$, then the ratio of milk and water in third glass which contains alligation of both glasses is

यदि एक गिलास में दूध और पानी के मिश्रण का अनुपात $m : n$ है और दूसरे गिलास में मिश्रण का अनुपात $p : q$ है, तो तीसरे गिलास में दूध और पानी का अनुपात है जिसमें दोनों गिलासों का मिश्रण है

$$\text{Ratio} = \left(\frac{m}{m+n} + \frac{p}{p+q} \right) : \left(\frac{n}{m+n} + \frac{q}{p+q} \right)$$

- If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ then each ratio $= \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$

- If the ratio of mixture of milk and water in a glass is $13 : 11$ and in other glass mixture is $5 : 7$, then what will be the ratio of milk and water in third glass which contains mixture of both glass is?

यदि एक गिलास में दूध और पानी का अनुपात $13 : 11$ है और दूसरे गिलास में दूध और पानी का अनुपात $5 : 7$ है, तो तीसरे गिलास में दूध और पानी का अनुपात क्या होगा जिसमें दोनों गिलास का मिश्रण है?

Ratio of third glass =

$$\left(\frac{13}{13+11} + \frac{5}{5+7} \right) : \left(\frac{11}{13+11} + \frac{7}{5+7} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{23}{24} & : & \frac{29}{24} \\ 23 & : & 29 \end{array}$$



Definition of different types of ratio
(विभिन्न प्रकार के अनुपात की परिभाषा)

1. **Mixed ratio**→ Let $x : y$ and $P : Q$ be two ratios, then $Px : Qy$ is called mixed ratio.

मिश्रित अनुपात→ मान लीजिए $x : y$ और $P : Q$ दो अनुपात हैं, तो $Px : Qy$ को मिश्रित अनुपात कहते हैं।

2. **Duplicate ratio**→ The mixed ratio of two equal ratios is called the duplicate ratio as

वर्गानुपात→ दो समान अनुपातों के मिश्रित अनुपात को वर्गानुपात कहा जाता है।

duplicate ratio of $a : b$ is $a^2 : b^2$

$a : b$ का वर्गानुपात $a^2 : b^2$ है।

3. **Subduplicate ratio**→ The square root of a certain ratio is called its subduplicate.

वर्गमूलानुपाती→ एक निश्चित अनुपात के वर्गमूल को उसका वर्गमूलानुपाती कहा जाता है।

The subduplicate ratio of $a : b = \sqrt{a} : \sqrt{b}$

$a : b$ का वर्गमूलानुपात = $\sqrt{a} : \sqrt{b}$

4. **Triplicate ratio**→ The cube of a certain ratio is called triplicate ratio.

घनानुपाती→ एक निश्चित अनुपात के घन को घनानुपाती कहते हैं।

The triplicate ratio of $a : b = a^3 : b^3$

$a : b$ का घनानुपात = $a^3 : b^3$

5. **Subtriplicate ratio**→ The cube root of a certain ratio is called subtriplicate ratio as -

घनमूलानुपाती→ एक निश्चित अनुपात के घनमूल को घनमूलानुपाती कहा जाता है-

The Subtriplicate ratio of $a : b = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$

$a : b$ का घनमूलानुपात = $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$

6. **Inverse ratio**→ The reciprocal of quantities of ratio is called its inverse. Reciprocal or inverse ratio of $a : b$

व्युत्क्रम अनुपात→ अनुपात की मात्राओं का व्युत्क्रम इसका व्युत्क्रम कहलाता है। $a : b$ का पारस्परिक या व्युत्क्रम अनुपात

$$= \frac{1}{a} : \frac{1}{b} \text{ or } \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} \right) \times (\text{L.C.M of } a \text{ and } b)$$

7. **Invertendo**→ The proportion in which antecedent and consequent quantities change their places, is called invertendo, as -

विलोमानुपात→ जिस अनुपात में पूर्ववर्ती और परिणामी मात्राएँ अपना स्थान बदलती हैं, उसे विलोमानुपात कहा जाता है, क्योंकि -

Invertendo of / का विलोमानुपात $a : b = c : d$ is $b : a = d : c$

means / $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

8. **Alternendo**→ If $a : b :: c : d$ is a proportion then its

alternendo is $a : c :: b : d$. i.e alternendo of $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

is $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

एकान्तरानुपात→ यदि $a : b :: c : d$ एक समानुपात है तो इसका

एकान्तरानुपात $a : c :: b : d$ है। यानी $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ का एकान्तरानुपात

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ है।}$$

9. **Componendo**→ If $a : b :: c : d$ is a proportion, then componendo is $(a + b) : b :: (c + d) : d$

योगानुपात→ यदि $a : b :: c : d$ एक समानुपात है, तो योगानुपात होगा $(a + b) : b :: (c + d) : d$

It means, If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

इसका अर्थ है, यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तब, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

$$\text{or, } \left[\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \right]$$

10. **Dividendo**→ If $a : b :: c : d$ is a proportion, then its dividendo is $(a - b) : b :: (c - d) : d$

अंतरानुपात→ यदि $a : b :: c : d$ एक समानुपात है, तो उसका अंतरानुपात $(a - b) : b :: (c - d) : d$ होगा।

It means /, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$
 $\Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

11. **Componendo and dividendo**→ If there is a proportion $a : b :: c : d$ then its componendo and dividendo is

योगान्तरानुपात→ अगर कोई अनुपात है $a : b :: c : d$ तो इसका योगान्तरानुपात है

$$(a + b) : (a - b) :: (c + d) : (c - d) \text{ or, } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

To simplify the proportion any one method of componendo, dividendo, componendo and Dividendo can directly be used.

अनुपात को सरल बनाने के लिए योगान्तरानुपात की किसी एक विधि का सीधे उपयोग किया जा सकता है।

- Ex. If the ratio of A : B : C is 7 : 9 : 11. Distribute ₹10800 in A, B and C.

यदि A : B : C का अनुपात 7 : 9 : 11 है, तो ₹10800 को A, B और C में बटो।

$$A = 10800 \times \frac{7}{27} = 2800$$

$$B = 10800 \times \frac{9}{27} = 3600$$

$$C = 10800 \times \frac{11}{27} = 4400$$

- Ex. If A : B = 5 : 9 and B : C is 7 : 10 then find A : B : C = ?

$$\begin{array}{r} A : B : C \\ 5 : 9 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 7 : 10 \\ \hline 35 : 63 : 90 \end{array}$$

Ex. If $A : B = 5 : 6$ and $B : C = 4 : 7$ and $C : D = 3 : 1$ then find $A : B : C : D = ?$

$$\begin{array}{cccc} A & : & B & : & C & : & D \\ 5 & : & 6 & & 6 & & 6 \\ 4 & & 4 & : & 7 & & 7 \\ \hline 3 & & 3 & & 3 & : & 1 \\ \hline 60 & : & 72 & : & 126 & : & 42 \\ 10 & : & 12 & : & 21 & : & 7 \end{array}$$

Ex. If $5A = 8B = 12C$ then find $A : B : C = ?$

LCM of (5, 8, 12) = 120

$$\frac{120}{5} : \frac{120}{8} : \frac{120}{12} \Rightarrow 24 : 15 : 10$$

Alternatively:-

$$8 \times 12 : 5 \times 12 : 8 \times 5 = 24 : 15 : 10$$

Ex. $9A = 12B = 18C = 5 : 7 : 11$ then find $A : B : C = ?$

LCM of (9, 12, 18) = 36

$$A : B : C = \left(\frac{5}{9} : \frac{7}{12} : \frac{11}{18} \right) \times 36 = 20 : 21 : 22$$

Ex. If $\frac{A}{8} = \frac{B}{10} = \frac{C}{13}$ then find $A : B : C = ?$

$$A : B : C = 8 : 10 : 13$$

Note:- If $\frac{a}{x} : \frac{b}{y} : \frac{c}{z}$ then $a : b : c = x : y : z$

Ex. If $\frac{14A}{5} : \frac{8B}{13} = \frac{12C}{11}$ then find $A : B : C = ?$

$$A : B : C = \left(\frac{5}{14} : \frac{13}{8} : \frac{11}{21} \right) \times 168 = 60 : 273 : 88$$

Ex. If $a : (b + c) = 7 : 13$, $b : (c + a) = 8 : 17$ then find $c : (a + b) = ?$

$$a + b + c = 20, 25, \frac{a}{b+c} = \frac{7}{13}, \frac{b}{c+a} = \frac{8}{17}$$

LCM of (20, 25) = 100

$$\frac{a}{b+c} = \frac{7}{13} \times \frac{5}{5} = \frac{35}{65}$$

$$\frac{b}{c+a} = \frac{8}{17} \times \frac{4}{4} = \frac{32}{68}$$

$$\text{then } \frac{c}{a+b} = \left(\frac{100-68}{35+32} \right) = \frac{33}{67}$$

Ex. If $a + b : b + c : c + a = 15 : 11 : 18$ then find $a : b : c = ?$

$$2(a + b + c) = 44$$

$$a + b + c = 22$$

$$a : b : c = (22 - 11) : (22 - 18) : (22 - 15) = 11 : 4 : 7$$

Alternatively:-

$$2a = [(a + b) + (c + a)] - (b + c)$$

$$2b = [(a + b) + (b + c)] - (c + a)$$

$$3c = [(b + c) + (c + a)] - (a + b)$$

$$\begin{array}{ccc} 2a & : & 2b & : & 2c \\ (33-11) & : & (26-18) & : & (29-15) \\ 22 & : & 18 & : & 14 \\ 11 & : & 4 & : & 7 \end{array}$$

Concept of Proportion (समानुपात की अवधारणा)

- 1. Directly Proportional:** If $x = ky$, where k is a constant, then we say that x is directly proportional to y . If it is written as $x \propto y$.

सीधे आनुपातिक: यदि $x = ky$, जहाँ k एक अचर है, तो हम कहते हैं कि x, y के समानुपाती हैं। यदि इस को $x \propto y$ के रूप में लिखा जाता है।

- 2. Inversely Proportional:** If $x = \frac{k}{y}$ where k is a constant, then we say that x is inversely proportional to y . It is written as $x \propto \frac{1}{y}$.

व्युत्क्रमानुपाती: यदि $x = \frac{k}{y}$ जहाँ k एक अचर है, तो हम कहते हैं

कि x, y के व्युत्क्रमानुपाती हैं। $x \propto \frac{1}{y}$ के रूप में लिखा जाता है।

- 3. Proportion:** When two ratios are equal to each other, then they are called proportional as

समानुपात : जब दो अनुपात एक दूसरे के बराबर होते हैं, तो उन्हें समानुपाती कहते हैं

$a : b = c : d$, then, a, b, c and d are in proportion.

$a : b = c : d$, तो a, b, c और d समानुपात में हैं।

or,

$a : b :: c : d$

E.g. $2 : 5 = 6 : 15$, then we write $2 : 5 :: 6 : 15$

- 4. Mean Proportion** – Let x be the mean proportion between a and b , then $a : x :: x : b$ (Real condition)
मध्य अनुपात – मान लीजिए x, a और b के बीच औसत अनुपात है, तो $a : x :: x : b$ (वास्तविक स्थिति)

$$\therefore \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab$$

$$\therefore x = \sqrt{ab}$$

So, mean proportion of a and b = \sqrt{ab}

तो, a और b का मध्य अनुपात = \sqrt{ab}

If x be the mean proportion between $(x - a)$ and $(x - b)$ then what will be the value of x ?

यदि $x, (x - a)$ और $(x - b)$ के बीच मध्य अनुपात हो, तो x का मान क्या होगा?

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

- 5. Third proportional** – Let ' x ' be the third proportional of a and b then,
तीसरा समानुपाती – माना ' x ', a और b का तीसरा समानुपाती है, तब, $a : b :: b : x$ (Real condition)

Law of Ratios (अनुपात का नियम)

$$\text{i.e. } \frac{a}{b} = \frac{b}{x} \Rightarrow ax = b^2$$

$$\therefore x = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore \text{Third proportional of } a \text{ and } b = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore a \text{ और } b \text{ का तीसरा अनुपातिक} = \frac{b^2}{a}$$

- 6. Fourth Proportional** – Let x be the fourth proportional of a, b and c , then $a : b :: c : x$ (Real condition)

चौथा समानुपातिक – मान लीजिए x, a, b और c का चौथा समानुपाति है, तो $a : b :: c : x$ (वास्तविक स्थिति)

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow ax = bc$$

$$\therefore x = \frac{bc}{a}$$

$$\therefore \text{Fourth proportional of } a, b \text{ and } c = \frac{bc}{a}$$

$$\therefore a, b \text{ और } c \text{ का चौथा अनुपातिक} = \frac{bc}{a}$$

- 7. First Proportional** – Let x be the first proportional of a, b and c . then, $x : a :: b : c$ (Real condition)

पहला समानुपातिक – मान लीजिए कि x, a, b और c का पहला समानुपाति है। तब, $x : a :: b : c$ (वास्तविक स्थिति)

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow cx = ab$$

$$\therefore x = \frac{ab}{c}$$

- 8. Let 'x' be a number which is subtracted from a, b, c and d to make them proportional then**

मान लीजिए 'x' एक संख्या है जिसे a, b, c और d से घटाकर उन्हें समानुपातिक बनाया जाता है

$$x = \frac{ad - bc}{(a+d) - (b+c)}$$

Let 'x' be a number which is added to a, b, c and d to make them proportional, then

मान लीजिए 'x' एक संख्या है जिसे a, b, c और d में जोड़कर उन्हें समानुपातिक बनाया जाता है, तब

$$x = \frac{bc - ad}{(a+d) - (b+c)}$$

Here a, b, c and d should always be in ascending order.

यहाँ a, b, c और d हमेशा बढ़ते क्रम में होने चाहिए।

❖ If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ then

$$(i) ad = bc$$

$$(ii) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$(iii) \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$(iv) \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$(v) \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

How to find ratio (अनुपात कैसे पता करें)

- 1.** If $3A = 4B = 5C$ find $A : B : C$

step1: Take LCM of (3,4,5) = 60

$$\therefore A = \frac{60}{3} = 20$$

$$B = \frac{60}{4} = 15$$

$$C = \frac{60}{5} = 12$$

$$\therefore A : B : C = 20 : 15 : 12$$

2nd Method $3A=4B=5C$

$$\begin{array}{rcl} A:B:C = & 4 \times 5 : & 3 \times 5 : \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{for A} & \text{for B} & \text{for C} \end{array}$$

multiply the coeff. of B & C multiply the coeff. of A & C multiply the coeff. of A & B

$$\Rightarrow 20 : 15 : 12$$

- 2.** If $A:B = 4:5, B:C = 2:5$ then find $A:B:C = ?$

$$\begin{array}{rcl} A : B : C \\ 4 : 5 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 : 5 \\ \hline 8 : 10 : 25 \end{array}$$

Second method:- (B is common, so make B equal)

दूसरा तरीका:- (B को मैंने बराबर कर ले)

$$A : B : C$$

$$4_{\times 2} : 5_{\times 2}$$

$$\frac{2_{\times 5}}{8} : \frac{5_{\times 5}}{25}$$

$$8 : 10 : 25$$

Concept of Degree (डिग्री की अवधारणा)

- 1.** If $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$

$$\text{then } \frac{5a+3b}{7a-4b} = \frac{5 \times 7 + 3 \times 3}{7 \times 7 - 4 \times 3} = \frac{44}{37}$$

2. $\frac{2a^2 + 3b^2}{a^2 - 4ab} = \frac{98 + 27}{49 - 84} = \frac{-25}{7}$

3. $\frac{3a^3 + 4b^2}{5a^2 + 2b^3}$ = can not be determined because degree of each term is not same.

$\frac{3a^3 + 4b^2}{5a^2 + 2b^3}$ = निर्धारित नहीं किया जा सकता क्योंकि प्रत्येक पद की घात समान नहीं है।

Note:-

To solve this type of equations degree of each term should be same.

इस प्रकार के समीकरणों को हल करने के लिए प्रत्येक पद की घात समान होनी चाहिए।

Ex. A bag contains ₹1, 50 paise and 25 paise coins in the ratio 5 : 6 : 7. If the total amount is ₹390. Find the number of coins of each kind?

एक बैग में ₹1, 50 पैसे और 25 पैसे के सिक्के 5 : 6 : 7 के अनुपात में हैं। यदि कुल राशि ₹390 है। प्रत्येक प्रकार के सिक्के की संख्या ज्ञात करें?

Coins →	₹1 : 50p : 25p
Amount →	5 : 6 : 7
	5 : 3 : 1.75
	9.75 $\times 40 \rightarrow$ ₹390

$$\text{₹1} \rightarrow 5 \times 40 = 200 \text{ Coins}$$

$$50\text{p} \rightarrow 6 \times 40 = 240 \text{ Coins}$$

$$25\text{p} \rightarrow 7 \times 40 = 280 \text{ Coins}$$



Mixture & Alligation (मिश्रण तथा पृथ्वीकरण)



- ❖ **Mixture** → Mixture is defined as a result of mixing two or more items or substances in a certain ratio or proportion.

मिश्रण → मिश्रण को दो या दो से अधिक वस्तुओं या पदार्थों को एक निश्चित अनुपात या अनुपात में मिलाने के परिणामस्वरूप परिभाषित किया जाता है।

eg. → Mixture of milk and water, mixture of water and sugar,

जैसे → दूध और पानी का मिश्रण, पानी और चीनी का मिश्रण,

- ❖ **Alligation** → Alligation is a process or rule for the solution of problems concerning the compounding or mixing of ingredients differing in price or quality.

एलीगेशन → एलीगेशन कीमत या गुणवत्ता में भिन्न सामग्री के संयोजन या मिश्रण से संबंधित समस्याओं के समाधान के लिए एक प्रक्रिया या नियम है।

Concentration (सांद्रता)

- ❖ Concentration is the percentage of a particular quantity in the full mixture

पूर्ण मिश्रण में एक विशेष मात्रा का प्रतिशत सांद्रता है

- Ex.** In a mixture ratio of milk; water = 60 : 40

एक मिश्रण में दूध व पानी का अनुपात = 60 : 40

∴ Concentration of milk / दूध की सांद्रता =

$$\frac{60}{60+40} \times 100\% = 60\%$$

- E.** If ratio of milk : water = 11 : 5

यदि दूध : पानी का अनुपात = 11 : 5 है

Then concentration of milk / फिर दूध की सांद्रता

$$= \frac{11}{11+5} \times 100\% = 68.75\%$$

Concentration of water / पानी की सांद्रता =

$$\frac{5}{16} \times 100\% = 31.25\%$$

or concentration of water = 100 - concentration of milk

या पानी की सांद्रता = 100 - दूध की सघनता

$$= 100 - 68.75\% = 31.25\%$$

Replacement of mixture (मिश्रण का प्रतिस्थापन)

- 1.** When same quantity is replaced each time from 400 L Pure Milk.

जब समान मात्रा को हर बार 400 लीटर शुद्ध दूध से बदल दिया जाता है

$$\frac{-80}{400} = \frac{-1}{5} = \text{part of } 20\% \text{ removed each time}$$

हर बार 20% का हिस्सा हटा दिया गया

$$\left. \begin{array}{l} -80 \text{L pure milk} \\ +80 \text{L water} \end{array} \right]$$

left quantity of pure milk after 3 times/ 3 बार के बाद

$$\text{बचा हुआ शुद्ध दूध} \Rightarrow 400 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 400 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$\Rightarrow 400 \times 0.512 = 204.8 \text{L}$$

water in final mixture / अंतिम मिश्रण में पानी =
400 - 204.8 = 195.2L

- ❖ Concentration of milk / दूध की सांद्रता =

$$\frac{\text{Left pure milk}}{\text{Total mixture}} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0.512$$

$$= 51.2\%$$

$$\text{Concentration of water} = 100\% - 51.2\% = 48.8\%$$

- 2.** When different quantity is replaced each time.

जब हर बार अलग-अलग मात्रा बदली जाती है।

400L pure milk / शुद्ध दूध

$$-40 \text{L pure milk} + 40 \text{L water} = \frac{-1}{10}$$

$$-40 \text{ लीटर शुद्ध दूध} + 40 \text{ लीटर पानी} = \frac{-1}{10}$$

$$-50 \text{L mix} + 50 \text{L water} = \frac{-1}{8}$$

$$-50 \text{ लीटर मिश्रण} + 50 \text{L लीटर पानी} = \frac{-1}{8}$$

$$-80 \text{L mix} + 80 \text{L water} = \frac{-1}{5}$$

$$-80 \text{ लीटर मिश्रण} + 80 \text{L लीटर पानी} = \frac{-1}{5}$$

Left Quantity of pure milk / शुद्ध दूध की शेष मात्रा

$$= 400 \times \frac{9}{10} \times \frac{7}{8} \times \frac{4}{5} = 252 \text{L}$$

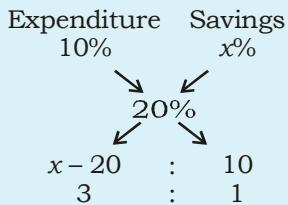
$$\text{water} = 400 - 252 = 148 \text{L}$$

2nd method ::

Initial	:	Final
10	:	9
8	:	7
5	:	4
400	:	252
↓ × 1	:	↓ × 1
400L	:	252L

$$75\% = \frac{3}{4} \rightarrow \text{spends}$$

$$4 \rightarrow \text{income} \therefore \text{Exp: saving} = 3 : 1$$

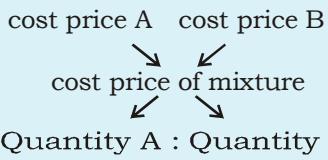


$$\Rightarrow \frac{x-20}{10} = \frac{3}{1}$$

$$x - 20 = 30$$

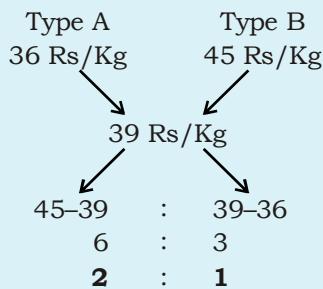
$$x = 50\%$$

4. Alligation in profit loss / लाभ हानि में सम्मिश्रण

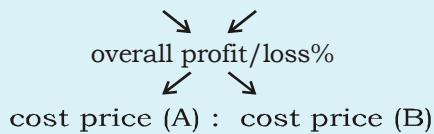


Ex. Cost price of type A sugar is ₹36 Kg and type B sugar is 45 Rs/Kg. In what ratio these type of sugar should be mixed to get a mixture worth 39 Rs./Kg.

A प्रकार की चीनी का लागत मूल्य ₹36 किग्रा है और प्रकार B चीनी का ₹45 किग्रा है। इस प्रकार की चीनी को किस अनुपात में मिलाया जाए कि मिश्रण का मूल्य ₹39 किग्रा हो जाए।

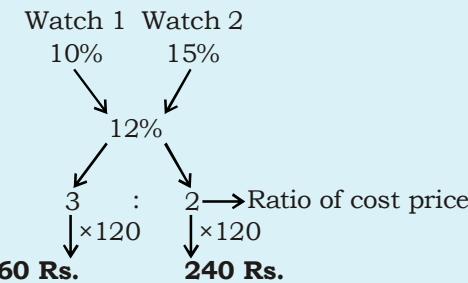


5. Profit/loss% (A) Profit/Loss% (B)

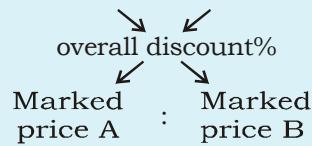


Ex. First watch is sold at 10% profit and 2nd watch is sold at 15% profit and the overall profit on both the watches is 12% if cost price of first watch is ₹360 Find cost price of second watch ?

