



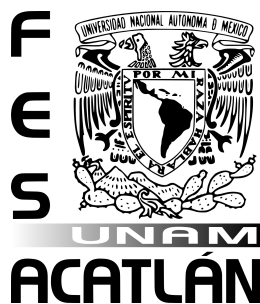
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

TERCER EXAMEN PARCIAL

Licenciatura en
Matemáticas Aplicadas y Computación

Asignatura: Cálculo III
Profesor: Saavedra Luis Héctor Axel



Grupo: 1302

20 de noviembre de 2024

Ejercicio 1

Suggest a substitution/transformation that will simplify the following integrands, and find their Jacobians.

(a) $\iint_R (3x + 2y) \sin(x - y) \, dA$

(b) $\iint_R e^{(-4x+7y)} \cos(7x - 2y) \, dA$

Solución.

Identificar la Transformación para la Parte (a)

Para la parte (a), observamos el término $3x + 2y$ junto con $\sin(x - y)$. Una sustitución útil aquí es establecer $u = x - y$ y $v = 3x + 2y$. Esta transformación se basa en la estructura de los términos para simplificar el integrando.

Calcular el Jacobiano para la Parte (a)

Para encontrar el Jacobiano de la transformación $u = x - y$ y $v = 3x + 2y$, planteamos las ecuaciones:

$$x = \frac{1}{5}(2u + v) \quad y = \frac{1}{5}(3x - v).$$

Luego, calculamos el determinante de la matriz Jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es $\frac{1}{5}$.

Identificar la Transformación para la Parte (b)

Para la parte (b), observamos el término exponencial e^{-4x+7y} y el término trigonométrico $\cos(7x-2y)$. Aquí, establecemos $u = -4x + 7y$ y $v = 7x - 2y$, con el objetivo de simplificar el integrando.

Calcular el Jacobiano para la Parte (b)

Para calcular el Jacobiano, expresamos x e y en términos de u y v . Las ecuaciones son:

$$x = \frac{v + 2u}{30}, \quad y = \frac{7v + 4u}{30}.$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{30} & \frac{7}{30} \end{vmatrix} = \frac{10}{900} = \frac{1}{90}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es $\frac{1}{90}$.

Ejercicio 2

Suggest a substitution/transformation that will simplify the following integrands, and find their Jacobians.

1. $\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 dA$
2. $\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) dA$

Solución.

Parte (a)

$$\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 dA$$

Identificar la Transformación

Observamos que los términos $5x + y$ y $x + 9y$ se pueden simplificar utilizando la transformación:

$$u = 5x + y, \quad v = x + 9y.$$

Resolver x y y en términos de u y v

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para x y y : Para calcular el Jacobiano, necesitamos escribir x y y en términos de u y v :

$$u = 5x + y \quad \text{y} \quad v = x + 9y.$$

Este sistema se resuelve como sigue:

1. Multiplicamos la primera ecuación por 9:

$$9u = 45x + 9y.$$

2. Restamos la segunda ecuación:

$$9u - v = 45x + 9y - x - 9y,$$

lo que simplifica a:

$$9u - v = 44x \quad \implies \quad x = \frac{9u - v}{44}.$$

3. Usamos la primera ecuación para encontrar y :

$$y = u - 5x = u - 5 \left(\frac{9u - v}{44} \right) = \frac{44u - 45u + 5v}{44} = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{9u - v}{44}, \quad y = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Calcular el Jacobiano

El Jacobiano J se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{9}{44}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{5}{44}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{9}{44} & -\frac{1}{44} \\ -\frac{1}{44} & \frac{5}{44} \end{vmatrix} = \frac{9}{44} \cdot \frac{5}{44} - \left(-\frac{1}{44} \cdot -\frac{1}{44} \right) = \frac{45}{1936} - \frac{1}{1936} = \frac{1}{44}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{\frac{1}{44}}$$

Parte (b)

$$\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) dA$$

Identificar la Transformación

Observamos que $6x + 7y$ aparece repetido en el integrando. Usamos la transformación:

$$u = 6x + 7y, \quad v = x.$$

Resolver x y y en términos de u y v

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para x y y :

$$x = v, \quad y = \frac{u - 6v}{7}.$$

Calcular el Jacobiano

El Jacobiano J se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{7}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{6}{7}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \end{vmatrix} = (0)\left(-\frac{6}{7}\right) - (1)\left(\frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{-\frac{1}{7}}$$

Ejercicio 3

Sea la región D el disco unitario: $x^2 + y^2 \leq 1$. Evalua la integral:

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2) dx dy$$

Haciendo el cambio de variable a coordenadas polares.

