Generación de Datos Sintéticos para Backtesting de Estrategias de Inversión

Introducción

- **Objetivo:** Generar datos sintéticos para backtesting de estrategias de inversión.
- **Método:** Utilizar precios históricos y parámetros estimados para simular caminos de precios futuros.
- **Beneficio:** Permite probar estrategias en diferentes escenarios y reducir el riesgo de sobreajuste.

Proceso de Precios de Ornstein-Uhlenbeck

- **Objetivo:** Modelar la reversión a la media en los precios de los activos financieros.
- **Uso:** Comúnmente utilizado en finanzas para modelar la dinámica de tasas de interés, precios de commodities y otros activos financieros.

Definición del Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

- **Ecuación Diferencial Estocástica (SDE):**

$$dX_t = \phi(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

  donde:
  - X_t es el valor del proceso en el tiempo t.
  - ϕ es la velocidad de reversión a la media.
  - μ es el nivel de media al cual el proceso tiende a revertirse.
  - σ es la volatilidad del proceso.
  - W_t es un proceso de Wiener (movimiento browniano).

Interpretación de los Parámetros

- **Velocidad de Reversión (ϕ):** Determina la rapidez con la que el proceso vuelve a su media.
- **Media (μ):** El nivel promedio al cual el proceso se revierte.
- **Volatilidad (σ):** Representa la magnitud de las fluctuaciones aleatorias en el proceso.
- **Proceso de Wiener (W_t):** Introduce la aleatoriedad en el modelo.

Propiedades del Proceso

- **Media:**

$$\mathbb{E}[X_t] = \mu + (X_0 - \mu)e^{-\phi t}$$

  - El proceso tiende hacia la media μ con una tasa de decaimiento exponencial.

- **Varianza:**

$$\mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\phi}(1 - e^{-2\phi t})$$

  - La varianza aumenta inicialmente y se estabiliza en $\frac{\sigma^2}{2\phi}$.

Paso 1: Estimación de Parámetros

Fórmulas

- **Modelo de Reversión a la Media:**

$$P_{i,t} = E_0[P_{i,T_i}] + \phi(P_{i,t-1} - E_0[P_{i,T_i}]) + \xi_t$$

- **Estimación de ϕ:**

$$\phi = \frac{\text{cov}(Y, X)}{\text{cov}(X, X)}$$

- **Estimación de σ:**

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(\xi_t)}$$

Implementación

```python
def estimate_parameters(prices, E0):
    T_max = len(prices)
    X = []
    Y = []

    for t in range(T_max - 1):
        X.append(prices[t] - E0)
        Y.append(prices[t + 1])

    X = np.array(X).reshape(-1, 1)
    Y = np.array(Y).reshape(-1, 1)

    model = LinearRegression().fit(X, Y)
    phi_hat = model.coef_[0][0]

    Z = np.full((T_max - 1, 1), E0)
    residuals = Y - Z - phi_hat * X
    sigma_hat = np.sqrt(np.var(residuals))

    return sigma_hat, phi_hat
```

Paso 2: Construcción de la Matriz de Umbrales

Fórmulas

- **Pares de Stop-Loss y Toma de Ganancias:**

$$\pi = \{-12\sigma, -\sigma, \ldots, -\sigma\}$$

$$\bar{\pi} = \{\sigma, \ldots, 12\sigma\}$$

Implementación

```
def construct_mesh(sigma):
    pi = np.linspace(-12 * sigma, -sigma, 10)
    pi_bar = np.linspace(sigma, 12 * sigma, 10)
    mesh = np.array(np.meshgrid(pi, pi_bar)).T.reshape(-1, 2)
    return mesh
```

Paso 3: Generación de Caminos de Precios

Fórmulas

- **Simulación de Caminos:**

$$P_{i,t} = E_0 + \phi(P_{i,t-1} - E_0) + \mathcal{N}(0, \sigma)$$

Implementación

```
def generate_paths(N, T_max, sigma, phi, initial_price, E0):
    paths = np.zeros((N, T_max))
    paths[:, 0] = initial_price
    for i in range(N):
        for t in range(1, T_max):
            paths[i, t] = E0 + phi * (paths[i, t - 1] - E0) + np.random.normal(0, sigma)
    return paths
```

Paso 4: Aplicación de la Lógica de Trading

Lógica

- **Reglas de Stop-Loss y Toma de Ganancias:**
  - Salir si π o $\bar{\pi}$ es alcanzado.
  - Salir si se alcanza el tiempo maximo de simulacion
  - Calcular el Sharpe Ratio para cada par de umbrales.