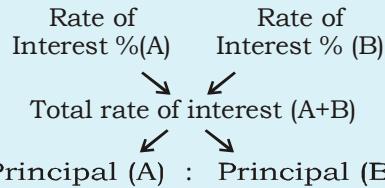
पहली घड़ी को 10% लाभ पर बेचा जाता है और दूसरी घड़ी को 15% लाभ पर बेचा जाता है और दोनों घड़ियों पर कुल लाभ 12% है यदि पहली घड़ी का लागत मूल्य ₹360 है। दूसरी घड़ी का लागत मूल्य ज्ञात कीजिये?



6. Discount% (A) Discount% (B)

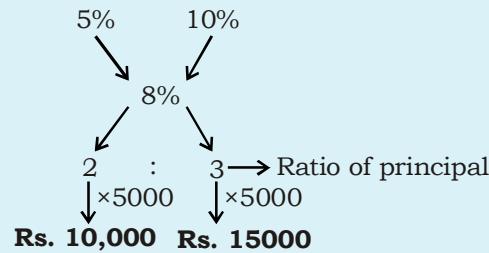


7. Alligation in simple interest / साधारण व्याज में सम्मिश्रण

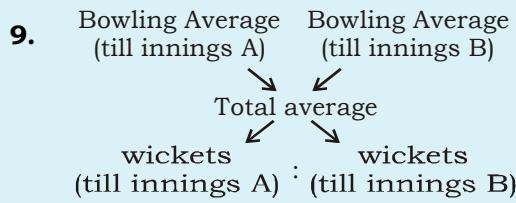
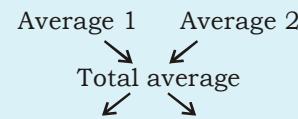


Ex. ₹10,000 is lent at 5% per annum simple interest and Rs. x is lent at 10% p.a. If overall rate of interest is 8% then find value of x .

₹10,000 रुपये प्रति वर्ष 5% साधारण व्याज पर उधार दिया जाता है और रु. x को 10% वार्षिक दर पर उधार दिया जाता है। यदि कुल व्याज दर 8% है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



8. Alligation in Average / औसत में सम्मिश्रण



10. Alligation in time and distance

समय और दूरी में सम्मिश्रण

Average speed (for part 1) Average speed (for part 2)

↓ ↓
Average speed (whole journey)

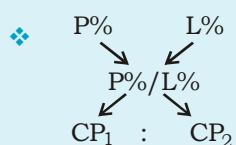
Time (for part 1) : Time (for part 2)

11. speed 1 speed 2

↓ ↓
speed (Avg)
↓
Time 1 : Time 2

$$\text{Speed} = \frac{\text{distance}}{\text{time}}$$

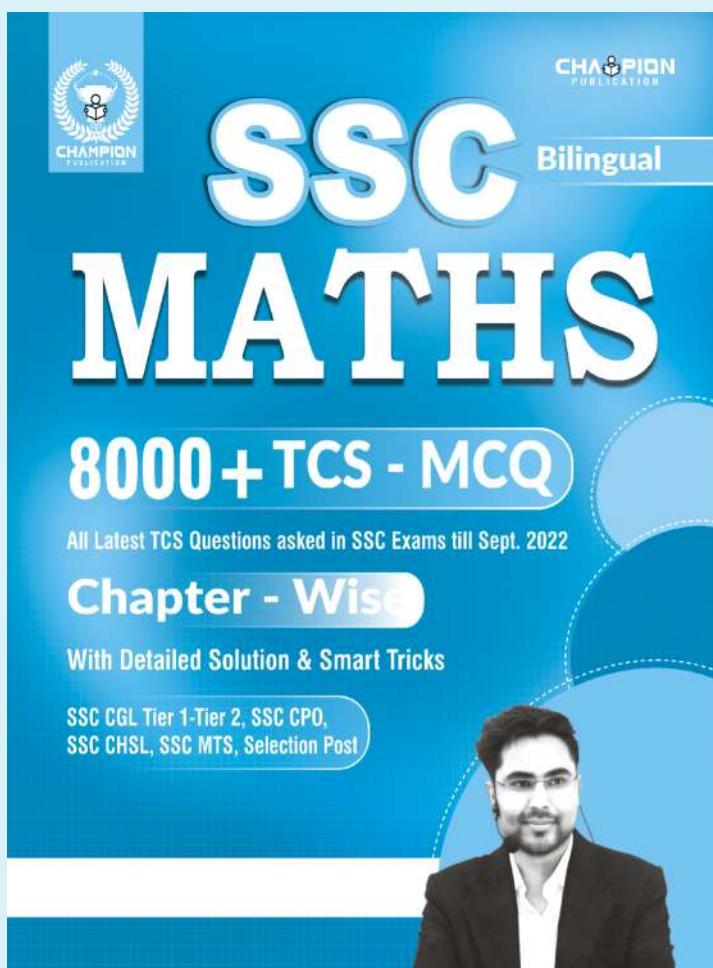
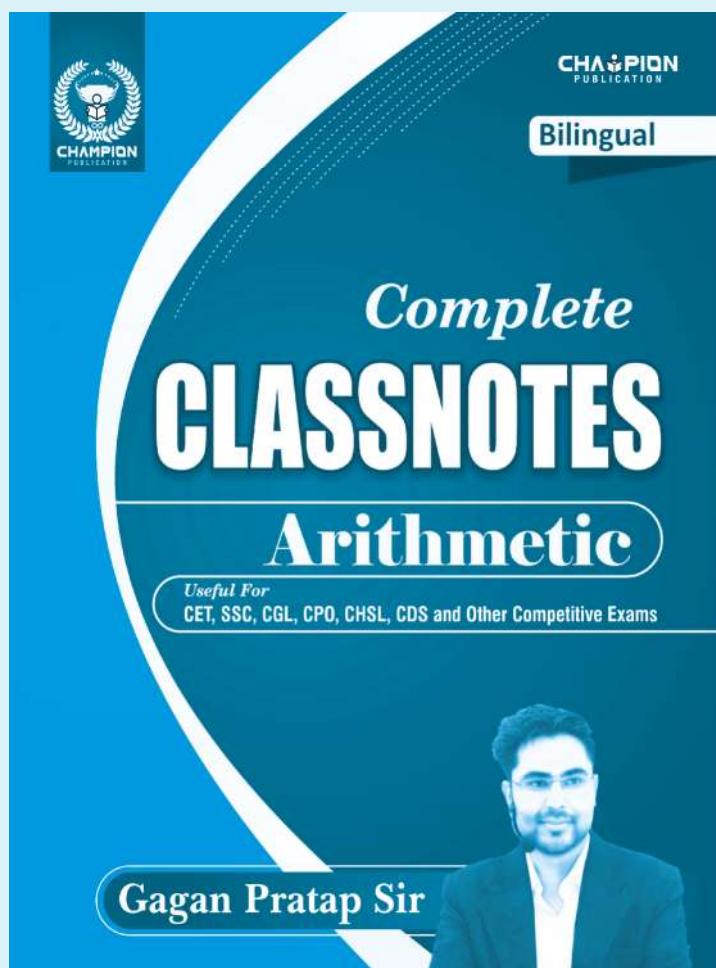
Note → Mean value जिसके respect में निकलती है, ratio उसी का आता है।



$$P\% = \frac{P}{CP} \times 100$$

❖ Alligation in discount/छूट में सम्मिश्रण

Discount₁ Discount₂
↓ ↓
Total Discount
↓
MP₁ : MP₂





Partnership (साझेदारी)



❖ Partnership / साझेदारी

simple partnership
सरल साझेदारी

If all partners invest different capital for same time period or same capital for different time period
यदि सभी साझेदार एक ही समय अवधि के लिए अलग-अलग पूँजी या अलग-अलग समय अवधि के लिए एक ही पूँजी का निवेश करते हैं

compound partnership
यौगिक साझेदारी

If all partners invest their different capitals for different time period

यदि सभी साझेदार अलग-अलग समय अवधि के लिए अपनी अलग-अलग पूँजी निवेश करते हैं

❖ Partners / साझेदार

Active Partner
क्रियाशील साझेदार

invests money as well as takes part in business activity for which he is paid salary from the profit.
ऐसे का निवेश करता है और साथ ही साथ व्यापारिक कामों में भाग लेता है और जिसके लिए उसे लाभ से वेतन भुगतान किया जाता है।

Sleeping Partner
निष्क्रिय साझेदार

who only invests money and does not take part in business activities.

केवल धन का निवेश करता है व्यावसायिक गतिविधियों में भाग नहीं लेता है।

❖ Profit = Capital × time

$$P = C \times T$$

$$C = \frac{P}{T}$$

$$T = \frac{P}{C}$$

❖ Profit = capital × time / लाभ = पूँजी × समय

$$\begin{array}{ccc} X & : & Y & : & Z \\ \text{Capital} & C_1 & : & C_2 & : & C_3 \end{array}$$

Time	T_1	:	T_2	:	T_3
Profit	$C_1 \times T_1$:	$C_2 \times T_2$:	$C_3 \times T_3$

❖ Profit/Loss ∝ capital

Profit/Loss ∝ time

❖ Different amounts invested in different time periods

अलग-अलग समय अवधि में अलग-अलग रकम निवेश की जाती है

$$A : B$$

$$(A \times T) : (B_1 \times t_1 + B_2 \times t_2)$$

B invests twice, for different periods.

B अलग-अलग अवधि के लिए दो बार निवेश करता है।

Ex. Three partners shared the profit in a business in the ratio 2 : 5 : 7. They invested their capitals for 3 months, 4 months and 6 months respectively. What was the ratio of their capitals?

तीन साझेदारों ने एक व्यवसाय में लाभ को 2 : 5 : 7 के अनुपात में साझा किया। उन्होंने अपनी पूँजी क्रमशः 3 महीने, 4 महीने और 6 महीने के लिए निवेश की। उनकी पूँजी का अनुपात क्या था?

$$I : II : III$$

$$\text{Profit} \rightarrow 2 : 5 : 7$$

$$\text{Time} \rightarrow 3 : 4 : 6$$

$$\text{Capital} \rightarrow \left(\frac{2}{3} : \frac{5}{4} : \frac{7}{6} \right) \times 12$$

$$8 : 15 : 14$$

Ex. A, B and C invested their capital in the ratio of 2 : 3 : 5. The ratio of months for which A, B and C invested is 4 : 2 : 3 then. Find the ratio of their profit?

A, B और C ने अपनी पूँजी 2 : 3 : 5 के अनुपात में निवेश की। जिन महीनों के लिए A, B और C ने निवेश किया उनका अनुपात 4 : 2 : 3 है। उनके लाभ का अनुपात ज्ञात कीजिये?

$$A : B : C$$

$$\text{Capital} \rightarrow 2 : 3 : 5$$

$$\text{Time} \rightarrow 4 : 2 : 3$$

$$\text{Profit} \rightarrow 2 \times 4 : 3 \times 2 : 5 \times 3$$

$$8 : 6 : 15$$



Average (औसत)



Average is defined as the mean value which is equal to the sum of the number of a given set of values divided by the total number of values present in the set.

औसत को माध्य मान के रूप में परिभाषित किया जाता है जो दिए गए मानों के सेट की संख्या के योग को सेट में मौजूद मानों की कुल संख्या से विभाजित करने के बराबर होता है।

- Sum of the observation = Average \times total number of the observation

प्रेक्षणों का योग = औसत \times प्रेक्षणों की कुल संख्या

- Average of two or more numbers/ quantities is called the mean of these numbers, which is given by दो या दो से अधिक संख्याओं/मात्राओं का औसत इन संख्याओं का माध्य कहलाता है, जो निम्न द्वारा दिया जाता है

$$\text{Average (A)} = \frac{\text{Sum of all observation (सभी प्रेक्षणों का योग)}}{\text{Total no. of all observation (प्रेक्षणों की कुल संख्या)}}$$

Example:- Weight of 60 students = 40, 42, 35, 50....

Total weight = 2400kg

$$\text{Average} = \frac{2400}{60} = 40 \text{ kg/student}$$

- If the given observation (x) are occurring with certain frequency (A) then, यदि दिए गए अवलोकन (x) निश्चित आवृत्ति (A) के साथ हो रहे हैं, तो,

$$\text{Average} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

where $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ are frequencies. / जहाँ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ आवृत्तियाँ हैं।

- If the average of ' n_1 ' numbers is a_1 and the average of ' n_2 ' numbers is a_2 , then average of total numbers n_1 and n_2 is, Average = $\frac{n_1a_1 + n_2a_2}{n_1 + n_2}$

यदि ' n_1 ' संख्याओं का औसत a_1 है और ' n_2 ' संख्याओं का औसत a_2 है, तो कुल संख्याओं n_1 और n_2 का औसत है = $\frac{n_1a_1 + n_2a_2}{n_1 + n_2}$

- If average of 10 numbers is 24 and average of 5 numbers is 15. Find the combined average?

यदि 10 संख्याओं का औसत 24 है और 5 संख्याओं का औसत 15 है, तो संयुक्त औसत ज्ञात कीजिए?

$$\text{Combined average} = \frac{10 \times 24 + 5 \times 15}{10 + 5} = \frac{315}{15} = 21$$

- No. of data $\rightarrow n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4$

$$\text{Average} \rightarrow a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4$$

$$\text{Net avg/weighted avg} \rightarrow \frac{n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 + n_4a_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$$

Ex.

❖ Class	A	B	C
No. of Students	→ 9	: 17	: 14
Average weight	→ 53 kg	59 kg	64 kg

$$\text{Avg.wt. of all class} \rightarrow \frac{9 \times 53 + 17 \times 59 + 14 \times 64}{9 + 17 + 14} = \frac{2376}{40} = 59.4$$

OR, Deviation Method :

Student	→ 9	: 17	: 14
Avg wt.	→ 53	59	64 kg

$$(-6\text{kg} \times 9) \quad 0 \quad (+5\text{kg} \times 14)$$

Let Average weight of all classes / माना सभी वर्गों का औसत भार है = 59 kg

$$= 59 \text{ kg} + \frac{(-54 + 70)}{40}$$

$$= 59 + 0.4 = 59.4 \text{ kg}$$

Concept of Deviation (विचलन की अवधारणा)

- ❖ Find Average of (का औसत ज्ञात कीजिए) 40, 42, 35, 50, 85
- ❖ Traditional method is to add all the numbers and divide by the number of observations but this method is lengthy and calculative. To avoid calculation and save time we solve it by concept of deviation.
पारंपरिक विधि सभी संख्याओं को जोड़ने और प्रेक्षणों की संख्या से भाग देने की है लेकिन यह विधि लंबी और गणनात्मक है। गणना से बचने और समय बचाने के लिए हम इसे विचलन की अवधारणा से हल करते हैं।

Step I : Consider any number in the range of these numbers as average.

चरण I : इन संख्याओं की श्रेणी में किसी भी संख्या को औसत मानें।

Step II : Find the difference of average from each number (deviation)

चरण II : प्रत्येक संख्या से औसत का अंतर ज्ञात कीजिए। (विचलन)

Step III: Add the deviation and divide it by total number of observations.

चरण III : विचलन जोड़ें और इसे प्रेक्षणों की कुल संख्या से विभाजित करें।

Step IV: Add or subtract (according to sign of deviation) the deviation from the average that we considered to get accurate average.

चरण IV : औसत से विचलन को जोड़ें या घटाएं (विचलन के संकेत के अनुसार) जिसे हमने सटीक औसत प्राप्त करने के लिए माना।

Example: 40, 42, 35, 50, 85

Deviation: 0 +2 -5 +10 +45

Let Average = 40

$$\text{Net deviation (शुद्ध विचलन)} = \frac{0+2-5+10+45}{5} = \frac{52}{5} = +10.4$$

∴ Actual Average(वास्तविक औसत) = 40 + 10.4 = **50.4**

Average of consecutive numbers (क्रमिक संख्याओं का औसत)

1. The average of 'n' consecutive natural numbers starting from 1 i.e. Average of 1,2,3,...,n

1 से शुरू होने वाली 'n' लगातार प्राकृतिक संख्याओं का औसत यानी 1,2,3, ..., n का औसत

$$\frac{\text{sum of first } n \text{ natural no.}}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

2. The average of squares of 'n' consecutive natural numbers starting from 1 i.e.

1 से शुरू होने वाली 'n' क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का औसत अर्थात्

$$\text{Average of } 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2 = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. The average of cubes of first 'n' consecutive natural numbers i.e. Average of $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$

प्रथम 'n' क्रमागत प्राकृत संख्याओं के घनों का औसत अर्थात् $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$ का औसत

$$= \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n} = \frac{n(n+1)^2}{4}$$

4. The average of first 'n' consecutive even natural numbers i.e. Average of 2, 4, 6, ..., 2n = $\frac{n(n+1)}{n} = (n + 1)$

प्रथम 'n' क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का औसत अर्थात् 2, 4, 6, ..., 2n का औसत = $\frac{n(n+1)}{n} = (n + 1)$

5. The average of first 'n' consecutive odd natural numbers i.e. 1, 3, 5, ... $(2n - 1) = \frac{n^2}{n} = n$

प्रथम 'n' क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का औसत अर्थात् 1, 3, 5, ... $(2n - 1) = \frac{n^2}{n} = n$

6. The average of certain consecutive numbers a, b, c, n is $\frac{\text{First no.} + \text{Last no.}}{2} = \frac{a + n}{2}$

कुछ क्रमागत संख्याओं a, b, c, n का औसत $\frac{\text{First no.} + \text{Last no.}}{2} = \frac{a + n}{2}$ है

- Ex.** Find average of 4, 5, 6 20.

4, 5, 6 20 का औसत ज्ञात कीजिए।

$$\text{Average} = \frac{4 + 20}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

7. The average of 1st 'n' multiples of certain numbers x (कुछ संख्याओं के पहले 'n' गुणकों का औसत) $= \frac{x(n+1)}{2}$

- Ex.** Find average of first 10 multiples of 3 / 3 के पहले 10 गुणकों का औसत ज्ञात कीजिए

First 10 multiples of 3 = 3, 6, 9 30 / 3 के पहले 10 गुणक = 3, 6, 9 30

$$\text{Average} = \frac{3(1+10)}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

8. Average of square of 1st n even number / (पहली n सम संख्या के वर्ग का औसत) $= \frac{2(n+1)(2n+1)}{3}$

9. Average of cube of 1st n even number / (पहली n सम संख्या के घन का औसत) $= 2n(n+1)^2$

10. Average of square of 1st n odd number / (पहली n विषम संख्या के वर्ग का औसत) $= \frac{(2n+1)(2n-1)}{3}$

11. Average of cube of 1st n odd number / (पहली n विषम संख्या के घन का औसत) $= n(2n^2-1)$

12. Average of 1 to n odd number / (1 से n विषम संख्या का औसत) $= \frac{\text{Last odd no.} + 1}{2}$

13. Average of 1 to n even number / (1 से n सम संख्या का औसत) $= \frac{\text{Last even no.} + 2}{2}$

Average speed (औसत गति)

1. If A goes from P to Q with speed of x km/h and returns from Q to P with speed of y km/h, then the average speed of total journey is

यदि A, P से Q तक x किमी/घंटा की गति से जाता है और Q से P तक y किमी/घंटा की गति से वापस आता है, तो कुल यात्रा की औसत गति है

$$\text{Average speed} = \frac{2xy}{x+y} \quad \text{Or Average speed} = \frac{\text{Total distance}}{\text{Total time taken}}$$

2. If a distance is travelled with three different speeds a km/h, b km/h and c km/h, then Average speed of

$$\text{total journey} = \frac{3abc}{ab + bc + ca} \text{ km/h}$$

यदि एक दूरी तीन अलग-अलग गति a किमी/घंटा, b किमी/घंटा और c किमी/घंटा से तय की जाती है, तो कुल यात्रा की औसत गति =

$$\frac{3abc}{ab + bc + ca} \text{ km/h}$$

- Ex.** A particular distance is travelled with 2 km/hr, 3 km/hr and 4 km/hr. Find average speed of the whole journey.

एक विशेष दूरी 2 किमी/घंटा, 3 किमी/घंटा और 4 किमी/घंटा के साथ तय की जाती है। पूरी यात्रा की औसत गति ज्ञात कीजिए।

$$\text{Average speed} = \frac{3 \times 2 \times 3 \times 4}{2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 2} = \frac{72}{26} = \frac{36}{13} \text{ km/hr}$$

Average age (औसत उम्र)

1. 't' years before, the average age of N members of a family was 'T' years. If during this period 'n' children increased in the family but average age (present) remains same, then.

Present age of n children = $n.T - N.t$

't' वर्ष पहले, एक परिवार के N सदस्यों की औसत आयु 'T' वर्ष थी। यदि इस अवधि में परिवार में 'n' बच्चे बढ़े परन्तु औसत आयु (वर्तमान) वही रहे तो।

n बच्चों की वर्तमान आयु = $n.T - N.t$

2. If in the group of N persons, a new person comes at the place of a person of 'T' years, so that average age, increase by 't' years

यदि N व्यक्तियों के समूह में, 'T' वर्ष के व्यक्ति के स्थान पर एक नया व्यक्ति आता है, तो औसत आयु, 't' वर्ष से बढ़ जाती है।

Then, the age of the new person (फिर, नए व्यक्ति की आयु) = $T + N.t$

If the average age decrease by 't' years after entry of new person, then the age of the new person = $T - N.t$

यदि नए व्यक्ति के प्रवेश के बाद औसत आयु 't' वर्ष कम हो जाती है, तो नए व्यक्ति की आयु = $T - N.t$

- Ex. The average age of a group of 8 people increase by 2.5 years when a new person replaces one of them whose age is 65 years. Find the age of new person.

8 लोगों के एक समूह की औसत आयु 2.5 वर्ष बढ़ जाती है जब उनमें से एक व्यक्ति, जिसकी आयु 65 वर्ष है, के स्थान पर एक नया व्यक्ति आता है। नये व्यक्ति की आयु ज्ञात कीजिये।

Sol. Here, $N = 8$

$$T = 65$$

$$t = 2.5$$

$$\therefore \text{Age of new person} = T + N.t \\ = 65 + (8 \times 2.5) = \mathbf{85 \text{ years}}$$

3. The average age of a group of N students is 'T' years. If 'n' students join, the average age of the group increases by 't' years, then Average age of

$$\text{new students} = T + \left(\frac{N}{n} + 1 \right)t$$

N छात्रों के एक समूह की औसत आयु 'T' वर्ष है। यदि 'n' छात्र शामिल होते हैं, तो समूह की औसत आयु 't' वर्ष बढ़ जाती है, तो नए छात्रों

$$\text{की औसत आयु} = T + \left(\frac{N}{n} + 1 \right)t$$

If the average age of the group decreases by 't' years, then Average age of new students

यदि समूह की औसत आयु 't' वर्ष कम हो जाती है, तो (नए छात्रों की औसत आयु)

$$= T + \left(\frac{N}{n} + 1 \right)t$$

4. If the average age (height) of 'n' persons is x year (cms) and from them 'm' persons went out whose average age (height) is 'y' years (cms) and same number of persons joined whose average age (height) is 'z' years (cms) then what is the average age (height) of n persons ?

