



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

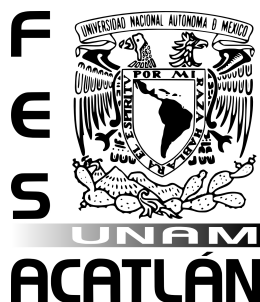
---

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

## TERCER EXAMEN PARCIAL

Licenciatura en  
Matemáticas Aplicadas y Computación

**Asignatura:** Cálculo III  
**Profesor:** Saavedra Luis Héctor Axel



**Grupo:** 1302

20 de noviembre de 2024

### Ejercicio 1

Suggest a substitution/transformation that will simplify the following integrands, and find their Jacobians.

(a)  $\iint_R (3x + 2y) \sin(x - y) \, dA$

(b)  $\iint_R e^{(-4x+7y)} \cos(7x - 2y) \, dA$

**Solución.**

### Identificar la Transformación para la Parte (a)

Para la parte (a), observamos el término  $3x + 2y$  junto con  $\sin(x - y)$ . Una sustitución útil aquí es establecer  $u = x - y$  y  $v = 3x + 2y$ . Esta transformación se basa en la estructura de los términos para simplificar el integrando.

### Calcular el Jacobiano para la Parte (a)

Para encontrar el Jacobiano de la transformación  $u = x - y$  y  $v = 3x + 2y$ , planteamos las ecuaciones:

$$x = \frac{1}{5}(2u + v) \quad y \quad y = \frac{1}{5}(3x - v).$$

Luego, calculamos el determinante de la matriz Jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es  $\frac{1}{5}$ .

## Identificar la Transformación para la Parte (b)

Para la parte (b), observamos el término exponencial  $e^{-4x+7y}$  y el término trigonométrico  $\cos(7x-2y)$ . Aquí, establecemos  $u = -4x + 7y$  y  $v = 7x - 2y$ , con el objetivo de simplificar el integrando.

## Calcular el Jacobiano para la Parte (b)

Para calcular el Jacobiano, expresamos  $x$  e  $y$  en términos de  $u$  y  $v$ . Las ecuaciones son:

$$x = \frac{v + 2u}{30}, \quad y = \frac{7v + 4u}{30}.$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{30} & \frac{7}{30} \end{vmatrix} = \frac{10}{900} = \frac{1}{90}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es  $\frac{1}{90}$ .

### Ejercicio 2

Suggest a substitution/transformation that will simplify the following integrands, and find their Jacobians.

1.  $\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 dA$
2.  $\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) dA$

**Solución.**

**Parte (a)**

$$\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 dA$$

### Identificar la Transformación

Observamos que los términos  $5x + y$  y  $x + 9y$  se pueden simplificar utilizando la transformación:

$$u = 5x + y, \quad v = x + 9y.$$

### Resolver $x$ y $y$ en términos de $u$ y $v$

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para  $x$  y  $y$ : Para calcular el Jacobiano, necesitamos escribir  $x$  y  $y$  en términos de  $u$  y  $v$ :

$$u = 5x + y \quad \text{y} \quad v = x + 9y.$$

Este sistema se resuelve como sigue:

1. Multiplicamos la primera ecuación por 9:

$$9u = 45x + 9y.$$

2. Restamos la segunda ecuación:

$$9u - v = 45x + 9y - x - 9y,$$

lo que simplifica a:

$$9u - v = 44x \quad \implies \quad x = \frac{9u - v}{44}.$$

3. Usamos la primera ecuación para encontrar  $y$ :

$$y = u - 5x = u - 5 \left( \frac{9u - v}{44} \right) = \frac{44u - 45u + 5v}{44} = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{9u - v}{44}, \quad y = \frac{-u + 5v}{44}.$$

