

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

11 Цель работы:

Ознакомиться с основными методами минимизации функций алгебры логики.

12 Теоретический блок:

Функции алгебры логики (ФАЛ) называются также булевыми (логическими) функциями, двоичными функциями или переключательными функциями.

Любая булева функция может быть записана в одной из стандартных форм – СДНФ или СКНФ:

СДНФ – совершенная дизъюнктивная нормальная форма;

СКНФ – совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Часто соответствующая физическая реализация ФАЛ громоздка и не экономична. Задача минимизации сводится к наиболее экономичному представлению функции в заданном базисе, что не совсем точно, имеется в виду не минимизация функции, которая продолжает реализовывать одну и ту же таблицу истинности, а минимизация представляющих её формул (далее дизъюнктивных нормальных форм).

В настоящее время наибольшее распространение получил базис, состоящий из отрицания $\{\neg x, \underline{x}, \sim x, \neg\neg x\}$, конъюнкции $\{\Lambda, \cdot\}$ и дизъюнкции $\{V, +\}$. Образующие его функции наиболее просты с точки зрения математических преобразований и технической реализации.

Минимизация булевых функций проводится обычно в классе ДНФ, так называемая каноническая задача минимизации, но возможна и в других базисах. Алгоритм минимизации в классе ДНФ использует два закона:

1) закон склеивания;

$$xyV\underline{xy} = y$$

2) закон поглощения.

$$xyVx = x$$

Представление булевой функции, заданной в классе ДНФ, называется минимальной дизъюнктивной нормальной формой (МДНФ), если количество букв, которое она содержит, будет не больше, чем в любой другой ее нормальной форме.

Некоторые функции могут иметь несколько минимальных форм. Все методы минимизации в классе ДНФ основываются на понятии *простой импликанты*. Введем некоторые необходимые понятия.

Рассмотрим функцию $f(x, y) = \underline{x} \underline{y} \vee \underline{x} \underline{y} \vee \underline{x} \underline{y}$. Каждое из слагаемых соответствует только одной единице в таблице истинности данной функции. Говорят, что каждое слагаемое покрывает единицу функции, а в совокупности они *покрывают* данную функцию, т.е. являются ее *покрытием*. Но заметим, что упростив функцию $f(x, y) = x \vee \underline{y}$, получим более простое покрытие. Оба представления соответствуют одной и той же таблице истинности функции, т.е. обращаются в 1 и 0 на одних и тех же наборах переменных x, y (табл. 2.1). Если обратиться к отдельным слагаемым 2-го представления, нетрудно заметить, что обращается в единицу на двух наборах $(1, 0), (1, 1)$, а - на $(0, 0), (1, 0)$, совместно они покрывают единицами все единицы данной функции. Отметим, что оба слагаемых и обращаются одновременно в нуль на наборе $(0, 1)$, т.е. там, где функция равна нулю.

Таблица 2.1. Таблица истинности

x	y	\underline{x}	\underline{y}	$\underline{x} \underline{y}$	$\underline{x} \underline{y}$	$\underline{x} \underline{y}$	$\underline{x} \underline{y} \vee \underline{x} \underline{y} \vee \underline{x} \underline{y}$	$x \vee \underline{y}$
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1

Если функция φ равна нулю на тех же наборах переменных, на которых равна нулю данная функция f , то говорят, что функция φ *входит* в функцию f . Другими словами, φ входит в f , если она покрывает нулями все нули функции f , т.е. имеет не меньшее количество нулей.

Функция φ , являющаяся элементарным произведением и входящая в функцию f , называется *импликантой*.

Среди импликант данной функции f выделяют так называемые *простые импликанты*, т.е. такие, которые сами входят в f , а никакая собственная часть их (элементарное произведение, полученное из данной импликанты исключением из нее одного или нескольких сомножителей) в функцию f не входит. Например: $xy\underline{z}, y\underline{z} \subset f$, но $y, \underline{z} \notin f$, тогда $y\underline{z}$ — простая импликанта (знак \subset означает вхождение в f , $\not\subset$ означает, что условия вхождения не выполняются).

