UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Tercer Examen Parcial

Licenciatura en
Matemáticas Aplicadas y Computación

Asignatura: Cálculo III
Profesor: Saavedra Luis Héctor Axel

Grupo: 1302

FES UNAM ACATLÁN

20 de noviembre de 2024

Ejercicio 1

Sugiere una sustitución o transformación que simplifique las siguientes integrales dobles, y encuentra sus Jacobianos.

(a) $\iint_R (3x + 2y)\sin(x - y)\, dA$

(b) $\iint_R e^{(-4x+7y)} \cos(7x - 2y)\, dA$

Solución.

Identificar la Transformación para la Parte (a)

Para la parte (a), observamos el término $3x + 2y$ junto con $\sin(x - y)$. Una sustitución útil aquí es establecer $u = x - y$ y $v = 3x + 2y$. Esta transformación se basa en la estructura de los términos para simplificar el integrando.

Calcular el Jacobiano para la Parte (a)

Para encontrar el Jacobiano de la transformación $u = x - y$ y $v = 3x + 2y$, planteamos las ecuaciones:

$$x = \frac{1}{5}(2u + v) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{5}(3x - v).$$

Luego, calculamos el determinante de la matriz Jacobiana:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es $\frac{1}{5}$.

Identificar la Transformación para la Parte (b)

Para la parte (b), observamos el término exponencial e^{-4x+7y} y el término trigonométrico $\cos(7x - 2y)$. Aquí, establecemos $u = -4x + 7y$ y $v = 7x - 2y$, con el objetivo de simplificar el integrando.

Calcular el Jacobiano para la Parte (b)

Para calcular el Jacobiano, expresamos x e y en términos de u y v. Las ecuaciones son:

$$x = \frac{v + 2u}{30}, \quad y = \frac{7v + 4u}{30}.$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Esto resulta en:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{4}{30} & \frac{7}{30} \end{vmatrix} = \frac{10}{900} = \frac{1}{90}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es $\frac{1}{90}$.

Ejercicio 2

Sugiere una sustitución o transformación que simplifique los siguientes integrandos, y encuentra sus Jacobianos.

(a) $\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 \, dA$

(b) $\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) \, dA$

Solución.

Parte (a)

$$\iint_R (5x + y)^3 (x + 9y)^4 \, dA$$

Identificar la Transformación

Observamos que los términos $5x+y$ y $x+9y$ se pueden simplificar utilizando la transformación:

$$u = 5x + y, \quad v = x + 9y.$$

Resolver x y y en términos de u y v

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para x y y: Para calcular el Jacobiano, necesitamos escribir x y y en términos de u y v:

$$u = 5x + y \quad \text{y} \quad v = x + 9y.$$

Este sistema se resuelve como sigue:

1. Multiplicamos la primera ecuación por 9:

$$9u = 45x + 9y.$$

2. Restamos la segunda ecuación:

$$9u - v = 45x + 9y - x - 9y,$$

lo que simplifica a:

$$9u - v = 44x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{9u - v}{44}.$$

3. Usamos la primera ecuación para encontrar y:

$$y = u - 5x = u - 5\left(\frac{9u - v}{44}\right) = \frac{44u - 45u + 5v}{44} = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{9u - v}{44}, \quad y = \frac{-u + 5v}{44}.$$

Calcular el Jacobiano

El Jacobiano J se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{9}{44}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{44}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{5}{44}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{9}{44} & -\frac{1}{44} \\ -\frac{1}{44} & \frac{5}{44} \end{vmatrix} = \frac{9}{44} \cdot \frac{5}{44} - \left(-\frac{1}{44} \cdot -\frac{1}{44}\right) = \frac{45}{1936} - \frac{1}{1936} = \frac{1}{44}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{\frac{1}{44}}$$

Parte (b)

$$\iint_R x \sin(6x + 7y) - 3y \sin(6x + 7y) \, dA$$

Identificar la Transformación

Observamos que $6x + 7y$ aparece repetido en el integrando. Usamos la transformación:

$$u = 6x + 7y, \quad v = x.$$

Resolver x y y en términos de u y v

De las ecuaciones de transformación, resolvemos para x y y:

$$x = v, \quad y = \frac{u - 6v}{7}.$$

Calcular el Jacobiano

El Jacobiano J se define como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{7}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{6}{7}.$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \end{vmatrix} = (0)(-\frac{6}{7}) - (1)(\frac{1}{7}) = -\frac{1}{7}.$$

Por lo tanto, el Jacobiano es:

$$\boxed{-\frac{1}{7}}$$

Ejercicio 3

Sea D el disco unitario: $x^2 + y^2 \leq 1$. Evalúa:

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

haciendo un cambio de variables a coordenadas polares.

Solución.

La formula para cambiar a coordenadas polares es la siguiente:

$$x = rcos(\theta)\ y = rsen(\theta)$$

Calculamos el Jacobiano:

$$J = det(\begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{bmatrix})$$

$$J = det(\begin{bmatrix} cos(\theta) & -rsen(\theta) \\ sen(\theta) & rcos(\theta) \end{bmatrix})$$

$$\iff$$

$$J = rcos^2(\theta) + rsen^2(\theta)$$

$$\iff$$

$$J = r(sen^2(\theta) + cos^2(\theta))$$

$$\iff$$

$$J = r$$

Ahora cambiamos los indices de integración, al ser un disco, podemos usar la siguiente formula:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq radio \iff 0 \leq r \leq 1$$

Por lo que la integral se vería asi:

$$\iint_{D*} rf(rcos\theta, rsen(\theta)\, dr\, d\theta$$

$$=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \; re^{r^2cos^2(\theta)+r^2sen^2(\theta)}\, dr\, d\theta$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \; re^{r^2(cos^2(\theta)+sen^2(\theta))}\, dr\, d\theta$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \; re^{r^2}\, dr\, d\theta$$

Ya podemos comenzar a integrar:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \; re^{r^2}\, dr\, d\theta$$

$$u = r^2 \;,\; \frac{du}{2} = rdr$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^1 \; e^u\, du\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}e^{r^2}\bigg|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e}{2} - \frac{1}{2}\; d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e-1\; d\theta$$

Que ya es una integral directa:

$$\frac{1}{2}\int 0^{2\pi} e-1\; d\theta \;=\; \frac{1}{2}[e\theta-\theta]\bigg|_0^{2\pi} \;=\; \frac{2\pi e-2\pi}{2} \;=\; \frac{2\pi(e-1)}{2} \;=\; \pi(e-1)$$

El resultado es: $\pi(e-1)$

Ejercicio 4

Sea D la region $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$, Evalúa:

$$\iint\limits_D (x+y)\,dy\,dx$$

haciendo el cambio de variables: $x = u + v$, $y = u - v$. Comprueba tu respuesta evaluando la integral directamente usando una integral iterada.

Solución.

Primero vamos a calcular el Jacobiano:

$$J = det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}) = |(-1) - (1)| = 2$$

El jacobiano va a multiplicar la función a integrar.

Ahora vamos a ver los nuevos indices, podemos usar desigualdades tal que:

1. $0 \leq y \iff 0 \leq u - v \iff v \leq u$
2. $y \leq x \iff u - v \leq u + v \iff -2v \leq 0 \iff 0 \leq v$
3. $x \leq 1 \iff u + v \leq 1 \iff u \leq 1 - v$
4. De 1 y 3: $v \leq u \leq 1 - v \iff v \leq 1 - v \iff v \leq \frac{1}{2}$ De 2: $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$
5. De 1 y 3: $v \leq u \leq 1 - v$

Ahora podemos plantear la nueva integral:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_v^{1-v} 2(u+v) + (u-v)\ dudv = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_v^{1-v} 4u\ dudv$$

Resolviendo:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_v^{1-v} 4u\ dudv = \int_0^{\frac{1}{2}} 2u^2 \Big|_v^{1-v}\ dv \ = \int_0^{\frac{1}{2}} 2(-2v+1)dv \ = \int_0^{\frac{1}{2}} -4v + 2\,dv \ = \ -4(\frac{v^2}{2}) + 2v$$

$$= \ -2v^2 + 2v \Big|_0^{\frac{1}{2}} \ = \ -2(\frac{1}{4}) + 2(\frac{1}{2}) \ = \ -\frac{1}{2} + 1 \ = \ \frac{1}{2}$$

COMPROBRACIÓN

$$\int_0^1\int_0^x (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x^2}{2}\,dx \;=\; \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \;=\; \frac{1}{2}$$

Ejercicio 5

Sea $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ la transformación definida por $T(u,v) = (4u, 2u+3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0,1]\times[1,2]$. Encuentra $D = T(D^*)$ y evalúa:

(a) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy$

(b) $\displaystyle\iint_D (x-y)\,dx\,dy$

Solución.

