

# Modelado Geométrico con Curvas de Bézier y B-splines

Aplicación a Contornos de Cráneos

Autor. Santiago Uribe Echavarría  
Profesor. Marco Paluszny Kluczynsky  
Tópicos en Geometría y Visualización Médica <sup>1</sup>

Repositorio: `https://github.com/sauribee/Topics\_in\_geometry\_and\_medical\_visualization`

---

<sup>1</sup>Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

# Tabla de contenidos

- 1 Marco teórico
- 2 Aplicación médica
- 3 Metodología y parámetros
- 4 Resultados - skull\_reports\_01
- 5 Resultados - skull\_reports\_02
- 6 Conclusiones

# Curvas de Bézier

Las curvas de Bézier son curvas paramétricas definidas por puntos de control. Se basan en los polinomios de Bernstein:

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{P}_i, \quad t \in [0, 1]$$

donde  $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  son las bases de Bernstein y  $\mathbf{P}_i$  los puntos de control.

- Pasan por el primer y último punto de control
- Control intuitivo mediante puntos de control
- Grado  $n - 1$  para  $n$  puntos

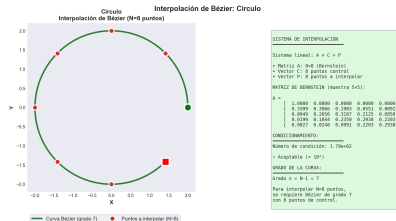


Figura: Interpolación de Bézier en círculo

# B-splines

Los B-splines son curvas paramétricas por tramos que ofrecen control local. Se definen mediante:

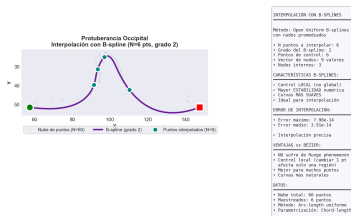
$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i$$

donde  $N_{i,p}(t)$  son las funciones base B-spline de grado  $p$  y  $\mathbf{P}_i$  los puntos de control.

## Ventajas sobre Bézier:

- Mejor control local
- Estabilidad numérica para muchos puntos
- Grado fijo independiente del número de puntos

Interpolación B-spline: Protuberancia Occipital



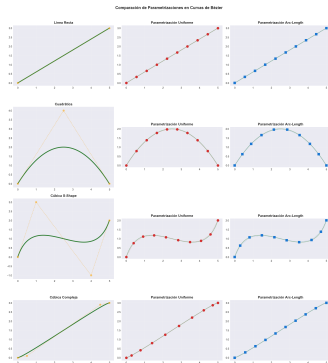
**Figura:** Interpolación B-spline en protuberancia

# Parametrización de curvas

La parametrización determina cómo se distribuyen los valores de  $t$  entre los puntos. Métodos implementados:

1. **Uniforme:**  $t_i = i/(n - 1)$
2. **Chord-length:**  $t_i = t_{i-1} + \|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}\|$
3. **Centripetal:**  $t_i = t_{i-1} + \|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}\|^{0,5}$
4. **Arc-chord:** combina longitud de arco con cuerda

La parameterización chord-length es más estable para curvas irregulares.



**Figura:** Comparación de parametrizaciones

# Planteamiento del problema

**Objetivo:** Modelar contornos de cráneo a partir de datos médicos discretos.

**Datos de entrada:**

- Coordenadas ( $x, y$ ) de puntos del borde del cráneo
- Lado izquierdo y derecho del contorno
- Múltiples cortes axiales (10 slices)

**Desafíos:**

- Datos ruidosos e irregularmente espaciados
- Necesidad de curvas suaves para visualización
- Detección de características anatómicas (protuberancia occipital)
- Mantener precisión sin oscilaciones excesivas

# Enfoques de modelado implementados

Se implementaron tres enfoques complementarios:

1. **Interpolación de Bézier:** Curva que pasa exactamente por los puntos de control.
  - Grado =  $N - 1$  (puede ser alto para muchos puntos)
  - Oscilaciones para muchos puntos
2. **Aproximación LSQ de Bézier:** Curva suave que minimiza el error cuadrático.
  - Grado fijo (2-8), independiente de la cantidad  $N$  de puntos
  - Sin oscilaciones, curva suave
3. **Interpolación B-spline:** Combina lo mejor de ambos.
  - Interpolación exacta con grado fijo (cúbico)
  - Control local, estabilidad numérica

# Estabilidad numérica

**Problema:** Curvas de Bézier de alto grado sufren inestabilidad numérica.

**Soluciones implementadas:**

- Cálculo en espacio logarítmico para coeficientes binomiales:

$$\log \binom{n}{k} = \log \Gamma(n+1) - \log \Gamma(k+1) - \log \Gamma(n-k+1)$$

donde  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ , es la función gamma.

