



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

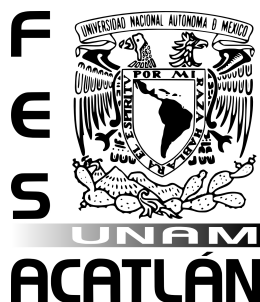
---

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

## TERCER EXAMEN PARCIAL

Licenciatura en  
Matemáticas Aplicadas y Computación

**Asignatura:** Cálculo III  
**Profesor:** Saavedra Luis Héctor Axel



**Grupo:** 1302

20 de noviembre de 2024

### Ejercicio 25

Evaluate  $\iiint_W \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ , where  $W$  is the solid bounded by the two spheres  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  and  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ , where  $0 < b < a$ .

#### Solución.

Note que en este caso parece apropiada utilizar un cambio de variable con coordenadas esféricas, pues  $W$  está acotada por esferas y sabemos que  $x^2 + y^2 + z^2$  puede remplazarse por  $p^2$ , obteniendo así una integral mucho más sencilla. Además, la región descrita en este ejercicio es la siguiente

#### Gráfica

Entonces, si  $W^*$  es la región dada por

$$b \leq p \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Aplicando la fórmula del cambio de variables con coordenadas esféricas

$$\iiint_W \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \iiint_{W^*} \frac{1}{(p^2)^{3/2}} \cdot p^2 \sin \phi dp d\theta d\phi = \iiint_{W^*} \frac{1}{p} \sin \phi dp d\theta d\phi$$

Y por el teorema de Fubini esta última integral es igual a la siguiente integral iterada

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_b^a \frac{1}{p} \sin \phi dp d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\log |p| \sin \phi]_{p=b}^{p=a} d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \log \left( \frac{a}{b} \right) \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \log \left( \frac{a}{b} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi d\theta \\ &= \log \left( \frac{a}{b} \right) \int_0^{2\pi} [-\cos \phi]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta \\ &= \log \left( \frac{a}{b} \right) \int_0^{2\pi} 2 d\theta \\ &= 2 \log \left( \frac{a}{b} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2 \log \left( \frac{a}{b} \right) (2\pi) \\ &= 4\pi \log \left( \frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\iiint_W \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 4\pi \log \left( \frac{a}{b} \right)$$

### Ejercicio 26

Use spherical coordinates to evaluate:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + [x^2 + y^2 + z^2]^2} \, dz \, dy \, dx$$

**Solución.**