Простые импликанты представляют собою самые короткие произведения, входящие в данную функцию. Если какое-либо элементарное произведение входит в данную функцию, то при добавлении к нему любых сомножителей новое произведение также будет входить в эту функцию, т.к. оно обращается в нуль вместе с исходным произведением.

Любая булева функция равна дизъюнкции всех своих простых импликант. Это представление функции называется *сокращенной дизъюнктивной нормальной формой*. Сокращенная форма характеризуется тем, что ее члены самые короткие, из них уже нельзя исключать ни одной буквы, но можно выбросить некоторые импликанты.

Далее будем рассматривать наиболее простые и распространённые методы минимизации в базисе $\{\sim, \wedge, \vee\}$.

12.1 Метод Куайна-МакКласки

Метод Куайна состоит в сравнении всех СДНФ данной функции между собой попарно, применяя закон склеивания $xA \vee \underline{x}A = A$. Удобно предварительно члены функции занумеровать, и поместить в таблицу. Результаты склеивания записать во 2-й столбец, а склеенные члены 1-го столбца отметить звездочкой (*). Ранг полученных конъюнкций на единицу ниже, т.е. они содержат на один знак меньше. Затем операцию повторяют на втором столбце, записывая результат в 3-й столбец и т.д.

Метод Куайна-МакКласки является модернизацией метода Квайна (его 1-го этапа). Мак-Класки предложил записывать исходные импликанты данной функции, заданной в СДНФ, в виде их двоичных кодов (каждому члену ставится в соответствие по известному правилу его собственная вершина). Все множество так записанных импликант разбивается по числу единиц в их кодах на группы. При этом в i -ю группу войдут коды, имеющие в своей записи i единиц. Попарное сравнение импликант достаточно производить только между соседними группами,

т.к. только эти группы отличаются одним знаком в кодах входящих в них членов. Сравнивая коды членов соседних групп, образуют члены низшего ранга. На месте исключенного знака пишут в них «тире». Затем всю совокупность членов низшего ранга снова разбивают на группы по местоположению знака «тире». Снова сравнивают члены соседних групп, но уже внутри групп, образуя члены низшего ранга по тому же правилу и т.д.

Далее все производится по методу Квайна, но в кодовых значениях импликант. Рассмотрим это на примере. Пусть дана функция:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \underline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\underline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2\underline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3\underline{x_4} + +x_1x_2x_3\underline{x_4} \\ &+ x_1x_2\underline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3\underline{x_4} + x_1x_2\underline{x_3}x_4 \end{aligned}$$

Заменим исходные импликанты их кодами в двоичных переменных, заменяя $\underline{x} \rightarrow 0, x \rightarrow 1$: 0011, 0100, 0101, 0111, 1001, 1011, 1100, 1101.

При попарном сравнении импликант, в случае их отличия в одном разряде на этом месте ставиться символ «-», например:

$$0100\ 0101 \Rightarrow 010 -$$

При сравнении импликант, содержащих элемент записи «-», сначала сопоставляют «-», так например:

$$-100 - 101 \Rightarrow -10 -,$$

но не

$$01 - 0 - 101 \Rightarrow \emptyset$$

Запишем импликанты в табл. 2.2.

Таблица 2.2. Таблица последовательных склеиваний

Исходная функция	Результаты первого склеивания	Результаты второго склеивания
0011	0-11	-10-
0100	-011	
0101	010-	
0111	-100	
1001	01-1	
1011	-101	

1100	10-1	
1101	1-01	
	110-	

Составляется таблица, число строк которой равно числу найденных простых импликант, а число столбцов – числу членов СДНФ данной функции. В 1-й столбец записываются первичные импликанты, в 1-ю строку члены функции. Если в член СДНФ входит первичная импликанта, то на пересечении их ставится метка (табл. 2.3).

