UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

FES UNAM ACATLÁN

Tercer Examen Parcial

Licenciatura en
Matemáticas Aplicadas y Computación

Asignatura: Cálculo III
Profesor: Saavedra Luis Héctor Axel

Grupo: 1302

20 de noviembre de 2024

Ejercicio 1

Suggest a substitution/transformation that will simplify the following integrands, and find their Jacobians.

(a) $\iint_R (3x + 2y)\sin(x - y)\, dA$

(b) $\iint_R e^{(-4x+7y)} \cos(7x - 2y)\, dA$

Solución.

Identificar la Transformación para la Parte (a)

Para la parte (a), observamos el término $3x + 2y$ junto con $\sin(x - y)$. Una sustitución útil aquí es establecer $u = x - y$ y $v = 3x + 2y$. Esta transformación se basa en la estructura de los términos para simplificar el integrando.

Calcular el Jacobiano para la Parte (a)

Para encontrar el Jacobiano de la transformación $u = x - y$ y $v = 3x + 2y$, planteamos las ecuaciones:

$$x = \frac{1}{5}(2u + v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{5}(3x - v).$$

Luego, calculamos el determinante de la matriz Jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es $\frac{1}{5}$.

Identificar la Transformación para la Parte (b)

Para la parte (b), observamos el término exponencial e^{-4x+7y} y el término trigonométrico $\cos(7x - 2y)$. Aquí, establecemos $u = -4x + 7y$ y $v = 7x - 2y$, con el objetivo de simplificar el integrando.

Calcular el Jacobiano para la Parte (b)

Para calcular el Jacobiano, expresamos x e y en términos de u y v. Las ecuaciones son:

$$x = \frac{v + 2u}{30}, \quad y = \frac{7v + 4u}{30}.$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{30} & \frac{7}{30} \end{vmatrix} = \frac{10}{900} = \frac{1}{90}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es $\frac{1}{90}$.

Ejercicio 2

Suggest a substitution/transformation that will simplify the following integrands, and find their Jacobians.

1. $\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 \, dA$
2. $\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) \, dA$

Solución.

Parte (a)

$$\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 \, dA$$

Identificar la Transformación

Observamos que los términos $5x + y$ y $x + 9y$ se pueden simplificar utilizando la transformación:

$$u = 5x + y, \quad v = x + 9y.$$

Resolver x y y en términos de u y v

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para x y y: Para calcular el Jacobiano, necesitamos escribir x y y en términos de u y v:

$$u = 5x + y \quad \text{y} \quad v = x + 9y.$$

Este sistema se resuelve como sigue:

1. Multiplicamos la primera ecuación por 9:

$$9u = 45x + 9y.$$

2. Restamos la segunda ecuación:

$$9u - v = 45x + 9y - x - 9y,$$

lo que simplifica a:

$$9u - v = 44x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{9u - v}{44}.$$

3. Usamos la primera ecuación para encontrar y:

$$y = u - 5x = u - 5\left(\frac{9u - v}{44}\right) = \frac{44u - 45u + 5v}{44} = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{9u - v}{44}, \quad y = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Calcular el Jacobiano

El Jacobiano J se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{9}{44}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{5}{44}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{9}{44} & -\frac{1}{44} \\ -\frac{1}{44} & \frac{5}{44} \end{vmatrix} = \frac{9}{44} \cdot \frac{5}{44} - \left(-\frac{1}{44} \cdot -\frac{1}{44} \right) = \frac{45}{1936} - \frac{1}{1936} = \frac{1}{44}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{\frac{1}{44}}$$

Parte (b)

$$\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) \, dA$$

Identificar la Transformación

Observamos que $6x + 7y$ aparece repetido en el integrando. Usamos la transformación:

$$u = 6x + 7y, \quad v = x.$$

Resolver x y y en términos de u y v

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para x y y:

$$x = v, \quad y = \frac{u - 6v}{7}.$$

Calcular el Jacobiano

El Jacobiano J se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{7}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{6}{7}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \end{vmatrix} = (0)(-\frac{6}{7}) - (1)(\frac{1}{7}) = -\frac{1}{7}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{-\frac{1}{7}}$$

Ejercicio 3

Sea la región D el disco unitario: $x^2 + y^2 \leq 1$. Evalua la integral:

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Haciendo el cambio de variable a coordenadas polares.

Solución.

La formula para cambiar a coordenadas polares es la siguiente:

$$x = rcos(\theta)\ y = rsen(\theta)$$

Calculamos el Jacobiano:

$$J = det(\begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{bmatrix})$$

$$J = det(\begin{bmatrix} cos(\theta) & -rsen(\theta) \\ sen(\theta) & rcos(\theta) \end{bmatrix})$$

$$\iff$$

$$J = rcos^2(\theta) + rsen^2(\theta)$$

$$\iff$$

$$J = r(sen^2(\theta) + cos^2(\theta))$$

$$\iff$$

$$J = r$$

Ahora cambiamos los indices de integración, al ser un disco, podemos usar la siguiente formula:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq radio \iff 0 \leq r \leq 1$$

Por lo que la integral se vería asi:

$$\iint_{D*} rf(rcos\theta, rsen(\theta)\, dr\, d\theta$$

$$=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} re^{r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta)}\,dr\,d\theta$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} re^{r^2(cos^2(\theta)+sen^2(\theta))}\,dr\,d\theta$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} re^{r^2}\,dr\,d\theta$$