Solución.

La formula para cambiar a coordenadas polares es la siguiente:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

Calculamos el Jacobiano:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{pmatrix}$$

$$J = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$J = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$J = r(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$J = r$$

Ahora cambiamos los indices de integración, al ser un disco, podemos usar la siguiente formula:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq \text{radio} \iff 0 \leq r \leq 1$$

Por lo que la integral se vería así:

$$\iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin(\theta)) dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} dr d\theta \\
&\iff \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} dr d\theta \\
&\iff \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{r^2} dr d\theta
\end{aligned}$$

Ya podemos comenzar a integrar:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{r^2} dr d\theta \\
&u = r^2, \quad \frac{du}{2} = r dr \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 e^u du d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{1}{2} e^{r^2} \right|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e}{2} - \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e - 1 d\theta
\end{aligned}$$

Que ya es una integral directa:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e - 1 d\theta = \frac{1}{2} [e\theta - \theta]_0^{2\pi} = \frac{2\pi e - 2\pi}{2} = \frac{2\pi(e - 1)}{2} = \pi(e - 1)$$

El resultado es: $\pi(e - 1)$

Ejercicio 4

Solución.

Ejercicio 5

Let $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ be the mapping defined by:

$$T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$$

Let the rectangle $[0, 1] \times [1, 2]$. Find $D = T(D^*)$ and evaluate:

(a) $\iint_D xy \, dx \, dy$

(b) $\iint_D (x - y) \, dx \, dy$

Solución.

El dominio D^* está definido por:

$$0 \leq u \leq 1 \quad 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación T para obtener los límites de D :

Para x :

$x = 4u$, como u varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 4$$

Para y :

$y = 2u + 3v$, cuando $v = 1$, entonces: $y = 2u + 3$, cuando $v = 2$, entonces: $y = 2u + 6$

Sustituimos $u = \frac{x}{4}$ y acotamos:

$$\frac{x}{4} + 3 \leq y \leq \frac{x}{4} + 6$$

entonces: $D : 0 \leq x \leq 4 \quad \frac{x}{4} + 3 \leq y \leq \frac{x}{4} + 6$

Procedemos a calcular la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (0)(2) = 12$$

Por lo tanto:

$$dxdy = |J| \, dudv = 12dudv$$

Evaluamos la primer integral:

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dx \, dy &= \iint_{D^*} (8u^2 + 12uv) \cdot 12 \, dudv \\
 &= \int_0^1 \int_1^2 (96u^2 + 144uv) \, dv \, du \\
 &= \int_0^1 \left(96u^2v + 144u \cdot \frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^2 \, du \\
 &= \int_0^1 ((192u^2 + 288u) - (96u^2 + 72u)) \, du \\
 &= \int_0^1 (96u^2 + 216u) \, du \\
 &= \left(\frac{96u^3}{3} + \frac{216u^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \left(\frac{96}{3} + \frac{216}{2} \right) - \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) \\
 &= (32 + 108) = 140
 \end{aligned}$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x - y) \, dx \, dy &= \iint_{D^*} (2u - 3v) \cdot 12 \, dudv \\
 &= \int_0^1 \int_1^2 (24u - 36v) \, dv \, du \\
 &= \int_0^1 \left(24uv - 36 \cdot \frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^2 \, du \\
 &= \int_0^1 ((48u - 72) - (24u - 18)) \, du \\
 &= \int_0^1 (24u - 54) \, du \\
 &= \left(\frac{24u^2}{2} - 54u \right) \Big|_0^1 \\
 &= (12 - 54) - (0 - 0) = -42
 \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Repeat Exercise 5 for $T(u, v) = (u, v(1 + u))$

Solución.