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{\mathbb{E}[P_{i,T_i} - P_{i,0}]}{\sigma(P_{i,T_i} - P_{i,0})}$$

Implementación

```python
def apply_trading_logic(paths, mesh, T_max):
    N = paths.shape[0]
    results = []

    for pi, pi_bar in mesh:
        final_pnl = []

        for j in range(N):
            for t in range(T_max):
                pnl = paths[j, t] - paths[j, 0]
                if pnl <= pi or pnl >= pi_bar:
                    final_pnl.append(pnl)
                    break
                if t == T_max - 1:
                    final_pnl.append(pnl)

        sharpe_ratio = np.mean(final_pnl) / np.std(final_pnl)
        results.append([pi, pi_bar, sharpe_ratio])

    return pd.DataFrame(results, columns=['pi', 'pi_bar', 'sharpe_ratio'])
```

Paso 5: Determinación de la Regla Óptima

Implementación

```python
def determine_optimal_rule(results):
    return results.loc[results['sharpe_ratio'].idxmax()]
```

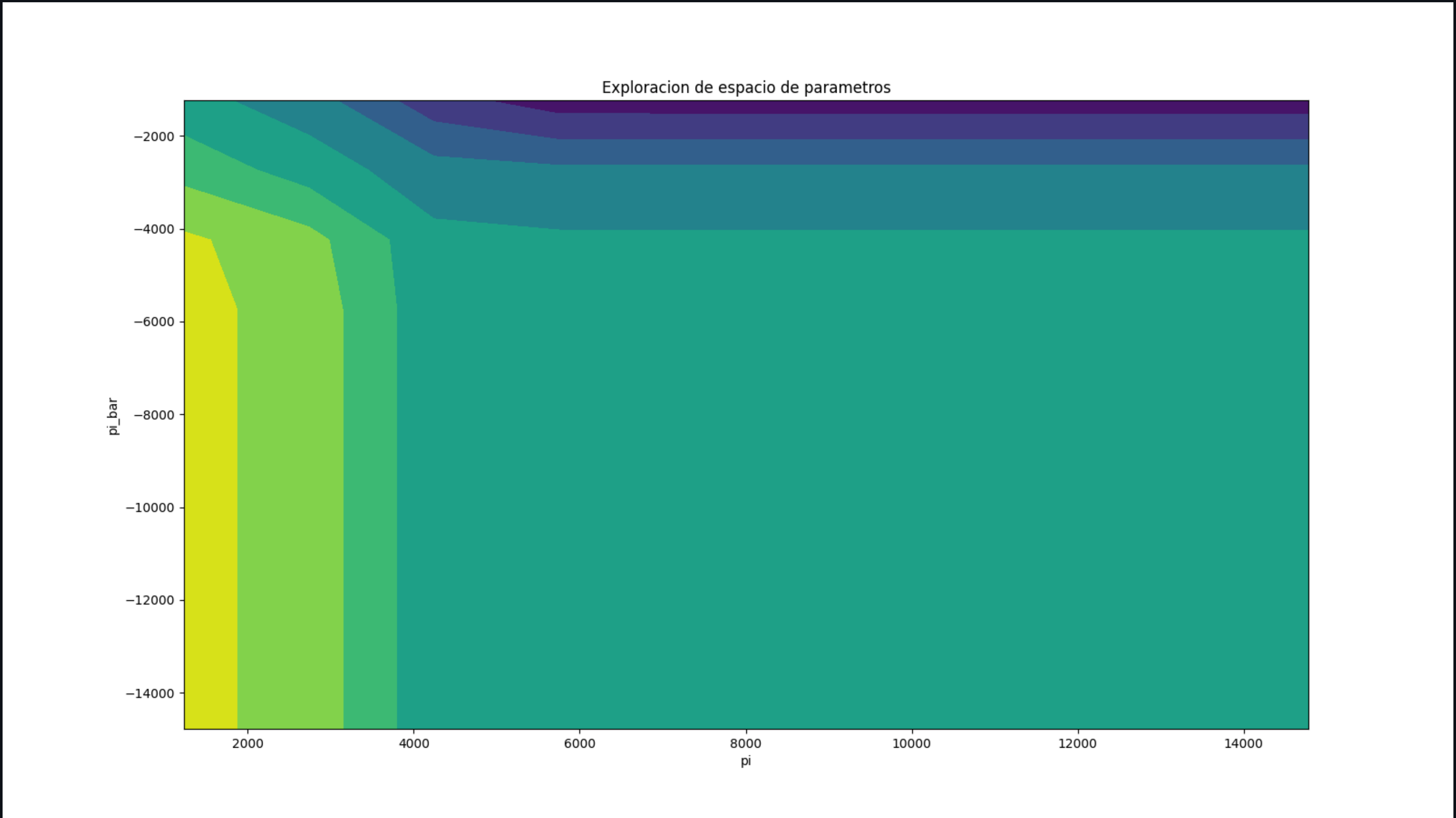
Ejemplo de Uso

```python
# Define input data
E0 = prices.mean()

# Step 1: Estimate parameters
sigma_hat, phi_hat = estimate_parameters(prices.values, E0)

# Step 2: Construct mesh
mesh = construct_mesh(sigma_hat)

# Step 3: Generate paths
N = 100000
T_max = 100
initial_price = prices.iloc[0]
paths = generate_paths(N, T_max, sigma_hat, phi_hat, initial_price, E0)

# Step 4: Apply trading logic
results = apply_trading_logic(paths, mesh, T_max)

# Step 5: Determine optimal rule
optimal_rule = determine_optimal_rule(results)

print(optimal_rule)

# Plot the contour
sorted_results = results.sort_values(by=['pi', 'pi_bar'])
pivot_table = sorted_results.pivot_table('sharpe_ratio', 'pi', 'pi_bar')

plt.figure(figsize=(10, 8))
contour = plt.contourf(pivot_table.columns, pivot_table.index, pivot_table, cmap='viridis')
plt.title('Contour Plot of Sharpe Ratio')
plt.xlabel('pi')
plt.ylabel('pi_bar')
plt.show()
```