Таблица 2.3. Таблица меток

	0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
0-11	v			v				
-011	v					v		
01-1			v	v				
10-1					v	v		
1-01					v			v
-10-		v	v				v	v

Если в каком-либо столбце составленной таблицы меток имеется только одна метка, то первичная импликанта, стоящая в соответствующей строке, является существенной. Она не может быть исключена из минимальной формы функции, т.к. без нее не может быть получено покрытие всего множества импликант данной функции. Из таблицы меток исключаются строки и столбцы, на пересечении которых стоит эта единственная метка (табл. 2.4, чем интенсивнее цвет, тем эта раньше это вычёркивание).

Таблица 2.4. Таблица меток первый шаг

	0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
0-11	v			V				
-011	v					v		
01-1			v	V				
10-1					v	v		
1-01					v			v
-10-		v	v				v	v

Если в таблице после этого этапа два одинаковых столбца (в которых метки стоят в одинаковых строках), то один из них вычеркивается, т.к. покрытие

оставшегося столбца будет осуществлять покрытие выброшенной исходной импликанты. В рассматриваемом примере таких столбцов нет.

Если в таблице появились строки, в которых нет ни одной метки, то их вычеркивают, т.е. первичные импликанты, соответствующие им, исключаются из минимальной формы функции, т.к. они не покрывают оставшихся исходных импликант. В рассмотренном примере таких строк нет.

Исследуем таблицу, полученную после всех предыдущих этапов. Выбирается такая совокупность первичных импликант, которая бы имела метки во всех столбцах. Предпочтение отдается варианту покрытия с минимальным числом букв в первичных импликантах, образующих покрытие. В данном примере все оставшиеся первичные импликанты содержат одинаковое число букв. Выберем покрытие из импликант 0-11 и 10-1 (табл. 2.5), т.к. они покрывают все 4 оставшиеся исходные импликанты. Они и будут существенными импликантами.

Таблица 2.5. Таблица меток выбор покрывающего набора

	0011	0100	0101	0111	1001	1011	1100	1101
0-11	v			v				
-011	v					v		
01-1			V	v				
10-1					v	v		
1-01					v			v
-10-		v	V				v	v

Итак, из оставшихся существенных импликант записываем тупиковую форму данной функции:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underline{x_2} \underline{x_3} + \underline{x_1} \underline{x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2} x_4$$

Замечание 1-1. В методе Квайна есть одно существенное неудобство – необходимость полного попарного сравнения на этапе нахождения первичных импликант. С ростом числа аргументов функции и определяющих ее членов СДНФ растет число этих сравнений. Этот рост характеризуется факториальной функцией. Поэтому применение метода Квайна становится затруднительным.

Замечание 1-2. По методу Квайна получаются тупиковые формы. Их может быть несколько. Среди них и надо искать минимальные формы. Для нахождения всех возможных тупиковых форм в случае сложенных таблиц можно применить естественный алгебраический метод, предложенный Петриком [5].

11.1 Метод карт Карно (Вейча)

Этот метод наиболее удобен для решения инженерных задач, т.к. позволяет упростить поиск склеивающихся членов, но он ограничен числом аргументов данной функции. Практически минимизация по методу карт Карно производится для функций с числом аргументов не более восьми.

Карта Карно представляет собою специальную таблицу функции.

Рассмотрим карту Карно (табл. 2.7) для функции 2-х переменных (табл. 2.6).

Таблица 2.6. Таблица истинности функции двух переменных

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Таблица 2.7. Карта Карно для функции двух переменных

f		x_2	
		0	1
x_1	0	1	0
	1	1	1

В карту вносятся значения функции, соответствующие наборам переменных.

Расположение клеток таблицы легко позволяет определить склеивающиеся члены. Соседние клетки соответствуют членам, отличающимся одним знаком, и их можно склеивать, если значение функции в них равно единице.