El dominio D^* está definido por:

$$0 \leq u \leq 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación T para obtener los límites de D :

Para x :

$x = u$, como u varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para y :

$y = v(1 + u)$, cuando $v = 1$, entonces: $y = 1 + x$, cuando $v = 2$, entonces: $y = 2 + 2x$

$$1 + x \leq y \leq 2 + 2x$$

entonces: $D : 0 \leq x \leq 1 \quad 1 + x \leq y \leq 2 + 2x$

Calculamos la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 + u \end{vmatrix} = (1)(1 + u) - (0)(v) = 1 + u$$

Por lo tanto:

$$dxdy = |J| dudv = (1 + u)dudv$$

Evaluamos la primer integral:

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \iint_{D^*} uv(1 + u) \cdot (1 + u)dudv \\ &= \int_0^1 \int_1^2 uv(1 + u)^2 dv du \\ &= \int_0^1 \left(u(1 + u)^2 \cdot \frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^2 du \\ &= \int_0^1 \left((2u(1 + u)^2) - \left(\frac{u(1 + u)^2}{2} \right) \right) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\frac{3u^3 + 6u^2 + 3u}{2} \right) du \\
&= \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 (u^3 + 2u^2 + u) du \\
&= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u^4}{4} + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{12} - \frac{3}{2} \cdot 0 \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{12} = \frac{17}{8}
\end{aligned}$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x - y) \, dx \, dy &= \iint_{D^*} (u - v - uv) \cdot (1 + u) \, du \, dv \\
&= \int_0^1 \int_1^2 (u + u^2 - v - 2uv - u^2v) \, dv \, du \\
&= \int_0^1 \left(uv + u^2v - \frac{v^2}{2} - uv^2 - \frac{u^2v^2}{2} \right) \Big|_1^2 \, du \\
&= \int_0^1 (2u + 2u^2 - 2 - 4u - 2u^2) - \left(u + u^2 - \frac{1}{2} - u - \frac{u^2}{2} \right) \, du \\
&= \int_0^1 \left(\frac{-u^2}{2} - 2u - \frac{3}{2} \right) \, du \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \int_0^1 (u^2 + 4u + 3) \, du \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{u^3}{3} + 2u^2 + 3u \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} - \frac{-1}{2} \cdot 0 \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{-8}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7

Solución.

Ejercicio 8

Solución.

Ejercicio 9

Let $T(u, v)$ be as in Exercise 8. By making a change of variables, “formally” evaluate the “improper” integral

$$(a) \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

Solución.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

$$T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

Transformación de variables

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$$

$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2$$

$$x^2 + y^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = u^2 + v^2$$

Determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = (2u)(2u) - (-2v)(2v) = 4u^2 + 4v^2 = 4(u^2 + v^2)$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 4(u^2 + v^2)$$

Integral en las nuevas variables

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

$$dx dy = 4(u^2 + v^2) du dv.$$

Por lo tanto:

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 4(u^2 + v^2) du dv.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint 4 du dv.$$

Región de integración

La region de integracion del conjunto D^* , que es un cuarto de disco en el plano (u, v) , donde:

$$u^2 + v^2 \leq 1, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Integral final en coordenadas polares

$u^2 + v^2 = r^2$, - La región es: $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r dr d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2r^2]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 d\theta = 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \pi.$$

Ejercicio 10

Calculate where R is the region bounded by $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, by using the mapping $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

(a) $\iint_R \frac{1}{x + y} dy dx$

Solución.

$$\int \int_R \frac{1}{x+y} dy dx$$

$$T(u, v) = (u - uv, uv).$$

Transformación de variables

$$x = u - uv, \quad y = uv.$$

Determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u - (-uv) = u - uv + uv = u.$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = u.$$

Region de integracion

- $x = 0 \implies u - uv = 0 \implies u(1 - v) = 0 \implies u = 0 \text{ o } v = 1,$
- $y = 0 \implies uv = 0 \implies v = 0$ (cuando $u \neq 0$),
- $x + y = 1 \implies (u - uv) + uv = 1 \implies u = 1,$
- $x + y = 4 \implies (u - uv) + uv = 4 \implies u = 4.$

$$1 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Integral final

$$\int \int_R \frac{1}{x+y} dy dx.$$

$$x + y = u, \quad dy dx = u du dv.$$

$$\int_1^4 \int_0^1 \frac{1}{u} \cdot u dv du = \int_1^4 \int_0^1 1 dv du = \int_1^4 [v]_0^1 du = \int_1^4 1 du = \int_1^4 1 du = 4 - 1 = 3$$

$$\int \int_R \frac{1}{x+y} dy dx = 3.$$

Ejercicio 11

Solución.