Resultados

π	$\bar{\pi}$	sharpe_ratio
-14790.6	**13284.2**	**0.395471**
-14790.6	10271.3	0.395304
-14790.6	1232.55	0.236317
-14790.6	2739	0.297171
-14790.6	4245.45	0.339421
-14790.6	5751.9	0.364218
-14790.6	7258.35	0.379567

Exploración del espacion R



Testeo de estrategia en datos históricos

Prueba de Estrategia de Inversión en Serie de Precios Real

- **Objetivo:** Probar una estrategia de inversión utilizando una serie temporal de precios real.
- **Método:** Aplicar reglas de stop-loss y toma de ganancias en datos históricos y calcular métricas de rendimiento.

Descarga de Datos Históricos

```
import yfinance as yf

# Descargar datos históricos de Bitcoin
btc_data = yf.download("BTC-USD", start="2020-01-01", end=pd.Timestamp.today().strftime('%Y-%m-%d'))
prices = btc_data['Close'].interpolate()
```

- **Uso de `yfinance`:** Descargar datos históricos de Bitcoin.
- **Interpolación de valores NA:** Rellenar valores faltantes en la serie de precios.

Definición de la Lógica de la Estrategia

```python
def apply_strategy(prices, pi, pi_bar):
    initial_price = prices.iloc[0]
    pnl = 0
    for t in range(1, len(prices)):
        current_price = prices.iloc[t]
        pnl = current_price - initial_price

        if pnl <= pi or pnl >= pi_bar:
            break

    return pnl
```

- **Función `apply_strategy`**: Aplica las reglas de stop-loss y toma de ganancias en la serie de precios.
- **Parámetros:**
  - `pi`: Umbral de stop-loss.
  - `pi_bar`: Umbral de toma de ganancias.

Prueba de la Estrategia en Datos Históricos

```python
def test_strategy(prices, pi, pi_bar):
    pnl_list = []
    for start in range(len(prices) - 1):
        pnl = apply_strategy(prices[start:], pi, pi_bar)
        pnl_list.append(pnl)

    sharpe_ratio = np.mean(pnl_list) / np.std(pnl_list)
    return pnl_list, sharpe_ratio
```

- **Función** `test_strategy`: Itera sobre la serie de precios y aplica la estrategia para calcular el PnL (Profit and Loss).
- **Cálculo del Sharpe Ratio:**

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{\text{Promedio del PnL}}{\text{Desviación Estándar del PnL}}$$