यदि 'n' व्यक्तियों की औसत आयु (ऊंचाई) x वर्ष (cms) है और उनमें से 'm' व्यक्ति निकले जिनकी औसत आयु (ऊंचाई) 'y' वर्ष (cms) है और उतने ही व्यक्ति शामिल हुए जिनकी औसत आयु (ऊंचाई) 'z' वर्ष (cms) है तो n व्यक्तियों की औसत आयु (ऊंचाई) क्या है?

$$\therefore \text{Average age} = \left\{ x - \frac{m(y-z)}{n} \right\} \text{years(cms)}$$

5. If in a group, one member is replaced by a new members, then.

यदि किसी समूह में एक सदस्य को नए सदस्य से बदल दिया जाता है, तो-

$\text{Age of new member} = (\text{age of replaced member}) \pm xn$

नए सदस्य की आयु = (प्रतिस्थापित सदस्य की आयु) $\pm xn$
where, x = increase (+) or decrease (-) in average
 n = Number of members.

जहाँ, x = औसत में वृद्धि (+) या कमी (-)

n = सदस्यों की संख्या।

6. If a new member is added in a group then.
 $\text{age (or income) of added member} = \text{Average age (or income)} \pm x(n+1)$.

अगर किसी ग्रुप में कोई नया सदस्य जोड़ा जाता है तो।

जोड़े गए सदस्य की आयु (या आय) = औसत आयु (या आय) $\pm x(n+1)$.

where x = increase (+) or decrease (-) in average age (or income)

n = Number of members.

जहाँ x = औसत आयु (या आय) में वृद्धि (+) या कमी (-)

n = सदस्यों की संख्या।

7. If a member leaves the group, then income (or age) of left member = Average income (or age) $\pm x(n-1)$

यदि कोई सदस्य समूह छोड़ देता है, तो छोड़कर गए सदस्य की आय (या आय) = औसत आय (या आय) $\pm x(n-1)$

where, x = increase (+) or decrease (-) in average income (or age)

n = Number of members.

जहाँ, x = औसत आय (या आय) में वृद्धि (+) या कमी (-)

n = सदस्यों की संख्या।

When change in data happens (जब डाटा में परिवर्तन होता है।)

1. If in any series having common difference 'd' and Average 'k', 'x' numbers are added in forward or backward, then

यदि किसी श्रेणी जिसका सार्वत्र द तथा औसत k हो और इसमें आगे से अथवा पीछे से x संख्याएं जोड़े तो

$$\text{New Average} / \text{नया औसत} = k \pm \frac{xd}{2}$$

2. In series of even or odd having Average "k", when we add "x" number in forward or backward, Then सम अथवा विषम संख्याओं की श्रेणी जिसका औसत k है, उसमें यदि हम आगे से अथवा पीछे से x संख्याएं जोड़े तो

$$\text{New Average} / \text{नया औसत} = k \pm x$$

3. In series of natural number having Average "k", when we add "x" number in forward or backward, Then

k औसत वाली प्राकृतिक संख्याओं की किसी श्रेणी में यदि आगे से अथवा पीछे से "x" संख्याएं जोड़ी जाए तो

$$\text{New Average} / \text{नया औसत} = k \pm x/2$$

4. If average of n observations is a but the average becomes b when one observation is eliminated, then value of eliminated observation = $n(a-b)+b$

यदि n प्रेक्षणों का औसत a हो परन्तु यदि एक प्रेक्षण को विस्थापित कर दिया जाए तो औसत b हो जाता है। विस्थापित प्रेक्षण का मान = $n(a-b)+b$

5. If average of n observations is a but the average becomes b when a new observation is added, then value of added observation = $n(b-a) + b$

यदि n प्रेक्षणों का औसत a हो परन्तु यदि एक प्रेक्षण को और शामिल कर दिया जाए तो औसत b हो जाता है। तो शामिल किए गए प्रेक्षण का मान = $n(b-a) + b$

6. We have n observations out of which some observations (a_1, a_2, a_3, \dots) are replaced by some other new observations and in this way, if the average increase or decreases by b , then value of new observations

यदि हमारे पास n प्रेक्षण हों जिसमें से कुछ प्रेक्षणों (a_1, a_2, a_3, \dots) को कुछ नए प्रेक्षणों द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाए तथा इस प्रक्रिया में यदि औसत में b की वृद्धि अथवा कमी हो जाए तो नए प्रेक्षणों का मान = $a \pm nb$

Where/जहाँ, $a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Note: In this formula, the signs of '+' and '-' depend upon the increment or decrement in the average इस सूत्र में '+' अथवा '-' का चिन्ह औसत में वृद्धि अथवा कमी पर निर्भर करता है।

7. Mathematical operation performed on each observation results in same effect on the average.

प्रत्येक प्रेक्षण पर की गई गणितीय संक्रिया का औसत पर समान प्रभाव पड़ता है।

Related to numbers (अंकों से संबंधित)

1. If there are 3 natural numbers and average of any two number when added with third number gives a, b, c. Then natural numbers.

यदि 3 प्राकृतिक संख्याएं हो और किसी दो संख्याओं के औसत को यदि तीसरी संख्या में जोड़ा जाए तो प्राप्त संख्याएं क्रमशः a, b तथा c हो तो

$$\text{Sum of number (संख्या का योग)} = \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = k$$

$$\text{First number (पहला नंबर)} = 2a - k$$

$$\text{Second number (दूसरा नंबर)} = 2b - k$$

$$\text{Third number (तीसरा नंबर)} = 2c - k$$

2. If the average of m numbers is x and out of these ' m ' numbers the average of n numbers is y . (or vice versa) then the average of remaining numbers will be

यदि m संख्याओं का औसत x है और इन ' m ' संख्याओं में से n संख्याओं का औसत y है। (या इसके विपरीत) तो शेष संख्याओं का औसत होगा

(i) Average of remaining numbers (शेष संख्याओं का औसत) = $\frac{mx - ny}{m - n}$ (if $m > n$)

(ii) Average of remaining numbers (शेष संख्याओं का औसत) = $\frac{ny - mx}{n - m}$ (if $n > m$)

3. If from $(n + 1)$ numbers, the average of first n numbers is 'F' and the average of last n numbers is 'L', and the first number is 'f' and the last number 'l' then

यदि $(n + 1)$ संख्याओं से प्रथम n संख्याओं का औसत 'F' और अंतिम n संख्याओं का औसत 'L' तथा पहली संख्या 'f' और अंतिम संख्या 'l' हो तो

$$f - l = n(F - L)$$

4. If the average of ' n ' observations is ' x ' and from these the average of 1st ' m ' observation is ' y ' and the average of last ' m ' observations is ' z ' then यदि ' n ' अवलोकनों का औसत ' x ' है और इनमें से पहले ' m ' अवलोकन का औसत ' y ' है और अंतिम ' m ' अवलोकनों का औसत ' z ' है तो

$$m^{\text{th}} \text{ observation} = m(y + z) - nx$$

$$(m + 1)^{\text{th}} \text{ observation} = nx - m(y + z)$$

When data is misread (जब डेटा गलत पढ़ा जाता है)

1. If average of n numbers is m but later on it was found that a number 'a' was misread as 'b'. The correct average will be

यदि n संख्याओं का औसत m है लेकिन बाद में यह पाया गया कि एक संख्या 'a' को गलती से 'b' पढ़ लिया गया था। सही औसत होगा

$$= m + \frac{(a - b)}{n}$$

2. If the average of n numbers is m but later on it was found that two numbers a and b misread as p and q .

यदि n संख्याओं का औसत m है लेकिन बाद में यह पाया गया कि दो संख्याएँ a और b को गलती से p और q पढ़ लिया गया।

$$\text{The correct average (सही औसत)} = m + \frac{(a + b - p - q)}{n}$$

Miscellaneous (विविध)

1. If the average of n students in a class is a , where average of passed students is x and average of failed students is y , then

यदि किसी कक्षा में n विद्यार्थियों का औसत a हो, जहां उत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत x और अनुत्तीर्ण विद्यार्थियों का औसत y हो तो

Number of students passed / उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या

$$= \frac{n(a - y)}{(x - y)}$$

2. Bowling Average (गेंदबाजी औसत) =

$$\frac{\text{Total runs given}}{\text{Total wickets taken}}$$

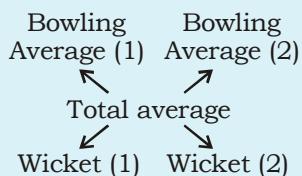
3. Batting Average (औसत बल्लेबाजी) =

$$\frac{\text{Total runs scored}}{\text{Total number of innings played}}$$

- ❖ Total runs = Bowling average \times Wickets

कुल रन = गेंदबाजी औसत \times विकेट

Or



Complete CLASSNOTES
Arithmetic

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

SSC MATHS
Bilingual

8000+ TCS - MCQ

All Latest TCS Questions asked in SSC Exams till Sept. 2022

Chapter - Wise

With Detailed Solution & Smart Tricks

SSC CGL Tier 1-Tier 2, SSC CPO, SSC CHSL, SSC MTS, Selection Post

Gagan Pratap Sir

Chapter Wise
SSC CGL Mains
Mathematics

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Previous Year Papers
2010 to 2021-22

2700 Question

Gagan Pratap Sir



Time & Work (समय और कार्य)



Total work = time × efficiency

कुल कार्य = समय × दक्षता

Efficiency ∝ total work (When time is constant)

दक्षता ∝ कुल कार्य (जब समय स्थिर हो)

$$\text{Efficiency}/\text{क्षमता} \propto \text{wages}/\text{मजदूरी} \propto \frac{1}{\text{Time}/(\text{समय})}$$

$$\text{For same time period wages} \propto \text{efficiency}$$

समान समय अवधि के लिए मजदूरी ∝ क्षमता

$$\text{For different time period wages} \propto \text{work done}$$

अलग-अलग समयावधि के लिए वेतन ∝ किया गया कार्य

- 1.** If M_1 men finish W_1 work in D_1 days, working T_1 time each day and M_2 men finish W_2 work in D_2 days, working T_2 time each day then

यदि M_1 पुरुष W_1 कार्य को D_1 दिनों में पूरा करते हैं, प्रत्येक दिन T_1 समय कार्य करते हैं और M_2 पुरुष W_2 कार्य को D_2 दिनों में समाप्त करते हैं, प्रत्येक दिन T_2 समय कार्य करते हैं, तो

$$\frac{M_1 D_1 T_1}{W_1} = \frac{M_2 D_2 T_2}{W_2}$$

- Ex.** 5 men can finish a work in 10 days working 8 hours each day. How many men will be needed to finish the same work in 5 days working 4 hours each day?

5 आदमी एक काम को प्रतिदिन 8 घंटे काम करके 10 दिनों में पूरा कर सकते हैं। प्रतिदिन 4 घंटे कार्य करके उसी कार्य को 5 दिनों में पूरा करने के लिए कितने व्यक्तियों की आवश्यकता होगी?

$$5 \times 10 \times 8 = m \times 5 \times 4$$

$$m = 20$$

- 2.** If A completes a piece of work in ' x ' days and B completes the same work in ' y ' days, then.

यदि A किसी कार्य को ' x ' दिनों में पूरा करता है और B उसी कार्य को ' y ' दिनों में पूरा करता है।

$$\text{Work done by A in 1 day} = \frac{1}{x}$$

$$\text{A द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य} = \frac{1}{x}$$

$$\text{Work done by B in 1 day} = \frac{1}{y}$$

$$\text{B द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य} = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \text{Work done by A and B in 1 day} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

$$\text{A और B द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$$

∴ Total time taken to complete the work by A and

$$\text{B both} = \left(\frac{xy}{x+y} \right)$$

$$\text{A और B दोनों द्वारा कार्य को पूरा करने में लिया गया कुल समय} \\ = \left(\frac{xy}{x+y} \right)$$

- Ex.** If A completes a piece of work in 20 days and B completes the same work in 30 days. If they work together then in how many days can they finish the total work?

यदि A एक काम को 20 दिनों में पूरा करता है और B उसी काम को 30 दिनों में पूरा करता है यदि वे एक साथ काम करते हैं तो वे कुल काम को कितने दिनों में पूरा कर सकते हैं?

Work done by A and B in 1 day

$$\text{A और B द्वारा 1 दिन में किया गया कार्य}$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{2+3}{60}$$

Total time taken to complete the work by A and B

$$\text{together} = \frac{20 \times 30}{20+30} = 12 \text{ days}$$

- 3.** If A can do a work in ' x ' days. B can do the same work in ' y ' days, C can do the same work in ' z ' days then, total time taken by A, B and C to complete the work together

यदि A किसी कार्य को ' x ' दिनों में कर सकता है। B समान कार्य को ' y ' दिनों में कर सकता है, C उसी कार्य को ' z ' दिनों में कर सकता है, तो A, B और C द्वारा मिलकर कार्य को पूरा करने में लगा कुल

$$\text{समय} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{xyz}{xy + yz + zx}$$

- Ex.** If A can do a work in 20 days, B can do the same work in 12 days. C can do the same work in 15 days then in how many days will be taken by A, B, C to complete the work together?

यदि A किसी कार्य को 20 दिनों में कर सकता है, तो B उसी कार्य को 12 दिनों में कर सकता है। C उसी कार्य को 15 दिनों में कर सकता है तो A, B, C को मिलकर उस कार्य को पूरा करने में कितने दिन लगेंगे?

$$\text{Time} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15}}$$

$$= \frac{20 \times 12 \times 15}{20 \times 12 + 12 \times 15 + 15 \times 20} = 5 \text{ days}$$

यदि A अकेला किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है और A और B मिलकर उसी कार्य को 'y' दिनों में कर सकते हैं तो B अकेला उसी कार्य को कितने दिनों में कर सकता है?

$$\Rightarrow \left(\frac{xy}{x-y} \right) \text{ days}$$

- Ex.** If A can do a work in 8 days and A + B together can do the same work in 5 days. Then B alone can do the work in how many days?

यदि A किसी काम को 8 दिनों में कर सकता है और A + B मिलकर उसी काम को 5 दिनों में कर सकते हैं। तो B अकेला उस कार्य को कितने दिनों में कर सकता है?

Time taken by B alone

$$= \frac{8 \times 5}{8-5} = \frac{40}{3} \text{ days}$$

- 7.** If food is available for 'x' days for 'A' men at a certain place and after 'y' days 'B' men join, then the remaining food will serve total men for

यदि एक निश्चित स्थान पर 'A' पुरुषों के लिए 'x' दिनों के लिए भोजन उपलब्ध है। और 'y' दिनों के बाद 'B' पुरुष शामिल होते हैं, तो शेष भोजन कुल पुरुषों में कितने दिन चलेगा।

Required time (आवश्यक समय)

$$= \frac{A(x-y)}{(A+B)} \text{ days}$$

- Ex.** If food is available for 60 days for 35 men. After 15 days 10 new men join, then remaining food will serve total men for?

यदि 35 आदमियों के लिए 60 दिनों के लिए भोजन उपलब्ध है। 15 दिनों के बाद 10 नए पुरुष शामिल हो जाते हैं, तो शेष भोजन कुल पुरुषों के लिए कितने दिन चलेगा?

$$\text{Required time} = \frac{35(60-15)}{35+10} = 35 \text{ days}$$

- 8.** If A men or B boys or C women can do a certain work in 'x' days then A_1 men B_1 boys and C_1 women can do the same work in

यदि A पुरुष या B लड़के या C महिला किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकते हैं तो A_1 पुरुष B_1 लड़के और C_1 महिला समान कार्य कितने दिनों में कर सकते हैं?

$$\text{Time taken} = \frac{x}{\frac{A_1}{A} + \frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C}}$$

- Ex.** 16 men or 21 women or 18 children can complete a work in 93 days. In how many days 32 men, 35 women and 27 children working together complete the whole work?

16 पुरुष या 21 महिलाएं या 18 बच्चे एक काम को 93 दिनों में पूरा कर सकते हैं। 32 पुरुष, 35 महिलाएं और 27 बच्चे एक साथ काम करके पूरे काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे?

- 4.** If A can finish $\frac{m}{n}$ part of the work in D days.

Then, total time taken to finish the work by A

$$= \frac{n}{m} \times D \text{ days}$$

यदि A किसी कार्य का $\frac{m}{n}$ भाग D दिनों में पूरा कर सकता है। फिर,

A द्वारा कार्य को पूरा करने में लगा कुल समय = $\frac{n}{m} \times D$ दिन

- Ex.** Rahul can finish $\frac{4}{5}$ th part of the work in 20 days.

In how many days he will complete the work?

राहुल काम का $\frac{4}{5}$ भाग 20 दिनों में पूरा कर सकता है। वह कार्य को कितने दिनों में पूरा करेगा?

∴ Time taken to complete the work

$$\frac{5}{4} \times 20 = 25 \text{ days}$$

- 5.** If A and B can do a work in 'x' days B and C can do the same work in 'y' days. C and A can do the same work in 'z' days. Then total time taken,

when A, B and C work together = $\frac{2}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)}$ OR

$$\frac{2xyz}{xy + yz + zx} \text{ days}$$

यदि A और B किसी काम को 'x' दिनों में कर सकते हैं तो B और C उसी काम को 'y' दिनों में कर सकते हैं। C और A समान कार्य को 'z' दिनों में कर सकते हैं। तब A, B और C एक साथ उस कार्य को

$$\text{kितने दिनों में पूरा कर लेंगे} = \frac{2}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \frac{2xyz}{xy + yz + zx} \text{ दिन}$$

- Ex.** If A and B can do a work in 20 days, B and C can do the same work in 10 days. C and A can do the same work in 60 days then in how many time will be taken by A, B, C to complete the work together?

यदि A और B एक कार्य को 20 दिनों में कर सकते हैं तो B और C उसी कार्य को 10 दिनों में कर सकते हैं। C और A समान कार्य को 60 दिनों में कर सकते हैं तो A, B, C को मिलकर कार्य पूरा करने में कितना समय लगेगा?

$$\text{Time taken} = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{60}}$$

$$\frac{2 \times 20 \times 10 \times 60}{20 \times 10 + 10 \times 60 + 60 \times 20} = 12 \text{ days}$$

- 6.** If A alone can do a certain work in 'x' days and A and B together can do the same work in 'y' days then B alone can do the same work in

$$\text{Time taken} = \frac{93}{\frac{32}{16} + \frac{35}{21} + \frac{27}{18}} = \frac{93}{\frac{31}{6}} = 18 \text{ days}$$

- 9.** The comparison of rate of work done is called efficiency of doing work.

$$\text{Efficiency (E)} \propto \frac{1}{\text{No. of days}}$$

किए गए कार्य की दर की तुलना कार्य करने की दक्षता कहलाती है।

$$\text{दक्षता (E)} \propto \frac{1}{\text{No. of days}}$$

$$E_1 : E_2 : E_3 = \frac{1}{D_1} : \frac{1}{D_2} : \frac{1}{D_3}, E = \frac{k}{D} \text{ or, } ED = k \text{ or, } E_1 D_1 = E_2 D_2$$

- Ex.** 3 persons can complete the work in 3 days, 4 days, 5 days respectively. Find ratio of their efficiency?

3 व्यक्ति एक कार्य को क्रमशः 3 दिन, 4 दिन, 5 दिन में पूरा कर सकते हैं। उनकी दक्षता का अनुपात ज्ञात कीजिये?

Persons	$\rightarrow A$	$\rightarrow B$	$\rightarrow C$
Time	$\rightarrow 3$	$\rightarrow 4$	$\rightarrow 5$
Efficiency	$\rightarrow \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} \right) \times 60 \text{ (LCM)}$		
	$20 : 15 : 12$		

- Ex.** A can do a work in 6 days and B can do the same work in 5 days if they work together and the total salary is ₹550 then find the share of both.

A किसी काम को 6 दिनों में कर सकते हैं और B उसी काम को 5 दिनों में कर सकते हैं। यदि वे एक साथ काम करते हैं और कुल वेतन ₹550 है, तो दोनों का हिस्सा ज्ञात करें।

$$A = \frac{5}{(5+6)} \times 550 = ₹250$$

$$B = \frac{5}{(5+6)} \times 550 = ₹300$$

- 11.** If A can do a work in 'x' days and B is R% more efficient than A then 'B' alone will do the same

$$\text{work in } x \frac{100}{(100+R)} \text{ days}$$

यदि A किसी कार्य को 'x' दिनों में कर सकता है और B, A की तुलना में R% अधिक कुशल है तो 'B' अकेला उसी कार्य को $x \frac{100}{(100+R)}$ दिनों में करेगा।

- Ex.** A can do a work in 10 days. B is 20% more efficient than A. Then B alone do the same work in?

A किसी काम को 10 दिनों में कर सकता है। B, A की तुलना में 20% अधिक कुशल है। तो B अकेले कितने दिनों में समान कार्य करेगा?

$$\begin{aligned} \text{B alone will do} &= 10 \times \frac{100}{100+20} \\ &= 10 \times \frac{100}{120} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{3} \text{ days}$$

- 12.** A can do a work in 'm' days and B can do the same work in 'n' days. If they work together and total wages is R, then.

A किसी काम को 'm' दिनों में कर सकता है और B उसी काम को 'n' दिनों में कर सकता है। यदि वे एक साथ काम करते हैं और कुल वेतन R है, तो।

$$\text{Part of A / A का हिस्सा} = \frac{n}{(m+n)} \times R$$

$$\text{Part of B / B का हिस्सा} = \frac{m}{(m+n)} \times R$$

- 13.** If A, B and C finish the work in m, n and p days respectively and they receive the total wages R, then the ratio of their wages is

यदि A, B और C कार्य को m, n और p दिनों में पूरा करते हैं। और उन्हें कुल मजदूरी R प्राप्त होती है, तो उनकी मजदूरी का अनुपात है

$$\frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{p}$$

- 14.** If A working alone takes x days more than A & B and B working alone takes y days more than A & B. Then the number of days taken by A & B working together to finish a job $\Rightarrow \sqrt{xy}$ days.

यदि A अकेले कार्य करते हुए A और B से x दिन अधिक लेता है और B अकेले कार्य करते हुए A और B से y दिन अधिक लेता है। तो A और B द्वारा एक साथ कार्य को पूरा करने में लगने वाले दिनों की संख्या $\Rightarrow \sqrt{xy}$ दिन है।

- Ex.** If A working alone takes 4 days more than A and B and B working alone takes 9 days more than A and B working together. Then the number of days taken by A and B working together to finish a job?

यदि A अकेले कार्य करते हुए A और B से 4 दिन अधिक लेता है और B अकेले कार्य करते हुए A और B के एक साथ कार्य करने से 9 दिन अधिक लेता है। तो A और B द्वारा मिलकर एक कार्य को पूरा करने में कितने दिन लगते हैं?