Ya podemos comenzar a integrar:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1} re^{r^2}\,dr\,d\theta$$

$$u = r^2\ ,\ \frac{du}{2} = rdr$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{1} e^u\,du\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e-1\ d\theta$$

Que ya es una integral directa:

$$\frac{1}{2}\int 0^{2\pi}e-1\ d\theta \ = \ \frac{1}{2}[e\theta-\theta]\Big|_0^{2\pi} \ = \ \frac{2\pi e-2\pi}{2} \ = \ \frac{2\pi(e-1)}{2} \ = \ \pi(e-1)$$

El resultado es: $\pi(e-1)$

Ejercicio 4

Sea D la región dada por $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$, Evalua la integral:

$$\iint_D (x+y)\,dy\,dx$$

Haciendo el cambio de variable: $x = u+v$ y $y = u-v$, verifica la respuesta evaluando la integral de forma directa.

Solución.
Primero vamos a calcular el Jacobiano:

$$J = det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}) = |(-1) - (1)| = 2$$

El jacobiano va a multiplicar la función a integrar.

Ahora vamos a ver los nuevos indices, podemos usar desigualdades tal que:

1. $0 \leq y \iff 0 \leq u - v \iff v \leq u$
2. $y \leq x \iff u - v \leq u + v \iff -2v \leq 0 \iff 0 \leq v$
3. $x \leq 1 \iff u + v \leq 1 \iff u \leq 1 - v$
4. De 1 y 3: $v \leq u \leq 1 - v \iff v \leq 1 - v \iff v \leq \frac{1}{2}$ De 2: $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$
5. De 1 y 3: $v \leq u \leq 1 - v$

Ahora podemos plantear la nueva integral:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_v^{1-v} 2(u+v) + (u-v) \; dudv = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_v^{1-v} 4u \; dudv$$

Resolviendo:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_v^{1-v} 4u \; dudv = \int_0^{\frac{1}{2}} 2u^2 \Big|_v^{1-v} \; dv \quad = \quad \int_0^{\frac{1}{2}} 2(-2v+1)dv \quad = \quad \int_0^{\frac{1}{2}} -4v + 2 \, dv \quad = \quad -4(\frac{v^2}{2}) + 2v$$

$$= \quad -2v^2 + 2v \Big|_0^{\frac{1}{2}} \quad = \quad -2(\frac{1}{4}) + 2(\frac{1}{2}) \quad = \quad -\frac{1}{2} + 1 \quad = \quad \frac{1}{2}$$

COMPROBRACIÓN

$$\int_0^1 \int_0^x (x+y) \, dy \, dx = \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2} \Big|_0^x dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x^2}{2} \, dx \quad = \quad \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad = \quad \frac{1}{2}$$

Ejercicio 5

Let $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ be the mapping defined by:
$T(u,v) = (4u, 2u + 3v)$
Let the rectangle $[0,1] \times [1,2]$. Find $D = T(D^*)$ and evaluate:

(a) $\displaystyle\iint_D xy \; dx \; dy$

(b) $\displaystyle\iint_D (x - y) \; dx \; dy$

Solución.
El dominio D^* está definido por:

$$0 \leq u \leq \quad 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación T para obtener los límites de D:

Para x:

$x = 4u$, como u varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para y:

$y = 2u + 3v$, cuando $v = 1$, entonces: $y = 2u + 3$, cuando $v = 2$, entonces: $y = 2u + 6$

Sustituimos $u = \frac{x}{4}$ y acotamos:

$$\frac{x}{2} + 3 \leq y \leq \frac{x}{2} + 6$$

entonces: $D : 0 \leq x \leq 1 \qquad \frac{x}{2} + 3 \leq y \leq \frac{x}{2} + 6$

Procedemos a calcular la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (0)(2) = 12$$

Por lo tanto:

$$dxdy = \left| J \right| dudv = 12dudv$$

Evaluamos la primer integral:

$$\iint_D xy\ dx\ dy = \iint_{D^*} (8u^2 + 12uv) \cdot 12dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 (96u^2 + 144uv)dvdu$$
$$= \int_0^1 (96u^2v + 144u \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$
$$= \int_0^1 ((192u^2 + 288u) - (96u^2 + 72u))du$$
$$= \int_0^1 (96u^2 + 216u)du$$
$$= (\frac{96u^3}{3} + \frac{216u^2}{2})\Big|_0^1$$
$$= (\frac{96}{3} + \frac{216}{2}) - (\frac{0}{3} + \frac{0}{2})$$
$$= (32 + 108) = 140$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\iint_D (x-y)\ dx\ dy = \iint_{D^*} (2u - 3v) \cdot 12dudv$$
$$= \int_0^1 \int_1^2 (24u - 36v)dvdu$$
$$= \int_0^1 (24uv - 36 \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$
$$= \int_0^1 ((48u - 72) - (24u - 18))du$$
$$= \int_0^1 (24u - 54)du$$
$$= (\frac{24u^2}{2} - 54u)\Big|_0^1$$
$$= (12 - 54) - (0 - 0) = -42$$

Ejercicio 6

Repeat Exercise 5 for $T(u, v) = (u, v(1 + u))$

Solución.
El dominio D^* está definido por:

$$0 \leq u \leq \quad 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación T para obtener los límites de D:

Para x:

$x = u$, como u varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para y:

$y = v(1+u)$, cuando $v = 1$, entonces: $y = 1 + x$, cuando $v = 2$, entonces: $y = 2 + 2x$

$$1 + x \leq y \leq 2 + 2x$$

entonces: $D : 0 \leq x \leq 1 \qquad 1 + x \leq y \leq 2 + 2x$

Calculamos la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1+u \end{vmatrix} = (1)(1+u) - (0)(v) = 1 + u$$

Por lo tanto:

$$dxdy = \Big|J\Big|\, dudv = (1+u)dudv$$

Evaluamos la primer integral:

$$\iint_D xy\ dx\ dy = \iint_{D^*} uv(1+u) \cdot (1+u)dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 uv(1+u)^2 dvdu$$

$$= \int_0^1 (u(1+u)^2 \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$

$$= \int_0^1 ((2u(1+u)^2) - (\frac{u(1+u)^2}{2}))du$$

$$= \int_0^1 (\frac{3u^3 + 6u^2 + 3u}{2})du$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 (u^3 + 2u^2 + u)du$$
$$= \frac{3}{2} \cdot (\frac{u^4}{4} + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^2}{2})\Big|_0^1$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{12} - \frac{3}{2} \cdot 0$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{12} = \frac{17}{8}$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\iint_D (x - y)\ dx\ dy = \iint_{D^*} (u - v - uv) \cdot (1 + u)dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 (u + u^2 - v - 2uv - u^2v)dvdu$$
$$= \int_0^1 (uv + u^2v - \frac{v^2}{2} - uv^2 - \frac{u^2v^2}{2})\Big|_1^2 du$$
$$= \int_0^1 (2u + 2u^2 - 2 - 4u - 2u^2) - (u + u^2 - \frac{1}{2} - u - \frac{u^2}{2})du$$
$$= \int_0^1 (\frac{-u^2}{2} - 2u - \frac{3}{2})du$$
$$= \frac{-1}{2} \cdot \int_0^1 (u^2 + 4u + 3)du$$
$$= \frac{-1}{2} \cdot (\frac{u^3}{3} + 2u^2 + 3u)\Big|_0^1$$
$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} - \frac{-1}{2} \cdot 0$$
$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{-8}{3}$$

Ejercicio 7

Evaluate

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + x + 2y}},$$

where $D = [0, 1] \times [0, 1]$, by setting $T(u, v) = (u, \frac{v}{2})$ and evaluating an integral over D^*, where $T(D^*) = D$.

Solución.
Como $T(u,v) = (u, v/2)$ en $T(D^*) = D$, la transformación T es $x = u$ y $y = v/2$.

La transformación T está dada por el determinante $\neq 0$. El primer paso es encontrar el determinante Jacobiano de T para el cambio de variable.

El determinante Jacobiano de T es:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dado que $x = u$ y $y = v/2$,

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Det} = (1)(1/2) - (0)(0) = 1/2 - 0 = 1/2.$$

El área de $D = T(D^*)$ se obtiene integrando el valor absoluto del Jacobiano:

$$A(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Como Det $= 1/2$:

- Para x: Como $u = x$, los límites de $x \in [0,1]$ se convierten en $u \in [0,1]$. - Para y: Como $v = 2y$, si $y \in [0,1]$ entonces $v \in [2(0), 2(1)] = [0,2]$.

La integral:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x+2y}}, \quad D = [0,1] \times [0,1],$$

se expresa en términos de u, v:

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1+u+v}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Resolviendo la integral respecto a u:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1+u+v}}.$$

Sea $w = 1 + v + u$, entonces $\mathrm{d}w = \mathrm{d}u$,

$$\int \frac{1}{w^{1/2}}\mathrm{d}w = \int w^{-1/2}\mathrm{d}w = 2w^{1/2} + C.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left[2\sqrt{1+v+u}\right]_0^1 \mathrm{d}v =$$

$$\frac{1}{2}(2)\int_0^2 \left[\sqrt{1+v+1} - \sqrt{1+v+0}\right] \mathrm{d}v =$$

$$\int_0^2 \left[\sqrt{2+v} - \sqrt{1+v}\right] \mathrm{d}v.$$

Resolviendo la integral respecto a v:

Sea $w = v + 2$, $\mathrm{d}w = \mathrm{d}v$, y $z = v + 1$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}v$,

$$\int w^{1/2}\mathrm{d}w = \frac{2w^{3/2}}{3} + C, \quad \int z^{1/2}\mathrm{d}z = \frac{2z^{3/2}}{3} + C.$$

Finalmente:

$$\left[\frac{2(v+2)^{3/2}}{3} - \frac{2(v+1)^{3/2}}{3}\right]_0^2 =$$

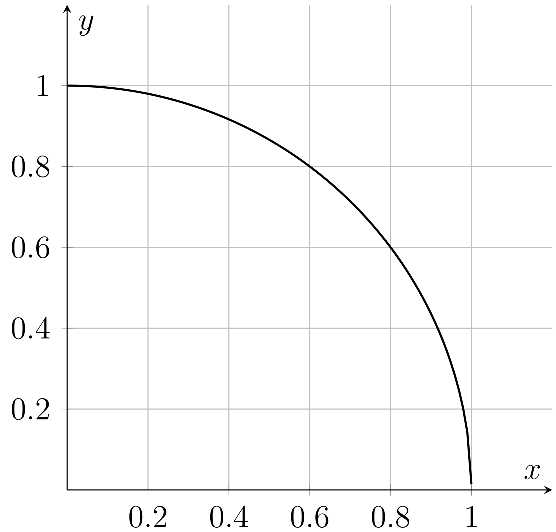
$$\frac{(16 - 2\sqrt{8})}{3} - \frac{(2\sqrt{3} - 2)}{3} \approx 0.6502803018.$$

Ejercicio 8

8. Define $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Let D^* be the set of (u,v) with $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Find $T(D^*) = D$. Evaluate $\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Solución.