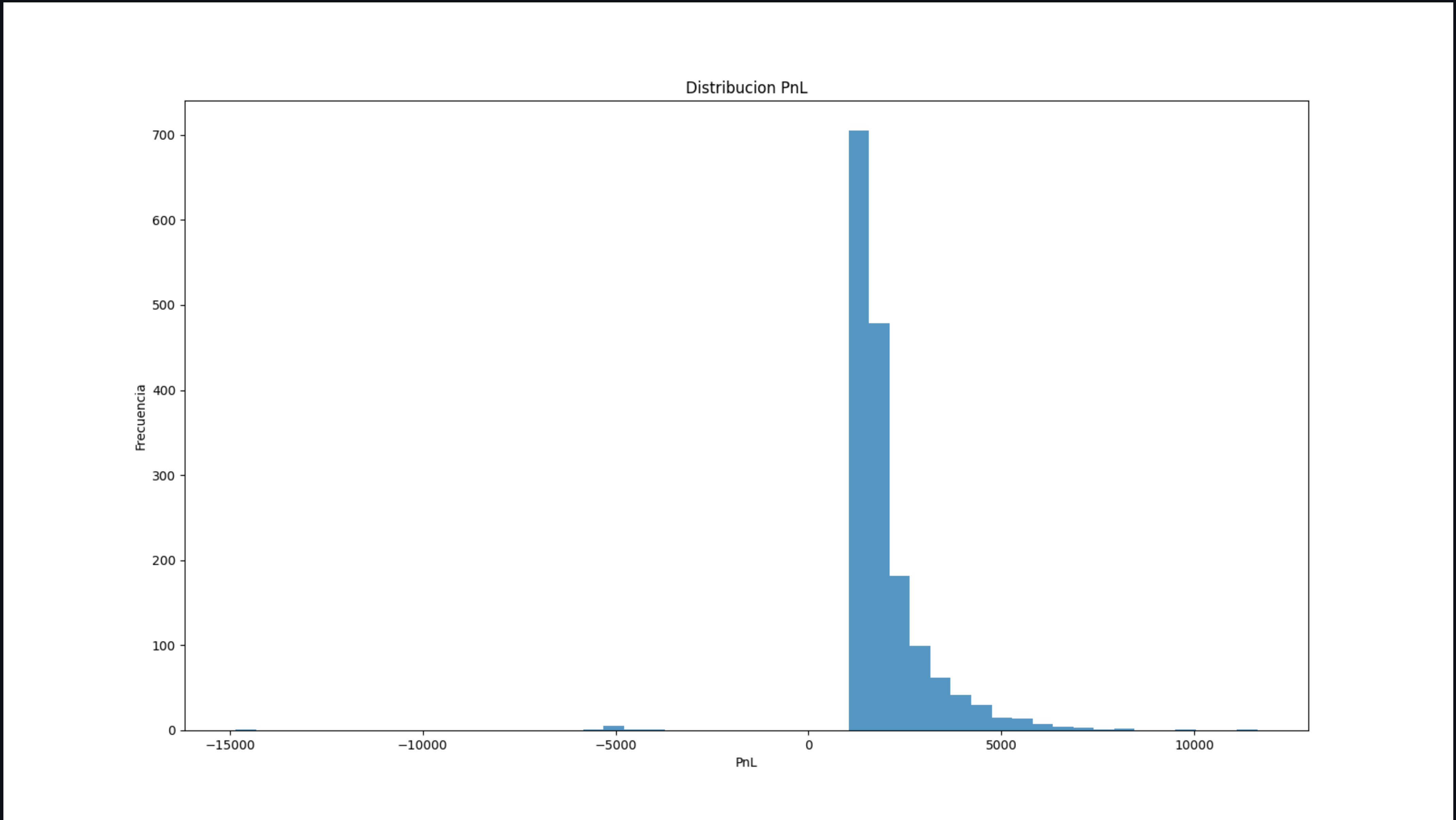
Ejecución de la Estrategia

```
# Valores de ejemplo para pi y pi_bar
pi = -2000  # Stop-loss
pi_bar = 2000  # Toma de ganancias

# Probar la estrategia en datos históricos
pnl_list, sharpe_ratio = test_strategy(prices, pi, pi_bar)

# Imprimir resultados
print(f"Sharpe Ratio: {sharpe_ratio}")

# Graficar la distribución de PnL
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(pnl_list, bins=50, alpha=0.75)
plt.title('Distribución de PnL')
plt.xlabel('PnL')
plt.ylabel('Frecuencia')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Resultados

- **Sharpe Ratio:** 0.62
- **Retorno Promedio:** 50.78%

- **Distribución de PnL:**



Simulación de Monte Carlo y Precio de Opciones de Black-Scholes

Movimiento Browniano Geométrico (GBM)

- El modelo GBM es común en la simulación de precios de acciones en matemáticas financieras.
- Definido por la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

- Donde:
  - S_t: Precio de la acción en el tiempo t.
  - μ: Tasa de deriva (retorno promedio de la acción).
  - σ: Volatilidad de la acción.
  - dW_t: Proceso de Wiener (movimiento Browniano).

Movimiento Browniano Geométrico (GBM)

- Características:
  - **No estacionario:** No retorna a una media.
  - **Deriva y volatilidad:** Proporcionales al precio actual.
  - **Distribución log-normal:** Los precios de las acciones tienden a ser positivos.
  - **Aplicación:** Modelado de precios de activos financieros.

Proceso de Ornstein-Uhlenbeck (O-U) (Recordatorio)

- **Definición:**
  - Modelo para simular procesos revertidos a la media.
  - Descrito por la ecuación diferencial estocástica:

$$dx_t = \phi(\mu - x_t)\,dt + \sigma\,dW_t$$

- **Características:**
  - **Estacionario:** Retorna a una media a largo plazo.
  - **Tasa de reversión:** ϕ controla la velocidad de retorno a μ.
  - **Aplicación:** Modelado de tasas de interés, volatilidad, y otros fenómenos que revierten a la media.

Comparación de Características

Característica	GBM	O-U
Ecuación	$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$	$dx_t = \phi(\mu - x_t) \, dt + \sigma \, dW_t$
Media a largo plazo	No	Sí
Volatilidad	Proporcional al precio actual	Constante
Estacionariedad	No	Sí
Aplicación común	Precios de acciones	Tasas de interés, volatilidad

Resumen

- **GBM**:
  - Modela crecimiento exponencial y fluctuaciones.
  - Adecuado para activos financieros que no tienen tendencia a regresar a una media específica.
- **O-U**:
  - Modela reversión a la media.
  - Adecuado para fenómenos donde hay una tendencia natural a retornar a un nivel promedio.

Discretización del GBM

1. **Aproximación del cambio en el precio de la acción:**

$$\frac{dS_t}{S_t} \approx \mu \, dt + \sigma \, dW_t$$

2. **Cambio porcentual en S_t:**

$$S_{t+dt} = S_t \exp\left((\mu - 0.5\sigma^2)\, dt + \sigma \sqrt{dt}\, Z_t\right)$$

3. **Distribución log-normal:**
   - Z_t es una variable normal estándar.
   - La exponeciación refleja que los precios bajo GBM son log-normales.

Parámetros en la Simulación

- r reemplaza a μ como tasa de deriva (tasa libre de riesgo).
- $(r - 0.5\sigma^2)$ ajusta la deriva por la volatilidad.
- El factor $0.5\sigma^2$ proviene de la corrección del Lema de Itô.

Proceso de Simulación

1. **Inicialización de Parámetros:**
    - $S0$: Precio inicial
    - K: Precio de ejercicio
    - T: Tiempo hasta vencimiento
    - r: Tasa libre de riesgo
    - σ: Volatilidad
    - M: Pasos de tiempo
    - N: Trayectorias simuladas

2. **Bucle a través de los Pasos de Tiempo:**
    - Generar N variables normales estándar Z.
    - Calcular el precio en el siguiente paso de tiempo:

$$S[:, i] = S[:, i-1] \times \exp\left((r - 0.5\sigma^2) \times dt + \sigma \times \sqrt{dt} \times Z\right)$$

Establecer Parámetros