Записав члены СДНФ функции в соответствующих клетках, можно легко это увидеть (табл. 2.8).

Таблица 2.8. Карта Карно с выписанными СДНФ

f		x_2	
		0	1
x_1	0	$\underline{x_1x_2}$	0
	1	$x_1\underline{x_2}$	x_1x_2

$$f = \underline{x_1}x_2 + x_1\underline{x_2} + x_1x_2 = \underline{x_2} + x_1x_2$$

Члены столбца склеиваются той переменной, которой соответствует весь столбец, а строки – вся строка.

Расположение соответствующих элементов таблицы истинности можно осуществлять на основе кода Грея. Кодов Грея великое множество и ключевой их особенностью является отличие каждого последующего элемента от предыдущего и последующего (включая последний и первый) друг от друга только в одной позиции. Именно это свойство и используется для организации карт Карно. К сожалению, таким способом «непосредственными соседями» в карте при такой организации окажутся элементы ФАЛ с количеством переменных не более четырёх, для большего количества действую отдельные способы поиска «соседей» для операции склейки. Для конструирования одного из вариантов кода Грея, можно следовать следующей процедуре.

Начните со столбца со значениями (0, 1), присоедините к его концу инвертированную текущую последовательность и добавьте столбец слева, где на каждую «подпоследовательность» назначьте соответственно 0 и 1, как продемонстрировано в табл. 2.9. Таким образом можно синтезировать код Грея любой разрядности.

Таблица 2.9. Синтез кода Грея

Первый шаг	Второй шаг	Третий шаг
0	00	000
1	01	001
	11	011
	10	010
		110
		111
		101
		100

Ниже приведены примеры форм организации карт Карно для ФАЛ трёх (табл. 2.1), четырёх (табл. 2.10), пяти (табл. 2.11) и шести (табл. 2.12) переменных. При использовании более четырёх аргументов, возможны формы организации

карты Карно как симметрично относительно центральной оси карты, так и «внахлест». В табл. 2.11 и табл. 2.12 продемонстрированы симметричные варианты.

Таблица 2.10. Карта Карно для функции четырёх переменных

f		x_3x_4			
		00	01	11	10
x_1x_2	00				
	01				
	11				
	10				

Таблица 2.11. Карта Карно для функции пяти переменных

f		$x_3x_4x_5$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
x_1x_2	00								
	01								
	11								
	10								

Таблица 2.12. Карта Карно для функции шести переменных

f		$x_4x_5x_6$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
$x_1x_2x_3$	000								
	001								
	011								
	010								
	110								
	111								
	101								
	100								

Для функции четырёх переменных можно привести ещё одно представление карты Карно, как было упомянуто соседние коды Грэя отличаются только в одном разряде,

включая начальный конечный элементы кода, представьте, что свернули карту Карно сначала в цилиндр стык в стык, после чего также соединили торцы, в итоге у вас получится тороидальная поверхность, как продемонстрировано на рис. 2.1.