### Calcular el Jacobiano

El Jacobiano  $J$  se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{9}{44}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{5}{44}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{9}{44} & -\frac{1}{44} \\ -\frac{1}{44} & \frac{5}{44} \end{vmatrix} = \frac{9}{44} \cdot \frac{5}{44} - \left( -\frac{1}{44} \cdot -\frac{1}{44} \right) = \frac{45}{1936} - \frac{1}{1936} = \frac{1}{44}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{\frac{1}{44}}$$

## Parte (b)

$$\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) dA$$

### Identificar la Transformación

Observamos que  $6x + 7y$  aparece repetido en el integrando. Usamos la transformación:

$$u = 6x + 7y, \quad v = x.$$

### Resolver $x$ y $y$ en términos de $u$ y $v$

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para  $x$  y  $y$ :

$$x = v, \quad y = \frac{u - 6v}{7}.$$

### Calcular el Jacobiano

El Jacobiano  $J$  se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{7}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{6}{7}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \end{vmatrix} = (0)\left(-\frac{6}{7}\right) - (1)\left(\frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{-\frac{1}{7}}$$

### Ejercicio 3

Sea la región  $D$  el disco unitario:  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Evalua la integral:

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2) dx dy$$

Haciendo el cambio de variable a coordenadas polares.

### Solución.

La formula para cambiar a coordenadas polares es la siguiente:

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

Para "estabilizar" la región, hay que calcular el Jacobiano:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{pmatrix}$$

$$J = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$J = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$J = r(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$J = r$$

Ahora cambiamos los indices de integración, al ser un disco, podemos usar la siguiente formula:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq \text{radio} \iff 0 \leq r \leq 1$$

Por lo que la integral se vería así:

$$\iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin(\theta)) dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} dr d\theta \\
&\iff \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} dr d\theta \\
&\iff \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{r^2} dr d\theta
\end{aligned}$$

Ya podemos comenzar a integrar:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 r e^{r^2} dr d\theta \\
&u = r^2, \quad \frac{du}{2} = r dr \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^1 e^u du d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{1}{2} e^{r^2} \right|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e}{2} - \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e - 1 d\theta
\end{aligned}$$

Que ya es una integral directa:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e - 1 d\theta = \frac{1}{2} [e\theta - \theta]_0^{2\pi} = \frac{2\pi e - 2\pi}{2} = \frac{2\pi(e - 1)}{2} = \pi(e - 1)$$

El resultado es:  $\pi(e - 1)$

#### Ejercicio 4

**Solución.**

### Ejercicio 5

Let  $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  be the mapping defined by:

$$T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$$

Let the rectangle  $[0, 1] \times [1, 2]$ . Find  $D = T(D^*)$  and evaluate:

(a)  $\iint_D xy \, dx \, dy$

(b)  $\iint_D (x - y) \, dx \, dy$

### Solución.

El dominio  $D^*$  está definido por:

$$0 \leq u \leq 1 \quad 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación  $T$  para obtener los límites de  $D$ :

Para  $x$ :

$x = 4u$ , como  $u$  varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 4$$

Para  $y$ :

$y = 2u + 3v$ , cuando  $v = 1$ , entonces:  $y = 2u + 3$ , cuando  $v = 2$ , entonces:  $y = 2u + 6$

Sustituimos  $u = \frac{x}{4}$  y acotamos:

$$\frac{x}{4} + 3 \leq y \leq \frac{x}{4} + 6$$

entonces:  $D : 0 \leq x \leq 4 \quad \frac{x}{4} + 3 \leq y \leq \frac{x}{4} + 6$

Procedemos a calcular la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (0)(2) = 12$$

Por lo tanto:

$$dx dy = |J| \, du dv = 12 du dv$$



Evaluamos la primer integral:

$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dx \, dy &= \iint_{D^*} (8u^2 + 12uv) \cdot 12 \, dudv \\
 &= \int_0^1 \int_1^2 (96u^2 + 144uv) \, dv \, du \\
 &= \int_0^1 \left( 96u^2v + 144u \cdot \frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^2 \, du \\
 &= \int_0^1 ((192u^2 + 288u) - (96u^2 + 72u)) \, du \\
 &= \int_0^1 (96u^2 + 216u) \, du \\
 &= \left( \frac{96u^3}{3} + \frac{216u^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \left( \frac{96}{3} + \frac{216}{2} \right) - \left( \frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) \\
 &= (32 + 108) = 140
 \end{aligned}$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x - y) \, dx \, dy &= \iint_{D^*} (2u - 3v) \cdot 12 \, dudv \\
 &= \int_0^1 \int_1^2 (24u - 36v) \, dv \, du \\
 &= \int_0^1 \left( 24uv - 36 \cdot \frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^2 \, du \\
 &= \int_0^1 ((48u - 72) - (24u - 18)) \, du \\
 &= \int_0^1 (24u - 54) \, du \\
 &= \left( \frac{24u^2}{2} - 54u \right) \Big|_0^1 \\
 &= (12 - 54) - (0 - 0) = -42
 \end{aligned}$$

### Ejercicio 6

Repeat Exercise 5 for  $T(u, v) = (u, v(1 + u))$

**Solución.**

El dominio  $D^*$  está definido por:

$$0 \leq u \leq 1 \quad 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación  $T$  para obtener los límites de  $D$ :

Para  $x$ :

$x = u$ , como  $u$  varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para  $y$ :

$y = v(1 + u)$ , cuando  $v = 1$ , entonces:  $y = 1 + x$ , cuando  $v = 2$ , entonces:  $y = 2 + 2x$

$$1 + x \leq y \leq 2 + 2x$$

entonces:  $D : 0 \leq x \leq 1 \quad 1 + x \leq y \leq 2 + 2x$

Calculamos la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 + u \end{vmatrix} = (1)(1 + u) - (0)(v) = 1 + u$$

Por lo tanto:

$$dxdy = |J| dudv = (1 + u)dudv$$

Evaluamos la primer integral:

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \iint_{D^*} uv(1 + u) \cdot (1 + u) dudv \\ &= \int_0^1 \int_1^2 uv(1 + u)^2 dv du \\ &= \int_0^1 \left( u(1 + u)^2 \cdot \frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^2 du \\ &= \int_0^1 \left( (2u(1 + u)^2) - \left( \frac{u(1 + u)^2}{2} \right) \right) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left( \frac{3u^3 + 6u^2 + 3u}{2} \right) du \\
&= \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 (u^3 + 2u^2 + u) du \\
&= \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{u^4}{4} + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{12} - \frac{3}{2} \cdot 0 \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{12} = \frac{17}{8}
\end{aligned}$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x - y) \, dx \, dy &= \iint_{D^*} (u - v - uv) \cdot (1 + u) \, du \, dv \\
&= \int_0^1 \int_1^2 (u + u^2 - v - 2uv - u^2v) \, dv \, du \\
&= \int_0^1 \left( uv + u^2v - \frac{v^2}{2} - uv^2 - \frac{u^2v^2}{2} \right) \Big|_1^2 \, du \\
&= \int_0^1 (2u + 2u^2 - 2 - 4u - 2u^2) - \left( u + u^2 - \frac{1}{2} - u - \frac{u^2}{2} \right) \, du \\
&= \int_0^1 \left( \frac{-u^2}{2} - 2u - \frac{3}{2} \right) \, du \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \int_0^1 (u^2 + 4u + 3) \, du \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \left( \frac{u^3}{3} + 2u^2 + 3u \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} - \frac{-1}{2} \cdot 0 \\
&= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{-8}{3}
\end{aligned}$$

### Ejercicio 7

Solución.

### Ejercicio 8

Solución.