```
S0 = 100        # Precio inicial de la acción
K = 105         # Precio de ejercicio
T = 1           # Tiempo hasta el vencimiento en años
r = 0.05        # Tasa de interés libre de riesgo
sigma = 0.2     # Volatilidad de la acción
M = 100         # Número de pasos de tiempo
N = 10000       # Número de trayectorias simuladas
```

- **S0:** Precio inicial de la acción.
- **K:** Precio de ejercicio.
- **T:** Tiempo hasta el vencimiento.
- **r:** Tasa de interés libre de riesgo.
- **sigma:** Volatilidad.
- **M:** Pasos de tiempo.
- **N:** Trayectorias simuladas.

Simular Trayectorias de Precios de Acciones

```
np.random.seed(123)
dt = T / M
S = np.zeros((N, M+1))
S[:, 0] = S0

for i in range(1, M+1):
    Z = np.random.randn(N)
    S[:, i] = S[:, i-1] * np.exp((r - 0.5 * sigma**2) * dt + sigma * np.sqrt(dt) * Z)
```

- **dt**: Incremento de tiempo.
- **S**: Matriz para almacenar precios simulados.
- **Z**: Variables aleatorias normales.

Calcular Intervalos de Confianza del 95%

```
S_mean = np.mean(S, axis=0)
S_ci_upper = np.quantile(S, 0.975, axis=0)
S_ci_lower = np.quantile(S, 0.025, axis=0)
```

- **S_mean:** Media de los precios simulados.
- **S_ci_upper:** Límite superior del IC del 95%.
- **S_ci_lower:** Límite inferior del IC del 95%.

Precio de Opción mediante Monte Carlo

```
payoffs = np.maximum(S[:, -1] - K, 0)
discounted_payoffs = np.exp(-r * T) * payoffs
mc_option_price = np.mean(discounted_payoffs)
```

- **payoffs:** Pago al vencimiento (Opcion Europea).
- **discounted_payoffs:** Pago descontado (al valor presente).
- **mc_option_price:** Precio de opción estimado por Monte Carlo.

Precio de Opción de Black-Scholes

```
d1 = (np.log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
bs_option_price = S0 * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
```

- **d1, d2:** Variables de Black-Scholes.
- **bs_option_price:** Precio de opción de Black-Scholes.

Imprimir Precios de Opción

```
print(f"Monte Carlo Option Price: {mc_option_price:.2f}")
print(f"Black-Scholes Option Price: {bs_option_price:.2f}")
```

- Comparación de precios entre Monte Carlo y Black-Scholes.

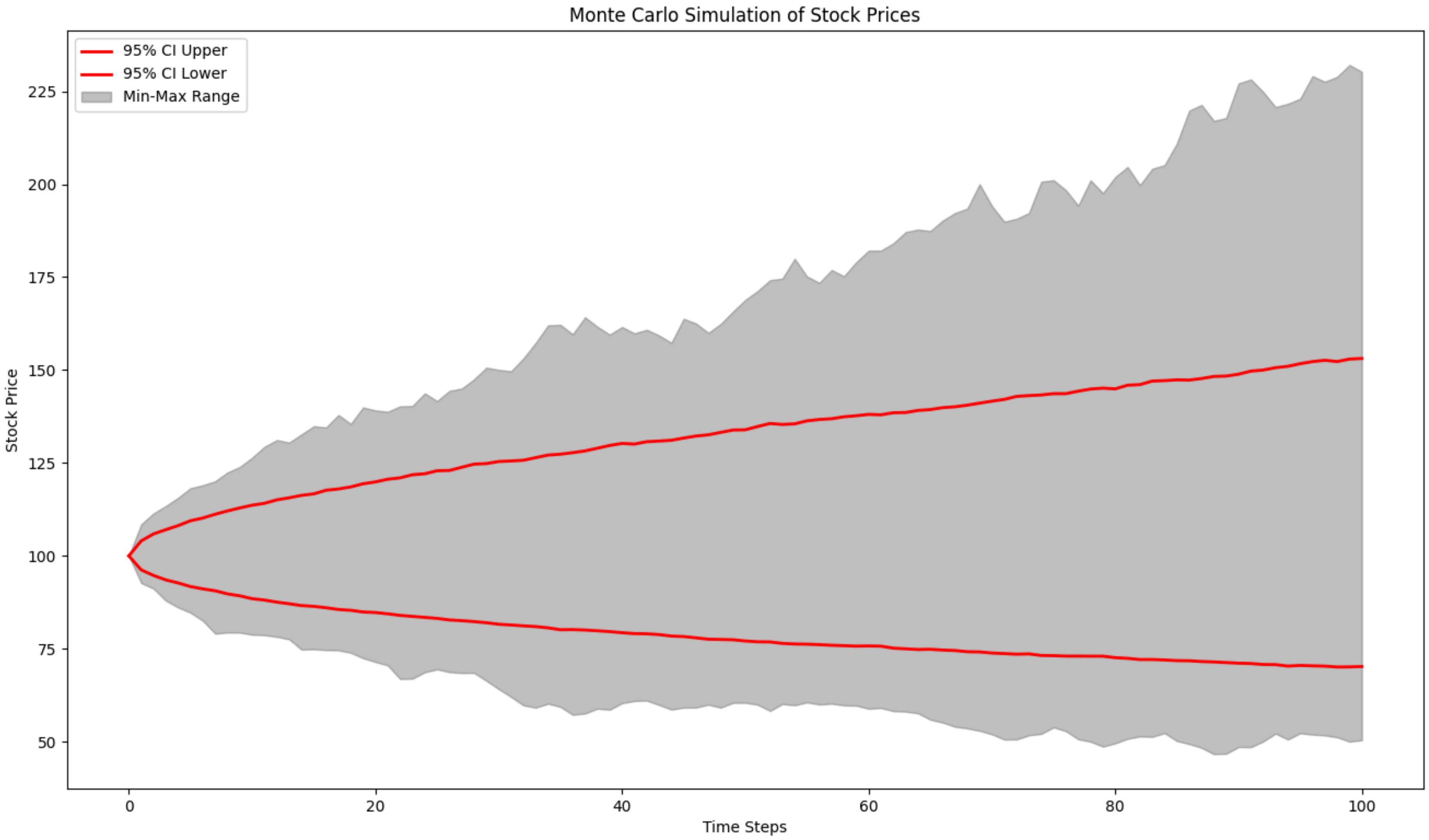
Graficar Trayectorias y Intervalos de Confianza