\therefore Time taken by A and B together

A और B द्वारा एक साथ लिया गया समय

$$= \sqrt{4 \times 9} = 6 \text{ days}$$

❖ Wages/मजदूरी \propto work done/किया गया कार्य

❖ Work done/किया गया कार्य \propto Number of persons involved/सम्मिलित व्यक्तियों की संख्या

❖ Work done = Number of persons \times efficiency \times time period

किया गया कार्य = सम्मिलित व्यक्तियों की संख्या \times क्षमता \times समय अंतराल



Pipe & Cistern (नल व टंकी)



Amount of water released or filled = Rate × time.
छोड़े गए या भरे गए पानी की मात्रा = दर × समय।

- Two taps 'A' and 'B' can fill a tank in 'x' hours and 'y' hours respectively. If both the taps are opened together, then how much time it will take to fill the tank?

दो नल 'A' और 'B' एक टंकी को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाए, तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

$$\text{Required time} = \left(\frac{xy}{x+y} \right) \text{hrs}$$

- Two taps 'A' and 'B' can empty a tank in 'x' hours and 'y' hours respectively. If both the taps are opened together, then time taken to empty the

$$\text{tank will be Required time} = \left(\frac{xy}{x+y} \right) \text{hrs}$$

दो नल 'A' और 'B' एक टैंक को क्रमशः 'x' घंटे और 'y' घंटे में खाली कर सकता है। यदि दोनों नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को खाली

$$\text{करने में लगा समय} = \left(\frac{xy}{x+y} \right) \text{घंटे}$$

- If x, y, z, \dots all taps are opened together then, the time required to fill/empty the tank will be:

यदि x, y, z, \dots सभी नल एक साथ खोले जाते हैं, तो टंकी को भरने/खाली करने में लगने वाला समय होगा:

$$\frac{1}{x} \pm \frac{1}{y} \pm \frac{1}{z} \pm \dots = \frac{1}{T}$$

where T, is the required time.

जहाँ T, अभीष्ट समय है।

Note: Positive result shows that the tank is filling and Negative result shows that the tank is getting empty.

नोट : धनात्मक परिणाम दर्शाता है कि टंकी भर रही है और ऋणात्मक परिणाम दर्शाता है कि टंकी खाली हो रही है।

- If a pipe fills a tank in 'x' hours but it takes 't' more hours to fill it due to leakage in tank. If tank is filled completely, then in how many hours it will be empty? [due to leakage outlet]

यदि एक पाइप किसी टंकी को 'x' घंटे में भरता है लेकिन टंकी में रिसाव के कारण उसे भरने में 't' घंटे अधिक लगते हैं। यदि टंकी पूरी तरह भर जाए, तो वह कितने घंटे में खाली हो जाएगी? [रिसाव आउटलेट के कारण]

$$\text{Required time} = \frac{x(x+t)}{t}$$

- Ex.** If a pipe fills a tank in 20 hours but it takes 4 hours more to fill it due to leakage in the tank. If the tank is filled completely, then in how many hours it will be empty?

यदि एक पाइप किसी टंकी को 20 घंटे में भरता है लेकिन टंकी में रिसाव के कारण उसे भरने में 4 घंटे अधिक लगते हैं। यदि टंकी अच्छी तरह से भरी जाती है, तो वह कितने घंटे में खाली हो जाएगी?

$$\text{Required time} = \frac{20 \times (20+4)}{4}$$

$$= 5 \times 24 = \mathbf{120 \text{ hours}}$$

- A tap 'A' can fill a tank in 'x' hours and 'B' can empty the tank in 'y' hours. Then (a) time taken to fill the tank

एक नल 'A' एक टंकी को 'x' घंटे में भर सकता है और 'B' टंकी को 'y' घंटे में खाली कर सकता है। तब (a) टैंक को भरने में लगने वाला समय

when both are opened (जब दोनों खोले जाते हैं)

$$= \left(\frac{xy}{y-x} \right) : x < y$$

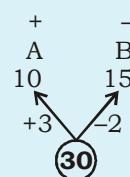
- time taken to empty the tank

टंकी को खाली करने में लगा समय

when both are opened / जब दोनों खोले जाते हैं

$$= \left(\frac{xy}{x-y} \right) : y < x$$

eg.→ (a) Tap A can fill the tank in 10 hours and tap B can empty it in 15 hours. Find the taken to fill the tank.

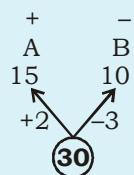


$$\text{Time taken to fill the tank} = \frac{30}{3-2} = 30 \text{ hours}$$

Alternatively:-

$$\text{Time taken to fill the tank} = \frac{10 \times 15}{15-10} = \frac{10 \times 15}{5} = \mathbf{30 \text{ hours}}$$

- Tap A can fill the tank in 15 hours and Tap B can empty it in 10 hours. Find time taken to empty the tank.



Time taken to empty the tank = $\frac{30}{1} = 30$ hours

Alternatively:-

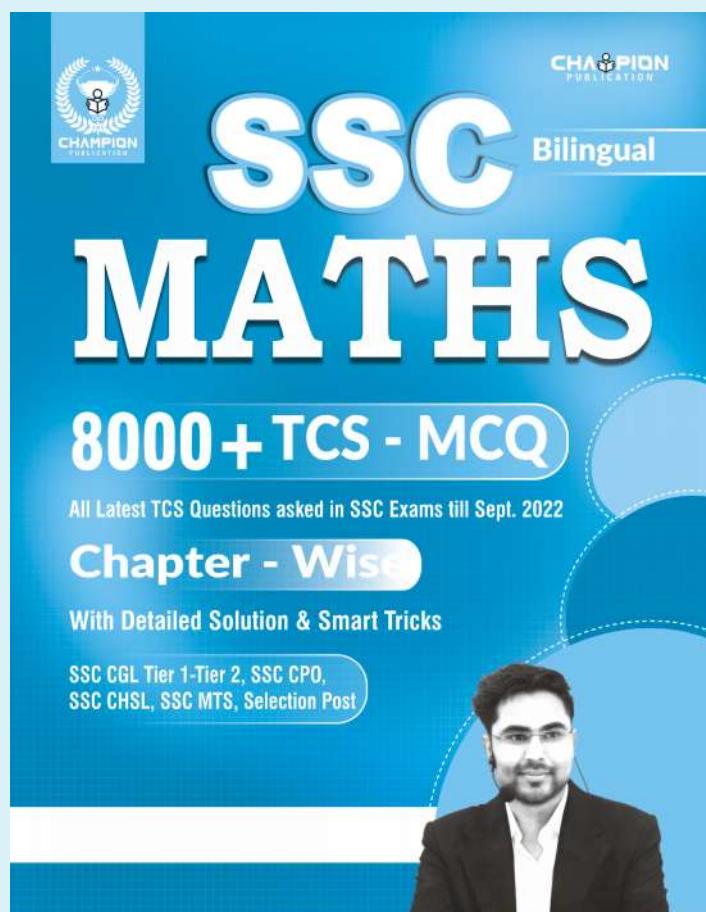
$$\text{Time taken to empty the tank} = \frac{15 \times 10}{15 - 10} = \frac{150}{5}$$

= 30 hours

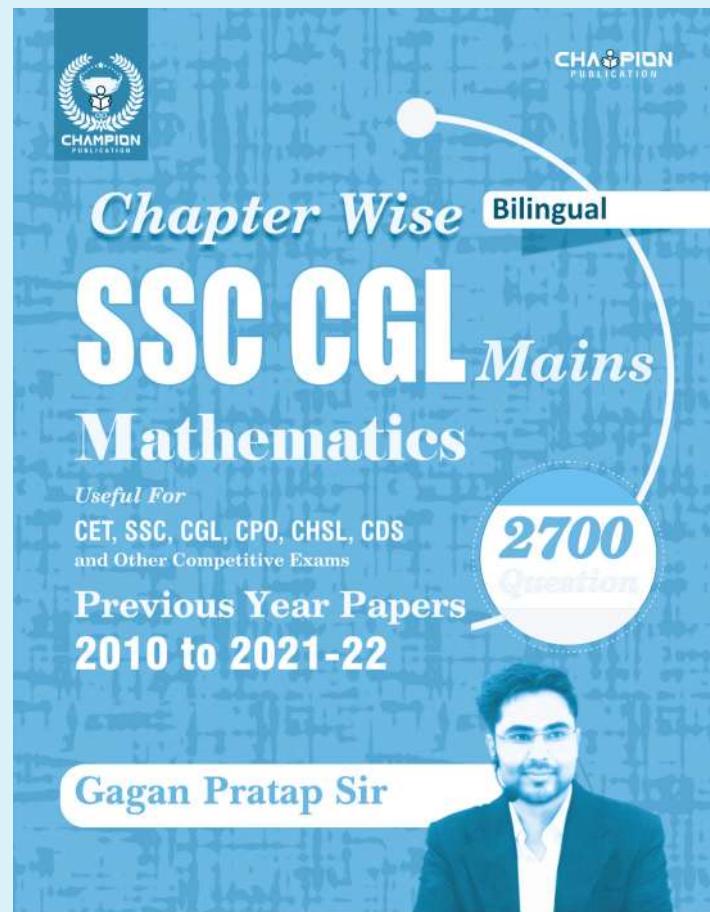
6. Two taps A and B can fill a tank in x hours and y hours respectively. If both the pipes are opened together, then the time after which pipe B should be closed so that the tank is full in t hours

दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः x घंटे और y घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों पाइपों को एक साथ खोल दिया जाता है, तो पाइप x को कितने समय बाद बंद कर देना चाहिए ताकि टंक त t घंटे में भर जाए,

$$\text{Required time / आवश्यक समय} = \left[y \left(1 - \frac{t}{x} \right) \right] \text{hours}$$



Gagan Pratap Sir





Time, Speed & Distance (समय, दूरी और चाल)



Time → Time is a fundamental physical quantity which defines the sequence and duration of events and it is denoted by 'T'

समय → समय एक मौलिक भौतिक मात्रा है जो घटनाओं के अनुक्रम और अवधि को परिभाषित करती है और इसे 'T' द्वारा निरूपित किया जाता है।

➤ **Distance** → The length of space between two points is considered the distance and it is denoted by 'D'

दूरी → दो बिंदुओं के बीच स्थान की लंबाई को दूरी माना जाता है और इसे 'D' द्वारा निरूपित किया जाता है।

➤ **Speed** → Speed is defined as the distance travelled in unit time and it is denoted by 'S'.

गति → गति को इकाई समय में तय की गई दूरी के रूप में परिभाषित किया गया है और इसे 'S' द्वारा दर्शाया जाता है।

❖ **Distance = D, Speed = S, Time = T**

$$\Rightarrow D = S \times T, S = \frac{D}{T}, T = \frac{D}{S}$$

$$1\text{ km/hr} = \frac{1\text{ km}}{1\text{ hr}} = \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ sec}} = \frac{5}{18} \text{ m/sec}$$

$$1\text{ km/hr} = \frac{5}{18} \text{ m/sec}$$

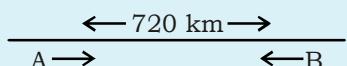
$$1\text{ m/sec} = \frac{18}{5} \text{ km/hr.}$$

Case-I: If D = constant

$$S \propto \frac{1}{T}, T \propto \frac{1}{S}$$

$$D = S_1 T_1 \Rightarrow S_1 T_1 = S_2 T_2$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{T_2}{T_1}$$



$$S_1 = 60 \text{ km/h} \quad S_2 = 90 \text{ km/h}$$

D = Constant

$$A = \frac{720}{60} = 12 \text{ Hr.}$$

$$B = \frac{720}{90} = 8 \text{ Hr.}$$

Speed → 2 : 3

Time → 3 : 2

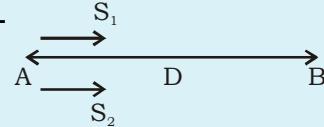
Case-II: If time constant D ∝ S

$$D_1 = S_1 T$$

$$D_2 = S_2 T$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

Proof:-



$$\text{Diff. of time} = \Delta t$$

$$\text{Diff. of speed} = S_1 - S_2 \sim S_1 = \Delta S$$

$$\therefore \frac{D}{S_1} - \frac{D}{S_2} = \Delta t$$

$$\therefore D \left[\frac{S_2 - S_1}{S_1 S_2} \right] = \Delta t$$

$$D = \frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2} \times \Delta t$$

Case-III: If speed constant D ∝ T

$$D_1 = ST_1$$

$$D_2 = ST_2$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

❖ If A and B starts walking towards each other. After meeting each other. A covered his remaining distance in t_1 time and B covered his remaining distance in t_2 time. Then ratio of their speed is यदि A और B एक दूसरे की ओर चलने लगते हैं। आपस में मिलने के बाद, A अपनी शेष दूरी को t_1 समय में तय करता है और B अपनी शेष दूरी को t_2 समय में तय करता है। तो उनकी गति का अनुपात है

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$$

If they meet after 't' hours then $t = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$

यदि वे 't' घंटे के बाद मिलते हैं तो $t = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$

Ex. A and B started their journey from X to Y and Y to X respectively. After crossing each other A and B completed the remaining part of their journey in 4h and 9h respectively. If the speed of B is 60 km/h then speed (in km/h) of A is:

A और B ने क्रमशः X से Y और Y से X तक अपनी यात्रा शुरू की। एक दूसरे को पार करने के बाद A और B ने अपनी यात्रा का शेष भाग क्रमशः 4 घंटे और 9 घंटे में पूरा किया। यदि B की गति 60 किमी/घंटा में है तो A की गति (किमी/घंटा में) है:

$$\frac{S_A}{S_B} = \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \frac{S_A}{60} = \frac{3}{2}$$

$$S_A = 90 \text{ km/h}$$

Relative speed (सापेक्ष गति)

1. When the two objects travel in same direction:-

जब दो वस्तुएँ एक ही दिशा में चलती हैं:-

$$\rightarrow 30 \text{ km/hr.}$$

$$\rightarrow 70 \text{ km/hr.}$$

$$\text{Relative speed (सापेक्ष गति)} = 70 - 30 = 40 \text{ km/hr.}$$

\therefore Distance between man & bus in one hr. will be 40 km.

Relative speed = diff of speeds

आदमी और बस के बीच एक घंटे में 40 किमी दूरी होगी।

सापेक्ष गति = गति का अंतर

2. When two objects travel in opposite direction:-

जब दो वस्तुएँ विपरीत दिशा में चलती हैं:-

$$\rightarrow 30 \text{ km/hr} \quad 70 \text{ km/hr} \leftarrow \square$$

$$\text{Relative speed (सापेक्ष गति)} \rightarrow 30 + 70 = 100 \text{ km/hr.}$$

Relative speed (सापेक्ष गति) = sum of both speeds.
(दोनों गति का योग।)

When train passes (जब ट्रेन गुजरती है)

1. When train passes a pole or stationary man

जब ट्रेन किसी खंभे या स्थिर आदमी से गुजरती है



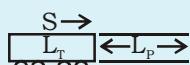
Distance covered will be equal to length of train
तय की गई दूरी ट्रेन की लंबाई के बराबर होगी

$$T = \frac{L}{S}$$

T = crossing time (पार करने का समय)

2. When train passes a bridge/platform.

जब ट्रेन पुल/प्लेटफार्म से गुजरती है।



distance covered will be equal to length of train + length of bridge/platform.

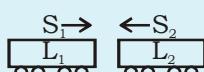
तय की गई दूरी = ट्रेन की लंबाई + पुल/प्लेटफार्म की लंबाई के बराबर होगी।

$$T = \frac{L_T + L_P}{S}$$

T= Crossing time (पार करने का समय)

3. When a train passes another train in opposite direction

जब एक ट्रेन विपरीत दिशा में दूसरी ट्रेन को पार करती है

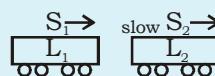


distance covered (तय की गई दूरी) = $L_1 + L_2$

$$T = \frac{L_1 + L_2}{S_1 + S_2} = \frac{\text{Distance Covered}}{\text{Relative Speed}}$$

4. When a train passes another train in same direction.

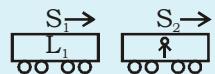
जब एक ट्रेन उसी दिशा में दूसरी ट्रेन को पार करती है।



$$T = \frac{L_1 + L_2}{S_1 - S_2} = \frac{\text{Distance Covered}}{\text{Relative Speed}}$$

5. When a train passes a person sitting in another moving train

जब एक ट्रेन दूसरी चलती ट्रेन में बैठे व्यक्ति को पार कर जाती है



$$T = \frac{L_1}{\text{Relative Speed}} = \frac{L_1}{S_1 - S_2}$$

Average speed (औसत गति)

1. If a man travels different distances d_1, d_2, d_3, \dots and so on in different time t_1, t_2, t_3 respectively then,

यदि एक व्यक्ति अलग-अलग दूरी d_1, d_2, d_3, \dots और इसी तरह अलग-अलग समय t_1, t_2, t_3 में क्रमशः तय करता है, तो,

$$\text{Average speed / औसत गति} = \frac{\text{total travelled distance}}{\text{total time taken in travelling distance}}$$

$$= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots}$$

2. If a man travels different distances d_1, d_2, d_3, \dots and so on with different speeds s_1, s_2, s_3, \dots respectively then,

यदि एक व्यक्ति अलग-अलग दूरी d_1, d_2, d_3, \dots और इसी तरह अलग-अलग गति क्रमशः s_1, s_2, s_3 से यात्रा करता है, तो,

$$\text{Average speed / औसत गति} = \frac{(d_1 + d_2 + d_3 + \dots)}{\frac{d_1}{s_1} + \frac{d_2}{s_2} + \frac{d_3}{s_3} + \dots}$$

Ex. A car travels 15 km, 20 km, 30 km and 12 km at speeds of 20 km/hr, 30 km/hr, 40 km/hr and 30 km/hr respectively. Find the average speed of the car in the total journey.

एक कार क्रमशः 15 किमी, 20 किमी, 30 किमी और 12 किमी की गति से 20 किमी/घंटा, 30 किमी/घंटा, 40 किमी/घंटा और 30 किमी/घंटा की चाल से तय करती है। कुल यात्रा में कार की औसत गति ज्ञात करें।

$$\begin{aligned} \text{Average speed} &= \frac{77}{\frac{15}{20} + \frac{20}{30} + \frac{30}{40} + \frac{12}{30}} = \frac{77}{\frac{77}{77}} = 77 \times 30 \\ &= 30 \text{ km/h} \end{aligned}$$

3. If a distance is divided into n equal parts each travelled with different speeds, then,

यदि एक दूरी को n बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, प्रत्येक ने अलग-अलग गति से यात्रा की, तो

$$\text{Average speed / औसत गति} = \frac{n}{\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} \right)}$$

where n number of equal parts $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ are speeds.

जहाँ n बराबर भागों की संख्या $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ गति है।

4. If a bus travels from A to B with the speed of x km/h and returns from B to A with the speed of y km/h, then the average speed will be $\left(\frac{2xy}{x+y} \right)$

यदि एक बस A से B तक x किमी/घंटा की गति से यात्रा करती है और B से A तक y किमी/घंटा की गति से वापस आती है, तो औसत गति होगी $\left(\frac{2xy}{x+y} \right)$

- Ex.** A person travels from a station A to station B at a uniform speed of 60 km/h and returns to A at a uniform speed of 84 km/h. His average speed for the entire journey is:

एक व्यक्ति स्टेशन A से स्टेशन B तक 60 किमी/घंटा की एक समान गति से यात्रा करता है और 84 किमी/घंटा की समान गति से वापस A पर लौटता है। पूरी यात्रा के लिए उसकी औसत गति है:

$$\text{Average speed} = \frac{2 \times 60 \times 84}{84 + 60} = 70 \text{ km/h}$$

Alternatively:-

Let D = 420 km (L.C.M of 84 and 60)

$$\text{Average speed} = \frac{\frac{420+420}{420}}{\frac{420}{84} + \frac{420}{60}} = \frac{840}{5+7} = 70 \text{ km/h}$$

Speed increase/decrease (गति में वृद्धि/कमी)

1. If an object increases/decreases its speed from x km/hr to y km/hr. to cover a distance in t_2 hours in place of t_1 hours then (Here $(t_2 - t_1)$ will be given).

