

Modelado Geométrico con Curvas de Bézier y B-splines

Aplicación a Contornos de Cráneos

Autor. Santiago Uribe Echavarría
Profesor. Marco Paluszny Kluczynsky
Tópicos en Geometría y Visualización Médica ¹

Repositorio: `https://github.com/sauribee/Topics_in_geometry_and_medical_visualization`

¹Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Tabla de contenidos

- 1 Marco teórico
- 2 Aplicación médica
- 3 Metodología y parámetros
- 4 Resultados - skull_reports_01
- 5 Resultados - skull_reports_02
- 6 Conclusiones

Curvas de Bézier

Las curvas de Bézier son curvas paramétricas definidas por puntos de control. Se basan en los polinomios de Bernstein:

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{P}_i, \quad t \in [0, 1]$$

donde $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ son las bases de Bernstein y \mathbf{P}_i los puntos de control.

- Pasan por el primer y último punto de control
- Control intuitivo mediante puntos de control
- Grado $n - 1$ para n puntos

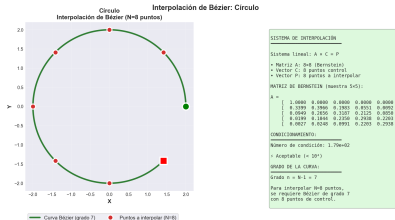


Figura: Interpolación de Bézier en círculo

B-splines

Los B-splines son curvas paramétricas por tramos que ofrecen control local. Se definen mediante:

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) \mathbf{P}_i$$

donde $N_{i,p}(t)$ son las funciones base B-spline de grado p y \mathbf{P}_i los puntos de control.

Ventajas sobre Bézier:

- Mejor control local
- Estabilidad numérica para muchos puntos
- Grado fijo independiente del número de puntos

Interpolación B-spline: Protuberancia Occipital

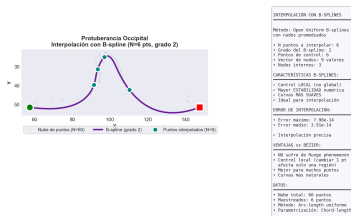


Figura: Interpolación B-spline en protuberancia

Parametrización de curvas

La parametrización determina cómo se distribuyen los valores de t entre los puntos. Métodos implementados:

1. **Uniforme:** $t_i = i/(n - 1)$
2. **Chord-length:** $t_i = t_{i-1} + \|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}\|$
3. **Centripetal:** $t_i = t_{i-1} + \|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}\|^{0,5}$
4. **Arc-chord:** combina longitud de arco con cuerda

La parameterización chord-length es más estable para curvas irregulares.

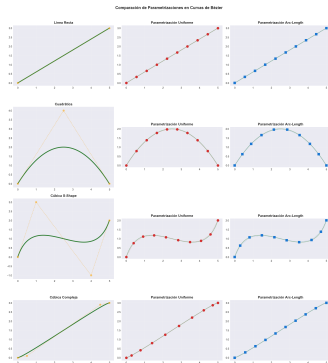


Figura: Comparación de parametrizaciones

Matriz de Bernstein

Dada una parametrización $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ y un grado n , para la **matriz de Bernstein** $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$ se define la entrada i, j como:

$$B_{i,j} = B_{j,n}(t_i) = \binom{n}{j} t_i^j (1 - t_i)^{n-j}$$

y de esta forma podemos decir que

$$C(t_j) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t_j) \mathbf{P}_i$$

y así en forma matricial si \mathbf{B} es la matriz de Bernstein, se tiene que

$$\begin{bmatrix} C(t_1) \\ C(t_2) \\ \vdots \\ C(t_m) \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{0,n}(t_1) & B_{1,n}(t_1) & \cdots & B_{n,n}(t_1) \\ B_{0,n}(t_2) & B_{1,n}(t_2) & \cdots & B_{n,n}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,n}(t_m) & B_{1,n}(t_m) & \cdots & B_{n,n}(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix}$$

Aplicación en interpolación/aproximación

Aplicación en interpolación/aproximación:

La matriz **B** puede ser utilizada para resolver problemas de interpolación y aproximación como se muestra a continuación:

- **Interpolación** ($m = n$): Resolver $\mathbf{BP} = \mathbf{D}$ para un vector de puntos de control **P**
- **Aproximación LSQ** ($m > n$): Minimizar $\|\mathbf{BP} - \mathbf{D}\|^2$ mediante $\mathbf{P} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}$

donde **D** son los puntos de datos a interpolar/aproximar.

Planteamiento del problema

Objetivo: Modelar contornos de cráneo a partir de datos médicos discretos.