```
plt.figure(figsize=(16, 9))
#plt.plot(S.T, color='gray', alpha=0.1)
plt.plot(S_ci_upper, color='red', linewidth=2, label='95% CI Upper')
plt.plot(S_ci_lower, color='red', linewidth=2, label='95% CI Lower')
```

- Gráfico de trayectorias y límites de intervalos de confianza.

Sombrear Área entre la Trayectoria Más Alta y Más Baja

```
S_max = np.max(S, axis=0)
S_min = np.min(S, axis=0)
plt.fill_between(range(M+1), S_max, S_min, color='gray', alpha=0.5, label='Min-Max Range')
```


Monte Carlo Simulation of Stock Prices
95% CI Upper
95% CI Lower
Min-Max Range
Stock Price
Time Steps
225
200
175
150
125
100
75
50
0
20
40
60
80
100

Resultados de la Simulación

- **Precio de opción mediante Monte Carlo:**
  - (7.99)
- **Precio de opción de Black-Scholes:**
  - (8.02)

Conclusión

- Los precios de opciones calculados mediante Monte Carlo y Black-Scholes son muy cercanos ($7.99 vs $8.02), demostrando la eficacia de ambos métodos para valorar opciones.
- **GBM** es adecuado para modelar precios de acciones debido a su naturaleza no estacionaria y crecimiento exponencial.
- **O-U** es más apropiado para variables que tienden a revertir a una media, como las tasas de interés.

Bootstrapping y Estrategia de Trading

Introducción

- **Objetivo:** Realizar bootstrapping en datos de precios de Bitcoin y aplicar lógica de trading.
- **Herramientas Utilizadas:** Python, yfinance, statsmodels, pandas, numpy, matplotlib.

Paso 3: Función de Bootstrapping

```
def block_bootstrap(data, block_size, num_samples):
    n = len(data)
    bootstrapped_series = []

    for _ in range(num_samples):
        indices = np.arange(n)
        block_start = np.random.choice(indices[:-block_size])
        bootstrap_sample = []

        for _ in range(int(n/block_size)):
            block = data[block_start:block_start+block_size]
            bootstrap_sample.extend(block)
            block_start = np.random.choice(indices[:-block_size])

        bootstrapped_series.append(bootstrap_sample[:n])

    return np.array(bootstrapped_series)
```

Paso 3: Función de Bootstrapping

- `block_bootstrap`: Realiza bootstrapping por bloques en los datos.
- **Parámetros:**
  - `block_size`: Tamaño de cada bloque.
  - `num_samples`: Número de muestras bootstrapped a generar.

Paso 4: Parámetros de Bootstrapping

```
# Parámetros
block_size = 10
num_samples = 1000

# Realizar bootstrapping
bootstrapped_data = block_bootstrap(prices, block_size, num_samples)
```

- `block_size`: Tamaño de bloque fijado en 10.
- `num_samples`: Número de muestras fijado en 1000.
- `bootstrapped_data`: Datos resultantes del bootstrapping.

Paso 5: Modelado ARIMA en Series Bootstrap