- SVD para resolver sistemas mal condicionados
- Advertencias cuando grado  $> 15$  (interpolación) o  $> 20$  (LSQ)
- Monitoreo del número de condición de matrices de Bernstein

**Resultado:** Estabilidad garantizada.



# Herramientas y tecnologías

## Implementación:

- **Lenguaje:** Python 3.12+
- **Bibliotecas numéricas:**
  - NumPy  $\geq 2.1$  y SciPy  $\geq 1.14$
  - Bezier  $\geq 2024.6.20$
- **Visualización:**
  - Matplotlib, PyVista, VTK
- **I/O médico:** SimpleITK, pydicom, nibabel

## Estructura del proyecto:

- Paquete instalable: `medvis`
- Scripts de análisis reproducibles
- Tests automatizados con `pytest`

## Repositorio

`github.com/  
sauribee/Topics_  
in_geometry_and_  
medical_  
visualization`

# Métricas de evaluación

## Error cuadrático medio (MSE):

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{C}(t_i) - \mathbf{P}_i\|^2$$

## Error máximo:

$$\text{Error}_{\max} = \max_{i=1, \dots, N} \|\mathbf{C}(t_i) - \mathbf{P}_i\|$$

## Para B-splines (interpolación):

- Error teórico: precisión de máquina ( $\sim 10^{-13}$ )
- Confirmado experimentalmente en todos los casos

## Para aproximación LSQ:

- Error depende del grado elegido
- Trade-off entre suavidad y precisión

# Parámetros de ejecución - skull\_reports\_01

**Dataset:** Corte axial único del cráneo

## Interpolación Bézier:

- Puntos cráneo: 12
- Puntos protuberancia: 6
- Umbral Y: 52
- Parameterización:  
chord-length

## Aproximación LSQ Bézier:

- Puntos muestreados: 14
- Grado cráneo: 8
- Grado protuberancia: 5

## Interpolación B-spline:

- Puntos cráneo: 14
- Puntos protuberancia: 7
- Grado: 3 (cúbico)
- Knot vector: uniforme abierto

## Preprocesamiento:

- Muestreo uniforme por longitud de arco
- Detección automática de protuberancia

# Parámetros de ejecución - skull\_reports\_02

**Dataset:** 10 cortes axiales (corte 0 - corte 9)

## Procesamiento por lotes:

- Método: B-spline cúbico
- Puntos muestreados (full): 20
- Puntos muestreados (prot): 10
- Grado: 3
- Umbral Y: 50

## Estadísticas del dataset:

- Promedio: 568 puntos/slice
- Rango: 418-828 puntos

## Detección de protuberancia:

- 7/10 slices con protuberancia
- Cortes 0-6: protuberancia detectada
- Cortes 7-9: solo contorno completo