Transformación y Jacobiano



El límite de D^* está dado por $u = 0$, $v = 0$, $u^2 + v^2 = 1$, con las transformaciones:

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$$

Por el Jacobiano directo, tenemos:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Calculando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 2u$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 = 4(u^2 + v^2)$$

Como la región D^* está definida por $D^* = \{(u,v)|u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$, el diferencial en (x,y) es:

$$dx\,dy = |4(u^2 + v^2)|\,du\,dv = 4(u^2 + v^2)\,du\,dv$$

La integral sobre la región D^* en (u,v) es:

$$\iint_D dx\,dy = \iint_{D^*} 4(u^2 + v^2)\,du\,dv$$

Los límites de integración para u van de 0 a 1, y v va de 0 a $\sqrt{1-u^2}$. Por lo tanto, la integral es:

$$\int_0^1 4 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} (u^2 + v^2)\,dv\,du$$

La integral en coordenadas cartesianas es:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

Esto corresponde al cuarto de círculo en el primer cuadrante con $x^2 + y^2 \leq 1$.

Resolver la integral interior

La integral interior es:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4(x^2 + y^2)\, dy$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4(x^2 + y^2)\, dy = 4 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dy + 4 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy$$

Primera parte: $4 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dy$

Dado que x^2 es constante respecto a y, esta integral es:

$$4 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dy = 4x^2 \left[y\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = 4x^2(\sqrt{1-x^2})$$

Segunda parte: $4 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy$

La integral de y^2 con respecto a y es:

$$4 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy = 4 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = 4 \cdot \frac{1}{3} \left((1-x^2)^{3/2}\right)$$

Entonces:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4(x^2 + y^2)\, dy = 4x^2(\sqrt{1-x^2}) + \frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}$$

Resolver la integral exterior

Con respecto a x, la integral es:

$$I = \int_0^1 \left[4x^2(\sqrt{1-x^2}) + \frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}\right] dx$$

Dividiendo en dos integrales separadas:

$$I = \int_0^1 4x^2(\sqrt{1-x^2})\, dx + \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}\, dx$$

Primera integral: $4x^2(\sqrt{1-x^2})$

Usamos el cambio de variable $u = 1 - x^2$, con $du = -2x\,dx$. Los límites cambian: - Cuando $x = 0$, $u = 1$ - Cuando $x = 1$, $u = 0$

$$\int_0^1 4x^2(\sqrt{1-x^2})\,dx = \int_1^0 4u^{1/2}\left(-\frac{1}{2}du\right) = \int_0^1 2u^{1/2}\,du$$

$$\int_0^1 2u^{1/2}\,du = 2\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

Segunda integral: $\frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}$

Usamos el mismo cambio de variable $u = 1 - x^2$:

$$\int_0^1 \frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{4}{3}\int_1^0 u^{3/2}\left(-\frac{1}{2}du\right) = \frac{2}{3}\int_0^1 u^{3/2}\,du$$

Resolviendo:

$$\frac{2}{3}\int_0^1 u^{3/2}\,du = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}u^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{15}$$

Resultado

Sumando ambas integrales:

$$I = \frac{4}{3} + \frac{4}{15} = \frac{20}{15} + \frac{4}{15} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$$

Cálculo de la Integral con Coordenadas Polares

La integral es:

$$\int_0^1 4 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} (u^2 + v^2)\, dv\, du$$

Puede resolverse usando coordenadas polares, donde las transformaciones son:

$$u = r\cos\theta, \quad v = r\sin\theta$$

Aquí, r es el radio y θ es el ángulo. Dado que estamos trabajando en el primer cuadrante, tenemos:

$$r \text{ va de } 0 \text{ a } 1, \quad \theta \text{ va de } 0 \text{ a } \frac{\pi}{2}$$

La integral en coordenadas polares se convierte en:

$$\iint_D 4(u^2 + v^2)\, du\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$$

Ahora, calculamos el Jacobiano de la transformación:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r^3\, dr\, d\theta$$

Separando las integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(\int_0^1 4r^3\, dr \right)$$

$$\int_0^1 4r^3\, dr = \left[\frac{4r^4}{4} \right]_0^1 = \left[r^4 \right]_0^1 = 1^4 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, al multiplicar las integrales:

$$\frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 9

Let T (u, v) be as in Exercise 8. By making a change ofvariables, “formally” evaluate the “improper” integral

(a) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy,$

Solución.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,$$

$$T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

Transformación de variables

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$$
$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2$$
$$x^2 + y^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{x^2+y^2} = u^2 + v^2$$

Determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = (2u)(2u) - (-2v)(2v) = 4u^2 + 4v^2 = 4(u^2+v^2)$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 4(u^2+v^2)$$

Integral en las nuevas variables

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{u^2+v^2}$$

$$dx\,dy = 4(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

Por lo tanto:

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint \frac{1}{u^2+v^2} \cdot 4(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint 4\,du\,dv.$$

Región de integración

La region de integracion del conjunto D^*, que es un cuarto de disco en el plano (u, v), donde:

$$u^2 + v^2 \leq 1, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Integral final en coordenadas polares

$u^2 + v^2 = r^2$, - La región es: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r \, dr \, d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^2\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \, d\theta = 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \pi.$$

Ejercicio 10

Calculate where R is the region bounded by x = 0, y = 0, x + y = 1, x + y = 4, by using the mapping T (u, v) = (u - uv, uv).