```
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA

model_params = []

for series in bootstrapped_data:
    model = ARIMA(series, order=(1, 0, 1))
    fitted_model = model.fit()
    model_params.append(fitted_model.params)

print(fitted_model.summary())
```

- **Modelo ARIMA:** Ajusta un modelo ARIMA (1,0,1) a cada serie bootstrapped.
- `model_params`: Guarda los parámetros ajustados del modelo.

Paso 6: Análisis de Parámetros

```
# Convertir a DataFrame para análisis
model_params_df = pd.DataFrame(model_params, columns=['const', 'ar.L1', 'ma.L1','sigma2'])

# Calcular estadísticas
param_means = model_params_df.mean()
param_ci = model_params_df.quantile([0.025, 0.975])

print("Parameter Means:")
print(param_means)
print("\n95% Confidence Intervals:")
print(param_ci)
```

Paso 6: Análisis de Parámetros

- `model_params_df`: DataFrame con los parámetros del modelo.
- **Media y Intervalos de Confianza:** Calcula la media y los intervalos de confianza al 95% para los parámetros.

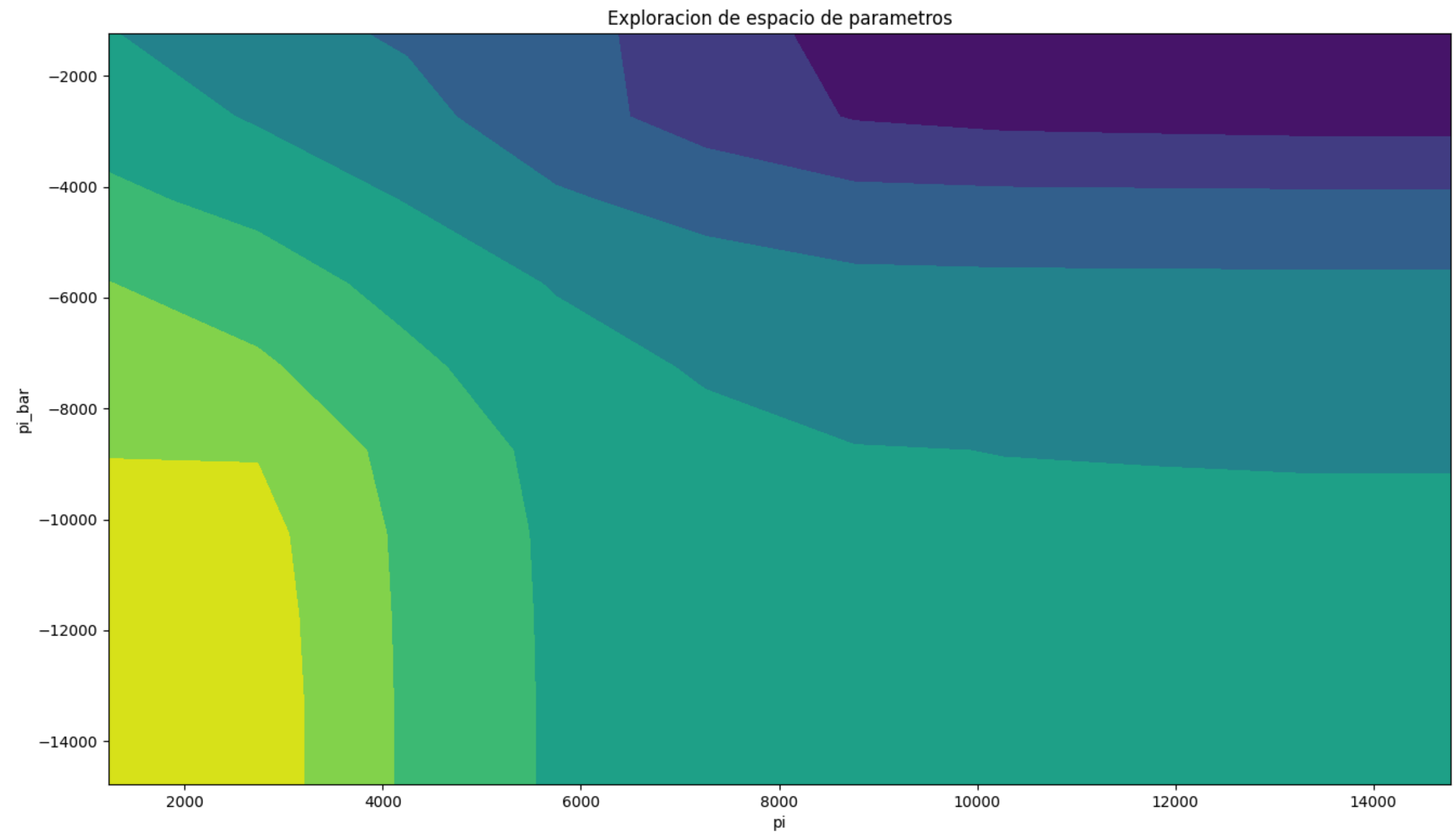
Paso 7: Lógica de Trading y Visualización