## Outputs generados:

- 10 reportes individuales
- Grids comparativos (2x5)
- CSV con métricas

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

# Comparación de métodos - Protuberancia

Interpolación de Bézier: Protuberancia Occipital

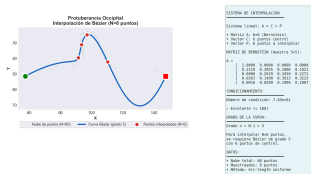


Figura: Bézier  
interpolación

Aproximación LSQ de Bézier: Protuberancia Occipital

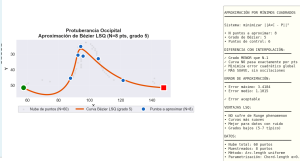


Figura: Bézier LSQ

Interpolación B-spline: Protuberancia Occipital

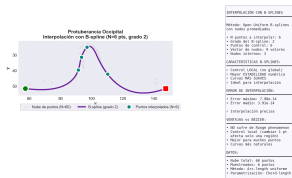


Figura: B-spline

# Grids comparativos

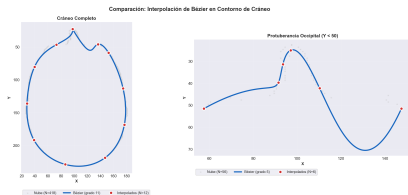


Figura: Interpolación Bézier

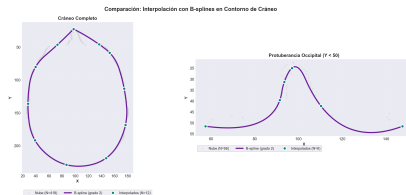
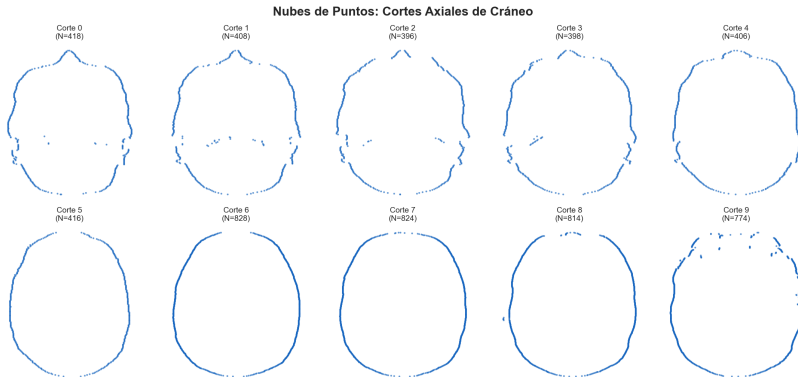


Figura: Interpolación B-spline

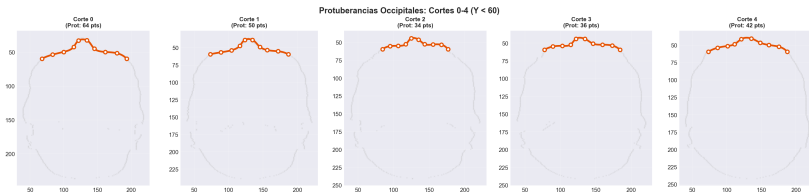
# Análisis multi-slice - Puntos de datos



**Figura:** 10 cortes axiales con puntos de contorno originales (418-828 puntos por slice)

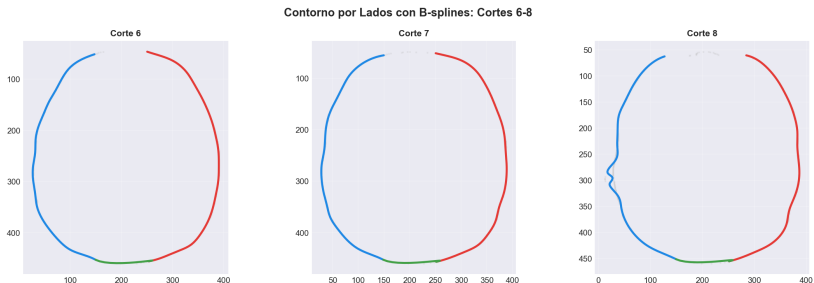


# Análisis de protuberancia - Multi-slice



**Figura:** Detección y modelado de protuberancia occipital en cortes 0-4

# Conexión de lados - Ejemplos



**Figura:** Conexión suave entre lado izquierdo y derecho en cortes 6-8

# Conclusiones

## Resultados principales:

- **B-splines cúbicos:** Método óptimo para contornos médicos
  - Interpolación exacta (error  $\sim 10^{-13}$ )
  - Estabilidad numérica garantizada
  - Control local para edición
- **Bézier interpolación:** Útil para pocos puntos ( $< 10$ )
  - Oscilaciones para muchos puntos
  - Control global más intuitivo
- **Bézier LSQ:** Mejor para suavizado
  - Trade-off entre suavidad y precisión
  - No pasa exactamente por los puntos

**¡Gracias por su atención!**

Repositorio: [https://github.com/sauribee/Topics\\_in\\_geometry\\_and\\_medical\\_visualization](https://github.com/sauribee/Topics_in_geometry_and_medical_visualization)