El dominio D^* está definido por:

$$0 \le u \le \quad 1 \le v \le 2$$

Utilizamos los términos de la transformación T para obtener los límites de D:

Para x:

$x = 4u$, como u varía de 0 a 1:

$$0 \le x \le 1$$

Para y:

$y = 2u + 3v$, cuando $v = 1$, entonces: $y = 2u + 3$, cuando $v = 2$, entonces: $y = 2u + 6$

Sustituimos $u = \frac{x}{4}$ y acotamos:

$$\frac{x}{2} + 3 \le y \le \frac{x}{2} + 6$$

entonces: $D : 0 \le x \le 1 \qquad \frac{x}{2} + 3 \le y \le \frac{x}{2} + 6$

Procedemos a calcular la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (0)(2) = 12$$

Por lo tanto:

$$dxdy = \left|J\right| dudv = 12dudv$$

Evaluamos la primer integral:

$$\iint_D xy\ dx\ dy = \iint_{D^*} (8u^2 + 12uv) \cdot 12dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 (96u^2 + 144uv)dvdu$$

$$= \int_0^1 (96u^2v + 144u \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$

$$= \int_0^1 ((192u^2 + 288u) - (96u^2 + 72u))du$$

$$= \int_0^1 (96u^2 + 216u)du$$

$$= (\frac{96u^3}{3} + \frac{216u^2}{2})\Big|_0^1$$

$$= (\frac{96}{3} + \frac{216}{2}) - (\frac{0}{3} + \frac{0}{2})$$

$$= (32 + 108) = 140$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\iint_D (x - y)\ dx\ dy = \iint_{D^*} (2u - 3v) \cdot 12dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 (24u - 36v)dvdu$$

$$= \int_0^1 (24uv - 36 \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$

$$= \int_0^1 ((48u - 72) - (24u - 18))du$$

$$= \int_0^1 (24u - 54)du$$

$$= (\frac{24u^2}{2} - 54u)\Big|_0^1$$

$$= (12 - 54) - (0 - 0) = -42$$

Ejercicio 6

Repite el Ejercicio 5 para: $T(u, v) = (u, v(1 + u))$

Solución.
El dominio D^* está definido por:

$$0 \leq u \leq \quad 1 \leq v \leq 2$$

Utilizamos los términos de la transformación T para obtener los límites de D:

Para x:

$x = u$, como u varía de 0 a 1:

$$0 \leq x \leq 1$$

Para y:

$y = v(1 + u)$, cuando $v = 1$, entonces: $y = 1 + x$, cuando $v = 2$, entonces: $y = 2 + 2x$

$$1 + x \leq y \leq 2 + 2x$$

entonces: $D : 0 \leq x \leq 1 \qquad 1 + x \leq y \leq 2 + 2x$

Calculamos la matriz Jacobiana de la transformación:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 + u \end{vmatrix} = (1)(1 + u) - (0)(v) = 1 + u$$

Por lo tanto:

$$dxdy = \left| J \right| dudv = (1 + u)dudv$$

Evaluamos la primer integral:

$$\iint_D xy\ dx\ dy = \iint_{D^*} uv(1 + u) \cdot (1 + u)dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 uv(1 + u)^2 dvdu$$

$$= \int_0^1 (u(1+u)^2 \cdot \frac{v^2}{2})\Big|_1^2 du$$

$$= \int_0^1 ((2u(1+u)^2) - (\frac{u(1+u)^2}{2}))du$$

$$= \int_0^1 (\frac{3u^3+6u^2+3u}{2})du$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 (u^3+2u^2+u)du$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (\frac{u^4}{4} + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^2}{2})\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{12} - \frac{3}{2} \cdot 0$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{17}{12} = \frac{17}{8}$$

Evaluamos la segunda integral:

$$\iint_D (x-y)\ dx\ dy = \iint_{D^*} (u-v-uv) \cdot (1+u)dudv$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 (u+u^2-v-2uv-u^2v)dvdu$$

$$= \int_0^1 (uv+u^2v - \frac{v^2}{2} - uv^2 - \frac{u^2v^2}{2})\Big|_1^2 du$$

$$= \int_0^1 (2u+2u^2-2-4u-2u^2) - (u+u^2-\frac{1}{2}-u-\frac{u^2}{2})du$$

$$= \int_0^1 (\frac{-u^2}{2} - 2u - \frac{3}{2})du$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \int_0^1 (u^2+4u+3)du$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot (\frac{u^3}{3} + 2u^2 + 3u)\Big|_0^1$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} - \frac{-1}{2} \cdot 0$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{-8}{3}$$

Ejercicio 7

Evalúa

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x+2y}},$$

donde $D = [0,1]\times[0,1]$, estableciendo $T(u,v) = (u, v/2)$ y evaluando una integral sobre D^*, donde $T(D^*) = D$.

Solución.

Como $T(u,v) = (u, v/2)$ en $T(D^*) = D$, la transformación T es $x = u$ y $y = v/2$.

La transformación T está dada por el determinante $\neq 0$. El primer paso es encontrar el determinante Jacobiano de T para el cambio de variable.

El determinante Jacobiano de T es:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dado que $x = u$ y $y = v/2$,

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix}.$$

$$\mathrm{Det} = (1)(1/2) - (0)(0) = 1/2 - 0 = 1/2.$$

El área de $D = T(D^*)$ se obtiene integrando el valor absoluto del Jacobiano:

$$A(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Como $\mathrm{Det} = 1/2$:

- Para x: Como $u = x$, los límites de $x \in [0,1]$ se convierten en $u \in [0,1]$. - Para y: Como $v = 2y$, si $y \in [0,1]$ entonces $v \in [2(0), 2(1)] = [0,2]$.

La integral:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x+2y}}, \quad D = [0,1]\times[0,1],$$

se expresa en términos de u, v:

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1+u+v}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Resolviendo la integral respecto a u:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1+u+v}}.$$

Sea $w = 1+v+u$, entonces $\mathrm{d}w = \mathrm{d}u$,

$$\int \frac{1}{w^{1/2}}\mathrm{d}w = \int w^{-1/2}\mathrm{d}w = 2w^{1/2} + C.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left[2\sqrt{1+v+u}\right]_0^1 \mathrm{d}v =$$

$$\frac{1}{2}(2)\int_0^2 \left[\sqrt{1+v+1} - \sqrt{1+v+0}\right] \mathrm{d}v =$$

$$\int_0^2 \left[\sqrt{2+v} - \sqrt{1+v}\right] \mathrm{d}v.$$

Resolviendo la integral respecto a v:

Sea $w = v+2$, $\mathrm{d}w = \mathrm{d}v$, y $z = v+1$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}v$,

$$\int w^{1/2}\mathrm{d}w = \frac{2w^{3/2}}{3} + C, \quad \int z^{1/2}\mathrm{d}z = \frac{2z^{3/2}}{3} + C.$$

Finalmente:

$$\left[\frac{2(v+2)^{3/2}}{3} - \frac{2(v+1)^{3/2}}{3}\right]_0^2 =$$

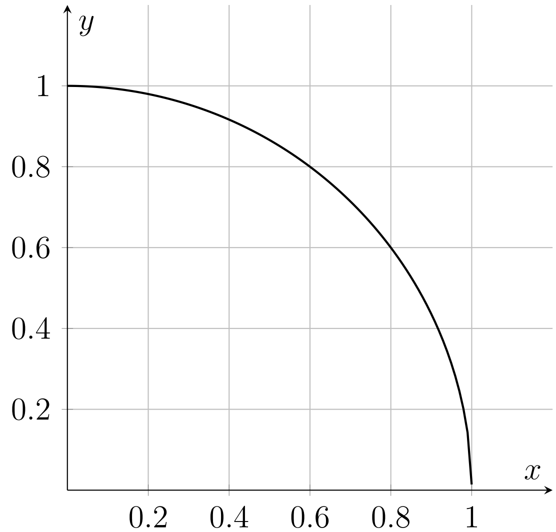
$$\frac{(16-2\sqrt{8})}{3} - \frac{(2\sqrt{3}-2)}{3} \approx 0.6502803018.$$

Ejercicio 8

Define $T(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$. Sea D^* el conjunto de (u,v) tal que $u^2+v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Encuentra $T(D^*) = D$. Evalúa $\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Solución.