Ejercicio 12

Solución.

Ejercicio 13

Solución.

Ejercicio 14

Solución.

Ejercicio 15

Integrate $ze^{x^2+y^2}$ over the cylinder $x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3$.

Solución.

Trabajando con coordenadas cilíndricas tenemos que

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta,$$

$$z = z,$$

$$0 < r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq z \leq 3,$$

Luego tenemos que

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

Ahora, la matriz de derivadas parciales de cambio de coordenadas, para coordenadas cilíndricas está dada por:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta \cdot r\cos\theta + r\sin\theta \cdot \sin\theta \\
&= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= r \\
&\therefore |J| = r
\end{aligned}$$

Sea V el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$. Ahora aplicamos cambio de variable para obtener

$$\int \int \int_V z e^{x^2+y^2} dx dy dz = \int \int \int_{V^*} z e^{r^2} |J| dr d\theta dz$$

$$\text{con } V^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq z \leq 3\}.$$

Integramos entonces,

$$\begin{aligned}
\int \int \int_{V^*} z e^{r^2} |J| dr d\theta dz &= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 z r e^{r^2} dr d\theta dz \\
&= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 z r e^{r^2} dr \right] d\theta dz \\
&= \int_2^3 z \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 r e^{r^2} dr \right] d\theta dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 z \, dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 r e^{r^2} \, dr \\
&= \frac{z^2}{2} \Big|_2^3 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int_0^2 r e^{r^2} \, dr \\
&= \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) \cdot 2\pi \cdot \int_0^2 r e^{r^2} \, dr \\
&= \frac{5\pi}{2} \int_0^2 2r e^{r^2} \, dr
\end{aligned}$$

Aplicando la sustitución

$$\begin{aligned}
t &= r^2 \Rightarrow dt = 2r \, dr \\
a &= 0 \Rightarrow 0 \\
b &= 2 \Rightarrow 4
\end{aligned}$$

Continuamos entonces

$$\begin{aligned}
&= \frac{5\pi^2}{2} \int_0^4 e^t \, dt \\
&= \frac{5\pi^2}{2} [e^t]_0^4 \\
&= \frac{5\pi^2}{2} (e^4 - 1)
\end{aligned}$$

Por lo que el resultado de la integral es:

$$\boxed{= \frac{5\pi^2}{2} (e^4 - 1)}$$

Ejercicio 16

Let D be the unit disk. Express

$$\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} \, dx \, dy$$

as an integral over $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ and evaluate.

Solución.

Ejercicio 17

Solución.

Ejercicio 18

Solución.

Ejercicio 19

Calcular:

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} dx dy,$$

donde la región R está delimitada por:

$$x+y=1, \quad x+y=4, \quad x-y=-1, \quad x-y=1.$$

Solución.

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} dx dy,$$

Donde R está delimitada por las líneas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, y $x-y=1$.

Cambio de variable

Realizamos el cambio de variables:

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Ahora bien, para asegurarnos de que el cambio es válido, debemos resolver el sistema $u = x+y$ y $v = x-y$ para x y y :

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Esto muestra que el cambio es invertible, es decir, cada par (u,v) corresponde a exactamente un par (x,y) .

El jacobiano del cambio es:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es:

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el diferencial se ajusta como: $dx dy = \frac{1}{2} du dv$

Definimos la región en el plano (u, v)

Las ecuaciones que delimitan la región R en términos de u y v son:

$$\begin{aligned} x + y = u &\Rightarrow u \in [1, 4], \\ x - y = v &\Rightarrow v \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el plano (u, v) , la región R es un rectángulo con:

$$1 \leq u \leq 4, \quad -1 \leq v \leq 1.$$

Reescribimos la integral aplicando el cambio de variable

Al realizar el cambio, la integral queda de la siguiente manera:

$$\int_{u=1}^4 \int_{v=-1}^1 u^2 e^v \cdot \frac{1}{2} dv du.$$

$$\frac{1}{2} \int_{u=1}^4 \int_{v=-1}^1 u^2 e^v dv du.$$

Resolver la integral

Integral respecto a v :