(a) $\iint_R \frac{1}{x + y} \, dy \, dx$

Solución.

$$\int \int_R \frac{1}{x + y} \, dy \, dx$$

$$T(u, v) = (u - uv, uv).$$

Transformación de variables

$$x = u - uv, \quad y = uv.$$

Determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u - (-uv) = u - uv + uv = u.$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = u.$$

Region de integracion

- $x = 0 \implies u - uv = 0 \implies u(1-v) = 0 \implies u = 0 \text{ o } v = 1,$
- $y = 0 \implies uv = 0 \implies v = 0$ (cuando $u \neq 0$),
- $x + y = 1 \implies (u - uv) + uv = 1 \implies u = 1,$
- $x + y = 4 \implies (u - uv) + uv = 4 \implies u = 4.$

$$1 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Integral final

$$\int\int_R \frac{1}{x+y}\, dy\, dx.$$

$$x + y = u, \quad dy\, dx = u\, du\, dv.$$

$$\int_1^4 \int_0^1 \frac{1}{u} \cdot u\, dv\, du = \int_1^4 \int_0^1 1\, dv\, du = \int_1^4 [v]_0^1\, du = \int_1^4 1\, du = \int_1^4 1\, du = 4 - 1 = 3$$

$$\int\int_R \frac{1}{x+y}\, dy\, dx = 3.$$

Ejercicio 11

Solución.

Ejercicio 12

Solución.

Ejercicio 13

Solución.

Ejercicio 14

Solución.

Ejercicio 15

Integrate $ze^{x^2+y^2}$ over the cylinder $x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3$.

Solución.
Trabajando con coordenadas cilindricas tenemos que

$$x = rcos\theta,$$
$$y = rsen\theta,$$
$$z = z,$$
$$0 < r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 2 \leq z \leq 3,$$

Luego tenemos que

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 = r^2(cos^2\theta + sen^2\theta) = r^2$$

Ahora, la matriz de derivadas parciales de cambio de coordenadas, para coordenadas cilíndricas está dada por:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ rsen\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ rsen\theta & rcos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \cdot rcos\theta + rsen\theta \cdot sen\theta$$

$$= r(cos^2\theta + sen^2\theta)$$

$$= r$$

$$\therefore |J| = r$$

Sea V el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4,\ 2 \leq z \leq 3$. Ahora aplicamos cambio de variable para obtener

$$\int\int\int_V ze^{x^2+y^2} dx\ dy\ dz = \int\int\int_{V^*} ze^{r^2} |J|\ dr\ d\theta\ dz$$

con $V^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 2 \leq z \leq 3\}$.

Integramos entonces,

$$\int\int\int_{V^*} ze^{r^2} |J|\ dr\ d\theta\ dz = \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 zre^{r^2}\ dr\ d\theta\ dz$$

$$= \int_3^3 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 zre^{r^2}\ dr\right]\ d\theta\, dz$$

$$= \int_2^3 z \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 re^{r^2}\ dr\right]\ d\theta\, dz$$

$$= \int_2^3 z\ dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 re^{r^2}\ dr$$

$$= \frac{z^2}{2}\Big|_2^3 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int_0^2 re^{r^2}\ dr$$

$$= (\frac{9}{2} - \frac{4}{2}) \cdot 2\pi \cdot \int_0^2 re^{r^2}\ dr$$

$$= \frac{5\pi}{2}\ \int_0^2 2re^{r^2}\ dr$$

Aplicando la sustitución

$$\begin{gathered} t = r^2 \Rightarrow dt = 2r\, dr \\ a = 0 \Rightarrow 0 \\ b = 2 \Rightarrow 4 \end{gathered}$$

Continuamos entonces

$$= \frac{5\pi^2}{2} \int_0^4 e^t\, dt$$

$$= \frac{5\pi^2}{2} [e^t]_0^4$$

$$= \frac{5\pi^2}{2} (e^4 - 1)$$

Por lo que el resultado de la integral es:

$$\boxed{= \frac{5\pi^2}{2} (e^4 - 1)}$$

Ejercicio 16

Let D be the unit disk. Express

$$\int \int_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dxdy$$

as an integral over $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ and evaluate.

Solución.

Ejercicio 17

Usando coordenadas polares, encuentra el área delimitada por la lemniscata:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Solución.