Transformación y Jacobiano



El límite de D^* está dado por $u = 0$, $v = 0$, $u^2 + v^2 = 1$, con las transformaciones:

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$$

Por el Jacobiano directo, tenemos:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Calculando las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 2u$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 = 4(u^2 + v^2)$$

Como la región D^* está definida por $D^* = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$, el diferencial en (x, y) es:

$$dx\, dy = |4(u^2 + v^2)|\, du\, dv = 4(u^2 + v^2)\, du\, dv$$

La integral sobre la región D^* en (u, v) es:

$$\iint_D dx\, dy = \iint_{D^*} 4(u^2 + v^2)\, du\, dv$$

Los límites de integración para u van de 0 a 1, y v va de 0 a $\sqrt{1 - u^2}$. Por lo tanto, la integral es:

$$\int_0^1 4 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} (u^2 + v^2)\, dv\, du$$

La integral en coordenadas cartesianas es:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

Esto corresponde al cuarto de círculo en el primer cuadrante con $x^2 + y^2 \leq 1$.

Resolver la integral interior

La integral interior es:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4(x^2 + y^2)\, dy$$

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4(x^2 + y^2)\, dy = 4\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dy + 4\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy$$

Primera parte: $4\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dy$

Dado que x^2 es constante respecto a y, esta integral es:

$$4\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dy = 4x^2\, [y]_0^{\sqrt{1-x^2}} = 4x^2(\sqrt{1-x^2})$$

Segunda parte: $4\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy$

La integral de y^2 con respecto a y es:

$$4\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2\, dy = 4\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = 4 \cdot \frac{1}{3}\left((1-x^2)^{3/2}\right)$$

Entonces:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4(x^2 + y^2)\, dy = 4x^2(\sqrt{1-x^2}) + \frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}$$

Resolver la integral exterior

Con respecto a x, la integral es:

$$I = \int_0^1 \left[4x^2(\sqrt{1-x^2}) + \frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}\right] dx$$

Dividiendo en dos integrales separadas:

$$I = \int_0^1 4x^2(\sqrt{1-x^2})\, dx + \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}\, dx$$

Primera integral: $4x^2(\sqrt{1-x^2})$

Usamos el cambio de variable $u = 1 - x^2$, con $du = -2x\,dx$. Los límites cambian: - Cuando $x = 0$, $u = 1$ - Cuando $x = 1$, $u = 0$

$$\int_0^1 4x^2(\sqrt{1-x^2})\,dx = \int_1^0 4u^{1/2}\left(-\frac{1}{2}du\right) = \int_0^1 2u^{1/2}\,du$$

$$\int_0^1 2u^{1/2}\,du = 2 \cdot \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

Segunda integral: $\frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}$

Usamos el mismo cambio de variable $u = 1 - x^2$:

$$\int_0^1 \frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{4}{3}\int_1^0 u^{3/2}\left(-\frac{1}{2}du\right) = \frac{2}{3}\int_0^1 u^{3/2}\,du$$

Resolviendo:

$$\frac{2}{3}\int_0^1 u^{3/2}\,du = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}u^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{4}{15}$$

Resultado

Sumando ambas integrales:

$$I = \frac{4}{3} + \frac{4}{15} = \frac{20}{15} + \frac{4}{15} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$$

Cálculo de la Integral con Coordenadas Polares

La integral es:

$$\int_0^1 4 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} (u^2+v^2)\, dv\, du$$

Puede resolverse usando coordenadas polares, donde las transformaciones son:

$$u = r\cos\theta, \quad v = r\sin\theta$$

Aquí, r es el radio y θ es el ángulo. Dado que estamos trabajando en el primer cuadrante, tenemos:

$$r \text{ va de } 0 \text{ a } 1, \quad \theta \text{ va de } 0 \text{ a } \frac{\pi}{2}$$

La integral en coordenadas polares se convierte en:

$$\iint_D 4(u^2+v^2)\, du\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r^2 \cdot r\, dr\, d\theta$$

Ahora, calculamos el Jacobiano de la transformación:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

Por lo tanto, la integral se convierte en:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r^3\, dr\, d\theta$$

Separando las integrales:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left(\int_0^1 4r^3\, dr \right)$$

$$\int_0^1 4r^3\, dr = \left[\frac{4r^4}{4}\right]_0^1 = \left[r^4\right]_0^1 = 1^4 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, al multiplicar las integrales:

$$\frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 9

Sea $T(u,v)$ como se define en el Ejercicio 8. Haciendo un cambio de variables, evalúa de manera "formal" la integral "impropia".

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Solución.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,$$

$$T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

Transformación de variables

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv$$
$$x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2$$
$$x^2 + y^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{x^2+y^2} = u^2 + v^2$$

Determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = (2u)(2u) - (-2v)(2v) = 4u^2 + 4v^2 = 4(u^2+v^2)$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 4(u^2+v^2)$$

Integral en las nuevas variables

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{u^2+v^2}$$

$$dx\,dy = 4(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

Por lo tanto:

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint \frac{1}{u^2+v^2}\cdot 4(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint 4\,du\,dv.$$

Región de integración

La region de integracion del conjunto D^*, que es un cuarto de disco en el plano (u, v), donde:

$$u^2 + v^2 \leq 1, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Integral final en coordenadas polares

$u^2 + v^2 = r^2$, - La región es: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r \, dr \, d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4r \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^2\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \, d\theta = 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \pi.$$

Ejercicio 10

Calcula $\iint_R \frac{1}{x+y} \, dy \, dx$, donde R es la región delimitada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, utilizando la transformación $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

Solución.

$$\int \int_R \frac{1}{x+y} \, dy \, dx$$

$$T(u, v) = (u - uv, uv).$$

Transformación de variables

$$x = u - uv, \quad y = uv.$$

Determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u - (-uv) = u - uv + uv = u.$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = u.$$

Region de integracion

- $x = 0 \implies u - uv = 0 \implies u(1-v) = 0 \implies u = 0 \text{ o } v = 1,$
- $y = 0 \implies uv = 0 \implies v = 0$ (cuando $u \neq 0$),
- $x + y = 1 \implies (u - uv) + uv = 1 \implies u = 1,$
- $x + y = 4 \implies (u - uv) + uv = 4 \implies u = 4.$

$$1 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Integral final

$$\int\int_R \frac{1}{x+y}\, dy\, dx.$$

$$x + y = u, \quad dy\, dx = u\, du\, dv.$$

$$\int_1^4 \int_0^1 \frac{1}{u} \cdot u\, dv\, du = \int_1^4 \int_0^1 1\, dv\, du = \int_1^4 [v]_0^1\, du = \int_1^4 1\, du = \int_1^4 1\, du = 4 - 1 = 3$$

$$\int\int_R \frac{1}{x+y}\, dy\, dx = 3.$$

Ejercicio 11

Evalúa la integral doble

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy,$$

donde D es el disco definido por $x^2 + y^2 \leq 4$.

Solución.

Tenemos que $dxdy = dA$

Ahora bien, si $x^2 + y^2 \leq 4$

$$x = \sqrt{4 - y^2} = \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4}$$

$$y = \pm 2$$

$$0 \leq y \leq 2$$

Aplicamos coordenadas polares:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$r^2 = 4$$

$$r = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

Las funciones de movimiento de 0 a 2π son un disco, entonces:

$$dxdy = dA = rdrd\theta$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} (r^2)^{\frac{3}{2}}\ rd\theta dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3\ rd\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^4\ d\theta dr$$

$$= \int_0^2 r^4 \int_0^{2\pi} d\theta dr = \int_0^2 r^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^2 r^4 \cdot (2\pi) dr$$

$$= (2\pi) \cdot \int_0^2 r^4 = (2\pi) \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^2$$

$$= (2\pi) \cdot \frac{2^5}{5} = 2\pi \cdot \frac{32}{5} = \frac{64\pi}{5}$$

Ejercicio 12

Sea D^* una región v-simple en el plano uv, delimitada por $v = g(u)$ y $v = h(u) \leq g(u)$ para $a \leq u \leq b$. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación dada por $x = u$ y $y = \psi(u, v)$, donde ψ es de clase C^1 y $\partial\psi/\partial v$ nunca es cero. Suponga que $T(D^*) = D$ es una región y-simple; demuestra que si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} f(u, \psi(u, v)) \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right|\, du\, dv.$$

Solución.