$$\int_{v=-1}^1 e^v dv = [e^v]_{v=-1}^1 = e^1 - e^{-1}.$$

Sustituir en la integral respecto a u :

$$\frac{1}{2} \int_{u=1}^4 u^2 (e - e^{-1}) du.$$

Sacamos el factor constante $(e - e^{-1})$:

$$\frac{e - e^{-1}}{2} \int_{u=1}^4 u^2 du.$$

Integramos respecto a u y evaluamos:

$$\int_{u=1}^4 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_{u=1}^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Sustituimos el resultado

$$\frac{e - e^{-1}}{2} \cdot 21 = \frac{21}{2}(e - e^{-1}).$$

Resultado:

$$I = \frac{21}{2}(e - e^{-1}).$$

Ejercicio 20

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w).$$

- (a) Muestra que T está dentro de la esfera unitaria; es decir, cada (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ puede ser escrita como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, w) .
- (b) Muestra que T no es uno a uno.

Solución.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w).$$

(a) T está sobre la esfera unitaria

Para demostrar que cualquier punto (x, y, z) tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ puede escribirse como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, w) .

Expresamos $x^2 + y^2 + z^2$ en términos de T

Sea $(x, y, z) = T(u, v, w)$, es decir:

$$x = u \cos v \cos w, \quad y = u \sin v \cos w, \quad z = u \sin w.$$

Entonces, el cuadrado de la norma es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (u \cos v \cos w)^2 + (u \sin v \cos w)^2 + (u \sin w)^2.$$

Agrupando términos, tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 w (\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2 \sin^2 w.$$

Como $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, se simplifica a:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 w + u^2 \sin^2 w.$$

Usando $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$, obtenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Relación con la esfera unitaria

Para que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, es necesario que $u^2 = 1$, lo cual implica $u = \pm 1$.

Dado un punto (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, podemos escribir:

$$u = \pm 1, \quad v = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right), \quad w = \sin^{-1}(z/u).$$

Por lo tanto, con esto demostramos que cualquier punto en la esfera unitaria puede escribirse como $T(u, v, w)$ para algún (u, v, w) .

(b) T no es uno a uno

Para demostrar que $T(u, v, w)$ no es inyectiva, es decir, que existen $(u_1, v_1, w_1) \neq (u_2, v_2, w_2)$ tales que $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$.

Igualdad bajo T

Supongamos que $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$. Entonces:

$$(u_1 \cos v_1 \cos w_1, u_1 \sin v_1 \cos w_1, u_1 \sin w_1) = (u_2 \cos v_2 \cos w_2, u_2 \sin v_2 \cos w_2, u_2 \sin w_2).$$

Esto implica que:

$$u_1 \cos v_1 \cos w_1 = u_2 \cos v_2 \cos w_2, \quad u_1 \sin v_1 \cos w_1 = u_2 \sin v_2 \cos w_2, \quad u_1 \sin w_1 = u_2 \sin w_2.$$

Notemos que:

- Si $u_1 = -u_2$, entonces $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$, ya que u solo escala las coordenadas de acuerdo con la definición de T .

- Además, los ángulos v y w son periódicos. Por ejemplo, $v_1 = v_2 + 2\pi k$ y $w_1 = w_2 + 2\pi k$ generan las mismas coordenadas bajo T .

Por lo tanto, $T(u, v, w)$ no es inyectiva porque existen múltiples valores de (u, v, w) que producen el mismo punto (x, y, z) .

Ejercicio 21

Integrate $x^2 + y^2 + z^2$ over the cylinder $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$

Solución.

Ejercicio 22

Evaluate

$$\int_0^\infty e^{-4x^2} dx$$

Solución.

Ejercicio 23

Solución.

Ejercicio 24

Solución.

Ejercicio 25

Solución.

Ejercicio 26

Solución.

Ejercicio 27

Solución.

Ejercicio 28

Solución.

Ejercicio 29

Solución.

Ejercicio 30

Solución.

Ejercicio 31

Solución.

Ejercicio 32

Solución.

Ejercicio 33

Solución.

Ejercicio 34

Solución.

Ejercicio 35

Solución.

Ejercicio 36

Solución.

Ejercicio 37

Solución.

Ejercicio 38

Solución.