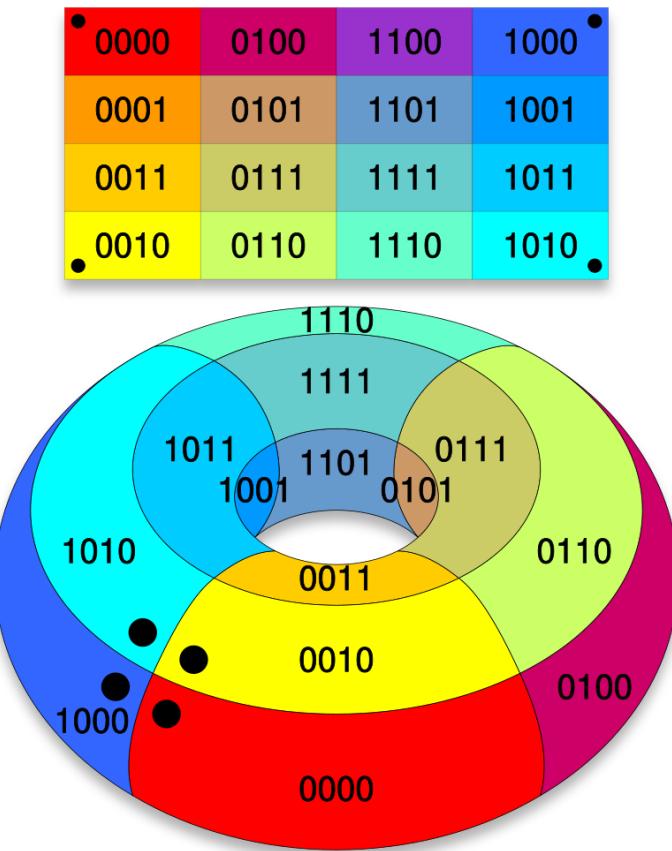


Рисунок 2.1. Тороидальное представление карты Карно

Рядом расположенные группы единиц или нулей на карте Карно объединяют в прямоугольные области или «склейки» размером $2^a \times 2^b$ клеток. Каждая такая группа в итоговой логической формуле будет соответствовать одному терму (если считать, что операция логического «ИЛИ» — это «суммирование», а операция логического «И» — это «перемножение», то один терм соответствует одному слагаемому в случае ДНФ, или одному сомножителю в случае КНФ), содержащему $n - a - b$ переменных, это группирование обычно называют «склейкой». Таким образом, работа с картой сводится к выделению оптимального набора нескольких групп единиц (нулей) и преобразование их в логическое выражение.

Принципы склейки продемонстрированы на рис. 2.2-2.6. При склейках пытаются найти минимальный набор покрывающих склеек.