Queremos demostrar que:

$$\iint_D f(x, y)\ dx\ dy = \iint_{D^*} f(u, \psi(u, v)) \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right| dudv$$

Si tenemos que $x = u$ y $y = \psi(u, v)$
Entonces:

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

en donde $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ es el Jacobiano de la transformación T.

Si calculamos el Jacobiano:

$$J_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Así, el determinante de la matriz es:

$$\left|J_T\right| = \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right|$$

Observación:
Como en D^*, v está acotada por $g(u) \leq v \leq h(u)$ y a su vez, u por $a \leq u \leq b$.

Entonces la transofrmación T mapea la región en el plano uv al dominio D en el plano xy, manteniendo así la correspondencia uno a uno, ya que teníamos que $\frac{\partial\psi}{\partial v} \neq 0$.

Así, dado que ψ es de C^{-1}, $\frac{\partial\psi}{\partial v} \neq 0$ y f es continua, el cambio de variables es completamente válido y la ecuación dada al inicio se cumple.

$$\iint_D f(x, y)\ dx\ dy = \iint_{D^*} f(u, \psi(u, v)) \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right| dudv \quad \blacksquare$$

Ejercicio 13

Utiliza integrales dobles para encontrar el área dentro de la curva $r = 1 + \sin\theta$.

Solución.

Para encontrar el area dentro de la curva $r = 1 + \sin\theta$, es necesario describir la función en coordenadas polares.

Es decir, el area que describe la distancía r que está acotada por la función $r = 1 + \sin\theta$; donde θ varía libremente de 0 a 2π

$$A = \int\int_R dA, \quad dA = r\,dr\,d\theta.$$

Los límites de integración se vuelven: - θ from 0 to 2π, - r from 0 to $1 + \sin\theta$.

Reemplazando los limites de integración de la región R:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\sin\theta} r\,dr\,d\theta.$$

Resolvemos la integral interior con respecto a r (dr):

$$\int_0^{1+\sin\theta} r\,dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\sin\theta} = \frac{(1+\sin\theta)^2}{2}.$$

Sustituimos en la integral exterior con respecto a (θ)

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\sin\theta)^2}{2}\,d\theta.$$

Se expande el binomio al cuadrado $(1 + \sin\theta)^2$:

$$(1+\sin\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta.$$

Se extrae la constante $\frac{1}{2}$ de la integral:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta\right)\,d\theta.$$

Se separa la integral:

$$A = \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi} 1\,d\theta + 2\int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta\right].$$

Resolvemos cada una de las integrales, usando las formulas:

$$\int_0^{2\pi} du = u, \int_0^{2\pi} \sin u du = -\cos u, \int_0^{2\pi} \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin 2u$$

Se obtienen los siguientes valores:

$$[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi, [-\cos\theta]_0^{2\pi} = 0, \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \pi,$$

Se sustituyen los valores en las integrales:

$$\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi.$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$A = \frac{1}{2}\left[2\pi + 0 + \pi\right] = \frac{1}{2} \cdot 3\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Finalmente, el area es:

$$\boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

Ejercicio 14

(a) Expresa

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} xy\, dy\, dx$$

como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de (u, v) donde $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq u$. *(Pista: Encuentra una transformación T uno a uno que mapee D^* en la región de integración dada.)*

(b) Evalúa esta integral directamente y como una integral sobre D^*.

Solución.

(a) Transformación

La integral dada es:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} xy\, dy\, dx.$$

Para transformar la integral a una nueva región de integración más simple, elegimos la transformación:

$$x = u, \quad y = uv.$$

Región de integración D^* de la transformación T

La nueva región de integración D^* se define como:

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq u.$$

Esta es una región triangular en el plano u-v, con límites:

- u varía entre 0 y 1.
- Para un valor fijo de u, v varía entre 0 y u.

La transformación $x = u, y = uv$ fue elegida satisface la región original porqué:

- $x = u$: Esto garantiza que u y x tengan el mismo rango: $0 \leq u \leq 1$.
- $y = uv$: Esto asegura que y y x^2 son proporcionales, ya que:

  $$y = uv \quad \text{y, como } 0 \leq v \leq u, \quad y \leq u^2 = x^2.$$

  Dónde y está acotado por u^2 ,y , a la vez, $u^2 = x^2$

  Y coincide con el límite superior original $y = x^2$.

La transformación es inyectiva, lo que significa que cada punto en D^* corresponde a un único punto en la región original, y viceversa.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

Usamos la transformación:

$$x = u, \quad y = uv,$$

con el determinante jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

La integral se convierte en:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} xy \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^u u^3 v \, dv \, du.$$

Donde los nuevos límites de integración son lineales.

(b) Evaluación

Integral original:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} xy \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{x^5}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 \, dx = \frac{1}{12}.$$

Integral transformada:

$$\int_0^1 \int_0^u u^3 v \, dv \, du = \int_0^1 \frac{u^5}{2} \, du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^5 \, du = \frac{1}{12}.$$

Por lo tanto, el valor de la integral es:

$$\boxed{\frac{1}{12}}$$

Ejercicio 15

Integra $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3$.

Solución.

Trabajando con coordenadas cilindricas tenemos que

$$x = rcos\theta,$$
$$y = rsen\theta,$$
$$z = z,$$
$$0 < r \leq 2, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi, \; 2 \leq z \leq 3,$$

Luego tenemos que

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 = r^2(cos^2\theta + sen^2\theta) = r^2$$

Ahora, la matriz de derivadas parciales de cambio de coordenadas, para coordenadas cilíndricas está dada por:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ rsen\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ rsen\theta & rcos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta \cdot rcos\theta + rsen\theta \cdot sen\theta$$

$$= r(cos^2\theta + sen^2\theta)$$

$$= r$$

$$\therefore |J| = r$$

Sea V el cilindro $x^2 + y^2 \leq 4,\ 2 \leq z \leq 3$. Ahora aplicamos cambio de variable para obtener

$$\int\int\int_V ze^{x^2+y^2} dx\ dy\ dz = \int\int\int_{V^*} ze^{r^2}|J|\ dr\ d\theta\ dz$$

con $V^* = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 2 \leq z \leq 3\}$.

Integramos entonces,

$$\int\int\int_{V^*} ze^{r^2}|J|\ dr\ d\theta\ dz = \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 zre^{r^2}\ dr\ d\theta\ dz$$

$$= \int_3^3 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 zre^{r^2}\ dr\right] d\theta\, dz$$

$$= \int_2^3 z \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 re^{r^2}\ dr\right] d\theta\, dz$$

$$= \int_2^3 z\ dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^2 re^{r^2}\ dr$$

$$= \frac{z^2}{2}\Big|_2^3 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int_0^2 re^{r^2}\ dr$$

$$= (\frac{9}{2} - \frac{4}{2}) \cdot 2\pi \cdot \int_0^2 re^{r^2}\ dr$$

$$= \frac{5\pi}{2} \int_0^2 2re^{r^2}\ dr$$

Aplicando la sustitución

$$t = r^2 \Rightarrow dt = 2r\ dr$$
$$a = 0 \Rightarrow 0$$
$$b = 2 \Rightarrow 4$$

Continuamos entonces

$$= \frac{5\pi^2}{2} \int_0^4 e^t \, dt$$

$$= \frac{5\pi^2}{2} [e^t]_0^4$$

$$= \frac{5\pi^2}{2} (e^4 - 1)$$

Por lo que el resultado de la integral es:

$$\boxed{= \frac{5\pi^2}{2} (e^4 - 1)}$$

Ejercicio 16

Sea D el disco unitario. Expresa

$$\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} \, dx \, dy$$

como una integral sobre $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ y evalúa.

