# Практическая работа №4
# «Аксиомы алгебры логики, логические операции, теоремы»

## 1. Цель работы:

Ознакомиться с основными аксиомами алгебры логики, логических операций и ключевых теорем.

## 2. Теоретический блок:

### 2.1. Аксиомы алгебры логики

Алгебра логики — это математическая структура, которая оперирует бинарными переменными и логическими операциями. Основой алгебры логики являются аксиомы, представляющие собой базовые правила, регулирующие манипуляции с бинарными переменными (0 и 1). Рассмотрим часть основных аксиом алгебры логики:

- **Закон тождества**:

$$A + 0 = A$$

Если к переменной А прибавить логический 0 (ложь), результат останется равным А.

$$A \times 1 = A$$

Если переменную А умножить на логическую 1 (истина), результат останется равным А.

- **Закон нуля**:

$$A + 1 = 1$$

Если к переменной А прибавить логическую 1 (истина), результат всегда будет равен 1, независимо от значения А.

$$A \times 0 = 0$$

Если переменную А умножить на логический 0 (ложь), результат всегда будет равен 0, независимо от значения А.

- **Закон дополнения**:

$$A + \bar{A} = 1$$

Если к переменной А прибавить её логическое отрицание $\bar{A}$ (инверсию), результат всегда будет равен 1.

$$A \times \bar{A} = 0$$

Если переменную А умножить на её логическое отрицание $\bar{A}$, результат всегда будет равен 0.

- **Аксиома идентичности**:

$$A \wedge 1 = A$$

Если логическая переменная А конъюнктирована с 1 (истиной), результат всегда равен самому А. Это аналог утверждения, что истинность выражения сохраняется.

$$A \vee 0 = A$$

Если логическая переменная А дизъюнктирована с 0 (ложью), результат всегда равен А. Это показывает, что ложь не влияет на результат дизъюнкции.

- **Аксиома нуля и единицы**:

$$A \wedge 0 = 0$$

Если логическая переменная А конъюнктирована с 0 (ложью), результат всегда будет 0 (ложь), независимо от значения А.

$$A \vee 1 = 1$$

Если логическая переменная А дизъюнктирована с 1 (истиной), результат всегда будет 1 (истина), независимо от значения А.

- **Аксиома двойного отрицания**:

$$\neg(\neg A) = A$$

Двойное отрицание логической переменной А возвращает её к исходному значению. Это означает, что два отрицания взаимно нейтрализуются.

- **Аксиома идемпотентности**:

$$A \wedge A = A$$

Конъюнкция переменной с самой собой не изменяет её значение. Если А истинно, то $A \wedge A$ также истинно.

$$A \vee A = A$$

Дизъюнкция переменной с самой собой также не изменяет её значение. Если А истинно, то $A \vee A$ также истинно.

- **Аксиома коммутативности**:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

Порядок переменных в конъюнкции не влияет на результат. Переменные можно менять местами, и результат останется неизменным.

$$A \lor B = B \lor A$$

То же самое касается и дизъюнкции: порядок переменных не важен, результат остаётся тем же.

- **Аксиома ассоциативности**:

$$(A \land B) \land C = A \land (B \land C)$$

При объединении нескольких переменных с помощью конъюнкции, результат не зависит от расстановки скобок.

$$(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$$

То же самое верно и для дизъюнкции: порядок выполнения операций не влияет на результат.

- **Аксиома дистрибутивности**:

$$A \land (B \lor C) = (A \land B)\ \lor (A \land C)$$

Конъюнкция распределяется по дизъюнкции, аналогично умножению относительно сложения в обычной арифметике.

$$A \lor (B \land C) = (A \lor B)\ \land (A \lor C)$$

Дизъюнкция распределяется по конъюнкции, что отражает способ объединения условий приоритетного выполнения операций.

Эти аксиомы являются основой для всех остальных операций и теорем алгебры логики.

### 2.2. Основные логические операции

Логические операции — это базовые манипуляции, выполняемые над бинарными переменными. Основные логические операции включают:

- **Операция И** (AND, ∧, × или ·):
  - Результат будет равен 1, только если оба операнда равны 1.
  - Например: 1×1=1, 1×0=0.
- **Операция ИЛИ** (OR, ∨, +):
  - Результат будет равен 1, если хотя бы один операнд равен 1.
  - Пример: 1+0=1, 0+0=0.
- **Операция НЕ** ($NOT,\ \bar{A}$):
  - Инвертирует значение операнда (т. е. 0 становится 1, а 1 становится 0).
  - Пример: $\bar{1} = 0, \bar{0} = 1$
- **Операция Исключающее ИЛИ** (XOR, ⊕)
  - Результат будет равен 1, если операнды различны (т. е. один равен 1, а другой 0).
    Пример: 1⊕0=1, 1⊕1=0.

- **Операция Исключающее НЕ-ИЛИ (**XNOR**)**:
  - Результат будет равен 1, если операнды одинаковы (т. е. оба равны 1 или оба равны 0).
    Пример: XNOR (1, 1) = 1, XNOR (1, 0) = 0.