Cálculo del área de una lemniscata usando coordenadas polares

La ecuación de la lemniscata es:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Paso 1: Cambiar a coordenadas polares

En coordenadas polares, $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$, además $x^2 + y^2 = r^2$. Sustituimos en la ecuación de la lemniscata:

$$(r^2)^2 = 2a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)$$

Esto se simplifica a:

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Factorizamos r^2 (suponiendo $r \neq 0$):

$$r^2 = 2a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Usamos la identidad $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$:

$$r^2 = 2a^2\cos(2\theta)$$

Por lo tanto:

$$r = \sqrt{2a^2\cos(2\theta)}$$

Paso 2: Área en coordenadas polares

La fórmula para el área en coordenadas polares es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$$

Sustituimos $r^2 = 2a^2\cos(2\theta)$:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} 2a^2\cos(2\theta)\,d\theta$$

$$A = a^2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(2\theta)\,d\theta$$

La lemniscata tiene simetría respecto al origen, por lo que podemos calcular el área de ($-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$) y luego multiplicar por 2:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta)\, d\theta$$

Paso 3: Resolver la integral

Sabemos que $\int \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2 \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

Evaluamos los límites:

$$\sin(2\theta) \text{ en } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ es } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$\sin(2\theta) \text{ en } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ es } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Por lo tanto:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2} (1 - (-1))$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2$$

Respuesta final

El área total delimitada por la lemniscata es:

$$A = 2a^2$$

Ejercicio 18

Rehaz el Ejercicio 15 de la Sección 5.3 utilizando un cambio de variables y compara el esfuerzo involucrado en cada método.

Solución.

Cálculo del volumen

Queremos encontrar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y entre $z = 0$ y $z = 10$.

Paso 1: Conversión a coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

y la ecuación $z = x^2 + y^2$ se convierte en:

$$z = r^2,$$

ya que $x^2 + y^2 = r^2$.

Los límites son:

- $0 \leq r \leq \sqrt{10}$ (de $z = r^2$ y $z \leq 10$),
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (rotación completa alrededor del eje z),
- $0 \leq z \leq r^2$.

El elemento de volumen en coordenadas cilíndricas es:

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Paso 2: Configuración de la integral

El volumen V está dado por:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10}} \int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Paso 3: Evaluación de la integral

Primero, integramos respecto a z:

$$\int_0^{r^2} r\,dz = r[z]_0^{r^2} = r(r^2 - 0) = r^3.$$

Sustituyendo en la integral, tenemos:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{10}} r^3\,dr\,d\theta.$$

A continuación, integramos respecto a r:

$$\int_0^{\sqrt{10}} r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{10})^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{100}{4} = 25.$$

Sustituyendo nuevamente, obtenemos:

$$V = \int_0^{2\pi} 25\, d\theta.$$

Finalmente, integramos respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi} 25\, d\theta = 25[\theta]_0^{2\pi} = 25(2\pi - 0) = 50\pi.$$

Respuesta final

El volumen de la región es:

$$\boxed{50\pi}.$$

Ejercicio 19

Calcular:

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y}\, dx\, dy,$$

donde la región R está delimitada por:

$$x+y=1, \quad x+y=4, \quad x-y=-1, \quad x-y=1.$$

Solución.

$$\int\int_R (x+y)^2 e^{x-y}\, dx\, dy,$$

Donde R está delimitada por las líneas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, y $x-y=1$.

Cambio de variable

Realizamos el cambio de variables:

$$u = x+y, \quad v = x-y.$$

Ahora bien, para asegurarnos de que el cambio es válido, debemos resolver el sistema $u = x+y$ y $v = x-y$ para x y y:

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Esto muestra que el cambio es invertible, es decir, cada par (u,v) corresponde a exactamente un par (x,y).

El jacobiano del cambio es:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es:

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el diferencial se ajusta como: $dx\,dy = \frac{1}{2}\ du\,dv$

Definimos la región en el plano (u, v)

Las ecuaciones que delimitan la región R en términos de u y v son:

$$\begin{aligned} x + y = u \quad &\Rightarrow \quad u \in [1,4], \\ x - y = v \quad &\Rightarrow \quad v \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el plano (u, v), la región R es un rectángulo con:

$$1 \leq u \leq 4, \quad -1 \leq v \leq 1.$$

Reescribimos la integral aplicando el cambio de variable

Al realizar el cambio, la integral queda de la siguiente manera:

$$\int_{u=1}^{4} \int_{v=-1}^{1} u^2 e^v \cdot \frac{1}{2}\, dv\, du.$$

$$\frac{1}{2} \int_{u=1}^{4} \int_{v=-1}^{1} u^2 e^v\, dv\, du.$$

Resolver la integral

Integral respecto a v:

$$\int_{v=-1}^{1} e^v\, dv = [e^v]_{v=-1}^{1} = e^1 - e^{-1}.$$

Sustituir en la integral respecto a u:

$$\frac{1}{2}\int_{u=1}^{4} u^2(e-e^{-1})\,du.$$

Sacamos el factor constante $(e-e^{-1})$:

$$\frac{e-e^{-1}}{2}\int_{u=1}^{4} u^2\,du.$$

Integramos respecto a u y evaluamos:

$$\int_{u=1}^{4} u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_{u=1}^{4} = \frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3} = \frac{64}{3}-\frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Sustituimos el resultado

$$\frac{e-e^{-1}}{2}\cdot 21 = \frac{21}{2}(e-e^{-1}).$$

Resultado:

$$\boxed{I = \frac{21}{2}(e-e^{-1})}.$$

Ejercicio 20

Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(u,v,w) = \big(u\cos v\cos w,\ u\sin v\cos w,\ u\sin w\big).$$

(a) Muestra que T está dentro de la esfera unitaria; es decir, cada (x,y,z) con $x^2+y^2+z^2=1$ puede ser escrita como $(x,y,z)=T(u,v,w)$ para algún (u,v,w).