Solución.

Usando coordenadas polares para el disco vamos a tener la integral sobre $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.

La coordenadas polares para el disco unitario serían

$$x = rcos\theta,$$

$$y = rsen\theta,$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow dxdy = rdrd\theta$$

Los límites de integración quedan como

$$0 < r \leq 1, \ 0 < \theta \leq 2\pi$$

Y nos queda la integral de la forma

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} rdrd\theta$$

Ahora, sustituimos $1 + r^2 = p^2$ y utilizamos cambio de variable para integrar.

$$\int_0^{2\pi}\int_{p=1}^{\sqrt{2}}(p^2)^{\frac{3}{2}}$$

Cambiando tambien los límites de integración

$$r = 0 \Rightarrow p = \sqrt{1} = 1$$
$$r = 1 \Rightarrow p = \sqrt{2}$$

Desarrollando tenemos que

$$= \int_0^{2\pi}\int_{p=1}^{\sqrt{2}} p^3 \cdot p \ dpd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{p=1}^{\sqrt{2}} p^4 \ dpd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \ d\theta \cdot \int_1^{\sqrt{2}} p^4 \ dp$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^{\sqrt{2}} p^4 \ dp$$

$$= 2\pi \cdot \frac{p^5}{5}\bigg|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{5}((\sqrt{2})^5 - 1^5)$$

Así podemos concluir que el resultado es:

$$\boxed{\frac{2\pi}{5}(4\sqrt{2} - 1)}$$

Ejercicio 17

Usando coordenadas polares, encuentre el área delimitada por la lemniscata.

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Solución.

Cálculo del área de una lemniscata usando coordenadas polares

La ecuación de la lemniscata es:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Paso 1: Cambiar a coordenadas polares

En coordenadas polares, $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$, además $x^2 + y^2 = r^2$. Sustituimos en la ecuación de la lemniscata:

$$(r^2)^2 = 2a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)$$

Esto se simplifica a:

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Factorizamos r^2 (suponiendo $r \neq 0$):

$$r^2 = 2a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Usamos la identidad $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$:

$$r^2 = 2a^2\cos(2\theta)$$

Por lo tanto:

$$r = \sqrt{2a^2\cos(2\theta)}$$

Paso 2: Área en coordenadas polares

La fórmula para el área en coordenadas polares es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$$

Sustituimos $r^2 = 2a^2\cos(2\theta)$:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} 2a^2\cos(2\theta)\,d\theta$$

$$A = a^2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(2\theta)\,d\theta$$

La lemniscata tiene simetría respecto al origen, por lo que podemos calcular el área de ($-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$) y luego multiplicar por 2:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta)\, d\theta$$

Paso 3: Resolver la integral

Sabemos que $\int \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2 \left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

Evaluamos los límites:

$$\sin(2\theta) \text{ en } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ es } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin(2\theta) \text{ en } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ es } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Por lo tanto:

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - (-1)\right)$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot a^2$$

Respuesta final

El área total delimitada por la lemniscata es:

$$A = 2a^2$$

Ejercicio 18

Rehaga el Ejercicio 15 de la Sección 5.3 usando un cambio de variables y compare el esfuerzo involucrado en cada método

Solución.

Cálculo del volumen

Queremos encontrar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y entre $z = 0$ y $z = 10$.

Paso 1: Conversión a coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

y la ecuación $z = x^2 + y^2$ se convierte en:

$$z = r^2,$$

ya que $x^2 + y^2 = r^2$.

Los límites son:

- $0 \leq r \leq \sqrt{10}$ (de $z = r^2$ y $z \leq 10$),
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (rotación completa alrededor del eje z),
- $0 \leq z \leq r^2$.

El elemento de volumen en coordenadas cilíndricas es:

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Paso 2: Configuración de la integral

El volumen V está dado por:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{10}}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Paso 3: Evaluación de la integral

Primero, integramos respecto a z:

$$\int_0^{r^2} r\,dz = r[z]_0^{r^2} = r(r^2 - 0) = r^3.$$

Sustituyendo en la integral, tenemos:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{10}} r^3\,dr\,d\theta.$$

A continuación, integramos respecto a r:

$$\int_0^{\sqrt{10}} r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{10})^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{100}{4} = 25.$$

Sustituyendo nuevamente, obtenemos:

$$V = \int_0^{2\pi} 25\, d\theta.$$

Finalmente, integramos respecto a θ:

$$\int_0^{2\pi} 25\, d\theta = 25[\theta]_0^{2\pi} = 25(2\pi - 0) = 50\pi.$$

Respuesta final

El volumen de la región es:

$$\boxed{50\pi}.$$

Ejercicio 19

Calcula:

$$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y}\, dx\, dy,$$

donde R es la region delimitada por:

$$x+y=1, \quad x+y=4, \quad x-y=-1, \quad x-y=1.$$

Solución.

$$\int\int_R (x+y)^2 e^{x-y}\, dx\, dy,$$

Donde R está delimitada por las líneas $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, y $x-y=1$.

Cambio de variable

Realizamos el cambio de variables:

$$u = x+y, \quad v = x-y.$$

Ahora bien, para asegurarnos de que el cambio es válido, debemos resolver el sistema $u = x+y$ y $v = x-y$ para x y y:

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Esto muestra que el cambio es invertible, es decir, cada par (u,v) corresponde a exactamente un par (x,y).

El jacobiano del cambio es:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, el valor absoluto del determinante es:

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Entonces, el diferencial se ajusta como: $dx\,dy = \frac{1}{2}\; du\,dv$

Definimos la región en el plano (u, v)

Las ecuaciones que delimitan la región R en términos de u y v son:

$$\begin{aligned} x + y = u \quad &\Rightarrow \quad u \in [1,4], \\ x - y = v \quad &\Rightarrow \quad v \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el plano (u, v), la región R es un rectángulo con:

$$1 \leq u \leq 4, \quad -1 \leq v \leq 1.$$

Reescribimos la integral aplicando el cambio de variable

Al realizar el cambio, la integral queda de la siguiente manera:

$$\int_{u=1}^{4} \int_{v=-1}^{1} u^2 e^v \cdot \frac{1}{2}\, dv\, du.$$

$$\frac{1}{2} \int_{u=1}^{4} \int_{v=-1}^{1} u^2 e^v \, dv\, du.$$

Resolver la integral

Integral respecto a v:

$$\int_{v=-1}^{1} e^v \, dv = [e^v]_{v=-1}^{1} = e^1 - e^{-1}.$$

Sustituir en la integral respecto a u:

$$\frac{1}{2}\int_{u=1}^{4} u^2(e - e^{-1})\,du.$$

Sacamos el factor constante $(e - e^{-1})$:

$$\frac{e - e^{-1}}{2}\int_{u=1}^{4} u^2\,du.$$

Integramos respecto a u y evaluamos:

$$\int_{u=1}^{4} u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_{u=1}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Sustituimos el resultado

$$\frac{e - e^{-1}}{2}\cdot 21 = \frac{21}{2}(e - e^{-1}).$$

Resultado:

$$\boxed{I = \frac{21}{2}(e - e^{-1})}.$$

Ejercicio 20

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(u, v, w) = \big(u\cos v\cos w,\ u\sin v\cos w,\ u\sin w\big).$$

(a) Demuestra que T es sobreyectiva hacia la esfera unitaria; es decir, todo (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ puede escribirse como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, w).

(b) Demuestra que T no es inyectiva.

Solución.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(u, v, w) = (u\cos v\cos w, u\sin v\cos w, u\sin w).$$

(a) T está sobre la esfera unitaria

Para demostrar que cualquier punto (x, y, z) tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ puede escribirse como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, w).

Expresamos $x^2 + y^2 + z^2$ en términos de T

Sea $(x, y, z) = T(u, v, w)$, es decir:

$$x = u \cos v \cos w, \quad y = u \sin v \cos w, \quad z = u \sin w.$$

Entonces, el cuadrado de la norma es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (u \cos v \cos w)^2 + (u \sin v \cos w)^2 + (u \sin w)^2.$$

Agrupando términos, tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 w(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2 \sin^2 w.$$

Como $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, se simplifica a:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 \cos^2 w + u^2 \sin^2 w.$$

Usando $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$, obtenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Relación con la esfera unitaria

Para que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, es necesario que $u^2 = 1$, lo cual implica $u = \pm 1$.