### 2.3. Теоремы алгебры логики

Из аксиом алгебры логики вытекают несколько важных теорем. Эти теоремы помогают в упрощении сложных логических выражений:

- **Закон идемпотентности**:
  - A+A=A. При сложении логической переменной с самой собой результат всегда равен самой этой переменной. Это означает, что добавление одной и той же переменной к себе не меняет результат.
  - A×A=A. При умножении логической переменной на саму себя результат также равен самой этой переменной. Это означает, что переменная «не меняется», если её умножить на саму себя.

Иными словами, закон идемпотентности показывает, что в логике можно избежать избыточных операций, так как операция с одинаковыми переменными всегда даст ту же переменную

- **Закон поглощения**:
  - $A + (A \times B) = A$. Если к переменной A добавить выражение $A \times B$, результат всегда равен A. Это потому, что если A равно 1, то весь результат равен 1, независимо от значения B, а если A равно 0, то и $A \times B$ будет 0.
  - $A \times (A + B) = A$. Если переменную A умножить на выражение A+B, результат также всегда равен A. Это объясняется тем, что если A равно 0, то результат будет 0, а если A равно 1, то результат не зависит от B и всегда будет равен 1.

Законы поглощения показывают, что можно сократить выражение, исключая ненужные или избыточные компоненты, что упрощает вычисления.

- **Распределительный закон**:
  - $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$. Этот закон напоминает распределение умножения относительно сложения в обычной арифметике. Он показывает, что умножение логической переменной на сумму других переменных эквивалентно сложению произведений этой переменной на каждую из них.
  - $A + (B \times C) = (A + B) \times (A + C)$. Этот закон — аналог распределительного закона в обычной арифметике, но для операции сложения и умножения в логике. Он позволяет разложить сумму переменной и произведения на произведение сумм.

Распределительный закон позволяет перестраивать логические выражения, что особенно полезно при проектировании логических схем, так как упрощает их структуру и делает вычисления более понятными.

### 2.4. Упрощение логических выражений

Используя аксиомы и теоремы алгебры логики, можно упрощать сложные логические выражения. Упрощение играет ключевую роль в цифровом проектировании, так как приводит к снижению сложности логических схем. Рассмотрим логику упрощения на нескольких примерах:

1. Пример упрощения выражения с использованием закона поглощения. Дано выражение:

$$A \times (A + B)$$

В этом выражении присутствует операция И (×) и операция ИЛИ (+). Мы можем применить закон поглощения, который гласит:

$$A \times (A + B) = A$$

По закону поглощения, если одна часть выражения (A) уже присутствует в результате операции ИЛИ (A+B), то результат операции И между A и A+B будет равен A. Это происходит потому, что A перекрывает всю операцию с B, делая её избыточной. Таким образом все выражение можно упростить до одной переменной A. Ответ: A.

2. Пример упрощения выражения с использованием закона дополнения. Рассмотрим следующее логическое выражение:

$$\overline{(A \times B)} + A \times B$$

В выражении есть логическое умножение (×), логическое сложение (+), и инверсия (¬). Мы можем использовать закон дополнения, который гласит:

$$A \times \bar{A} = 0$$

$$A + \bar{A} = 1$$

Мы видим, что $\overline{(A \times B)}$ и $A \times B$ являются взаимно исключающимися событиями: либо $A \times B$ истина, либо $\overline{(A \times B)}$ истина, но не оба одновременно. Поэтому, если сложить эти два противоположных выражения, результат всегда будет 1:

$$\overline{(A \times B)} + A \times B = 1$$

Ответ: выражение всегда будет равно 1, независимо от значений переменных A и B.

3. Пример упрощения выражения с использованием дистрибутивного закона. Рассмотрим более сложное выражение:

$$A \times (B + C) + A \times \bar{B}$$

Это выражение содержит две операции И (×) и одну операцию ИЛИ (+). Также есть инверсия. Здесь можно использовать дистрибутивный закон:

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

Или в обратную сторону:

$$A \times B + A \times C = A \times (B + C)$$

Мы замечаем, что обе части выражения содержат A, поэтому можно вынести A за скобки:

$$A \times [(B + C) + \bar{B}]$$

Внутри скобок выражение можно упростить. Заметим, что $B + \bar{B} = 1$, что оставляет нам:

$$(B + C) + \bar{B} = 1 + C = 1$$

Потому что 1 в операции ИЛИ (+) с чем угодно всегда даёт 1. Теперь всё выражение принимает вид:

$$A \times 1 = A$$

Таким образом все выражение упрощается до одной переменной:

$$A \times (B + C) + A \ \times \bar{B} = A$$

Ответ: A.