यदि कोई वस्तु अपनी गति को x किमी/घंटा से बढ़ाकर y किमी/घंटा कर देती है। किसी दूरी को t_1 घंटे के स्थान पर t_2 घंटे में तय करने के लिए (यहाँ $(t_2 - t_1)$ दिया जाएगा)।

$$\text{Distance} = \frac{xy}{(\text{Diff. of } x \text{ and } y)} \times (\text{Change in time})$$

or,

$$\text{Distance} = \left(\frac{\text{Product of Speeds}}{\text{Diff. in Speeds}} \right) \times (\text{Change in time})$$

2. If an object travels certain distance with the speed

of $\frac{A}{B}$ of its original speed and reaches its destination 't' hours before or after, then the time

taken by object travelling at original speed is

यदि कोई वस्तु अपनी मूल गति की $\frac{A}{B}$ गति के साथ निश्चित दूरी तय करती है और अपने गंतव्य 't' घंटे पहले या बाद में पहुँचती है, तो वस्तु द्वारा मूल गति से यात्रा करने में लिया गया समय है

$$\text{Time} = \frac{A}{(\text{Diff. of } A \text{ and } B)} \times \text{time (in hour)}$$

3. If a man travels at the speed of s_1 , he reaches his destination t_1 late while he reaches t_2 before when he travels at s_2 speed, then the distance between the two places is

यदि एक व्यक्ति s_1 की गति से यात्रा करता है, तो वह अपने गंतव्य t_1 देर से पहुँचता है जबकि वह t_2 पहले पहुँचता है जब वह s_2 की गति से यात्रा करता है, तो दोनों स्थानों के बीच की दूरी है

$$\text{Distance} = \frac{(s_1 \times s_2) \times (t_1 + t_2)}{s_2 - s_1}$$

Some important points (कुछ महत्वपूर्ण बिंदु)

1. Formula to calculate the no. of rounds.
Circular Distance = (circumference) × No of rounds,

$$\text{वृत्तकार दूरी} = (\text{परिधि}) \times \text{चक्करों की संख्या}$$

$$\mathbf{D = 2\pi r \times n}$$

2. If any one overtakes or follows another, then time taken to catch

अगर कोई किसी को ओवरटेक या पीछा करता है तो उसे पकड़ने में समय लगता है

$$= \frac{\text{distance between them}}{\text{Relative speed}}$$

or, meeting time (मिलने का समय)

$$= \frac{(\text{Speed of 1st traveller}) \times \text{time}}{(\text{Diff. of speeds})}$$

Total travelled distance to catch the thief (चोर को पकड़ने के लिए तय की गई कुल दूरी)

$$= \frac{(\text{Product of speeds}) \times \text{time}}{(\text{Diff. of speeds})}$$

3. Formula to calculate the no. of poles, खम्बों की संख्या पता करना

$$\text{Distance / खम्बों की संख्या (दूरी)} = (n - 1)x$$

where n = No. of poles.

x = distance between consecutive two poles.

x = लगातार दो खम्बों के बीच की दूरी।

4. If a man covers $\frac{1}{x}$ part of Journey at u km/h,

$\frac{1}{y}$ part at v km/h and $\frac{1}{z}$ part at w km/hr and so on, then his average speed for the whole journey will be

एक दूसरे को पार करने में लिया गया समय = $\frac{2 \times \text{Product of time}}{\text{Sum of time}}$

यदि एक व्यक्ति अपनी यात्रा का $\frac{1}{x}$ भाग u किमी/घंटा की गति से, $\frac{1}{y}$

भाग v किमी/घंटा की गति से और $\frac{1}{z}$ भाग w किमी/घंटा की गति से तय करता है, तो पूरी यात्रा के लिए उसकी औसत गति होगी

$$\frac{1}{\frac{1}{xu} + \frac{1}{yv} + \frac{1}{zw} + \dots}$$

5. Let 'a' metre long train is travelling with the speed 'x' m/s and 'b' metre long train is travelling with the speed 'y' m/s in the opposite direction on parallel path. Then, time taken by the trains to cross each other

मान लीजिए कि 'a' मीटर लंबी ट्रेन 'x' m/s की गति से यात्रा कर रही है और 'b' मीटर लंबी ट्रेन समानांतर पथ पर विपरीत दिशा में 'y' m/s की गति से यात्रा कर रही है। फिर, ट्रेनों द्वारा एक दूसरे को पार करने में लगने वाला समय

$$= \left(\frac{a+b}{x+y} \right) \text{seconds}$$

6. If a train crosses a standing man/a pole in ' t_1 ' sec time and crosses 'P' meter long platform in ' t_2 ' sec

$$\text{time, then length of the train} = \frac{P \times t_1}{(t_2 - t_1)}$$

यदि कोई रेलगाड़ी किसी खड़े व्यक्ति/खंभे को ' t_1 ' सेकण्ड समय में पार करती है तथा 'P' मीटर लम्बे प्लेटफार्म को ' t_2 ' सेकण्ड समय में पार

$$\text{करती है, तो रेलगाड़ी की लम्बाई} = \frac{P \times t_1}{(t_2 - t_1)}$$

7. If two trains of (same lengths) are coming from same direction and cross a man in t_1 and t_2 seconds, then time taken by both the trains to

$$\text{cross each other} = \frac{2 \times \text{Product of time}}{\text{Diff. of time}}$$

यदि (समान लंबाई) की दो रेलगाड़ियाँ एक ही दिशा से आ रही हैं और एक आदमी को t_1 और t_2 सेकण्ड में पार करती हैं, तो दोनों रेलगाड़ियों द्वारा एक दूसरे को पार करने में लिया गया समय

$$= \frac{2 \times \text{Product of time}}{\text{Diff. of time}}$$

8. If two trains of same length are coming from opposite directions and cross a man in t_1 seconds and t_2 seconds then time taken by both trains to

$$\text{cross each other} = \frac{2 \times \text{Product of time}}{\text{Sum of time}}$$

यदि समान लंबाई की दो ट्रेनें विपरीत दिशाओं से आ रही हैं और एक आदमी को t_1 सेकण्ड और t_2 सेकण्ड में पार करती हैं तो दोनों ट्रेनों द्वारा

9. If a train of length l m passes a bridge/ platform of ' x ' m in t_1 sec, then the time taken by the same train to cross another bridge/platform of length ' y ' m is,

$$\text{Time taken} = \left(\frac{l+y}{l+x} \right) t_1$$

यदि l मीटर लंबाई की एक ट्रेन 'x' मीटर के पुल/प्लेटफार्म को t_1 सेकण्ड में पार करती है, तो उसी ट्रेन द्वारा लंबाई 'y' मीटर के दूसरे पुल/प्लेटफार्म को पार करने में लगने वाला समय है, $= \left(\frac{l+y}{l+x} \right) t_1$

10. From stations A and B, two trains start travelling towards each other at speeds a and b , respectively. When they meet each other, it was found that one train covers distance d more than that of another train. The distance between stations A and B is given as

स्टेशनों A और B से, दो ट्रेनें क्रमशः a और b की गति से एक दूसरे की ओर यात्रा करना शुरू करती हैं। जब वे एक-दूसरे से मिलते हैं, तो यह पाया गया कि एक ट्रेन दूसरी ट्रेन की तुलना में d अधिक दूरी तय करती है। स्टेशनों A और B के बीच की दूरी इस प्रकार दी गई है

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \times d$$

11. Excluding stoppage, the average speed of a train is u and with stoppage its average speed is v . Then, the stoppage time per hour

ठहराव को छोड़कर, एक ट्रेन की औसत गति u है और ठहराव के साथ इसकी औसत गति v है। फिर, प्रति घंटे रुकने का समय

$$= \frac{\text{Diff. between their average speed}}{\text{Speed without stoppage}}$$

$$= \frac{u-v}{u}$$

With $u > v$ and $u, v \neq 0$

12. A train covers a distance between stations A and B in time t_1 . If the speed is changed by S then the time taken to cover the same distance is t_2 . Then the distance (D) between A and B is given by

एक ट्रेन स्टेशनों A और B के बीच की दूरी को t_1 समय में तय करती है। यदि गति को S से बदल दिया जाए तो समान दूरी तय करने में लगने वाला समय t_2 है। तब A और B के बीच की दूरी (D) द्वारा दी जाती है

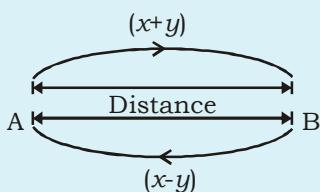
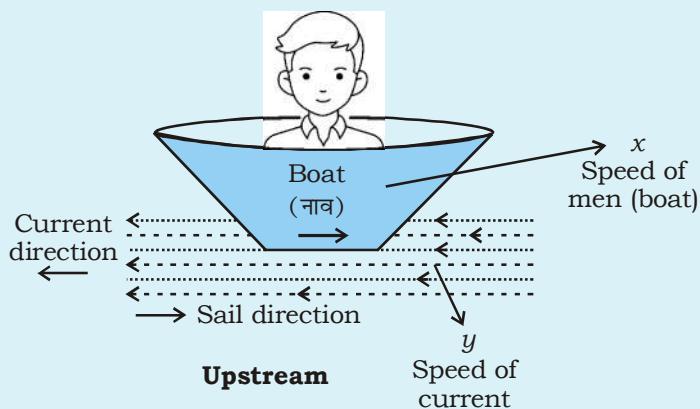
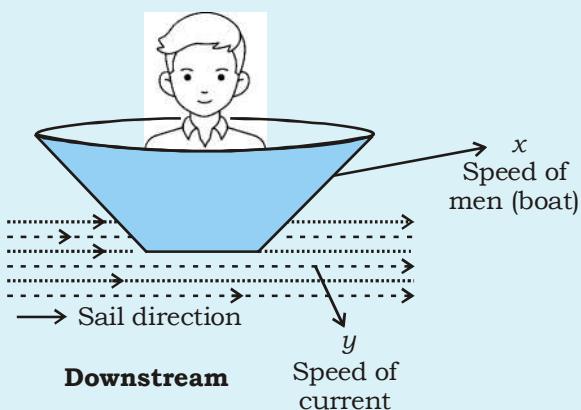
$$D = S \left(\frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} \right) \text{ or } \left(\frac{S}{t'} \right) t_1 t_2$$

Where 't' : change in the time taken

जहाँ 't' : लिए गए समय में परिवर्तन



Boat & Stream (नाव व धारा)



1. Speed of boat in still water = $x \text{ km/hr}$
शांत जल में नाव की गति = $x \text{ km/hr}$
Speed of current/stream = $y \text{ km/hr}$
धारा की गति = $y \text{ km/hr}$
- ❖ Speed of boat in same direction of stream = downstream = $D = x + y$
धारा की एक ही दिशा में नाव की गति = धारा के अनुकूल
= $D = x + y$
- ❖ Speed of boat in opposite direction of stream = upstream = $U = x - y$
धारा के विपरीत दिशा में नाव की गति = धारा के प्रतिकूल = $U = x - y$
- ❖ $x > y$ $x = \frac{D + U}{2} = \text{Speed of boat. (नाव की गति)}$

$$y = \frac{D - U}{2} = \text{Speed of stream. (धारा की गति)}$$

$D > U$

2. Let the speed of boat is $x \text{ km/h}$ and speed of stream is $y \text{ km/h}$. To travel $d_1 \text{ km}$ downstream and $d_2 \text{ km}$ upstream, the time is ' t ' hours, then
माना नाव की गति x किमी/घंटा है और धारा की गति y किमी/घंटा है।
 d_1 किमी धारा के अनुकूल और d_2 किमी धारा के प्रतिकूल यात्रा करने के लिए, समय ' t ' घंटे है, तब

$$\frac{d_1}{x+y} + \frac{d_2}{x-y} = t$$

- Ex.** The speed of a boat is 23 km/hr and the speed of the stream is 9 km/hr , it takes ' t ' time to cover a distance of 112 km downstream and 224 km upstream. Then find the value of t ?

एक नाव की गति 23 किमी/घंटा है और धारा की गति 9 किमी/घंटा है, उसे 112 किमी की दूरी धारा के अनुकूल और 224 किमी की दूरी धारा के प्रतिकूल तय करने में ' t ' समय लगता है। तो t का मान ज्ञात कीजिये?

$$\frac{112}{23+9} + \frac{224}{23-9} = t$$

$$t = 3.5 + 16 = \mathbf{19.5}$$

3. If the speed of a boat or swimmer in still water is $a \text{ km/hr}$ and river is flowing with a speed of $b \text{ km/hr}$. then average speed in going to a certain place and coming back to starting point is given

$$\text{by } by = \frac{(a+b)(a-b)}{a} \text{ km/hr}$$

यदि शांत जल में नाव या तैराक की गति a किमी/घंटा है और नदी b किमी/घंटा की गति से बह रही है। तो एक निश्चित स्थान पर जाने और

प्रारंभिक बिंदु पर वापस आने की औसत गति = $\frac{(a+b)(a-b)}{a}$ किमी/घंटा द्वारा दी जाती है।

- Ex.** If the speed of 1 swimmer in still water is 8 km/hr and the river is flowing at the speed of 4 km/hr , then what is the average speed of going to a certain place and coming back to the starting point?

यदि शांत जल में 1 तैराक की गति 8 किमी/घंटा है और नदी 4 किमी/घंटा की गति से बह रही है, तो एक निश्चित स्थान पर जाने और प्रारंभिक बिंदु पर वापस आने की औसत गति क्या है?

$$\text{Average speed} = \frac{(8+4)(8-4)}{8} = \frac{12 \times 4}{8} = \mathbf{6 \text{ km/h}}$$

4. If a man or a boat covers x km distance in t_1 hours along the direction of stream (downstream) and covers the same distance in t_2 hours against the stream i.e. upstream, then

यदि कोई व्यक्ति या नाव धारा की दिशा में (धारा के अनुकूल) t_1 घंटे में x किमी की दूरी तय करता है और धारा के प्रतिकूल यानी धारा के विपरीत t_2 घंटे में समान दूरी तय करता है, तो

speed of man/boat (आदमी/नाव की गति) =

$$\frac{x}{2} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \text{ km/hr}$$

speed of stream (धारा की गति) = $\frac{x}{2} \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right)$ km/hr

- Ex. If a man covers a distance of 100 km in 5 hours in the downstream direction and the same distance in 10 hours in the upstream direction, then find the speed of the man?

यदि एक आदमी धारा की दिशा में 5 घंटे में 100 किमी की दूरी तय करता है और वही दूरी धारा की विपरीत दिशा में 10 घंटे में तय करता है तो आदमी की गति ज्ञात कीजिये?

$$\frac{100}{2} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) \Rightarrow 5 \times 3 \Rightarrow 15 \text{ km/h}$$

5. If a swimmer takes same time to travel d_1 km downstream and d_2 km upstream, then,

यदि एक तैराक d_1 किमी धारा के अनुकूल और d_2 किमी धारा के प्रतिकूल यात्रा करने में समान समय लेता है, तो,

$$\frac{\text{Speed of swimmer or boat}}{\text{Speed of stream}} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2}$$

- Ex. If a swimmer takes equal time to travel 400 km downstream and 300 km upstream, then find the ratio of the speed of the swimmer and the speed of the stream.

यदि एक तैराक 400 किमी. की यात्रा धारा के अनुकूल और 300 किमी. धारा के प्रतिकूल यात्रा करने में समान समय लेता है तो तैराक की चाल और धारा की चाल का अनुपत्ता ज्ञात करें।

$$\frac{400 + 300}{400 - 300} = \frac{700}{100} = 7 : 1$$

6. A swimmer or boat travels a certain distance upstream in t_1 hours, while it takes t_2 hours to travel same distance downstream. then,

एक तैराक या नाव एक निश्चित दूरी को धारा के प्रतिकूल t_1 घंटे में तय करता है, जबकि समान दूरी को धारा के अनुकूल तय करने में t_2 घंटे का समय लेता है। तब,

$$\frac{\text{Speed of swimmer}}{\text{Speed of stream}} = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2}$$

- Ex. A swimmer covers a certain distance in $8\frac{4}{5}$ hour upstream while it takes 4 hours to cover the same distance downstream, then find the ratio of the speed of the swimmer and the speed of the stream?

एक तैराक एक निश्चित दूरी को धारा के प्रतिकूल $8\frac{4}{5}$ घंटे में तय करता है जबकि समान दूरी को धारा के अनुकूल तय करने में 4 घंटे का समय लेता है तो तैराक की चाल और धारा की चाल का अनुपत्ता ज्ञात करें?

$$\frac{\frac{4}{5} + 4}{\frac{4}{5} - 4} = \frac{\frac{64}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{8}{3} = 8 : 3$$

7. Let the speed of stream be y km/h and speed of boat be x km/h. A boat travels equal distance (d) upstream as well as downstream in 't' hours, then माना धारा की गति y किमी/घंटा और नाव की गति x किमी/घंटा है। एक नाव 't' घंटे में धारा के प्रतिकूल और धारा के अनुकूल समान दूरी तय करती है, तो

$$\frac{d}{x+y} + \frac{d}{x-y} = t,$$

$$d \text{ is the fixed distance or, } d = \frac{t(x^2 - y^2)}{2x}$$

$$d \text{ निश्चित दूरी है तब, } d = \frac{t(x^2 - y^2)}{2x}$$

$$t = \frac{2dx}{x^2 - y^2}$$

- Ex. A boat covers a distance of 540 km upstream and downstream in 't' time. If the speed of stream is 8 km/h and the speed of boat is 10 km/h then find the value of 't'?

एक नाव 't' समय में धारा के प्रतिकूल और धारा के अनुकूल 540 किमी की दूरी तय करती है यदि धारा की गति 8 किमी/घंटा है और नाव की गति 10 किमी/घंटा है तो 't' का मान ज्ञात कीजिए?

$$t = \frac{2 \times 540 \times 10}{(10)^2 - (8)^2} = 300 \text{ hrs}$$

8. If a boat travels in downstream and upstream. then,

यदि कोई नाव धारा के अनुकूल और धारा के प्रतिकूल चलती है। तब,

$$\text{Speed of boat} = \frac{\text{Sum of distances}}{2 \times \text{time}} = \frac{d_1 + d_2}{2 \times \text{time}}$$

$$\text{Speed of stream} = \frac{\text{Difference of distances}}{2 \times \text{time}} = \frac{d_1 - d_2}{2 \times \text{time}}$$



Race (दौड़)



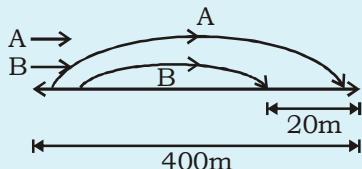
Linear race (रेखीय दौड़)

- Dead Heat:** → A race in which two or more competitors finish at exactly the same time or exactly the same result.

डेड हीट: → एक दौड़ जिसमें दो या दो से अधिक प्रतियोगी बिल्कुल एक ही समय पर या एक ही परिणाम के साथ समाप्त होते हैं।

- In a 400m race, A and B running from starting point. Suppose A win the race:-

400 मीटर की दौड़ में, A और B प्रारंभिक बिंदु से दौड़ रहे हैं मान लिजिए A दौड़ जीतता है:-



It means that A completes the full race and B runs 20m less.

इसका मतलब है कि A दौड़ पूरी करता है और B 20 मीटर कम दौड़ता है।

It means that A runs 400 m and B runs only 380m.

इसका मतलब है कि A 400 m दौड़ता है और B केवल 380m दौड़ता है।

- Beat distance:** → In a race of 100m if A beats B by 10m then that 10m called beat distance.

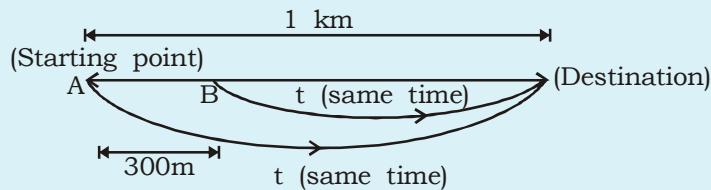
बीट दूरी: → 100 मीटर की दौड़ में यदि A, B को 10 मीटर से हरा देता है, तो 10 मीटर की दूरी को बीट दूरी कहा जाता है।

- Beat time:** → In a race of 100m if A beats B by 10 second then that 10 second called beat time.

बीट टाइम: → 100 मीटर की दौड़ में यदि A, B को 10 सेकंड से हरा देता है तो उस 10 सेकंड को बीट टाइम कहा जाता है।

- In 1 km race A gives B a start of 300m.

1 किमी की दौड़ में A, B को 300 मीटर की शुरुआत देता है।

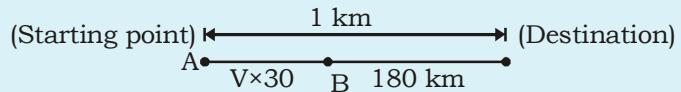


A : B

Dist 10 : 7

Speed 10 : 7 (\because Time constant then $D \propto S$)

- In a 1 km race A gives B a start of 30 second.
- एक किमी की दौड़ में A, B को 30 सेकंड की शुरुआत देता है।

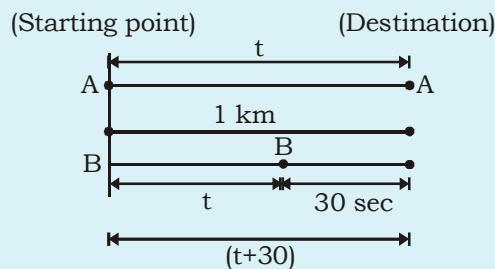


Let Speed of A is u.

Speed of B is v.

- In 1 km race A wins over B by 30 second.

1 किमी की दौड़ में A, B से 30 सेकंड से जीत जाता है।

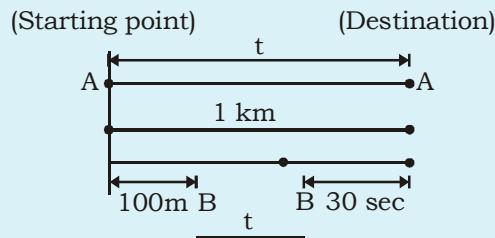


A : B

Time → t : (t + 30)

- In a 1 km race A gives a start of 100m to B and still wins over B by 30 seconds.

1 किमी की दौड़ में A, B को 100 मीटर की शुरुआत देता है और फिर भी B से 30 सेकंड से जीत जाता है।



A : B

Distance → 1000 : 900

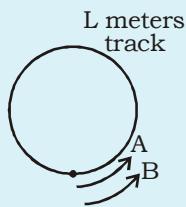
Time → t sec : (t + 30) sec

Circular Race (वृत्ताकार दौड़)

Case-I

- When two persons A and B are running around a circular track of length L meters with speeds a m/s and b m/s in the same direction.

जब दो व्यक्ति A और B, L मीटर लंबाई के एक वृत्ताकार ट्रैक के चारों ओर एक ही दिशा में a मी./सं. और b मी./सं. की गति से दौड़ रहे हैं।



They meet each other at any point on the track is / वे ट्रैक पर किसी भी बिंदु पर एक-दूसरे से मिलते हैं

$$\rightarrow \frac{L}{a-b} \text{ seconds} / \text{सेकंड}$$

They meet each other exactly at the starting point वे एक दूसरे से बिल्कुल आरंभिक बिंदु पर मिलते हैं

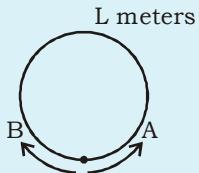
$$= \text{LCM} \left(\frac{L}{a}, \frac{L}{b} \right) \text{ seconds} / \text{सेकंड}$$

Case-II

- **Opposite direction** → They meet each other at any point on the track/

विपरीत दिशा → वे ट्रैक पर किसी भी बिंदु पर एक दूसरे से मिलते हैं

$$= \left(\frac{L}{a+b} \right) \text{ seconds} / \text{सेकंड}$$



They meet each other at the starting point वे प्रारंभिक बिंदु पर एक दूसरे से मिलते हैं

$$= \text{LCM} \left(\frac{L}{a}, \frac{L}{b} \right) \text{ seconds} / \text{सेकंड}$$

Case-III

- When three persons A, B and C are running around a circular track of length L meter with a speed of a m/s, b m/s and c m/s in the same direction.

जब तीन व्यक्ति A, B और C एक ही दिशा में a मी./सं., b मी./सं. और c मी./सं. की गति से L मीटर लंबाई के एक गोलाकार ट्रैक के चारों ओर दौड़ रहे हैं।

They will meet each other at any point on the track is / वे ट्रैक पर किसी भी बिंदु पर एक-दूसरे से मिलेंगे

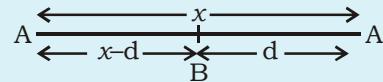
$$\left(\frac{L}{a-b}, \frac{L}{b-c} \right) \text{ second} / \text{सेकंड}$$

They will meet each other at starting point वे आरंभिक बिंदु पर एक दूसरे से मिलेंगे

$$= \text{LCM} \left(\frac{L}{a}, \frac{L}{b}, \frac{L}{c} \right) \text{ second} / \text{सेकंड}$$

- 1. Race:- \xrightarrow{x} A beats B by d metres.

दौड़:- \xrightarrow{x} A, B को d मीटर से हराता है।



Time is same / समय समान है

Hence, $D \propto S$

\therefore distance & speed का ratio same होगा।

$$\frac{D_A}{D_B} = \frac{S_A}{S_B} = \frac{x}{x-d}$$

Example:-

400m race — A give a start of 50m to B and still beat him by 80m

400 मीटर दौड़ - A ने B को 50 मीटर की शुरूआत दी और फिर भी उसे 80 मीटर से हरा दिया।

$$\frac{D_A}{D_B} = \frac{400}{270} = \frac{40}{27}$$

$$\therefore \frac{S_A}{S_B} = \frac{40}{27}$$

- 2. If in a race of length L , the time taken by A and B be t_A and t_B ($t_B > t_A$), then the distance (d) by which A beats B given by,

यदि लंबाई L की दौड़ में, A और B द्वारा लिया गया समय t_A और t_B ($t_B > t_A$) हो, तो दूरी (d) जिसके द्वारा A, B को हराता है,

$$d = \left(\frac{L}{t_B} \right) (t_B - t_A)$$

or, $d = B$'s speed $\times (t_B - t_A)$

- 3. If in a race of length L , A can give B a start of ' b ' and C a start of ' c ' then the start that B can give C.