Dado un punto (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, podemos escribir:

$$u = \pm 1, \quad v = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad w = \sin^{-1}(z/u).$$

Por lo tanto, con esto demostramos que cualquier punto en la esfera unitaria puede escribirse como $T(u, v, w)$ para algún (u, v, w).

(b) T no es uno a uno

Para demostrar que $T(u, v, w)$ no es inyectiva, es decir, que existen $(u_1, v_1, w_1) \neq (u_2, v_2, w_2)$ tales que $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$.

Igualdad bajo T

Supongamos que $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$. Entonces:

$$(u_1 \cos v_1 \cos w_1, u_1 \sin v_1 \cos w_1, u_1 \sin w_1) = (u_2 \cos v_2 \cos w_2, u_2 \sin v_2 \cos w_2, u_2 \sin w_2).$$

Esto implica que:

$$u_1 \cos v_1 \cos w_1 = u_2 \cos v_2 \cos w_2, \quad u_1 \sin v_1 \cos w_1 = u_2 \sin v_2 \cos w_2, \quad u_1 \sin w_1 = u_2 \sin w_2.$$

Notemos que:

- Si $u_1 = -u_2$, entonces $T(u_1, v_1, w_1) = T(u_2, v_2, w_2)$, ya que u solo escala las coordenadas de acuerdo con la definición de T.
- Además, los ángulos v y w son periódicos. Por ejemplo, $v_1 = v_2 + 2\pi k$ y $w_1 = w_2 + 2\pi k$ generan las mismas coordenadas bajo T.

Por lo tanto, $T(u, v, w)$ no es inyectiva porque existen múltiples valores de (u, v, w) que producen el mismo punto (x, y, z).

Ejercicio 21

Integra $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$

Solución.

Primero representemos la region C en coordenadas cilindricas como C^*, entonces por definición

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsen\theta$$

$$z = z$$

Asi, r y θ esta en

$$r > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R}$$

asi con el cambio de coordenadas cilindricas, después, obtenemos

$$x^2 + y^2 \leq 2 \Rightarrow (rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow r^2 \left(cos^2\theta + sen^2\theta\right) \leq 2$$

$$\Rightarrow r^2 \leq 2$$

Asi por propiedades de orden, tenemos que r

$$0 < r \leq \sqrt{2}$$

Por lo tanto, la región C^* esta descrita como

$$C^* = \left\{(r,\theta,z) | 0 < r \leq \sqrt{2} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge -2 \leq z \leq 3\right\}$$

Ahora obtenemos el jacobiano, para ello, calculemos la jacobiana

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Calculando las parciales y reemplazando en la jacobiana obtenemos

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando el determinante obtenemos

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$det(J) = \cos\theta \cdot (r\cos\theta) + (-r\sin\theta) \cdot (\sin\theta)$$

$$\Rightarrow det(J) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

Por el cambio de variable, podemos decir que

$$\iiint_C (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{C^*} (r^2+z^2)r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Asi, integrando tenemos

$$\iiint_{C^*} (r^2+z^2)r\,dr\,d\theta\,dz. = \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3}\int_0^{\sqrt{2}} (r^3+z^2r)drdzd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3}\left[\int_0^{\sqrt{2}} (r^3+z^2r)dr\right]dzd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3}\left[\frac{r^4}{4} + \frac{z^2r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} dzd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-2}^{3}(1+z^2)dzd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_{-2}^{3}(1+z^2)dz\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_{-2}^{3}(1+z^2)dz$$

$$=2\pi\left[z+\frac{z^3}{3}\right]_{-2}^{3}$$

$$=2\pi\left(3+9+2+\frac{8}{3}\right)$$

$$=2\pi\left(14+\frac{8}{3}\right)=2\pi\cdot\frac{50}{3}=\frac{100\pi}{3}$$

Asi podemos concluir que

$$\iiint_C (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{100\pi}{3}$$

Ejercicio 22

Evalúa

$$\int_0^{\infty} e^{-4x^2}\,dx$$

Solución.

Igualamos la expresion a I

$$I=\int_0^{\infty} e^{-4x^2}dx$$

ahora bien, definamos

$$\int_0^{\infty} e^{-4y^2}dy$$

y multipliquemos ambas integrales por el teorema de Fubibni, entonces

$$I^2=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-4(x^2+y^2)}dxdy$$

Apliquemos cambio de coordenadas a coordenadas cilindricas, por definicion tenemos

$$x=rcos\theta\wedge y=rsen\theta$$

Por como esta definida la distancia de un radio obtenemos

$$r^2 = (rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2$$
$$\Rightarrow r^2 = r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta$$
$$\Rightarrow r^2 = r^2\left(cos^2\theta + sen^2\theta\right)$$

y por identidades trigonometricas tenemos

$$r^2 = r^2$$

De esta manera podemos confirmar que

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Ahora bien, obtenemos el jacobiano

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Obteniendo las derivadas parciales de $x = rcos\theta$, tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial r} = cos\theta \wedge \frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsen\theta$$

Obteniendo derivadas parciales de $y = rsen\theta$ tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial r} = sen\theta \wedge \frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos\theta$$

Aasi la jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ \\ sen\theta & rcos\theta \end{pmatrix}$$

El determinante es

$$\det(J) = (cos\theta)(rcos\theta) - (-rsen\theta)(sen\theta)$$
$$\Rightarrow det(J) = rcos^2\theta + rsen^2\theta$$
$$\Rightarrow det(J) = r\left(cos^2\theta + sen^2\theta\right)$$
$$\Rightarrow det(J) = r$$

Ahora notemos que la doble integral utiliza solamente el primer cuadrante, esto porque va de 0 a ∞, al aplicar el cambio de variable

$$r \in [0, \infty]$$

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ahora bien, regresando a la integral, tenemos

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-4r^2} r dr d\theta$$

Ya que e^{-4r^2} depende solo de r, y la otra función depende solo de θ, se pueden separar las integrales como

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-4r^2} dr$$

Integrando $d\theta$, tenemos

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-4r^2} dr$$

Ahora para la otra integral, apliquemos un cambio de variable, tomemos $u = 4r^2$, derivando

$$\frac{du}{dr} = 8r \Rightarrow du = 8r dr \Rightarrow dr = \frac{du}{8}$$

Cuando $r \to \infty$, entonces $u \to \infty$, asi sustituyendo

$$\int_0^{\infty} e^{-4r^2} dr = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{8} \left(e^{-u}|_0^{\infty} \right) = \frac{1}{8}(0-1) = \frac{1}{8}$$

Esto porque cuando $u \to \infty$, hace que $e^{-u} \to 0$ porque la función exponencial decrece rapidamente, asi bien, obtenemos

$$I^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{16}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Asi podemos concluir que

$$\int_0^{\infty} e^{-4x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Ejercicio 23

Sea B la bola unitaria. Evalúa

$$\iiint_B \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

realizando el cambio de variables apropiado.

Solución.

Para resolver nuestra integral haremos un cambio de variables a coordenadas esfericas donde:

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\
y &= \phi \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\
z &= \rho \cos \phi \\
\rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
dxdydz &= \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta
\end{aligned}
$$

Al ser B una bola unitaria, definimos nuestros limites de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
0 \leq \phi \leq 1 \\
0 \leq \theta \leq 2\pi \\
0 \leq \phi \leq \pi
\end{aligned}
$$

Reescribiendo la integral:

$$
\iiint_B \frac{dxdydz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{2 + \rho^2}} d\rho d\phi d\theta
$$

Solucionando

$$
\int_0^1 \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{2 + \phi^2}} d\rho \Rightarrow \operatorname{sen} \phi \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{2 + \rho^2}} d\rho.
$$

definimos a u y ρ:

$$
\rho = \sqrt{2} \tan(u) \Rightarrow u = \arctan\left(\frac{\rho}{u}\right), \quad d\rho = \sqrt{2} \sec^2(u) du
$$