### Ejercicio 9

Let  $T(u, v)$  be as in Exercise 8. By making a change of variables, “formally” evaluate the “improper” integral

$$(a) \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

Solución.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

$$T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

### Transformación de variables

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$$

$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2$$

$$x^2 + y^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = u^2 + v^2$$

### Determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = (2u)(2u) - (-2v)(2v) = 4u^2 + 4v^2 = 4(u^2 + v^2)$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 4(u^2 + v^2)$$

## Integral en las nuevas variables

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

$$dx dy = 4(u^2 + v^2) du dv.$$

Por lo tanto:

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 4(u^2 + v^2) du dv.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \iint 4 du dv.$$

## Región de integración

La region de integracion del conjunto  $D^*$ , que es un cuarto de disco en el plano  $(u, v)$ , donde:

$$u^2 + v^2 \leq 1, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

## Integral final en coordenadas polares

$u^2 + v^2 = r^2$ , - La región es:  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r dr d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2r^2]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 d\theta = 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \pi.$$

### Ejercicio 10

Calculate where  $R$  is the region bounded by  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ ,  $x + y = 4$ , by using the mapping  $T(u, v) = (u - uv, uv)$ .

$$(a) \iint_R \frac{1}{x + y} dy dx$$

**Solución.**

$$\int \int_R \frac{1}{x+y} dy dx$$

$$T(u, v) = (u - uv, uv).$$

**Transformación de variables**

$$x = u - uv, \quad y = uv.$$

**Determinante Jacobiano**

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u - (-uv) = u - uv + uv = u.$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = u.$$

**Region de integracion**

- $x = 0 \implies u - uv = 0 \implies u(1 - v) = 0 \implies u = 0 \text{ o } v = 1,$
- $y = 0 \implies uv = 0 \implies v = 0$  (cuando  $u \neq 0$ ),
- $x + y = 1 \implies (u - uv) + uv = 1 \implies u = 1,$
- $x + y = 4 \implies (u - uv) + uv = 4 \implies u = 4.$

$$1 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

**Integral final**

$$\int \int_R \frac{1}{x+y} dy dx.$$

$$x + y = u, \quad dy dx = u du dv.$$

$$\int_1^4 \int_0^1 \frac{1}{u} \cdot u dv du = \int_1^4 \int_0^1 1 dv du = \int_1^4 [v]_0^1 du = \int_1^4 1 du = \int_1^4 1 du = 4 - 1 = 3$$

$$\int \int_R \frac{1}{x+y} dy dx = 3.$$

### Ejercicio 11

Solución.

### Ejercicio 12

Solución.

### Ejercicio 13

Solución.

### Ejercicio 14

Solución.

### Ejercicio 15

Integrate  $ze^{x^2+y^2}$  over the cylinder  $x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3$ .

Solución.

Trabajando con coordenadas cilíndricas tenemos que

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta,$$

$$z = z,$$

$$0 < r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq z \leq 3,$$

Luego tenemos que

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

Ahora, la matriz de derivadas parciales de cambio de coordenadas, para coordenadas cilíndricas está dada por:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta \cdot r\cos\theta + r\sin\theta \cdot \sin\theta \\
&= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= r \\
&\therefore |J| = r
\end{aligned}$$

Sea  $V$  el cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $2 \leq z \leq 3$ . Ahora aplicamos cambio de variable para obtener

$$\int \int \int_V z e^{x^2+y^2} dx dy dz = \int \int \int_{V^*} z e^{r^2} |J| dr d\theta dz$$

$$\text{con } V^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq z \leq 3\}.$$

Integramos entonces,

$$\begin{aligned}
\int \int \int_{V^*} z e^{r^2} |J| dr d\theta dz &= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 z r e^{r^2} dr d\theta dz \\
&= \int_2^3 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^2 z r e^{r^2} dr \right] d\theta dz \\
&= \int_2^3 z \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^2 r e^{r^2} dr \right] d\theta dz
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 z \, dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 r e^{r^2} \, dr \\
&= \frac{z^2}{2} \Big|_2^3 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int_0^2 r e^{r^2} \, dr \\
&= \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) \cdot 2\pi \cdot \int_0^2 r e^{r^2} \, dr \\
&= \frac{5\pi}{2} \int_0^2 2r e^{r^2} \, dr
\end{aligned}$$