यदि लंबाई L की दौड़ में, A, B को 'b' की शुरूआत देता है। और C को 'c' की शुरूआत देता है, तो वह शुरूआत जो B, C को दे सकता है

$$= L \left(\frac{c-b}{L-b} \right)$$

- 4. If A gives B a start of distance 'd' and still beats him by time 't' in a race of length 'L'. then B's speed is

यदि A, B को दूरी 'd' की शुरूआत देता है और फिर भी लंबाई 'L' की दौड़ में उसे 't' समय से हरा देता है। तो B की गति है

$$S_B = \frac{L-d}{\frac{L}{S_A} + t} = \frac{\text{Distance covered by B}}{\text{Total time taken by B}}$$

Where, S_A : A'S speed (जहां, S_A : A की गति)

- Ex: A gives B a start of 200 m and still beats him by 5 sec in a race of 1 km. Find the speed of B if speed of A is 10 m/sec.

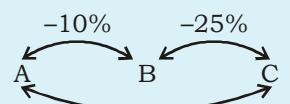
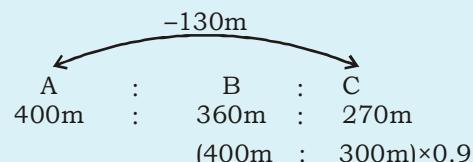
Arithmetic

A और B क्रमशः 18 मीटर/सेकंड और 7 मीटर/सेकंड की गति से 132 मीटर परिधि वाले एक वृत्त के चारों ओर चलते हैं। यदि वे एक साथ एक ही बिंदु से शुरू करते हैं, तो कितने समय बाद वे पहली बार फिर से एक साथ होंगे?

$$\frac{132}{18-7} = \frac{132}{11} = 12 \text{ sec}$$

Ex. If A beats B by 40m and B beats C by 100m then by how much distance A beats C?

यदि A, B को 40 मीटर से हराता है और B, C को 100 मीटर से हराता है तो A ने C को कितनी दूरी से हरायेगा?



$$\therefore -10 - 25 + \frac{250}{100} = -32.5$$

$$\therefore 400 \times 32.5\% = 130\text{m}$$

CHAMPION PUBLICATION

Bilingual

Complete CLASSNOTES

Arithmetic

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

CHAMPION PUBLICATION

Bilingual

Complete CLASSNOTES

Advance Maths

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir



Permutation & Combinations

(क्रमचय और संचय)



Fundamental Principle of Counting (गणना का मौलिक सिद्धांत)

- If an event can occur in m different ways, following which another event can occur in n different ways, then the total no. of occurrence of the events in the given order is $m \times n$.

यदि एक घटना m विभिन्न तरीकों से घटित हो सकती है, जिसके बाद दूसरी घटना n विभिन्न तरीकों से घटित हो सकती है तो दोनों घटनाओं को मिलाकर कुल $m \times n$ तरीके से घटित हो सकते हैं।

- Ex.** Mohan has 3 pants and 2 shirts. How many different pairs of a pant and a shirt, can be dress up with?

मोहन के पास 3 पैंट और 2 कमीजें हैं। एक पैंट और एक शर्ट के कितने जोड़े तैयार किये जा सकते हैं?

For every choice of a pant, there are two choices of shirt.

पैंट की हर पसंद के लिए, शर्ट के दो विकल्प होते हैं।

Therefore $\rightarrow 3 \times 2 = 6$ pairs of pant and shirt.

अतः $\rightarrow 3 \times 2 = 6$ जोड़ी पैंट और शर्ट।

- Ex.** In a test paper consist of questions and each question has 4 choices if each question is necessarily attempted then find the number of ways of answering the test paper.

एक परीक्षा पेपर में 10 प्रश्न हैं तथा प्रत्येक प्रश्न के 4 विकल्प हैं यदि प्रत्येक प्रश्न को करना आवश्यक है तो कितने प्रकार से पेपर का उत्तर दिया जा सकता है।

- Sol.** Since we know each question can be answered in 4 way.

क्यूंकि हम जानते हैं कि प्रत्येक प्रश्न को 4 तरीके से उत्तर दिया जा सकता है।

Then total number of ways/(कुल तरीके)

$$= 4 \times 4 \times 4 = 10 \text{ times}$$

$$= 4^{10}$$

Permutation (क्रमचय)

- A permutation is an arrangement in a definite order of a number of objects taken some or all at a time.

एक क्रमचय संख्या के एक निश्चित क्रम में एक व्यवस्था है। वस्तुओं का एक समय में कुछ वस्तु या सभी वस्तु में लिया जाता है।

- Mathematically The number of ways of arranging n distinct objects in a row taking $r(0 < r \leq n)$ at a time is denoted by $P(n, r)$ or ${}^n P_r$.

गणितीय रूप से एक समय में $r(0 < r \leq n)$ लेकर एक पर्कि में n विशिष्ट वस्तुओं को व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या को $P(n, r)$ या ${}^n P_r$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

$$\text{i.e. } {}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Properties of Permutation (क्रमचय के गुण)

$$(i) {}^n P_n = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

$$(ii) {}^n P_0 = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$(iii) {}^n P_1 = n$$

$$(iv) {}^n P_{n-1} = n!$$

$$(v) {}^n P_r = n \cdot {}^{n-1} P_{r-1} = n(n-1) \cdot {}^{n-2} P_{r-2} = n(n-1)(n-2) \cdot {}^{n-3} P_{r-3}$$

$$(vi) {}^{n-1} P_r + r \cdot {}^{n-1} P_{r-1} = {}^n P_r$$

$$(vii) \frac{{}^n P_r}{{}^n P_{r-1}} = n - r + 1$$

Factorial notation → The notation $(n!)$ represents the product of first n natural number.

क्रमगुणित अंकन → अंकन $n!$ पहले n प्राकृतिक संख्या के गुणनफल का प्रतिनिधित्व करता है।

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3! = 4 \times 3 \times 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = 5 \times 4 \times 3 \times 2! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Note → $0! = 1$

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}, 0 \leq r \leq n \quad (\text{Repetition not allowed})$$

Note:-

$${}^n P_n = n!$$

$${}^n P_0 = 1$$

$$\text{When } n = r \Rightarrow {}^n P_n = \frac{n!}{0!} = n!$$

- The number of permutations of n different objects taken ' r ' at a time where repetition is allowed = n^r

एक समय में ' r ' लिए गए n विभिन्न वस्तुओं के क्रमपरिवर्तन की संख्या जहाँ पुनरावृत्ति की अनुमति है = n^r

- ❖ The number of permutations of n objects, where p_1 objects are of same kind and rest are all different

$$\frac{n!}{p_1!}$$

n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या, जहाँ p_1 वस्तुएँ एक ही प्रकार की हैं

और शेष सभी भिन्न हैं। तो $\frac{n!}{p_1!}$

- ❖ The number of permutation of n objects, where p_1 objects are of one kind, p_2 are of 2nd kind p_k are of k^{th} kind and the rest if any are of different

$$\text{kind is } \frac{n!}{p_1!p_2!.....p_k!}$$

n वस्तुओं के क्रमचय की संख्या, जहाँ p_1 वस्तुएँ एक प्रकार की होती हैं, p_2 दूसरी प्रकार की होती हैं p_k K प्रकार की होती हैं और

शेष यदि कोई भिन्न प्रकार की होती हैं। $\frac{n!}{p_1!p_2!.....p_k!}$

- Ex.** How many different words can be formed 'with the letter of the word "JAIPUR" which start with A and end with T.

"JAIPUR" शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाये जा सकते हैं यदि A से शुरूआत हो तथा 'I' पर समाप्ति हो?

Sol. A _____ I

We now have 4 different letter at 4 places

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

- Ex.** Find the number of words that can be formed out of the letters of the word "COMMITTEE" taken all at a time?

"COMMITTEE" शब्द के सभी अक्षरों को एक साथ लेकर कितने शब्द बनाये जा सकते हैं?

$$\text{Sol. } \frac{9!}{2!2!2!} = \frac{9!}{8} = 45360$$

- Ex.** In how many ways can 5 boys and 5 girls be seated at a round table so that no two girls may be together?

5 लड़के और 5 लड़कियों को एक गोलाकार मेज के चारों तरफ कितने तरीके से बिठाया जा सकता है यदि कोई 2 लड़की साथ न बैठे?

Sol. Leave one seat vacant between two boys.

दो लड़कों के बीच में एक सीट खाली छोड़े।

The no. of ways to sit boys = 4!

5 girl can sit = 5! ways

$$\text{Total ways} = 4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$$

- Ex.** In how many ways can 4 beads out of 6 different beads be strung into a string.

एक 6 मोती की माला से 4 मोती कितने तरीके से निकाले जा सकते?

$$\text{Sol. } \frac{6p_4}{4.2} = \frac{6:5.4.3}{8} = 45$$

Clockwise and anticlock wise order will give the same.

Combination (संचय)

- ❖ Each of the different groups or selections which can be made by some or all of a number of given things without reference to the order of the things in each group is called a combination.

दी गई वस्तुओं में एक साथ कुछ या सभी वस्तुओं को लेकर उनके क्रम का ध्यान रखें बिना जो समूह बनाए जाते हैं उन्हें संचय कहते हैं।

- ❖ **Mathematically** The number of combinations of n different things taken r at a time is

गणितीय रूप से एक समय में ली गई n विभिन्न वस्तुओं के संचयों की संख्या r है

$$C(n,r) \text{ or } {}^nC_r \text{ or } \binom{n}{r} \text{ i.e. } {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \leq r \leq n$$

Properties of Combination (संचय के गुण)

(i) ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$

(ii) ${}^nC_1 = n$

(iii) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(iv) If ${}^nC_r = {}^nC_p$, then either $r = p$ or $r + p = n$

(v) ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$

(vi) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

(vii) $n \times {}^{n-1}C_{r-1} = (n-r+1) {}^nC_{r-1}$

(viii) ${}^nC_r = \frac{n}{r} {}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n(n-1)}{r(r-1)} {}^{n-2}C_{r-2}$

(ix) ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n = 2^n$

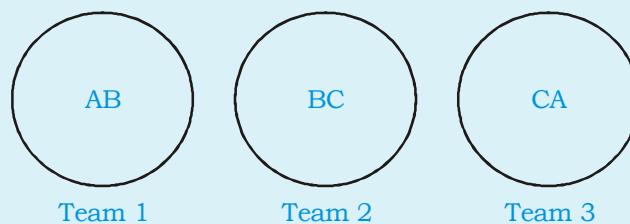
Note:- $\frac{h!}{r!} \neq \left(\frac{h}{r}\right)!$

- ❖ In combination order is not important let us assume there are 3 players A, B, C. A team consisting of two players is to be formed. In how many ways we can do it.

→ 3 Teams possible

संचय में क्रम महत्वपूर्ण नहीं है मान लें कि 3 खिलाड़ी हैं A, B, C। दो खिलाड़ियों से मिलकर एक टीम बनाई जानी है। हम इसे कितने तरीकों से कर सकते हैं।

→ 3 टीमें संभव



Each team is a combination of 3 different objects

taken 2 at a time $\Rightarrow {}^3C_2$

प्रत्येक टीम 3 वस्तुओं का संचय है। एक समय में 2 वस्तुओं को लिया जाता है $\Rightarrow {}^3C_2$

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ If } r = n \text{ then } {}^nC_n = 1$$

$$\therefore \text{No. of teams} = {}^3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$${}^nC_0 = 1$$

- How many combination of 4 letter can be made of the letter of word "JAIPUR"

"JAIPUR" से 4 अक्षर लेकर कितने शब्द बनाये जा सकते हैं?

$$\text{Sol. } {}^6C_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

- A bag contain 3 one rupee coin, 4 five rupee coin, and 5 ten rupee coin.

How many selection of coins can be formed by taking at least one coin from the bag?

एक बैग में, एक रुपये, 5 रुपये और 10 रुपये के क्रमशः 3, 4, 5 सिक्के हैं। कम से कम एक सिक्का लेने के कितने तरीके होंगे?

$$\text{Sol. } (3+1)(4+1)(5+1) - 1 = 120 - 1 = 119$$

- In how many ways 20 identical mangoes may be divided among 4 persons if each persons is to be given at least one mango?

20 एक जैसे आमों को 4 व्यक्तियों में कितने तरीके से दिया जा सकता है यदि प्रत्येक व्यक्ति को कम से कम एक आम मिले?

$$\text{Sol. } 20 - 1_{C_{4-1}} = 19_{C_3} = 969$$

- In how many ways can a pack of 52 cards be divided in 4 set, three of them having 17 cards each and forth just one card?

52 ताश के पत्तों को 4 सेट को ऐसे कितने तरीकों से बांटा जा सकता है जिससे 3 सेट में प्रत्येक में 17 ताश तथा एक में केवल एक हो?

$$\text{Sol. } \frac{52!}{1!51!} \times \frac{51!}{(17!)^3 3!} = \frac{52!}{(17!)^3, 3!}$$

- There are 3 letters and 3 envelopes find the number of ways in which all letters are put in the wrong envelops?

3 पत्र तथा 3 लिफाफे हैं उनको कितने तरीकों से गलत रखा जा सकता है।

$$\text{Sol. } 3! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right] = 3 - 1 = 2$$

Relation between permutation and combination (क्रमचय और संचय के बीच संबंध)

$$\diamond {}^n P_r = {}^n C_r \times r!, \quad 0 < r \leq n$$

$$\diamond {}^n C_{n-r} = {}^n C_r \quad {}^n C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$= {}^n C_r$$

i.e selecting r objects out of n objects is same as rejecting (n-r) objects.

अर्थात् n वस्तुओं में से r वस्तुओं का चयन करना (n-r) वस्तुओं को अस्वीकार करने के समान है।

$$\diamond {}^n C_a = {}^n C_b \Rightarrow a = b \quad \& \quad n = a + b$$

$$\diamond {}^n C_r + {}^n C_{r-1} = {}^{n+1} C_r$$

Fundamental Principles of Counting

(गणना के मौलिक सिद्धांत)

- There are two Fundamental Principles of Counting
गणना के दो मूलभूत सिद्धांत हैं

1. Multiplication Principle / गुणन सिद्धांत

If first operation can be performed in m ways and then a second operation can be performed in n ways. Then, the two operations taken together can be performed in mn ways. This can be extended to any finite number of operations.

यदि पहला संक्रिया m तरीकों से किया जा सकता है और फिर दूसरा संक्रिया n तरीकों से किया जा सकता है। फिर, एक साथ ली गई दो संक्रियाओं को mn विधियों से निष्पादित किया जा सकता है। इसे किसी भी परिमित संख्या में संचालन तक बढ़ाया जा सकता है।

2. Addition Principle / जोड़ सिद्धांत

If an operation can be performed in m ways and another operation, which is independent of the first, can be performed in n ways. Then, either of the two operations can be performed in m + n ways. This can be extended to any finite number of mutually exclusive events.

यदि एक संक्रिया को m तरीकों से किया जा सकता है और दूसरी संक्रिया, जो पहले से स्वतंत्र है, n विधियों से की जा सकती है। फिर, दोनों में से कोई भी ऑपरेशन m + n तरीकों से किया जा सकता है। इसे परस्पर अनन्य घटनाओं की किसी भी परिमित संख्या तक बढ़ाया जा सकता है।

Factorial (क्रमगुणित)

- For any natural number n, we define factorial as किसी भी प्राकृतिक संख्या n के लिए, हम क्रमगुणित को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$n! \text{ or } |n| = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1.$$

The notation n! represent the product of first n natural numbers.

अंकन और n! पहले n प्राकृतिक संख्याओं के गुणन का प्रतिनिधित्व करते हैं।

Important Results Related to Factorial

क्रमगुणित से संबंधित महत्वपूर्ण परिणाम

- $0! = 1! = 1$
- Factorials of negative integers and fractions are not defined.

ऋणात्मक पूर्णांकों और भिन्नों के गुणनखंड परिभाषित नहीं हैं।

(iii) $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$

(iv) $\frac{n!}{r!} = n(n-1)(n-2)\dots(r+1)$

(v) $n!+1$, is not divisible by any natural number between 2 and $n!$.

$n!+1, 2$ और $n!$ के बीच किसी भी प्राकृतिक संख्या से विभाज्य नहीं है।

Exponent of a Prime p in $n! / n!$ में प्राइम p का एक्सपोनेंट

❖ If p is prime and p^r divides $n!$, then maximum exponent of prime p in $n!$ is given by

यदि p अभाज्य है और $p^r, n!$ को विभाजित करता है, तो $n!$ में अभाज्य p का अधिकतम घातांक =

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$



CHAMPION
PUBLICATION

Bilingual

Complete CLASSNOTES

Advance Maths

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams



Gagan Pratap Sir

CHAMPION
PUBLICATION

Complete CLASSNOTES

Arithmetic

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS and Other Competitive Exams

Gagan Pratap Sir

Chapter Wise SSC CGL Mains Mathematics

Useful For
CET, SSC, CGL, CPO, CHSL, CDS
and Other Competitive Exams

Previous Year Papers
2010 to 2021-22

2700
Question

Gagan Pratap Sir

CHAMPION PUBLICATION



Probability (प्रयिकता)



Some Basic Definitions (कुछ बुनियादी परिभाषाएँ)

- (i) **Trial:**→ Performing an experiment is called a trial. The number of times an experiment is repeated is called the number of trials.

परीक्षणः:→ किसी प्रयोग को करने को परीक्षण कहा जाता है। किसी प्रयोग को जितनी बार दोहराया जाता है उसे परीक्षणों की संख्या कहा जाता है।

(ii) **Sample Space:**→ The set of all possible outcomes of a random experiment is called the sample space of the experiment and it is denoted by S.

प्रतिदर्श समष्टि:→ एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों के सेट का प्रयोग को प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है और इसे S द्वारा निरूपित किया जाता है।

(iii) **Sample Point:**→ The outcome of an experiment is called the sample point, i.e. the elements of set S are called the sample points.

प्रतिदर्श बिन्दुः:→ किसी प्रयोग के परिणाम को प्रतिदर्श बिन्दु कहते हैं, अर्थात् समुच्चय S के अवयवों को प्रतिदर्श बिन्दु कहते हैं।

(iv) **Event:**→ A subset of the sample space associated with a random experiment is called event or case.

घटना:→ एक यादृच्छिक प्रयोग से जुड़े प्रतिदर्श समष्टि के एक उपसमुच्चय को घटना या मामला कहा जाता है।

(v) **Elementary:**→ (or Simple) **Event** An event containing only one sample point is called elementary event (or indecomposable event).

प्रारंभिक (या सरल) घटना:→ एक घटना जिसमें केवल एक प्रतिदर्श बिन्दु होता है, प्रारंभिक घटना (या अविघटनीय घटना) कहलाती है।

(vi) **Compound Event:**→ An event containing more than one sample points is called compound event (or decomposable event).

मिश्र घटना:→ एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दुओं वाली घटना को मिश्र घटना (या विघटनीय घटना) कहा जाता है।

(vii) **Occurrence of an Event:**→ An event associated to a random experiment is said to occur, if any one of the elementary events associated to it is an outcome.

किसी घटना का घटित होना:→ एक यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित घटना घटित होना कहा जाता है, यदि इससे संबंधित प्रारंभिक घटनाओं में से कोई एक परिणाम है।

(viii) **Certain Event:**→ An event which must occur, whatever be the outcomes, is called a certain event (or sure event).

निश्चित घटना:→ एक घटना जो घटित होनी चाहिए, परिणाम चाहे जो भी हो, एक निश्चित घटना (या निश्चित घटना) कहलाती है।

- (ix) **Impossible Event:** → An event which cannot occur in a random experiment, is called an impossible event.
असंभव घटना: → एक घटना जो एक यादृच्छिक प्रयोग में घटित नहीं हो सकती, एक असंभव घटना कहलाती है।

(x) **Favourable Outcomes:** → Let S be the sample space associated with a random experiment and $E \subset S$. Then, the elementary events belonging to E are known as the favourable outcomes to E .
अनुकूल परिणाम: → मान लीजिए S एक यादृच्छिक प्रयोग और $E \subset S$ से जुड़ा प्रतिदर्श समष्टि है। फिर, E से संबंधित प्राथमिक घटनाओं को E के अनुकूल परिणाम के रूप में जाना जाता है।

(xi) **Equally likely Outcomes:** → The outcomes of a random experiment are said to be equally likely, when each outcome is as likely to occur as the other.
समान रूप से संभावित परिणाम: → एक यादृच्छिक प्रयोग के परिणामों को समान रूप से संभावित कहा जाता है, जब प्रत्येक परिणाम दूसरे के समान हाने की संभावना होती है।

Trial (परीक्षण)

- ❖ Each trial is an action which results in one or several outcomes.
प्रत्येक परीक्षण एक क्रिया है जिसके परिणामस्वरूप एक या कई परिणाम प्राप्त होते हैं।

Ex. Each toss of a coin is a trial, each throw of a dice is a trial.

एक सिक्के का प्रत्येक टाँस एक ट्रायल है, पासे का प्रत्येक थो एक ट्रायल है।

- 2.** Let n be the total number of trials. The empirical Probability ($P(E)$) of an event E is given by→
 माना परीक्षणों की कुल संख्या n है। एक घटना E की अनुभवजन्य संभावना ($P(E)$) द्वारा दी गई है

$$P(E) = \frac{\text{No. of trials in which the event happened}}{\text{The total no. of trials}}$$

Note:-

- The probability of each event lies between 0 and 1.
प्रत्येक घटना की संभावना 0 और 1 के बीच होती है।
 - Sum of all the probabilities of an event is 1.
किसी घटना की सभी संभावनाओं का योग 1 है।

- | | | |
|-----------|---------|-----------------------|
| 3. | Trial | All possible outcomes |
| | परीक्षण | सभी संभावित परिणाम |

Toss of a coin

2 (Head & Tail)

एक सिक्के का उछाल

Dice is thrown

$\rightarrow 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

पासा फेंका जाता है।

- ❖ Suppose a coin is tossed at random. We can reasonably assume that each outcome head or tail is as likely to occur as the other.

मान लीजिए एक सिक्का यदृच्छिक रूप से उछाला जाता है। हम यथोचित रूप से मान सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम हेड या टेल के दूसरे के रूप में होने की संभावना है।

\therefore The outcomes head / tail are equally likely.

परिणाम चित्र/पट दोनों बराबर आ सकते हैं।

\therefore The probability of getting a head or tail is / हेड या

टेल आने की संभावना है = $\frac{1}{2}$

$$P(E) = \frac{\text{No. of outcomes favourable to an event}(E)}{\text{No. of all possible outcomes of the experiment}}$$

- Ex.** If a coin is tossed. 2 events will happen either head or tail.

एक सिक्के को उछाला जाता है। 2 घटनाएँ या तो हेड या टेल होंगी।

All possible outcomes = 2 (Head or tail)

सभी संभव परिणाम = 2 (चित्र या पट)

\therefore Probability of an event getting a head = $\frac{1}{2}$

किसी घटना के हेड आने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

Probability of an event getting a tail = $\frac{1}{2}$

किसी घटना के पट आने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

Complementary Events (पूरक घटनाएँ)

- ❖ Suppose we throw a dice / मान लीजिए हम एक पासा फेंकते हैं।

Let E \rightarrow event of getting a number greater than 4.

मान लीजिए E \rightarrow 4 से बड़ी संख्या प्राप्त करने की घटना है।

F \rightarrow event of getting a number less than 4 or equal to 4.