Realizamos la sustitución en nuestra integral

$$
\int \frac{2^{3/2} \sec^2(u) \tan^2(u)}{\sqrt{2 \tan^2(u) + 2}} du
$$

$$
2 \tan^2(u) + 2 = 2 \sec^2(u)
$$

$$
\Rightarrow \int \frac{2^{3/2} \sec^2(u) \tan^2(u)}{\sqrt{2 \tan^2(u) + 2}} = 2 \int \sec(u) \tan^2(u) du
$$

$$
\tan^2(u) = \sec^2(u) - 1
$$

$$
\Rightarrow 2 \int \sec^3(u) - \sec(u) du
$$

$$\Rightarrow 2\left[\int \sec^3(u)du - \int \sec(u)du\right]$$

Resolviendo

$$\int \sec^3(u)du = \frac{\sec(u)\tan(u)}{2} + \frac{1}{2}\int \sec(u)du$$

Resolviendo

$$\int \sec(u)du = \ln(\tan(u) + \sec(u))$$

Reemplazamos las soluciones

$$2\int \sec(u)\tan^2(u)du$$

$$= -2[\frac{\sec(u)\tan(u)}{2} + \frac{\ln(\tan(u)+\sec(u)}{2} - \ln(\tan(u)+\sec(u))]$$

$$= \sec(u)\tan(u) - \ln(\tan(u)+\sec(u))$$

$$\text{Recordemos que } u = \arctan(\frac{\rho}{\sqrt{2}})$$

Y reemplazamos en nuestro resultado

$$\Rightarrow \sec\left(\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right) - \mathrm{Ln}\left[\tan\left(\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right) \ - \sec\left(\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

$$\sec\left(\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sqrt{\frac{\rho^2}{2}+1} \text{ y } \tan\left(\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{\rho}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{p^2}{2}+1}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left[\tan\left(\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right) - \sec\left(\arctan\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{\rho\sqrt{\rho^2+2} - 2\ln\left(1\sqrt{\rho^2+2} + \rho \mid\right.}{2} = \frac{\rho\sqrt{\rho^2+2}}{2} - \operatorname{arcsenh}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{2+\rho^2}}d\rho = \operatorname{sen}\phi\left[\frac{\rho\sqrt{\rho^2+2}}{2} - \operatorname{arcsenh}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1\right]$$

$$= \operatorname{sen}\phi\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Remplazando el resultado en la integral triple Inicial

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]d\phi d\theta$$

Ahora resolviendo

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] d\phi = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcshh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi$$
$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\cos(\pi) + \cos(0) = \sqrt{3} - 2\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right.\right.$$

Por ultimo tenemos

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{3} - 2\operatorname{arcsenh}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) d\theta = \theta\left(\sqrt{3} - \operatorname{arcsenh}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi\left(\sqrt{3} - \operatorname{arcsenh}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \approx 2.69649$$

Finalmente el resultado de

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{2+\rho^2}} d\rho d\phi d\theta \approx 2.69649$$

Ejercicio 24

Evalúa $\displaystyle\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$, donde A está determinado por las condiciones $x^2+y^2 \leq 1$ y $x+y \geq 1$.

Solución.

Con ayuda de las condiciones dadas obtenemos los siguientes limites de integración

$$0 \leq x \leq 1$$
$$(1-x) \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

y podemos establecer la integral doble dela siguiente forma

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dydx$$

Para resolverlo hacemos cambio a coordenadas

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dydx \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1} \frac{1}{(r^2)^2} rdrd\theta$$

Resolviendo

$$\int_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1} \frac{1}{(r^2)^2} rdr \int_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1} \frac{1}{r^3} dr = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2(1)^2} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2}\right).}$$
$$= \frac{(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2 - 1}{2}$$

Remplazamos en nuestra integral

$$\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1} \frac{1}{r^3} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2 - 1}{2} d\theta$$
$$(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{(2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 1) - 1}{2} d\theta = \int_0^{\pi/2} cos\theta\operatorname{sen}\theta d\theta$$

Sea

$$u = \operatorname{sen}\theta, du = \cos\theta d\theta$$
$$\Rightarrow \int u du = \frac{u^2}{2} \Rightarrow \left.\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{2}\right|_0^{\pi/2}$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2)}{2} = \frac{(1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Finalmente decimos que

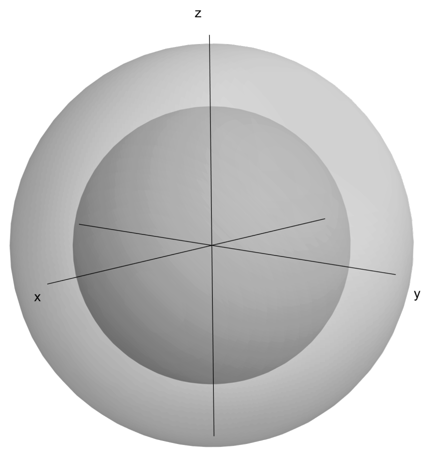
$$\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1} \frac{1}{r^3} dr d\theta = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 25

Evalúa $\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ donde W es el sólido acotado por las dos esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.

Solución.

Note que en este caso parece apropiada utilizar un cambio de variable con coordenadas esféricas, pues W esta acotada por esferas y sabemos que $x^2 + y^2 + z^2$ puede remplazarse por p^2, obteniendo así una integral mucho más sencilla. Además, la región descrita en este ejercicio es la que se encuentra entre las dos esferas siguientes, donde la interior tiene un radio b y la exterior un radio a



Entonces, si W^* es la región dada por

$$b \leq p \leq a, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Aplicando la fórmula del cambio de variables con coordenadas esféricas

$$\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iiint_{W^*} \frac{1}{(p^2)^{3/2}} \cdot p^2 \operatorname{sen}\phi\, dp\, d\theta\, d\phi = \iiint_{W^*} \frac{1}{p} \operatorname{sen}\phi\, dp\, d\theta\, d\phi$$

Y por el terorema de Fubini esta última integral es igual a la siguiente integral iterada

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^{a} \frac{1}{p}\operatorname{sen}\phi\, dp\, d\phi\, d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\ln|p| \operatorname{sen}\phi\right]_{p=b}^{p=a}\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right)\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \ln\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= \ln\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} \left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi} d\theta \\
&= \ln\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} 2\, d\theta \\
&= 2\ln\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\ln\left(\frac{a}{b}\right)(2\pi) \\
&= 4\pi\ln\left(\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 4\pi\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Ejercicio 26

Usa coordenadas esféricas para evaluar:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+[x^2+y^2+z^2]^2}\, dz\, dy\, dx$$

Solución.

Para este caso se tiene que la región de tipo 1 descrita en los límites de integración es la siguiente

$$W = \left\{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}\right\}$$

la cual básicamente es la cuarta parte de la bola de radio 3 centrada en el origen ubicada sobre el primer octante.

Realizando el cambio de variables con coordenadas esféricas y con W^* la región dada por

$$0 \leq p \leq 3, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

se tiene que de la integral dada es igual a la siguiente integral iterada

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \frac{p}{1+p^4} \cdot p^2 \operatorname{sen}\phi\, dp\, d\theta\, d\phi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \frac{p^3}{1+p^4} \operatorname{sen}\phi\, dp\, d\theta\, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}\ln|1+p^4| \operatorname{sen}\phi\right]_{p=0}^{p=3} d\theta\, d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\ln(82) \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi \\
&= \frac{1}{4}\ln(82) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi \\
&= \frac{1}{4}\ln(82) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi \\
&= \frac{1}{4}\ln(82) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot [-\cos\phi]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4}\ln(82) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{\pi}{8}\ln(82)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+[x^2+y^2+z^2]^2}\, dz\, dy\, dx = \frac{\pi}{8}\ln(82) \approx 1.730515$$

Ejercicio 27

Sea D un triángulo en el plano (x, y) con vertices $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1,0)$, Evalúa:

$$\iint_D \cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right) dx\, dy$$

haciendo el cambio de variables apropiado.

Solución.