Aplicando la sustitución

$$\begin{aligned}
t &= r^2 \Rightarrow dt = 2r \, dr \\
a &= 0 \Rightarrow 0 \\
b &= 2 \Rightarrow 4
\end{aligned}$$

Continuamos entonces

$$\begin{aligned}
&= \frac{5\pi^2}{2} \int_0^4 e^t \, dt \\
&= \frac{5\pi^2}{2} [e^t]_0^4 \\
&= \frac{5\pi^2}{2} (e^4 - 1)
\end{aligned}$$

Por lo que el resultado de la integral es:

$$\boxed{= \frac{5\pi^2}{2} (e^4 - 1)}$$

### Ejercicio 16

Let  $D$  be the unit disk. Express

$$\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} \, dx \, dy$$

as an integral over  $[0, 1] \times [0, 2\pi]$  and evaluate.

**Solución.**

### Ejercicio 17

Solución.

### Ejercicio 18

Solución.

### Ejercicio 19

Calcular:

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} dx dy,$$

donde la región  $R$  está delimitada por:

$$x+y=1, \quad x+y=4, \quad x-y=-1, \quad x-y=1.$$

Solución.

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} dx dy,$$

Donde  $R$  está delimitada por las líneas  $x+y=1$ ,  $x+y=4$ ,  $x-y=-1$ , y  $x-y=1$ .

## Cambio de variable

Realizamos el cambio de variables:

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Ahora bien, para asegurarnos de que el cambio es válido, debemos resolver el sistema  $u = x+y$  y  $v = x-y$  para  $x$  y  $y$ :

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Esto muestra que el cambio es invertible, es decir, cada par  $(u,v)$  corresponde a exactamente un par  $(x,y)$ .

El jacobiano del cambio es:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es:

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el diferencial se ajusta como:  $dx dy = \frac{1}{2} du dv$

**Definimos la región en el plano  $(u, v)$**

Las ecuaciones que delimitan la región  $R$  en términos de  $u$  y  $v$  son:

$$\begin{aligned} x + y = u &\Rightarrow u \in [1, 4], \\ x - y = v &\Rightarrow v \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el plano  $(u, v)$ , la región  $R$  es un rectángulo con:

$$1 \leq u \leq 4, \quad -1 \leq v \leq 1.$$

**Reescribimos la integral aplicando el cambio de variable**

Al realizar el cambio, la integral queda de la siguiente manera:

$$\int_{u=1}^4 \int_{v=-1}^1 u^2 e^v \cdot \frac{1}{2} dv du.$$

$$\frac{1}{2} \int_{u=1}^4 \int_{v=-1}^1 u^2 e^v dv du.$$

**Resolver la integral**

**Integral respecto a  $v$ :**

$$\int_{v=-1}^1 e^v dv = [e^v]_{v=-1}^1 = e^1 - e^{-1}.$$

**Sustituir en la integral respecto a  $u$ :**

$$\frac{1}{2} \int_{u=1}^4 u^2 (e - e^{-1}) du.$$

Sacamos el factor constante  $(e - e^{-1})$ :

$$\frac{e - e^{-1}}{2} \int_{u=1}^4 u^2 du.$$

Integramos respecto a  $u$  y evaluamos:

$$\int_{u=1}^4 u^2 du = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{u=1}^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Sustituimos el resultado

$$\frac{e - e^{-1}}{2} \cdot 21 = \frac{21}{2}(e - e^{-1}).$$

Resultado:

$$I = \frac{21}{2}(e - e^{-1}).$$

### Ejercicio 20

Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w).$$

- (a) Muestra que  $T$  está dentro de la esfera unitaria; es decir, cada  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  puede ser escrita como  $(x, y, z) = T(u, v, w)$  para algún  $(u, v, w)$ .
- (b) Muestra que  $T$  no es uno a uno.