F \rightarrow 4 से कम या 4 के बराबर संख्या प्राप्त करने की घटना।

Getting a number not greater than 4 is same as getting a number less than or equal to 4 i.e P(not E) = P(F)

4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना 4 से कम या बराबर संख्या प्राप्त करने के समान है अर्थात् P(not E) = P(F)

$\therefore P(E) + P(F) = 1$

$$P(E) + P(\text{not } E) = 1$$

$$\Rightarrow P(E) + P(\bar{E})$$

\therefore for an event E,

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

(E) and (\bar{E}) are complementary events.

(E) और (\bar{E}) पूरक घटनाएँ हैं।

The maximum value of probability is 1.

प्रायिकता का अधिक मान 1 होता है।

- ❖ $0 \leq P(E) \leq 1$ Probability of an event lies between 0 and 1.

$$0 \leq P(E) \leq 1$$
 किसी घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच होती है।

- 6.** Probability of an event E + probability of the event not E = 1.

$$\text{किसी घटना } E \text{ की प्रायिकता} + E \text{ नहीं की प्रायिकता} = 1$$

- ❖ The probability of an event that can not happen is 0. Such an event is called impossible event.

किसी घटना के घटित न होने की प्रायिकता 0 होती है। ऐसी घटना को असंभव घटना कहते हैं।

- ❖ The probability of an event that is certain to happen is 1. Such an event is called sure event.

जिस घटना का घटित होना निश्चित है उसकी प्रायिकता 1 होती है। ऐसी घटना को निश्चित घटना कहते हैं।

- 3.** The probability that at least one of the events A and B occur is 0.7 and they occur simultaneously with probability 0.2 then $p(\bar{A}) + p(\bar{B}) =$

दो घटना A और B के होने के प्रायिकता 0.7 है तथा उनके एक साथ होने की प्रायिकता 0.2 है तब $p(\bar{A}) + p(\bar{B}) = ?$

Sol. We have $p(A \cup B) = 0.7$, and $p(A \cap B) = 0.2$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A) + p(B) = 0.7 + 0.2 = 0.9$$

$$1 - p(\bar{A}) + 1p(\bar{B}) = 0.9$$

$$p(\bar{A}) + p(\bar{B}) = 1.1$$

- 4.** A bag contains 5 red and 4 green balls four balls are drawn at random then find the probability that two balls are red and two balls are green.

एक बैग में 5 लाल और 4 हरी गेंद है उनमें से 4 गेंद यदृच्छा निकाली जाती है उनके 2 लाल गेंद तथा 2 हरी गेंद होने की प्रायिकता क्या है?

Sol. 4 गेंद को निकालने के कुल तरीके = 9C_4

$$5 \text{ लाल गेंद से } 2 \text{ लाल गेंद चुनने के तरीके} \Rightarrow {}^5C_2$$

$$4 \text{ हरी गेंद से } 2 \text{ हरी गेंद चुनने के तरीके} \Rightarrow {}^4C_2$$

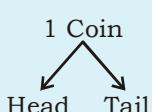
Total event that two ball are red and two are green
= ${}^5C_2 \cdot {}^4C_2$

$$p(A) = \frac{\frac{5C_2 \times 4C_2}{9C_4}}{2 \times 2} = \frac{5 \times 4 \times 4 \times 3}{2 \times 2 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{10}{21}$$

Concept of Coin

1. When one coin is tossed then $S = H, T \rightarrow 2^1$ outcomes = 2 outcomes
2. When two coins are tossed then $S = HH, TT, HT, TH \rightarrow 2^2$ outcomes = 4 outcomes
3. When three coins are tossed than $S = HHH, TTT, HTT, THT, TTH, THH, HTH, HHT \rightarrow 2^3$ outcomes=8
4. When four coins are tossed then $S = HHHH, TTTT, HTTT, THTT, TTHT, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HTHT, THTH, TTHH, HHTT, THHT, HTTH \rightarrow 2^4$ outcomes = 16 outcomes

(i) When single coin is tossed



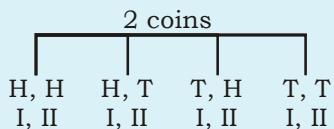
Only two possible events (Head, Tail)

Probability of getting Head Or Probability of getting tail

$$= \frac{1}{2} \rightarrow \text{Head / Tail}$$

$\frac{1}{2} \rightarrow \text{Total Events}$

(ii) When two coins are tossed. $\rightarrow 2^2 = 4$ outcomes



$2^2 = 4$ total outcomes

Probability of getting:

$$1. \text{ Two Heads} = (H, H) = \frac{1}{4}$$

$$2. \text{ Two Tails} = (T, T) = \frac{1}{4}$$

$$3. \text{ 1 Head} = (T, H) (H, T) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$4. \text{ At least 1 Head} = \text{इसका मतलब ज्यादा से ज्यादा 1 head हो, ना}$$

$$\text{हो तो भी चलेगा} = (H, T) (T, H) (T, T) = \frac{3}{4}$$

$$5. \text{ At least 1 Tail} = \text{इसका मतलब कम से कम 1 Tail हो, दो हो}$$

$$\text{तो भी चलेगा} = (T, T) (H, T) (T, H) = \frac{3}{4}$$

$$6. \text{ At most 1 Head} = \text{इसका मतलब ज्यादा से ज्यादा 1 head हो, ना}$$

$$\text{हो तो भी चलेगा} = (H, T) (T, H) (T, T) = \frac{3}{4}$$

$$7. \text{ At most 1 Tail} = p = \frac{3}{4}$$

(iii) When 3 coins are tossed $\rightarrow 2^3$ outcomes = 8 outcomes

3 coins
HHH, HHT, THH, HTT, THT, TTH, TTT

➤ If 3 coins are tossed simultaneously then find the probability of getting:

$$1. \text{ 3 Heads} = (H, H, H) = \frac{1}{8}$$

$$2. \text{ 3 Tail} = (T, T, T) = \frac{1}{8}$$

$$3. \text{ 2 Head} = (HHT, HTH, THH) = \frac{3}{8}$$

$$4. \text{ 2 Tail} = (HTT, THT, TTH) = \frac{3}{8}$$

5. At least 2 Heads = कम से कम दो heads हो, तीन होंगे तो भी चलेगा

$$= (HHH, HHT, HTH, THH) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

6. At least 2 tail = कम से कम दो tail हो, तीन होंगे तो भी चलेगा

$$= (TTT, TTH, THT, HTT) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

7. At most two heads = मतलब ज्यादा से ज्यादा दो heads हो, एक हो या ना हो तो भी चलेगा

$$= (HHT, HTH, THH, HHT, THT, TTH, TTT) = \frac{7}{8}$$

8. At most two tails = मतलब ज्यादा से ज्यादा दो tail हो, एक हो या ना हो तो भी चलेगा

$$= (HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH) = \frac{7}{8}$$

9. At least 1 head = कम से कम एक head हो ज्यादा कितने भी

$$= \text{एक केस छोड़कर (TTT) बाकी सभी में 1 head तो होगा।} = \frac{7}{8}$$

$$10. \text{ At least 1 Tail} = \frac{7}{8}$$

11. At most 1 Head = ज्यादा से ज्यादा 1 Head हो, ना हो तो भी चलेगा।

$$(HTT, THT, TTH, TTT) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$12. \text{ At most 1 tail} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- 13.** At least one head and one tail
(HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH)

$$= 1 \text{ head और } 1 \text{ tail भी हैं} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

- 14.** No tails = (HHH) = $\frac{1}{8}$

- 15.** No heads = (TTT) = $\frac{1}{8}$

Concept of Dice

- 1.** When a die is thrown once then $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
 $n(S) = 6$

- 2.** When two dice are thrown together or A die is thrown twice then

$$\begin{aligned} S = & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ & (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{aligned}$$

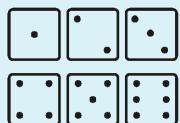
$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

- 3.** When 3 dice are thrown or a die is thrown thrice then

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

$n(S) \rightarrow$ no. of outcomes in sample space

Dice: Number are written on each face 1, 2, 3, 4, 5, 6



$$1 \text{ Dice} = \downarrow \quad \begin{matrix} 6^1 \text{ outcomes} \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{matrix}$$

Total number of outcomes = 6

1 dice total events = 1, 2, 3, 4, 5, 6

Probability of getting

$$1. \text{ Even no.} = (2, 4, 6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$2. \text{ Odd no.} = (1, 3, 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$3. \text{ Prime no.} = (2, 3, 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$4. \text{ No. multiple 3} = (3, 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$5. \text{ No. More than 3} = (4, 5, 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$6. \text{ No. Less than 3} = (1, 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$7. \text{ No. Less than 4} = 1, 2, 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$8. \text{ No. Less than 5} = (1, 2, 3, 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$9. \text{ No. More than 4} = (5, 6) = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

When two dice are thrown simultaneously

Two dice = $6^2 = 36$ total outcomes

$$\begin{aligned} & (1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) \\ & (2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6) \\ & (3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6) \\ & (4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6) \\ & (5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6) \\ & (6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6) \end{aligned}$$

When two dice are thrown simultaneously find the probability of getting.

$$1. \text{ 3 as the sum} = (1, 2) (2, 1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

2. Same no. on both dice (a doublet)

$$= (1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3. The sum as a prime number = (2, 3, 5, 7, 11)

$$\begin{aligned} & = (1, 1) (1, 2) (2, 1) (2, 3) (3, 2) (1, 4) (4, 1) (3, 4) (4, 3) \\ & (2, 5) (5, 2) (1, 6) (6, 1) (5, 6) (6, 5) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

4. A total of at least 10 = (10, 11, 12) कम से कम 10 का मतलब 11 और 12 भी हो सकता है।

$$(6, 4) (4, 6) (5, 5) (6, 5) (5, 6) (6, 6)$$

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

5. Doublet of even number = (2, 2) (4, 4) (6, 6)

$$p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

1. Two dice are thrown at a time. Find the probability of the followings-

दो पासे एक साथ उछाले जाते हैं, नीचे दिये गई घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें-

1. Number shown are equal.

उनके ऊपर एक समान संख्या आयेगी।

2. The difference of number shown is 1.

उनके ऊपर आने वाली संख्या का अंतर 1 होगा।

Sol. Total number of event = $6 \times 6 = 36$

$$E_1 = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 6) (6, 6)\}$$

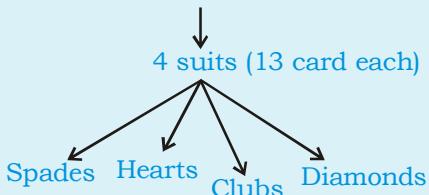
$$I \rightarrow n(E_1) = 6, p(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(s)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$II \rightarrow E_2 = (1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$$

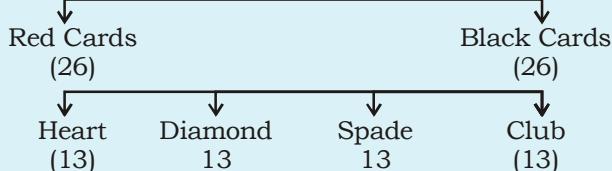
$$n(E_2) = 10, p(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Concept of Cards

Cards



Playing cards $n(s) = 52$



Each suit contains 1 ace, 1 king, 1 queen, 1 jack and nine number cards 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Face Card 12 4 king, 4 Queen and 4 Jack Non face card 40
36 number cards + 4 aces



Spades Hearts Diamonds Clubs

Spade (Black color card)	हृकुम
Heart (Red color card)	पान
Club (Black color card)	चिंडी
Diamond (Red color card)	ईंट
Jack	गुलाम
Queen	बेगम
King	बादशाह
Ace	ईंका

Important Figures in Cards/कार्ड में कुछ महत्वपूर्ण आंकड़े

- Total cards = 52
- Red cards = Black cards = 26 each

- Heart cards (पान) = Diamond cards (ईंट) = Spade cards (हृकुम) = Club cards (चिंडी) = 13 each
- Total king = Total queen = Total Jack = Total Ace = 4 each
- Red king = Red queen = Red Jack = Red Ace = 2 each
- Black king = Black queen = Black Jack = Black Ace = 2 each
- Some pattern for all card (2 to 10) (Number cards)
Total cards = 36
Red card = 18
Black card = 18
- King of spade/heart/diamond/Club = 1
- Queen of spade/heart/diamond/Club = 1
- Jack of spade/heart/diamond/Club = 1
- Ace of spade/heart/diamond/Club = 1
- 2 of spade/heart/diamond/Club = 1
- 3 of spade/heart/diamond/Club = 1
-
-
-
-
- 10 of spade/heart/diamond/Club = 1
- Face card/pictures card \Rightarrow Jack(4)/King(4)/Queen(4) = 12 cards
- Red face card \Rightarrow 2(Jack) + 2(King) + 2(Queen) = 6
- Black face card \Rightarrow 2(Jack) + 2(King) + 2(Queen) = 6
- Face card of spade \Rightarrow 1(Jack) + 1(King) + 1(Queen) = 3
- Face card of heart \Rightarrow 1(Jack) + 1(King) + 1(Queen) = 3
- Face card of diamond \Rightarrow 1(Jack)+1(King)+1(Queen) = 3

Find the probability of getting

प्राप्त करने के प्रायिकता ज्ञात कीजिए

- Black card/Red card = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
- Card of spade/Card of heart/Card of diamond/Card of club = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- Card of king/Card of queen/Card of jack/ Card of Ace = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
- Black king/Black queen/Black jack/Black Ace = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$
- Red king/Red queen/Red jack/Red Ace = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

- Face card = $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$
 - Red face card/Black face card = $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$
 - King of spade/King of heart/King of diamond/King of club = $\frac{1}{52}$
 - Queen of spade/Queen of heart/Queen of diamond/Queen of club = $\frac{1}{52}$
 - Not a black card = मतलब Red card आना चाहिये = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
 - Not a red card = मतलब Black card आना चाहिये = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
 - Not a spade card (Spade card = 13) \Rightarrow Remaining card = 39 \Rightarrow probability = $\frac{39}{52} = \frac{3}{4}$
 - Not a heart card/Not a club card = $\frac{3}{4}$
 - Not a king (king = 4), total card = 52, Remaining card = $52 - 4 = 48$, $\Rightarrow \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$
 - Not a ace/Not a jack = $\frac{12}{13}$
 - Not a red king/Not a red queen/Not a red jack/Not a red ace = $\frac{50}{52} = \frac{25}{26}$ or $\Rightarrow 1 - \frac{2}{52} = \frac{25}{26}$
 - Not a face card = $\frac{40}{52} = \frac{10}{13}$
 - Not a red face card/Not a black face card = $\frac{46}{52} = \frac{23}{26}$ or $= 1 - \frac{6}{52} = 1 - \frac{3}{26} = \frac{23}{26}$
 - 5 of heart Or diamond = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$
 - Jack or queen = $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$
 - Jack and queen/Ace and king = 0
 - Note:-** One card is shown at a time hence probability of getting 2 cards is zero.
 - A queen or a jack = $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$
 - A card with number less than 8 = 2(4 cards) + 3 (4 cards) + 4(4 cards) + 5(4 cards) + 6(4 cards) + 7(4 cards) = $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$
 - A card with number between 2 and 9 = 3 (4 cards) + 4(4 cards) + 5(4 cards) + 6(4 cards) + 7(4 cards) + 8(4 cards) = $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$
 - Either a black card or a king. = $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$
 - Black and a king = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$
 - A jack, queen or a king = $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$
 - Neither a heart nor a king = (heart + king)'s card = $13 + 3 = 16$
 $\Rightarrow = 1 - \frac{16}{52} = \frac{9}{13}$
 - Spade or an Ace = (heart + king)'s card = $13 + 3 = 16 \Rightarrow \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$
 - Neither an ace nor a king = $52 - 8 = 44 \Rightarrow \frac{44}{52} = \frac{11}{13}$
 - Neither a red card nor a queen = $26 + 2 = 1 - \frac{28}{52} = \frac{6}{13}$
 - 2. Three cards are drawn from a pack of 52 cards. What is the chance that all will be queen.
52 ताश के पत्तों में से 3 ताश निकाले जाते हैं तीनों के रानी होने की प्रायिकता क्या है।
- Sol.** No. of ways = ${}^{52}C_3$
 $n(A) = {}^4C_3 \Rightarrow$ Event of drawing 3 queens
 $p(E) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{{}^4C_3}{{}^{52}C_3} = \frac{\frac{4}{52.51.50}}{3 \times 2} \Rightarrow \frac{1}{5525}$



Statistics (सांख्यिकी)



Statistics

The study of data gathering, analysis, interpretation, presentation, and organisation is known as statistics. Alternatively put. The field of mathematics is used to gather and summarise data. Additionally, statistics is a subfield of applied mathematics.

सांख्यिकी: डेटा एकत्रीकरण, विश्लेषण, व्याख्या, प्रस्तुति और संगठन के अध्ययन को सांख्यिकी के रूप में जाना जाता है। वैकल्पिक रूप से रखें. गणित के क्षेत्र का उपयोग डेटा इकट्ठा करने और सारांशित करने के लिए किया जाता है। इसके अतिरिक्त, सांख्यिकी व्यावहारिक गणित का एक उपक्षेत्र है।

➤ **Class frequency:** The number of times an item repeats itself corresponding to a range of value (or class interval) is called class frequency.

आवृत्ति: मान की एक सीमा (या वर्ग अंतराल) के अनुरूप कोई वस्तु जितनी बार खुद को दोहराती है, उसे वर्ग आवृत्ति कहा जाता है।

➤ **Class:** A range of values which incorporate a set of items is called a class. for eg. 5–10, 10–15...

वर्ग: मूल्यों की एक श्रेणी जिसमें वस्तुओं का एक समूह शामिल होता है, एक वर्ग कहलाता है। उदाहरण के लिए 5–10, 10–15...

➤ **Class limits:** The extreme values of a class are limits. Every class interval has two limits, lower limit and upper limit. Of the class interval 5–10 in the above example the lower limit is 5 and the up-per limit is 10.

वर्ग सीमाएँ: एक वर्ग के चरम मान सीमित हैं। प्रत्येक वर्ग अंतराल की दो सीमाएँ होती हैं, निचली सीमा और ऊपरी सीमा। उपरोक्त उदाहरण में वर्ग अंतराल 5–10 की निम्न सीमा 5 है और उच्च सीमा 10 है।

➤ **Magnitude of a class interval:** Magnitude of a class interval is the difference between the upper limit and the lower limit of a class. For example in a class interval 10–15, the magnitude of the class interval would be $15 - 10 = 5$. Thus,

एक वर्ग अंतराल का परिमाण: एक वर्ग पूर्णक का परिमाण एक वर्ग की ऊपरी परास और निचली परास के बीच का अंतर है। उदाहरण के लिए एक वर्ग अंतराल 10 – 15 में, वर्ग अंतराल का परिमाण $15 - 10 = 5$ होगा। इस प्रकार,

Formula/सूत्र

$$h = L_2 - L_1$$

where,/जहां,

➤ h = magnitude of a class interval/ h = एक वर्ग अंतराल का परिमाण

➤ L_2 = upper limit of the class interval/ L_2 = वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा

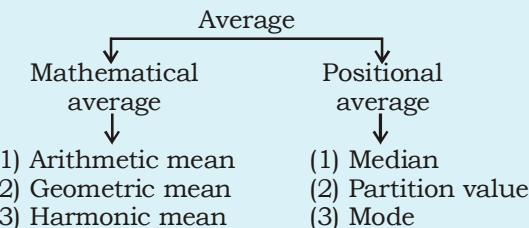
➤ L_1 = lower limit of the class interval/ L_1 = वर्ग अंतराल की निचली सीमा

Mid value:

$$\text{Mid value} = \frac{\text{Upper limit} + \text{lower limit}}{2}$$

$$m = \frac{L_2 + L_1}{2}$$

➤ **Types of statistical average:** Average are broadly classified into two categories:/सांख्यिकीय औसत के प्रकार: औसत को मोटे तौर पर दो श्रेणियों में वर्गीकृत किया गया है:



➤ **Arithmetic mean:** Arithmetic mean is a simple average of all items in a series. The arithmetic mean of a series is simply called 'Mean'

अंकगणितीय माध्य: अंकगणितीय माध्य एक शृंखला में सभी पदों का एक साधारण औसत है। किसी शृंखला के अंकगणितीय माध्य को 'माध्य' कहा जाता है।

Formula/सूत्र

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{N} = \frac{\sum X}{N}$$

Arithmetic mean is of two types:/अंकगणितीय माध्य दो प्रकार के होते हैं:

➤ **Simple Arithmetic mean:** In it, all items of a series are given equal importance/सरल अंकगणितीय माध्य: इसमें किसी श्रेणी की सभी पदों को उनके सापेक्ष महत्व के अनुसार अलग-अलग भार दिए जाते हैं।

➤ **Weighted arithmetic mean:** In it different items of a series are accorded different weights in accordance with their relative importance.

भारित अंकगणितीय माध्य: इसमें एक शृंखला की विभिन्न वस्तुओं को उनके सापेक्ष महत्व के अनुसार अलग-अलग भार दिए जाते हैं।

Property of simple arithmetic Mean

साधारण अंकगणितीय माध्य/माध्य का गुण:

➤ **Property 1→** If \bar{x} is the mean of n numbers of observations $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$, then the sum

of deviations of \bar{x} from the observation $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$, is zero i.e. $\sum(\bar{x} - x)$

यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ की संख्याओं का माध्य \bar{x} है, तो प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ से विचलनों का योग है। शून्य है अर्थात् $\sum(\bar{x} - x) = 0$

Property 2 → If \bar{x} is the mean of 'n' numbers of observation $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, then the mean of observation $x_1 + a, x_2 + a, x_3 + a, \dots, x_n + a$, is $\bar{x} + a$. / यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ की संख्या का माध्य \bar{x} है, तो प्रेक्षणों का माध्य $x_1 + a, x_2 + a, x_3 + a, \dots, x_n + a$, is $\bar{x} + a$ है।

i.e. if each observation under consideration is increased by quantity a, then their mean is also increased by the same quantity a. / अर्थात् यदि विचारधीन प्रत्येक प्रेक्षण को मात्रा a से बढ़ाया जाता है, तो उनका माध्य भी उसी मात्रा a से बढ़ जाता है।

Property 3 → If \bar{x} is the mean of n number of observations $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, then the mean of observation $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \dots, x_n - a$, is $\bar{x} - a$.

यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, की \bar{x} संख्याओं का माध्य है, तो प्रेक्षणों $x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, \dots, x_n - a$, का माध्य $\bar{x} - a$ है।

Property 4 → If \bar{x} is the mean of n number of observations $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, then mean of $ax_1, ax_2, ax_3, \dots, ax_n$ is a \bar{x} .

यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, की \bar{x} संख्या का माध्य है, तो $ax_1, ax_2, ax_3, \dots, ax_n$ का a \bar{x} माध्य है।

i.e. if each observation under consideration is multiplied by quantity a, then mean is multiplied by quantity a, then mean is also multiplied by the same quantity a.

यानी यदि विचारधीन प्रत्येक अवलोकन को मात्रा a से गुणा किया जाता है, तो माध्य को भी उसी मात्रा a से गुणा किया जाता है।

Property 5 → If \bar{x} is the mean of n number of observations $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, then mean of $\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \frac{x_3}{a}, \dots, \frac{x_n}{a}$ is $\frac{\bar{x}}{a}$

i.e. if each observation under consideration is divided by quantity a, the mean is also divided by the same quantity a.