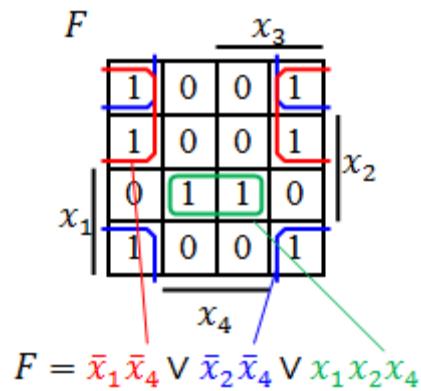


Рисунок 2.2. Принцип склейки через углы

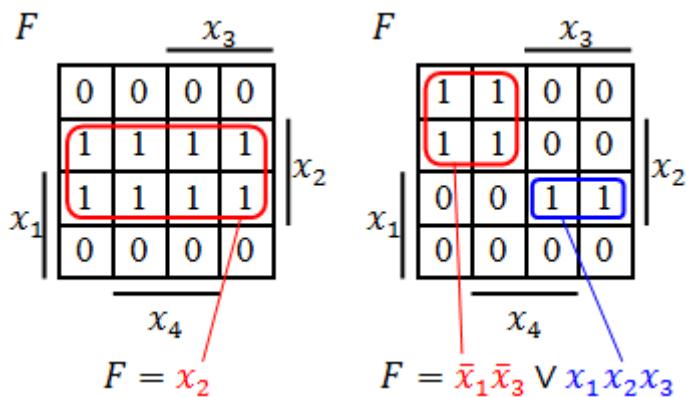


Рисунок 2.3. Примеры восстановления импликант

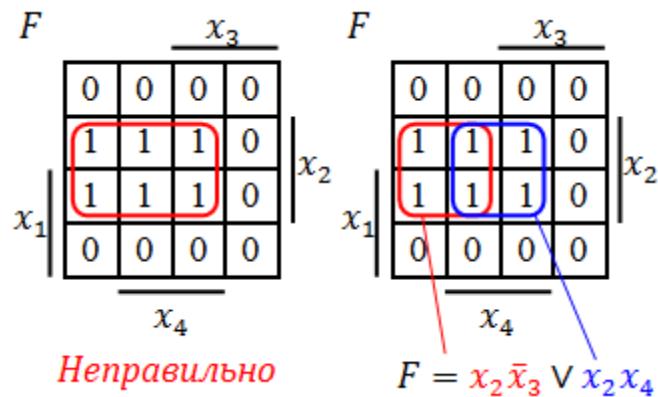


Рисунок 2.4. Пример склейки некорректного размера

F				x_3
0	0	0	0	
1	1	1	1	
1	1	1	1	
0	0	0	0	
				x_4
$F = x_2$				

F				x_3
0	0	0	0	
1	1	1	1	
1	1	1	1	
0	0	0	0	
				x_4
$F = x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3$				

Рисунок 2.5. Принцип максимизации склейки

F				x_3
0	0	0	0	
1	1	1	1	
1	1	1	0	
0	0	0	0	
				x_4
<i>Неправильно</i>				

F				x_3
0	0	0	0	
1	1	1	1	
1	1	1	0	
0	0	0	0	
				x_4
$F = x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2$				

Рисунок 2.6. Пример ошибки при склейке

12 Практический блок:

Пусть дана функция алгебры логики:

$$\begin{aligned}
 f = & x_1 x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 \underline{x_3} x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 \\
 & + x_1 x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 \\
 & + x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4}
 \end{aligned}$$

Восстановим её таблицу истинности (табл. 3.1).

Таблица 3.1. Таблица истинности функции

$x_1 x_2 x_3 x_4$	f
0000	1
0001	1
0010	0

0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	1
1001	1
1010	1
1011	1
1100	1
1101	1
1110	1
1111	1

Заполним карту Карно соответствующими значениями (табл. 3.2)

Таблица 3.2. Заполненная карта Карно

f		x_3x_4			
		00	01	11	10
x_1x_2	00	1	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Выделим склейки, покрывающие функцию, табл. 3.3.

Таблица 3.3. Выделение склеек

f		x_3x_4			
		00	01	11	10
x_1x_2	00	1	1	1	0
	01	0	1	1	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Итоговое упрощённое выражение:

$$g = x_1 + x_4 + \underline{x_2}x_3$$

Заполним таблицу истинности для минимизированного выражения и проверим её на соответствие исходной функции (табл. 3.4).

Таблица 3.4. Таблица истинности функции

$x_1x_2x_3x_4$	f	g
0000	1	1
0001	1	1
0010	0	0
0011	1	1
0100	0	0
0101	1	1
0110	0	0
0111	1	1
1000	1	1
1001	1	1
1010	1	1
1011	1	1
1100	1	1
1101	1	1
1110	1	1
1111	1	1

13 Задание для отчёта по практической работе:

Заполните таблицу истинности функции алгебры логики из пункта 5, согласно вашему варианту.

Используя карту Карно, приведённую в табл. 2.10, минимизируйте функцию алгебры логики, согласно вашему варианту.

Оформите отчёт о проделанной работе.

14 Варианты для самостоятельной работы:

$$1) f = x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3} \underline{x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} \underline{x_4} + \\ \underline{x_1 x_2 x_3} \underline{x_4}$$

$$2) f = x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2} \underline{x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + \\ \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} \underline{x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3} \underline{x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 \underline{x_4}$$

$$3) f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$4) f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \\ \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$5) f = \underline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\underline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2\underline{x_3}x_4 + \underline{x_1}x_2x_3\underline{x_4} + \underline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\underline{x_4} + \\ \underline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\underline{x_2}x_3\underline{x_4} + x_1x_2x_3x_4 + x_1\underline{x_2}x_3x_4 + x_1\underline{x_2}x_3x_4 + \underline{x_1}x_2x_3x_4 + \\ \underline{x_1}x_2x_3x_4$$