(b) Muestra que T no es uno a uno.

Solución.

Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(u,v,w) = (u\cos v\cos w, u\sin v\cos w, u\sin w).$$

(a) T está sobre la esfera unitaria

Para demostrar que cualquier punto (x, y, z) tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ puede escribirse como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, w).

Expresamos $x^2 + y^2 + z^2$ en términos de T

Sea $(x, y, z) = T(u, v, w)$, es decir:

$$x = u \cos v \cos w, \quad y = u \sin v \cos w, \quad z = u \sin w.$$

Entonces, el cuadrado de la norma es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (u \cos v \cos w)^2 + (u \sin v \cos w)^2 + (u \sin w)^2.$$

Agrupando términos, tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 w(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2 \sin^2 w.$$

Como $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, se simplifica a:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 w + u^2 \sin^2 w.$$

Usando $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$, obtenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Relación con la esfera unitaria

Para que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, es necesario que $u^2 = 1$, lo cual implica $u = \pm 1$.

Dado un punto (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, podemos escribir:

$$u = \pm 1, \quad v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad w = \sin^{-1}(z/u).$$

Por lo tanto, con esto demostramos que cualquier punto en la esfera unitaria puede escribirse como $T(u, v, w)$ para algún (u, v, w).

(b) T no es uno a uno

Para demostrar que $T(u, v, w)$ no es inyectiva, es decir, que existen $(u_1, v_1, w_1) \neq (u_2, v_2, w_2)$ tales que $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$.

Igualdad bajo T

Supongamos que $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$. Entonces:

$$(u_1 \cos v_1 \cos w_1, u_1 \sin v_1 \cos w_1, u_1 \sin w_1) = (u_2 \cos v_2 \cos w_2, u_2 \sin v_2 \cos w_2, u_2 \sin w_2).$$

Esto implica que:

$$u_1 \cos v_1 \cos w_1 = u_2 \cos v_2 \cos w_2, \quad u_1 \sin v_1 \cos w_1 = u_2 \sin v_2 \cos w_2, \quad u_1 \sin w_1 = u_2 \sin w_2.$$

Notemos que:

- Si $u_1 = -u_2$, entonces $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$, ya que u solo escala las coordenadas de acuerdo con la definición de T.
- Además, los ángulos v y w son periódicos. Por ejemplo, $v_1 = v_2 + 2\pi k$ y $w_1 = w_2 + 2\pi k$ generan las mismas coordenadas bajo T.

Por lo tanto, $T(u, v, w)$ no es inyectiva porque existen múltiples valores de (u, v, w) que producen el mismo punto (x, y, z).

Ejercicio 21

Integrate $x^2 + y^2 + z^2$ over the cylinder $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$

Solución.

Ejercicio 22

Evaluate

$$\int_0^\infty e^{-4x^2} dx$$

Solución.
Igualamos la expresion a I

$$I = \int_0^\infty e^{-4x^2} dx$$

ahora bien, definamos

$$\int_0^\infty e^{-4y^2} dy$$

y multipliquemos ambas integrales por el teorema de Fubibni, entonces

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-4(x^2+y^2)} dx dy$$

Apliquemos cambio de coordenadas a coordenadas cilindricas, por definicion tenemos

$$x = rcos\theta \wedge y = rsen\theta$$

Por como esta definida la distancia de un radio obtenemos

$$r^2 = (rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta$$

$$\Rightarrow r^2 = r^2\left(cos^2\theta + sen^2\theta\right)$$

y por identidades trigonometricas tenemos

$$r^2 = r^2$$

De esta manera podemos confirmar que

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Ahora bien, obtenemos el jacobiano

$$\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(r, \theta\right)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Obteniendo las derivadas parciales de $x = rcos\theta$, tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial r} = cos\theta \wedge \frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsen\theta$$

Obteniendo derivadas parciales de $y = rsen\theta$ tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial r} = sen\theta \wedge \frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos\theta$$

Aasi la jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ \\ sen\theta & rcos\theta \end{pmatrix}$$

El determinante es

$$\det(J) = \left(cos\theta\right)\left(rcos\theta\right) - \left(-rsen\theta\right)\left(sen\theta\right)$$

$$\Rightarrow det(J) = rcos^2\theta + rsen^2\theta$$

$$\Rightarrow det(J) = r\left(cos^2\theta + sen^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow det(J) = r$$

Ahora notemos que la doble integral utiliza solamente el primer cuadrante, esto porque va de 0 a ∞, al aplicar el cambio de variable

$$r \in [0, \infty]$$

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ahora bien, regresando a la integral, tenemos

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-4r^2} r dr d\theta$$

Ya que e^{-4r^2} depende solo de r, y la otra función depende solo de θ, se pueden separar las integrales como

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-4r^2} dr$$

Integrando $d\theta$, tenemos

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-4r^2} dr$$

Ahora para la otra integral, apliquemos un cambio de variable, tomemos $u = 4r^2$, derivando

$$\frac{du}{dr} = 8r \Rightarrow du = 8rdr \Rightarrow dr = \frac{du}{8}$$

Cuando $r \to \infty$, entonces $u \to \infty$, asi sustituyendo

$$\int_0^{\infty} e^{-4r^2} dr = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{8} \left(e^{-u} |_0^{\infty} \right) = \frac{1}{8} (0 - 1) = \frac{1}{8}$$

Esto porque cuando $u \to \infty$, hace que $e^{-u} \to 0$ porque la función exponencial decrece rapidamente, asi bien, obtenemos

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{16}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Asi podemos concluir que

$$\int_0^{\infty} e^{-4x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Ejercicio 23

Solución.