```
sigma_hat = 1231.50
T_max = 100
results = apply_trading_logic(bootstrapped_data, construct_mesh(sigma_hat), T_max)
determine_optimal_rule(results)
sorted_results = results.sort_values(by=['pi', 'pi_bar'])
pivot_table = sorted_results.pivot_table('sharpe_ratio','pi', 'pi_bar')
```

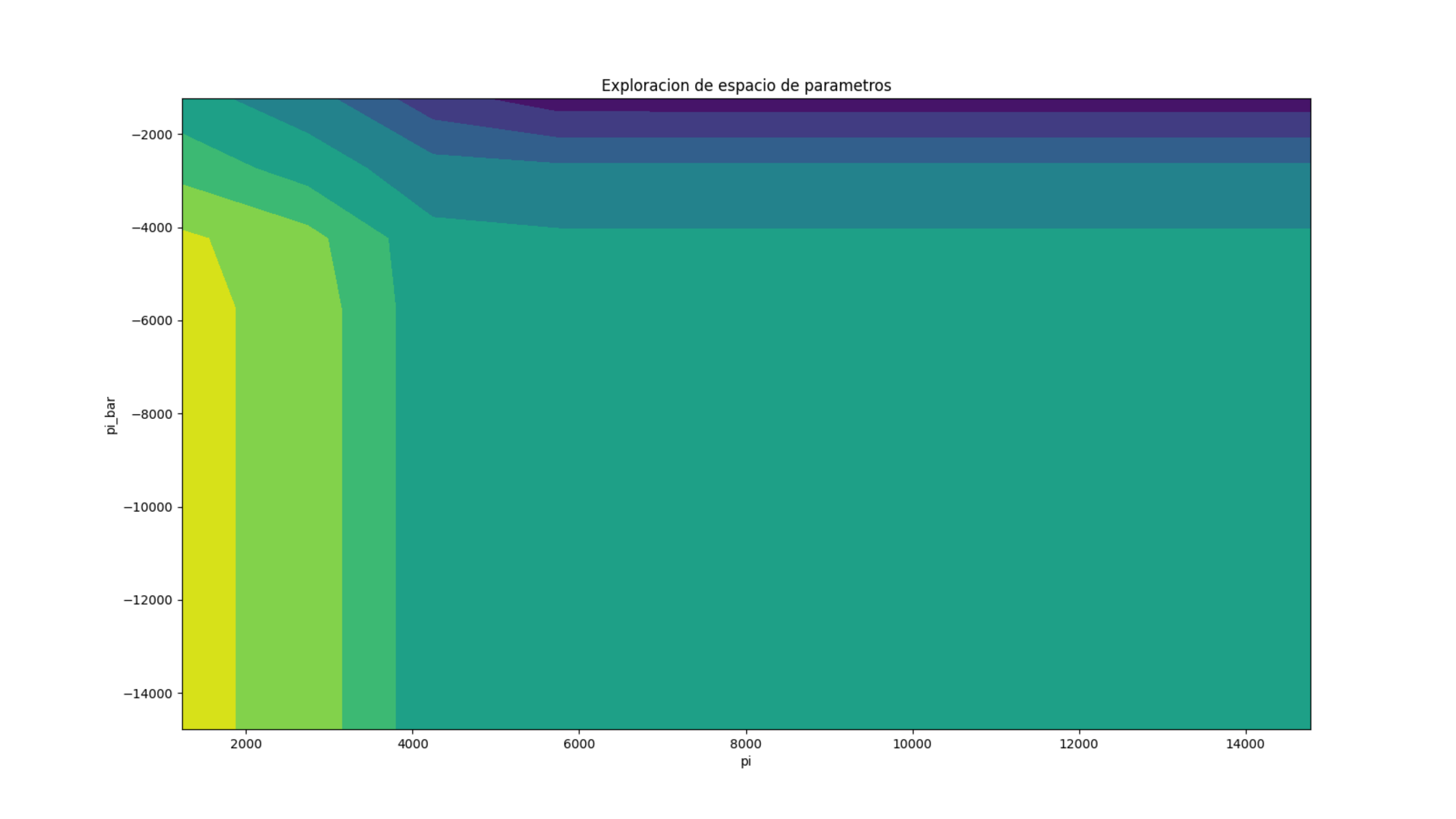
Paso 7: Lógica de Trading y Visualización

- `apply_trading_logic`: Aplica la lógica de trading a los datos bootstrapped.
- **Visualización:** Muestra la exploración del espacio de parámetros en un gráfico de contorno.

Espacio de Parámetros R segun Bootstrap



Espacio de Parámetros R segun Datos Sinteticos



Resultados

Metodo	π	$\bar{\pi}$	sharpe_ratio
Bootstrap	-14778	1231	1.446
Sintetico	-14778.6	1231.50	3.303

- Si bien los resultados son similares, el valor sharpe es más alto en el caso de los datos sintéticos, lo que sugiere una mayor variabilidad en los resultados.

Conclusión

- **Bootstrapping:** Permite generar múltiples muestras de datos para probar la robustez de un modelo.
- **Modelado ARIMA:** Ajusta modelos a las muestras bootstrapped para analizar la distribución de parámetros.
- **Lógica de Trading:** Aplica estrategias de trading y visualiza los resultados para encontrar parámetros óptimos.

Referencias

- López de Prado, M. (2018). *Advances in Financial Machine Learning*. Wiley. (Chapter 13)
- Codigos y ejemplos en Github