$$6) f = x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + \\ \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$7) f = x_1x_2x_3\underline{x_4} + x_1\underline{x_2}x_3x_4 + \underline{x_1}x_2x_3x_4 + \underline{x_1x_2}x_3x_4 + \underline{x_1}x_2x_3x_4 + \underline{x_1x_2x_3}x_4 + \\ \underline{x_1x_2x_3}x_4 + x_1x_2\underline{x_3}x_4 + \underline{x_1x_2}x_3x_4 + x_1x_2x_3\underline{x_4} + x_1x_2\underline{x_3}x_4 + x_1\underline{x_2}x_3x_4 + \\ x_1x_2x_3x_4$$

$$8) f = x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + \\ x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 \underline{x_4}$$

$$9) f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} +$$

$$\underline{x_1 x_2} \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4} +$$

$$x_1 x_2 x_3 \underline{x_4}$$

$$10) \quad f = \underline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\underline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2\underline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3\underline{x_4} + x_1x_2x_3x_4 + \\ x_1x_2\underline{x_3}x_4 + \underline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1\underline{x_2}x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 + \\ x_1x_2x_3\underline{x_4} + x_1x_2x_3x_4$$

$$11) \quad f = x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \\ x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \\ \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4}$$

$$12) \quad f = x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 \underline{x_3} x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1} x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2} \underline{x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4}$$

$$13) \quad f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \\ \underline{x_1 x_2} \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$15) \quad f = x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \\ \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$16) \quad f = x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 \underline{x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2} \underline{x_3} x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4}$$

$$17) \quad f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \\ \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$18) \quad f = x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \\ \underline{x_1 x_2} \underline{x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2} \underline{x_3} x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$19) \quad f = x_1x_2x_3\underline{x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + x_1\underline{x_2x_3}x_4 + x_1x_2\underline{x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \\ x_1x_2x_3x_4 + \underline{x_1x_2x_3x_4} + x_1\underline{x_2x_3}x_4 + x_1\underline{x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \\ x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

$$20) \quad f = x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \\ \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$21) \quad f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$22) \quad f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4 + \\ \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$23) \quad f = x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2} x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2} x_3 \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2} x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2} \underline{x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4}$$

$$24) \quad f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \\ \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$25) \quad f = x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \underline{x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3} x_4 + \\ \underline{x_1 x_2 x_3} \underline{x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 x_2 \underline{x_3} x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3} x_4 + x_1 \underline{x_2 x_3} \underline{x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$26) \quad f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \\ \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + \\ x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4}$$

$$27) \quad f = \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \underline{x_1 x_2 x_3 x_4} + x_1 \underline{x_2 x_3 x_4} + x_1 x_2 \underline{x_3 x_4} + \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$28) \quad f = \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \\ \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \\ \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4}$$

$$29) \quad f = \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \\ \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \\ \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4}$$

$$30) \quad f = \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \\ \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4} + \\ \underline{x_1x_2x_3x_4} + \underline{x_1x_2x_3x_4}$$

15 Вопросы для самоконтроля

1. На основе каких законов осуществляется минимизация ФАЛ?
2. Что такое покрытие функции и импликанта?
3. Какими методами можно минимизировать ФАЛ?
4. На основе какого кода можно строить карты Карно? Какими свойствами такой код должен обладать?

16 Список литературы для самостоятельного изучения

Текст

1. Хенnessи, Дж. Л., Паттерсон, Д. А. Компьютерная архитектура: количественный подход. — 5-е изд. — М.: Вильямс, 2016. — 944 с.
2. Таненбаум, Э. Архитектура компьютера. Структурный подход. — 5-е изд. — СПб.: Питер, 2013. — 832 с.
3. Архитектура вычислительных систем [Электронный ресурс]: учебное пособие – Эл. изд. - Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf: 77 с.). - Грейбо С.В., Новосёлова Т.Е., Пронькин Н.Н., Семёнычева И.Ф. 2019
4. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. –М., Физматгиз, 1962г., -476с.
5. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.-228 с.