Ejercicio 24

Solución.

Ejercicio 25

Solución.

Ejercicio 26

Solución.

Ejercicio 27

Sea un triángulo en el plano (x, y) con vértices $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$, evalúa:

$$\iint_D \cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right)\, dx\, dy$$

Haciendo el cambio de variables apropiado.

Solución.
Definimos la región triangular. La región está limitada por tres líneas conectadas entre los vértices del triángulo:

- Para $(0,0)$ y $(1,0)$:

$$y = 0$$

- Para $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$y = x$$

- Para $(1,0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:
Pendiente: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}-1} = -1$,

$$y = 1 - x$$

De aquí definimos los límites de integración:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x$$

Hasta ahora la integral queda como:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right)\, dy\, dx$$

Definimos las nuevas variables:

$$u = x - y, \quad v = x + y$$

Calculamos el Jacobiano para ajustar las diferenciales. Resolvemos el sistema:

$$u = x - y, \quad v = x + y$$

$$x = u + y$$

Sustituyendo en v:

$$v = u + y + y = u + 2y \quad \rightarrow \quad y = \frac{v-u}{2}$$

Sustituyendo en $x = u + y$:

$$x = u + \frac{v-u}{2} = \frac{v+u}{2}$$

Para el Jacobiano:

$$dx\, dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x)}{\partial(u)} & \frac{\partial(x)}{\partial(v)} \\ \frac{\partial(y)}{\partial(u)} & \frac{\partial(y)}{\partial(v)} \end{vmatrix} dudv$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Transformamos los límites de la integral. Usamos los vértices originales: - Para $(0,0)$:

$$u = x - y = 0, \quad v = x + y = 0 \quad \rightarrow \quad (u,v) = (0,0)$$

- Para $(1,0)$:

$$u = x - y = 1, \quad v = x + y = 1 \quad \rightarrow \quad (u,v) = (1,1)$$

- Para $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$u = x - y = 0, \quad v = x + y = 1 \quad \rightarrow \quad (u,v) = (0,1)$$

Por lo tanto:

$$0 \leq v \leq 1, \quad 0 \leq u \leq v$$

Con estos cambios, la integral queda como:

$$\int_0^1 \int_0^v \cos\left(\pi \frac{u}{v}\right) \frac{1}{2}\, du\, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^v \cos\left(\pi \frac{u}{v}\right)\, du\, dv$$

Ahora resolvemos la integral del tipo:

$$\int \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) dx$$

Por cambio de variable:

$$u = \frac{\pi x}{y}, \quad du = \frac{\pi}{y} dx$$

La solución es:

$$\frac{y}{\pi} \int \cos(u)\, du = \frac{y}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) + C$$

Aplicando a nuestra integral definida:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{v}{\pi} \sin\left(\frac{\pi u}{v}\right) \Big|_0^v dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{v}{\pi} \left(\sin(\pi) - \sin(0)\right) dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 0\, dv = 0$$

Dado que el coseno es una función oscilatoria simétrica, los valores positivos y negativos se cancelan entre sí. Por lo tanto, el resultado es:

$$\therefore \int_0^1 \int_0^{1-x} \cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right) dy\, dx = 0$$

Ejercicio 28

La región D está definida por $0 \leq x \leq y$, $x^2 + y^2 \leq 1$ y la integral:

$$\iint_D x^2\, dx\, dy$$

Solución.
Por la condición $x^2 + y^2 \leq 1$, que asociamos a un círculo unitario, convendremos en usar coordenadas polares, donde:

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\sin\theta \quad \text{y} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Y también sabemos que la relación en la transformación de las diferenciales es:

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Ahora, para el cambio de variables tenemos que:

- Para la condición $x^2 + y^2 \leq 1$ implica que $0 \leq r \leq 1$.
- Para la condición $0 \leq x \leq y$ implica que la relación $\tan\theta = \frac{y}{x}$, es decir, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Una vez hechos los cambios, nuestra integral quedaría como:

$$\iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (r\cos\theta)^2\,r\,dr\,d\theta$$

Resolviendo, tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \left(\frac{1}{4} - \frac{0}{4}\right) d\theta$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta$$

Usaremos una identidad para $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, lo sustituimos y tenemos:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\theta)}{2}\,d\theta\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\,d\theta\right)$$

Para la integral del tipo $\int \cos(2\theta)\,d\theta$, resolvemos por cambio de variable:

$$u = 2\theta \quad \text{y} \quad du = 2\,d\theta$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Sustituimos en la integral definida:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \sin(2\cdot 0)\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}(1-0)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi+8}{32}\right)\\
&= \frac{4\pi+8}{4(32)} = \frac{\pi+2}{32}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{El área de la región } D \text{ es } \frac{\pi+2}{32}$$

Ejercicio 29

Solución.

Ejercicio 30

Solución.

Ejercicio 31

Solución.

Ejercicio 32

Solución.

Ejercicio 33

Solución.

Ejercicio 34

Solución.

Ejercicio 35

Solución.

Ejercicio 36

Solución.

Ejercicio 37

Solución.

Ejercicio 38

Solución.