**Solución.**

Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w).$$

### (a) $T$ está sobre la esfera unitaria

Para demostrar que cualquier punto  $(x, y, z)$  tal que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  puede escribirse como  $(x, y, z) = T(u, v, w)$  para algún  $(u, v, w)$ .

**Expresamos  $x^2 + y^2 + z^2$  en términos de  $T$**

Sea  $(x, y, z) = T(u, v, w)$ , es decir:

$$x = u \cos v \cos w, \quad y = u \sin v \cos w, \quad z = u \sin w.$$

Entonces, el cuadrado de la norma es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (u \cos v \cos w)^2 + (u \sin v \cos w)^2 + (u \sin w)^2.$$

Agrupando términos, tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 w (\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2 \sin^2 w.$$

Como  $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ , se simplifica a:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 w + u^2 \sin^2 w.$$

Usando  $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$ , obtenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

## Relación con la esfera unitaria

Para que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , es necesario que  $u^2 = 1$ , lo cual implica  $u = \pm 1$ .

Dado un punto  $(x, y, z)$  con  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , podemos escribir:

$$u = \pm 1, \quad v = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right), \quad w = \sin^{-1}(z/u).$$

Por lo tanto, con esto demostramos que cualquier punto en la esfera unitaria puede escribirse como  $T(u, v, w)$  para algún  $(u, v, w)$ .

## (b) $T$ no es uno a uno

Para demostrar que  $T(u, v, w)$  no es inyectiva, es decir, que existen  $(u_1, v_1, w_1) \neq (u_2, v_2, w_2)$  tales que  $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$ .

## Igualdad bajo $T$

Supongamos que  $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$ . Entonces:

$$(u_1 \cos v_1 \cos w_1, u_1 \sin v_1 \cos w_1, u_1 \sin w_1) = (u_2 \cos v_2 \cos w_2, u_2 \sin v_2 \cos w_2, u_2 \sin w_2).$$

Esto implica que:

$$u_1 \cos v_1 \cos w_1 = u_2 \cos v_2 \cos w_2, \quad u_1 \sin v_1 \cos w_1 = u_2 \sin v_2 \cos w_2, \quad u_1 \sin w_1 = u_2 \sin w_2.$$

Notemos que:

- Si  $u_1 = -u_2$ , entonces  $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$ , ya que  $u$  solo escala las coordenadas de acuerdo con la definición de  $T$ .

- Además, los ángulos  $v$  y  $w$  son periódicos. Por ejemplo,  $v_1 = v_2 + 2\pi k$  y  $w_1 = w_2 + 2\pi k$  generan las mismas coordenadas bajo  $T$ .

Por lo tanto,  $T(u, v, w)$  no es inyectiva porque existen múltiples valores de  $(u, v, w)$  que producen el mismo punto  $(x, y, z)$ .

### Ejercicio 21

Integrate  $x^2 + y^2 + z^2$  over the cylinder  $x^2 + y^2 \leq 2$ ,  $-2 \leq z \leq 3$

Solución.

### Ejercicio 22

Evaluate

$$\int_0^\infty e^{-4x^2} dx$$

Solución.

### Ejercicio 23

Solución.

### Ejercicio 24

Solución.

### Ejercicio 25

Solución.

### Ejercicio 26

Solución.

**Ejercicio 27**

Solución.

**Ejercicio 28**

Solución.

**Ejercicio 29**

Solución.

**Ejercicio 30**

Solución.

**Ejercicio 31**

Solución.

**Ejercicio 32**

Solución.

**Ejercicio 33**

Solución.

**Ejercicio 34**

Solución.

**Ejercicio 35**

Solución.

**Ejercicio 36**

Solución.

**Ejercicio 37**

Solución.

**Ejercicio 38**

Solución.