UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tercer Examen Parcial

Licenciatura en
Matemáticas Aplicadas y Computación

Asignatura: Cálculo III
Profesor: Saavedra Luis Héctor Axel

Grupo: 1302

20 de noviembre de 2024

Ejercicio 25

Evaluate $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, where W is the solid bounded by the two spheres $x^2+y^2+z^2=a^2$ and $x^2+y^2+z^2=b^2$, where $0<b<a$.

Solución.
Note que en este caso parece apropiada utilizar un cambio de variable con coordenadas esféricas, pues W esta acotada por esferas y sabemos que $x^2+y^2+z^2$ puede remplazarse por p^2, obteniendo así una integral mucho más sencilla. Además, la región descrita en este ejercicio es la siguiente

`Gráfica`

Entonces, si W^* es la región dada por

$$b \le p \le a, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

Aplicando la fórmula del cambio de variables con coordenadas esféricas

$$\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iiint_{W^*} \frac{1}{(p^2)^{3/2}} \cdot p^2 \sin\phi\,dp\,d\theta\,d\phi = \iiint_{W^*} \frac{1}{p} \sin\phi\,dp\,d\theta\,d\phi$$

Y por el terorema de Fubini esta última integral es igual a la siguiente integral iterada

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^{a} \frac{1}{p}\sin\phi\,dp\,d\phi\,d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\log|p|\sin\phi\right]_{p=b}^{p=a}\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \log\left(\frac{a}{b}\right)\sin\phi\,d\phi\,d\theta \\
&= \log\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi\,d\theta \\
&= \log\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} \left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi}\,d\theta \\
&= \log\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} 2\,d\theta \\
&= 2\log\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\log\left(\frac{a}{b}\right)(2\pi) \\
&= 4\pi\log\left(\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 4\pi \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

Ejercicio 26

Use spherical coordinates to evaluate:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+[x^2+y^2+z^2]^2}\,dz\,dy\,dx$$

Solución.