यदि \bar{x} प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, का माध्य है, तो $\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \frac{x_3}{a}, \dots, \frac{x_n}{a}$ का माध्य $\frac{\bar{x}}{a}$ है यानी यदि विचारधीन प्रत्येक अवलोकन को a से विभाजित किया जाता है, तो माध्य को भी उसी a से विभाजित किया जाता है।

➤ Methods of calculating simple arithmetic mean for ungrouped and grouped data.

अवर्गीकृत और समूहीकृत डेटा के लिए सरल अंकगणितीय माध्य की गणना करने की विधियाँ।

➤ Calculation of simple arithmetic mean in case of ungrouped data (individual series): In the case of ungrouped data (individual series) arithmetic mean may be calculated by three methods:

गैर-समूहीकृत डेटा (व्यक्तिगत शृंखला) के मामले में सरल अंकगणितीय माध्य की गणना: गैर-समूहीकृत डेटा (व्यक्तिगत शृंखला) के मामले में अंकगणितीय माध्य की गणना तीन विधियों द्वारा की जा सकती है:

(a) Direct method./प्रत्यक्ष विधि।

(b) Assumed mean method./कल्पित माध्य विधि।

(c) Step-deviation method./चरण विचलन विधि।

$$\text{Arithmetic mean} = \frac{\text{Sum of all observations}}{\text{Total no. of observations}}$$

Mean (माध्य)

❖ Mean is the average of all the numbers in the given data. Or

The arithmetic mean is found by adding the number & and dividing the sum of the total number of observations in the list.

माध्य दिए गए डेटा में सभी संख्याओं का औसत है। या अंकगणितीय माध्य, संख्या को जोड़कर और सूची में प्रेक्षणों की कुल संख्या के योग को विभाजित करके प्राप्त किया जाता है।

$$\text{Mean of observations} = \frac{\text{Sum of observations}}{\text{Total no. of observations}}$$

$$\text{प्रेक्षणों का माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

Ex. Data / उदाहरण : 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15

Sum = 80

Total observations = 10

$$\therefore \text{Mean} = \frac{80}{10} = 8$$

Formula/सूत्र:

Hence, \bar{X}_w indicates weighted average

यहाँ, \bar{X}_w भारित औसत इंगित करता है।

Example/उदाहरण

➤ Calculate weighted mean of the following data:
निम्नलिखित डेटा के भारित माध्य की गणना करें:

Marks (x)	80	75	70	65	60	55
Weight (W)	2	3	4	5	6	7

Sol.

➤ Calculation of Weighted Mean/भारित माध्य की गणना

Marks (X)	Weight (W)	WX
80	2	160
75	3	225
70	4	280
65	5	325
60	6	360
55	7	385
	$\Sigma W = 27$	$\Sigma WX = 1735$

Weighted Mean / भारित माध्य,

$$\bar{X}_w = \frac{\sum WX}{\sum W} = \frac{1735}{27} = 64.25$$

1. In the given table, there are daily wages of 50 worker in company find the arithmetic mean?

दी गई सारिणी में, एक कंपनी 50 कर्मचारियों का दैनिक वेतन दिया गया है। समांतर माध्य ज्ञात करो।

Sol. Arithmetic mean = $\bar{x} = \frac{\sum Fx}{n}$

Daily wage दैनिक वेतन (f)	No. of worker कर्मचारी संख्या (x)	Fx
50	5	250
60	10	600
65	12	780
72	13	936
75	6	450
78	4	312
	n = 50	$\Sigma fx = 3328$

$$\begin{aligned} & 50 \times 5 + 60 \times 10 + 65 \times 12 + 72 \times 13 \\ \Rightarrow & \frac{50 + 60 + 65 + 72}{50} \times 13 + 75 \times 6 + 78 \times 4 \\ \Rightarrow & \frac{3328}{50} = \text{₹66.56} \end{aligned}$$

2. Find the arithmetic mean weight of 100 students of a class of given data.

दिये गये आंकड़ों से एक कक्षा के 100 विद्यार्थियों के वजन का समांतर माध्य ज्ञात करो।

Weight (वजन)	No. of Student (विद्यार्थी संख्या)
38-42	6
42-46	24
46-50	34
50-54	22
54-58	11
58-62	3

Weight (वजन)	No. of Student (विद्यार्थी संख्या)	Mean weight X_i	Fi X_i
38-42	6	40	240
42-46	24	44	1056
46-50	34	48	1632
50-54	22	52	1144
54-58	11	56	616
58-62	3	60	180
	$n=100$		$\Sigma FiXi=4868$

$$\text{Arithmetic mean} = \frac{\sum f_i X_i}{n} = \frac{4868}{100} = 48.68$$

Median (माध्यिका)

❖ Median is the middle no., when data is arranged in ascending order. Or

Median is the middle value in a list ordered from smallest to largest.

माध्यिका मध्य संख्या है, जब आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। या

माध्यिका सबसे छोटी से सबसे बड़ी क्रमित सूची में मध्य मान है।

❖ If number of observations is even

यदि प्रेक्षणों की संख्या सम है

$$\text{Median} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{th term} + \left[\left(\frac{n}{2}\right)+1\right]\text{th term}}{2}$$

❖ If number of observations is odd.

यदि प्रेक्षणों की संख्या विषम है।

$$\text{Median} = \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{th term.}$$

Ex.1 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 13, 15

$$\text{Median} = \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$$

Ex.2 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 13, 15, 16

$$\text{Median} = \frac{n+1}{2} = \frac{11+1}{2} \text{ th term} \Rightarrow 6\text{th term} \Rightarrow 9$$

❖ **Median formula for grouped data**

समूहीकृत डेटा के लिए माध्यिका सूत्र

$$Li + \frac{\frac{N}{2} - C}{F} \times i$$

Where

$n \rightarrow$ Total frequency / कुल आवृत्ति

$C \rightarrow$ Cumulative frequency of class before the median class.

माध्यिका वर्ग से पहले वर्ग की संघर्षी बारंबारता।

F → Frequency of the class median.

वर्ग माध्यिका की आवृत्ति।

i → Class width. / वर्ग की चौड़ई।

L_i → Lower boundary of the class median.

वर्ग माध्यिका की निचली सीमा।

1. Find the median of given data

दिये गये आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात करें।

Income	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
F	8	15	21	13	7

Sol.

Income	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120
F	8	15	21	13	7
CF	8	23	44	57	64

$$N = 64$$

$$\frac{N}{2} = 32$$

$$\text{Median (माध्यिका)} = L_i + \frac{\frac{N}{2} - C}{F} \times i = 90 + \frac{32 - 23}{21} \times 10 \\ = 90 + \frac{9 \times 10}{21} = 90 + 4.29 = ₹94.29$$

Mode (बहुलक)

❖ **Mode** → The value of the variable which occurs most frequency in a distribution is called mode."

बहुलक → चर का वह मान जो किसी बंटन में सबसे अधिक बारबारता में आता है, बहुलक कहलाता है।

OR Mode is the most frequently occurring value in the list. / या बहुलक सूची में सबसे अधिक बार आने वाला मान है।

Ex. 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15

9 is occurring 3 times / 9, 3 बार आ रहा है

$$\therefore \text{Mode} = 9$$

➤ **Calculation of mode for ungroup data** → Just by inspection we can check which value occurs most time that will be the mode.

असमूहीकृत डेटा के लिए बहुलक की गणना → निरीक्षण द्वारा हम जांच सकते हैं कि कौन-सा मूल्य सबसे अधिक बार होता है जो कि बहुलक होगा।

➤ **Calculation of mode for group data** → We will use the following formula for calculating the mode.

समूह डेटा के लिए बहुलक की गणना → हम बहुलक की गणना के लिए निम्न सूत्र का उपयोग करेंगे।

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

Z = value of the mode. / बहुलक का मान।

➤ l_1 = lower limit of the modal class.

मोडल क्लास की निचली सीमा।

➤ f_1 = The frequency of the modal class.

मॉडल वर्ग की आवृत्ति।

➤ f_0 = The frequency of pre-modal class.

पूर्व-मोडल वर्ग की आवृत्ति।

➤ f_2 = Frequency of the next higher class or post modal class

अगले उच्च वर्ग या उत्तर-मोडल वर्ग की आवृत्ति।

i = Size of the modal group. / मॉडल समूह का आकार।

Ex. The height of 50 students are recorded. Find the mode.

Height (cm)	125-130	130-135	135-140	140-145	145-150
No. of students	7	14	10	10	9

Sol. Here, maximum frequency is 14 and the corresponding class is 130–135.

So 130–135 is the modal class.

$$\therefore l_1 = 130$$

$$f_1 = 14$$

$$f_0 = 7$$

$$f_2 = 10$$

$$i = 5$$

$$\therefore \text{Mode} = 130 + \frac{14 - 7}{28 - 7 - 10} \times 5$$

$$= 130 + \frac{7}{11} \times 5$$

$$= 130 + 3.18 = 133.18$$

∴ Hence the modal height = 133.18 cm

Ex. Find the mode of the given data

दिये गये आंकड़ों का बहुलक ज्ञात करें।

Size	10-15	30-50	50-70	70-90	90-110
F	15	22	30	20	13

Sol. यहां सबसे ज्यादा frequency 50-70 की है।

अतः Mode group (50-70) होगा।

$$Li = 50, i = 70 - 50 = 20, F_1 = 30, F_0 = 22, F_2 = 20$$

$$\text{Mode} = 50 + \frac{30 - 22}{2 \times 30 - 22 - 20} \times 20$$

$$= 50 + \frac{8 \times 20}{18} = 50 + 8.89 = 58.89$$

Range (परास)

- Range is the difference between the largest number and smallest number of data.

परास डेटा की सबसे बड़ी संख्या और सबसे छोटी संख्या के बीच का अंतर है।

$$\text{Range} = \text{maximum value} - \text{minimum value}$$

$$\text{परास} = \text{अधिकतम मान} - \text{न्यूनतम मान}$$

Ex. 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15

$$\text{Range} \Rightarrow 15 - 3 = 12$$

$$R = H - L$$

$$R = \text{Range}$$

- H = Highest value in the series/

H = शृंखला में उच्चतम मूल्य

- L = Lowest value in the series.

L = शृंखला में सबसे कम मूल्य

Example/उदाहरण

- Find the range for the data/परास ज्ञात कीजिए।
10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130.

$$\text{Range} = H - L = 130 - 10 = 120.$$

Coefficient of range/परास का गुणांक

$$\text{Coefficient of range/परास का गुणांक (CR)} = \frac{H-L}{H+L}$$

Example/उदाहरण

- Find the coefficient of range for the data

परास का गुणांक ज्ञात कीजिए।

$$\frac{H-L}{H+L} = \frac{130-10}{130+10} = \frac{120}{140} = 0.857$$

- Range and coefficient of range for ungrouped data.

अवर्गीकृत डेटा/व्यक्तिगत शृंखला के लिए परास और परास का गुणांक:

Example/उदाहरण

- For the following data find the range and coefficient of range?

निम्नलिखित डेटा के लिए परास और परास का गुणांक ज्ञात करें?

$$20, 40, 60, 90, 110, 140, 150, 180$$

$$R = H - L = 180 - 20 = 160$$

$$\text{CR} = \frac{H-L}{H+L} = \frac{180-20}{180+20} = \frac{160}{200} = 0.80$$

- Range and coefficient of range for grouped data.

समूहीकृत डेटा के लिए परास और परास का गुणांक।

- Discrete series**→ Range of the discrete series is determined as the difference between the highest value and the lowest value of the series. Frequency of the series is not taken into account

असतत शृंखला→ असतत शृंखला की परास उच्चतम मूल्य और शृंखला

के निम्नतम मूल्य के बीच के अंतर के रूप में निर्धारित की जाती है।

शृंखला की आवृत्ति को ध्यान में नहीं रखा जाता है।

Example/उदाहरण

- Calculate range and coefficient of range of the following data.

निम्नलिखित डेटा का परास और परास के गुणांक की गणना करें।

Size	10	15	20	25	30	35
Frequency	1	8	12	17	5	29

From the above table/उपरोक्त तालिका से

$$H = 35, L = 10$$

$$\text{Range/परास} = H - L = 35 - 10 = 25$$

$$\text{Coefficient of Range/परास का गुणांक} = \frac{H-L}{H+L}$$

$$\frac{35-10}{35+10} = \frac{25}{45} = 0.56$$

- Continuous series**→ In case of frequency distribution series, we have to find the difference between lower limit of the first interval and upper limit of the last interval in the series. Difference between these values would be the range of the series.

सतत शृंखला→ आवृत्ति वितरण शृंखला के मापले में, हमने पाया है। शृंखला में पहले अंतराल की निचली परास और अंतिम अंतराल की ऊपरी परास के बीच का अंतर इन मूल्यों के बीच अंतर शृंखला की परास होगी।

- Range**→ upper limit of the last class interval - Lower limit of the first class interval.

परिसर = अंतिम वर्ग अंतराल की ऊपरी परास-प्रथम वर्ग अंतराल की निचली सीमा।

Example/उदाहरण

- For the following table find the coefficient of range.

निम्न तालिका के लिए परास का गुणांक ज्ञात कीजिए।

Size	Frequency
10-20	3
20-30	5
30-40	7
40-50	12
50-60	17
60-70	2

From the above table/उपरोक्त तालिका से

$$L = 10, H = 70$$

$$\text{Coefficient of range/रंग का गुणांक} = \frac{H-L}{H+L}$$

$$= \frac{70-10}{70+10} = \frac{60}{80} = 75$$

Emperical relation

$$\text{Mode} = 3(\text{Median}) - 2(\text{Mean})$$

- If the difference between the mode and median is 2, then find the difference between the median and mean using emperical relation?

यदि बहुलक और माध्यिका के बीच का अंतर 2 है, तो अनुभवज्य संबंध का उपयोग करके माध्यिका और माध्य के बीच का अंतर ज्ञात करें?

Sol. Mode – Median = 2 (Given)

$$\text{Mode} = 2 + \text{Median} \dots(1)$$

We know,

$$\text{Mode} = 3 \text{ Median} - 2 \text{ Mean} \text{ from eqn}(1)$$

$$2 + \text{Median} = 3 \text{ Median} - 2 \text{ Mean}$$

$$2 + 2 \text{ Mean} = 2 \text{ Median}$$

$$\text{Median} - \text{Mean} = 1$$

Mean Deviation (औसत विचलन)

- The average deviation from the mean value of the given data set. / दिए गए डेटा सेट के माध्य मान से औसत विचलन।

Ex. $3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15$ mean = 8
 $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$

Deviation → 5 4 3 3 0 1 1 1 5 7 sum = 30
 from mean

$$\therefore \text{Mean deviation} = \frac{30}{10} = 3 / \text{औसत ज्ञाकाव}$$

Variance (विचरण, प्रसरण)

- Variance is the expected value of the squared variation of a random variable from its mean value.

OR Variance is the measure of how data points differ from the mean.

विचरण किसी अनियमित चर के वर्गाकार विचरण का उसके माध्य मान से अपेक्षित मान है। या विचरण इस बात का माप है कि डेटा बिंदु माध्य से कैसे भिन्न होते हैं।

Ex. $3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15$ mean = 8
 $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$

Deviation → 5 4 3 3 0 1 1 1 5 7
 from $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$
 mean 25 16 9 9 0 1 1 1 25 49 sum 136

$$\text{variance} = \frac{136}{10} = 13.6$$

$$\text{Variance} = \sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$$

(\bar{x} = Arithmetic mean)

Standard Deviation (मानक विचलन)

- The Standard Deviation is a measure of how spread out numbers are.

मानक विचलन इस बात का माप है कि संख्याएँ कितनी फैली हुई हैं।

- Standard deviation / मानक विचलन =

$$\sqrt{\text{variance}/\text{प्रसरण}} = \sqrt{13.6}$$

- Coefficient of variation (चिरण का गुणांक)

$$\left(\frac{\text{Standard deviation}}{\text{mean}} \right) \times 100$$

Ex. The mean of a data is 7.5 and its coefficient of variation is 48. Find the standard deviation?

एक डेटा का माध्य 7.5 है और इसका भिन्नता गुणांक 48 है। मानक विचलन ज्ञात करें?

$$\text{Sol. } 48 = \frac{\text{Standard deviation}}{7.5} \times 100$$

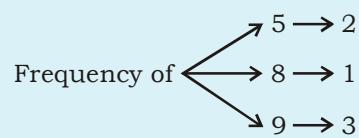
$$\text{Standard deviation} = 3.6$$

Frequency (आवृत्ति)

- The frequency (f) of a particular value is the number of times the value occurs in the data.

किसी विशेष मान की आवृत्ति (f) डेटा में मान के बार-बार होने की संख्या है।

Ex. 3, 4, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 13, 15



$$\text{Class mark} = \frac{\text{upper limit} + \text{lower limit}}{2}$$

$$\text{वर्ग चिह्न} = \frac{\text{उच्च सीमा} + \text{निम्न सीमा}}{2}$$

Frequency Distribution (आवृत्ति वितरण)

- It is a representation either in a graphical or tabular format that displays the number of observations within a given interval.

यह एक दिए गए अंतराल के भीतर टिप्पणियों का, एक चित्रमय या सारणीबद्ध प्रारूप में एक प्रतिनिधित्व है जो संख्या प्रदर्शित करता है।

Ex. The height of 50 students measured as :

50 छात्रों की ऊँचाई इस प्रकार मापी गई:

161, 150, 154, 165, 168, 161, 154, 162, 150, 151, 162, 164, 171, 165, 158, 154, 156, 172, 160, 170, 153, 159, 161, 170, 162, 165, 166, 168, 165, 164, 154, 152, 153, 156, 158, 162, 160, 161, 173, 166, 161, 159, 162, 167, 168, 159, 158, 153, 154, 159.

Frequency distribution from this data

इस डेटा से आवृत्ति वितरण

Class Interval	Frequency
कक्षा अन्तराल	आवृत्ति
150-155	12
155-160	9
160-165	14
165-170	10
170-175	5
Total	50

Frequency Polygon (आवृत्ति बहुभुज)

- A line graph of class frequency plotted against class midpoint. It can be obtained by joining the midpoints of the tops of the rectangles in the histogram.

वर्ग आवृत्ति का एक अकेला ग्राफ वर्ग मध्य बिंदु के विरुद्ध प्लॉट किया गया। यह हिस्टोग्राम में आयतों के शीर्ष के मध्य बिंदुओं को जोड़कर प्राप्त किया जा सकता है।



CAREERWILL APP

Easy to Learn....

TOP 100 SSC CGL 2022 TOPPERS

SELECTION मतलब CAREERWILL

#CAREERWILL_STARS



MOHIT CHAUDHARY
ROLL NO: 2406018721



NITIN KUMAR AGRAWAL
ROLL NO: 2209007684



BIPIN PRASAD
ROLL NO: 3010110252



VIKRANT
ROLL NO: 22011179086



AYUSH AGARWAL
ROLL NO: 2401039057



CHETAN KUMAR
ROLL NO: 2201115277



ABHISHEK BHARDWAJ
ROLL NO: 7204007013



ANURAG PRATAP SINGH
ROLL NO: 3009079731



RAJ KUMAR RAO
ROLL NO: 3010022380



AJAY SINGH
ROLL NO: 2201114896



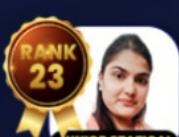
ANKUSH GABA
ROLL NO: 2209011766



ANIMESH KATARE
ROLL NO: 6001033103



CHEMAN AGRAWAL
ROLL NO: 4611005026



KAVITA MEENA
ROLL NO: 2201311526



AMIT KUMAR
ROLL NO: 4205109577



AVINASH THAKUR
ROLL NO: 4410066627



RANJEET KUMAR
ROLL NO: 3206139458



ADARSH GOSWAMI
ROLL NO: 3008004207



SHUBHAM GOEL
ROLL NO: 3011004157



ANIRUDDHA SEN
ROLL NO: 7205023944



BHUSHITH PONDUGULA
ROLL NO: 8604007743



SHIKHA MISHRA
ROLL NO: 3009065017



DEVARAKONDA A V SRIRAM
ROLL NO: 8007028767



CHAUDHARY SHAHID
ROLL NO: 2201028701



HIMANSHU SHARMA
ROLL NO: 3011038843



ARITRA BHATTACHARYA
ROLL NO: 6204015284



PRASHANT KUMAR SHARMA
ROLL NO: 2201080488



DHIRAJ KUMAR YADAV
ROLL NO: 4604019496



About Gagan Sir

An enthusiastic and dynamic teacher with an experience over 7 year and counting. Aced SSC CGL Mains twice with top score. His unique way of teaching in simplified way makes maths fun and easy.

Gagan Pratap Sir



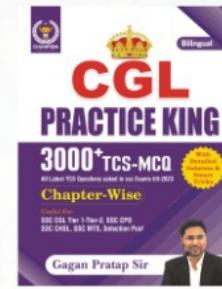
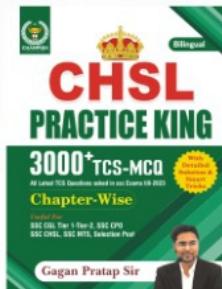
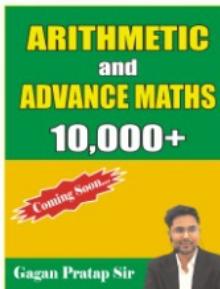
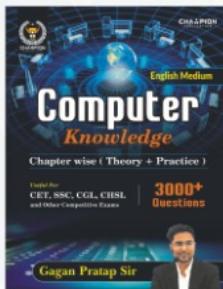
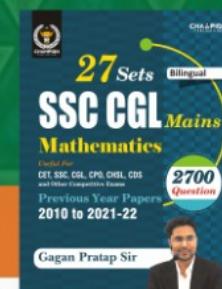
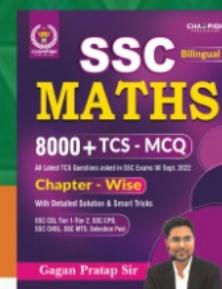
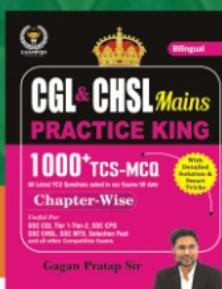
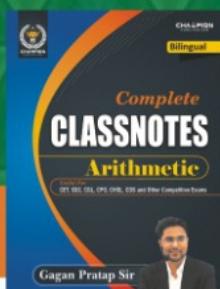
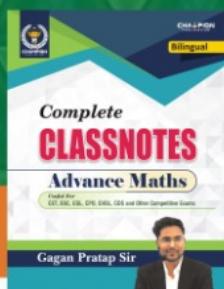
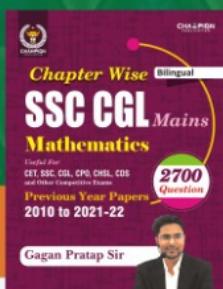
Gagan Pratap Sir

pratapgagan123@gmail.com

CHAMPION
PUBLICATION

championpublication1@gmail.com

Share your feedback with us on: Facebook, YouTube, Telegram and Instagram



Available on



In case of any error or correction detected in the article, let us know the concern on WhatsApp 7351553388 with page number



CHAMPION PUBLICATION

Add: 2nd Floor, Jaina Ext. Dr. Mukherjee Nagar, Delhi-09

For Suggestions Whatsapp
7351553388

₹ 220/-