Datos de entrada:

- Coordenadas (x, y) de puntos del borde del cráneo
- Lado izquierdo y derecho del contorno
- Múltiples cortes axiales (10 slices)

Desafíos:

- Datos ruidosos e irregularmente espaciados
- Necesidad de curvas suaves para visualización
- Detección de características anatómicas (protuberancia occipital)
- Mantener precisión sin oscilaciones excesivas

Enfoques de modelado implementados

Se implementaron tres enfoques complementarios:

1. **Interpolación de Bézier:** Curva que pasa exactamente por los puntos de control.
 - Grado = $N - 1$ (puede ser alto para muchos puntos)
 - Oscilaciones para muchos puntos
2. **Aproximación LSQ de Bézier:** Curva suave que minimiza el error cuadrático.
 - Grado fijo (2-8), independiente de la cantidad N de puntos
 - Sin oscilaciones, curva suave
3. **Interpolación B-spline:** Combina lo mejor de ambos.
 - Interpolación exacta con grado fijo (cúbico)
 - Control local, estabilidad numérica

Estabilidad numérica

Problema: Curvas de Bézier de alto grado sufren inestabilidad numérica.

Soluciones implementadas:

- Cálculo en espacio logarítmico para coeficientes binomiales:

$$\log \binom{n}{k} = \log \Gamma(n+1) - \log \Gamma(k+1) - \log \Gamma(n-k+1)$$

donde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, es la función gamma.

- SVD para resolver sistemas mal condicionados
- Advertencias cuando grado > 15 (interpolación) o > 20 (LSQ)
- Monitoreo del número de condición de matrices de Bernstein

Resultado: Estabilidad garantizada.

Herramientas y tecnologías

Implementación:

- **Lenguaje:** Python 3.12+
- **Bibliotecas numéricas:**
 - NumPy ≥ 2.1 y SciPy ≥ 1.14
 - Bezier $\geq 2024.6.20$
- **Visualización:**
 - Matplotlib, PyVista, VTK
- **I/O médico:** SimpleITK, pydicom, nibabel

Estructura del proyecto:

- Paquete instalable: `medvis`
- Scripts de análisis reproducibles
- Tests automatizados con `pytest`

Repositorio

`github.com/
sauribee/Topics_
in_geometry_and_
medical_
visualization`

Métricas de evaluación

Error cuadrático medio (MSE):

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{C}(t_i) - \mathbf{P}_i\|^2$$

Error máximo:

$$\text{Error}_{\max} = \max_{i=1, \dots, N} \|\mathbf{C}(t_i) - \mathbf{P}_i\|$$

Para B-splines (interpolación):

- Error teórico: precisión de máquina ($\sim 10^{-13}$)
- Confirmado experimentalmente en todos los casos

Para aproximación LSQ:

- Error depende del grado elegido
- Trade-off entre suavidad y precisión

Parámetros de ejecución - skull_reports_01

Dataset: Corte axial único del cráneo

Interpolación Bézier:

- Puntos cráneo: 12
- Puntos protuberancia: 6
- Umbral Y: 52
- Parameterización:
chord-length

Aproximación LSQ Bézier:

- Puntos muestreados: 14
- Grado cráneo: 8
- Grado protuberancia: 5

Interpolación B-spline:

- Puntos cráneo: 14
- Puntos protuberancia: 7
- Grado: 3 (cúbico)
- Knot vector: uniforme abierto

Preprocesamiento:

- Muestreo uniforme por longitud de arco
- Detección automática de protuberancia

Parámetros de ejecución - skull_reports_02

Dataset: 10 cortes axiales (corte 0 - corte 9)

Procesamiento por lotes:

- Método: B-spline cúbico
- Puntos muestreados (full): 20
- Puntos muestreados (prot): 10
- Grado: 3
- Umbral Y: 50

Estadísticas del dataset:

- Promedio: 568 puntos/slice
- Rango: 418-828 puntos

Detección de protuberancia:

- 7/10 slices con protuberancia
- Cortes 0-6: protuberancia detectada
- Cortes 7-9: solo contorno completo

Outputs generados:

- 10 reportes individuales
- Grids comparativos (2x5)
- CSV con métricas

Comparación de métodos - Contorno completo

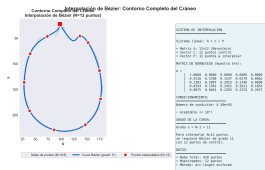


Figura: Bézier interpolación

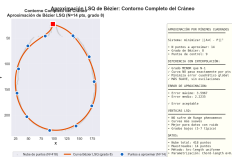


Figura: Bézier LSQ

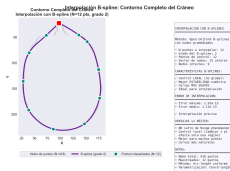


Figura: B-spline

Comparación de métodos - Protuberancia

Interpolación de Bézier: Protuberancia Occipital

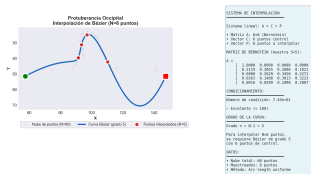


Figura: Bézier
interpolación

Aproximación LSQ de Bézier: Protuberancia Occipital

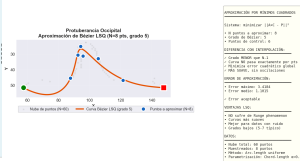


Figura: Bézier LSQ

Interpolación B-spline: Protuberancia Occipital

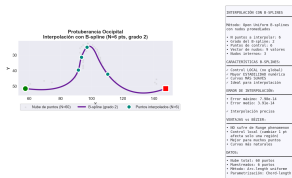


Figura: B-spline

Grids comparativos

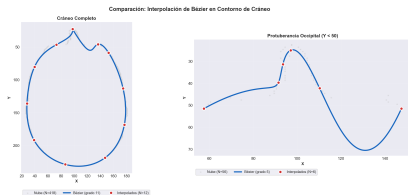


Figura: Interpolación Bézier

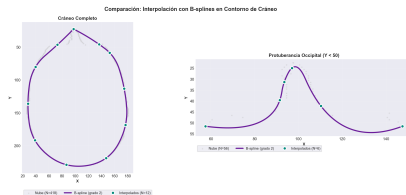


Figura: Interpolación B-spline

Análisis multi-slice - Puntos de datos

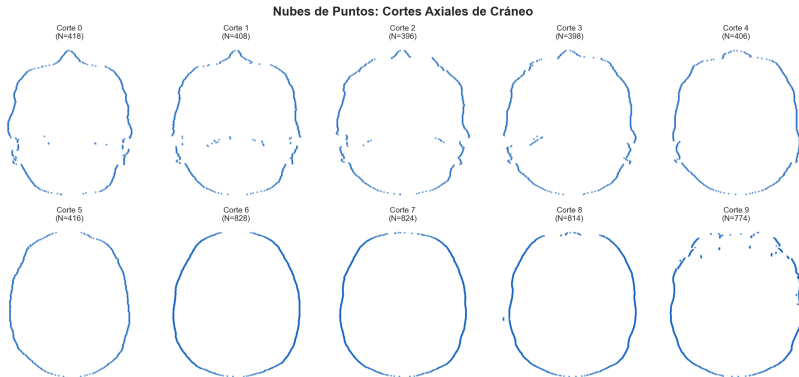


Figura: 10 cortes axiales con puntos de contorno originales (418-828 puntos por slice)

Análisis de protuberancia - Multi-slice

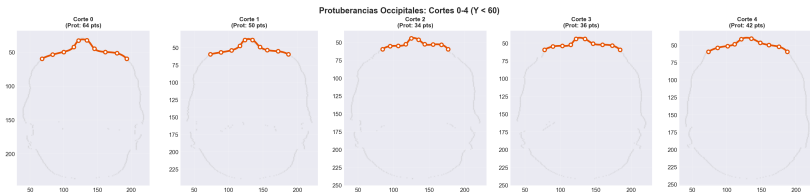


Figura: Detección y modelado de protuberancia occipital en cortes 0-4

Conexión de lados - Ejemplos

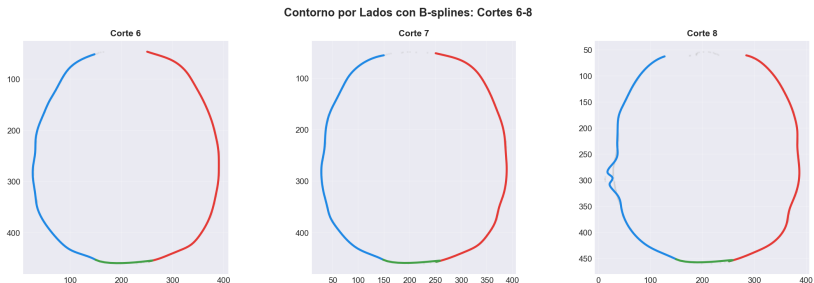


Figura: Conexión suave entre lado izquierdo y derecho en cortes 6-8

Conclusiones

Resultados principales:

- **B-splines cúbicos:** Método óptimo para contornos médicos
 - Interpolación exacta (error $\sim 10^{-13}$)
 - Estabilidad numérica garantizada
 - Control local para edición
- **Bézier interpolación:** Útil para pocos puntos (< 10)
 - Oscilaciones para muchos puntos
 - Control global más intuitivo
- **Bézier LSQ:** Mejor para suavizado
 - Trade-off entre suavidad y precisión
 - No pasa exactamente por los puntos

¡Gracias por su atención!

Repositorio: https://github.com/sauribee/Topics_in_geometry_and_medical_visualization