## 3. Практический блок

Выполнять задания предлагается в MS Excel (или аналогах). Для выполнения задач на логические операции в Excel вам понадобятся следующие функции:

- AND (И): Возвращает TRUE, если все аргументы TRUE. Это аналог операции логического И.
- OR (ИЛИ): Возвращает TRUE, если хотя бы один из аргументов TRUE. Это аналог операции логического ИЛИ.
- NOT (НЕ): Инвертирует значение логического выражения. Если аргумент TRUE, функция возвращает FALSE, и наоборот.
- IF (ЕСЛИ): Условная функция, которая возвращает одно значение, если условие выполняется, и другое значение, если условие не выполняется. Может быть полезна для обработки логических условий.

Рассмотрим задачу упрощения выражения:

$$A \cdot (\bar{A} + B)$$

Задайте значения (0 или 1) A и B в соответствующие ячейки в Excel (A1 и B1).

Рассчитайте отрицание переменной A. Для этого в отдельной ячейке (C1) введите формулу =НЕ(A1).

Выполните операцию сложения $(\bar{A} + B)$. Для этого в ячейке D1 введите формулу =ИЛИ(C1,B1).

Выполните операцию умножения. В ячейке E1 введите =И(A1, D1).

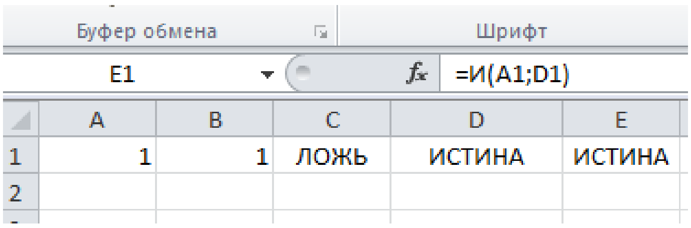


Рисунок 1 – решение задачи

## 4. Задание для отчета по лабораторной работе

Упростить логическое выражение (выбрав вариант из списка), используя аксиомы и теоремы алгебры логики. Для этого введите исходное выражение в Excel, используя соответствующие функции, и выполните упрощение, приведя выражение к его простейшей форме. Результаты и алгоритм решения отразить в отчете.

## 5. Варианты для самостоятельной работы

1. $A \cdot (B + C) + \bar{A} \cdot C$
2. $\bar{A} \cdot (B + \bar{C}) + A \cdot B$
3. $(A + B) \cdot \overline{(A \cdot C)}$
4. $(A + \bar{B}) \cdot (A \cdot C)$
5. $A + (B \cdot \bar{C}) + A \cdot B$
6. $(A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B}) + C$
7. $A \cdot B + C \cdot (A + \bar{B})$
8. $\bar{A} + (B \cdot C) + A \cdot B$
9. $(A + B) \cdot (\bar{A} + C)$
10. $(\overline{A \cdot B}) + C \cdot (A + B)$
11. $A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} + A \cdot C$
12. $A + (B \cdot C) + \bar{A} \cdot \bar{B}$
13. $A \cdot (B + C) + \bar{A} \cdot B$
14. $A + \bar{B} + \overline{(A \cdot C)}$
15. $A \cdot (\overline{B + C}) + B \cdot C$
16. $(A \cdot B) + (\overline{A + C})$
17. $A + (B \cdot \bar{C}) \cdot A$
18. $\bar{A} + (B \cdot C) + A \cdot \bar{C}$
19. $A \cdot B + (\overline{A + C})$
20. $\bar{A} + (B + C) \cdot \bar{B}$
21. $A \cdot \bar{B} + B \cdot C$
22. $A + B + (\overline{A \cdot C})$
23. $A \cdot B + \bar{A} \cdot C$
24. $\bar{A} + B + C \cdot \bar{A}$
25. $A \cdot (\overline{B + C}) + \bar{A} \cdot B$
26. $A \cdot B + \bar{B} \cdot C$
27. $A + B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot C$
28. $\bar{A} + (B \cdot C)$
29. $A \cdot \bar{B} + C \cdot (A + B)$
30. $A \cdot B + \bar{A} \cdot C + B \cdot \bar{C}$

## 6. Вопросы для самостоятельного контроля

1. Какие аксиомы и теоремы алгебры логики можно использовать для упрощения логических выражений?
2. Как влияет упрощение логических выражений на сложность цифровых схем?
3. В каких случаях необходимо использовать двойное отрицание при упрощении логических выражений?
4. Каковы основные правила применения дистрибутивного закона в логике?

## 7. Список литературы для самостоятельного изучения

1. Хеннесси, Дж. Л., Паттерсон, Д. А. Компьютерная архитектура: количественный подход. — 5-е изд. — М.: Вильямс, 2016. — 944 с.
2. Таненбаум, Э. Архитектура компьютера. Структурный подход. — 5-е изд. — СПб.: Питер, 2013. — 832 с.
3. Архитектура вычислительных систем [Электронный ресурс]: учебное пособие – Эл. изд. - Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf: 77 с.). - Грейбо С.В., Новосёлова Т.Е., Пронькин Н.Н., Семёнычева И.Ф. 2019