Definimos la región triangular. La región está limitada por tres líneas conectadas entre los vértices del triángulo:

- Para $(0,0)$ y $(1,0)$:

$$y = 0$$

- Para $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$y = x$$

- Para $(1,0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:
Pendiente: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}-1} = -1$,

$$y = 1 - x$$

De aquí definimos los límites de integración:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x$$

Hasta ahora la integral queda como:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \cos\left(\pi \frac{x-y}{x+y}\right) dy\, dx$$

Definimos las nuevas variables:

$$u = x - y, \quad v = x + y$$

Calculamos el Jacobiano para ajustar las diferenciales. Resolvemos el sistema:

$$u = x - y, \quad v = x + y$$

$$x = u + y$$

Sustituyendo en v:

$$v = u + y + y = u + 2y \quad \rightarrow \quad y = \frac{v-u}{2}$$

Sustituyendo en $x = u + y$:

$$x = u + \frac{v-u}{2} = \frac{v+u}{2}$$

Para el Jacobiano:

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x)}{\partial(u)} & \frac{\partial(x)}{\partial(v)} \\ \frac{\partial(y)}{\partial(u)} & \frac{\partial(y)}{\partial(v)} \end{vmatrix} dudv$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Transformamos los límites de la integral. Usamos los vértices originales: - Para $(0,0)$:

$$u = x - y = 0, \quad v = x + y = 0 \quad \rightarrow \quad (u,v) = (0,0)$$

- Para $(1,0)$:

$$u = x - y = 1, \quad v = x + y = 1 \quad \rightarrow \quad (u,v) = (1,1)$$

- Para $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$u = x - y = 0, \quad v = x + y = 1 \quad \rightarrow \quad (u,v) = (0,1)$$

Por lo tanto:

$$0 \leq v \leq 1, \quad 0 \leq u \leq v$$

Con estos cambios, la integral queda como:

$$\int_0^1 \int_0^v \cos\left(\pi \frac{u}{v}\right) \frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^v \cos\left(\pi \frac{u}{v}\right)\,du\,dv$$

Ahora resolvemos la integral del tipo:

$$\int \cos\left(\pi \frac{x}{y}\right) dx$$

Por cambio de variable:

$$u = \frac{\pi x}{y}, \quad du = \frac{\pi}{y} dx$$

La solución es:

$$\frac{y}{\pi} \int \cos(u)\,du = \frac{y}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) + C$$

Aplicando a nuestra integral definida:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{v}{\pi}\sin\left(\frac{\pi u}{v}\right)\Bigg|_0^v dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{v}{\pi}\left(\sin(\pi) - \sin(0)\right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 0\, dv = 0$$

Dado que el coseno es una función oscilatoria simétrica, los valores positivos y negativos se cancelan entre sí. Por lo tanto, el resultado es:

$$\therefore \int_0^1 \int_0^{1-x} \cos\left(\pi\frac{x-y}{x+y}\right) dy\, dx = 0$$

Ejercicio 28

Evalúa $\iint_D x^2\, dx\, dy$, donde D esta determinada por las dos condiciones $0 \leq x \leq y$ y $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución.

Por la condición $x^2 + y^2 \leq 1$, que asociamos a un círculo unitario, convendremos en usar coordenadas polares, donde:

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\sin\theta \quad \text{y} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Y también sabemos que la relación en la transformación de las diferenciales es:

$$dx\, dy = r\, dr\, d\theta$$

Ahora, para el cambio de variables tenemos que:

- Para la condición $x^2 + y^2 \leq 1$ implica que $0 \leq r \leq 1$.
- Para la condición $0 \leq x \leq y$ implica que la relación $\tan\theta = \frac{y}{x}$, es decir, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Una vez hechos los cambios, nuestra integral quedaría como:

$$\iint_D x^2\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (r\cos\theta)^2\, r\, dr\, d\theta$$

Resolviendo, tenemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r^3 \cos^2\theta\, dr\, d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \left(\frac{1}{4} - \frac{0}{4}\right) d\theta$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \, d\theta$$

Usaremos una identidad para $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, lo sustituimos y tenemos:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \, d\theta$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\theta)}{2}\, d\theta\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)\, d\theta\right)$$

Para la integral del tipo $\int \cos(2\theta)\, d\theta$, resolvemos por cambio de variable:

$$u = 2\theta \quad \text{y} \quad du = 2\, d\theta$$

Obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)\, du = \frac{1}{2}\sin(u) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Sustituimos en la integral definida:

$$\frac{1}{4}\left(\left.\frac{\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left(\left.\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \sin(2\cdot 0)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}(1-0)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi+8}{32}\right)$$

$$= \frac{4\pi+8}{4(32)} = \frac{\pi+2}{32}$$

$$\therefore \text{El área de la región } D \text{ es } \frac{\pi+2}{32}$$

Ejercicio 29

Integra $\sqrt{x^2+y^2+z^2}e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ sobre la región descrita en el Ejercicio 25.

Solución.
Queremos calcular la integral:

$$\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dV$$

donde W es el sólido delimitado por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, con $0<b<a$.

Donde $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$ son esferas concentricas, donde $b\leq a$

Representación en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas, tenemos las relaciones:

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Donde sustituimos las relaciones entre x, y, z a las coordenadas esféricas r, θ, ϕ, y son:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi,\\ y &= r\sin\theta\sin\phi,\\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

donde:

- r es la distancia radial desde el origen.
- $\theta\in[0,\pi]$ es el ángulo polar medido desde el eje z.
- $\phi\in[0,2\pi]$ es el ángulo azimutal medido desde el eje x en el plano xy.

Transformación de la Integral de Cartesiana a Coordenadas Esféricas

Para transformar la integral:

$$I=\int_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dV$$

hacia la forma en coordenadas esféricas.

Por lo tanto, el término $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en la integral se convierte en:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

El diferencial de volumen dV

En coordenadas esféricas, el diferencial de volumen dV se expresa como:

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Reemplazo en la integral original

Reemplazamos $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2} = r$, y reemplazamos $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ en la integral original:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_b^a r \cdot e^{-r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Límites de integración de la región W

Finalmente, los límites de integración en r van de b a a, ya que el sólido está limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$.

Entonces, la integral completa en coordenadas esféricas es:

$$\int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_b^a r \cdot e^{-r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Reemplazamos en la integral original:

$$\int_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dV = \int_{r=b}^{a} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r \cdot e^{-r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

Simplificando:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_b^a r^3 \cdot e^{-r^2} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Separación de variables

Dado que los límites de integración son independientes, podemos separar la integral en tres factores:

$$\int_W (x^2+y^2+z^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dV = \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_{r=b}^{a} r^3 e^{-r^2}\,dr\right)$$

Evaluando las integrales angulares

1. Integral en ϕ:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

2. Integral en θ:

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

Evaluación de la integral radial

Sea $u = r^2$, entonces $du = 2r\,dr$ y $dr = \frac{du}{2r}$:

$$\int_b^a r^3 e^{-r^2}\,dr = \int_{b^2}^{a^2} \frac{u}{2} e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\int_{b^2}^{a^2} u e^{-u}\,du$$

Usamos integración por partes donde $v = u$ y $dw = e^{-u}du$:

$$\int u e^{-u}\,du = -ue^{-u} + \int e^{-u}\,du = -ue^{-u} - e^{-u}$$

Evaluamos desde b^2 hasta a^2:

$$\left[-ue^{-u} - e^{-u}\right]_{b^2}^{a^2} = \left[-(a^2 e^{-a^2} + e^{-a^2})\right] - \left[-(b^2 e^{-b^2} + e^{-b^2})\right]$$

$$= -(a^2+1)e^{-a^2} + (b^2+1)e^{-b^2}$$

Sustituyendo en las integrales

Sustituyendo las integrales angulares y radiales en la expresión original:

$$\text{Resultado} = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\left[-(a^2+1)e^{-a^2} + (b^2+1)e^{-b^2}\right]$$

Simplificando:

$$\text{Resultado} = 2\pi\left[(b^2+1)e^{-b^2} - (a^2+1)e^{-a^2}\right]$$

Ejercicio 30

Evalúa lo siguiente utilizando coordenadas cilíndricas.

(a) $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$, donde B es la región dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, por encima del plano xy y por debajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(b) $\iiint_W \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$, donde W es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Solución.

Solución a)

La región B está definida por:

1. $0 \leq r \leq 1$ (por el cilindro $x^2+y^2=1$, es decir, la base del cilindro).
2. $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (cubre todo el círculo en el plano XY).
3. $0 \leq z \leq r$ (por debajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, z varía desde 0 ()en el plano xy) hasta r en la superficie del cono).

La integral triple en coordenadas cilíndricas es:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r z\,r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Evaluamos la integral en z:

$$\int_0^r z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^r = \frac{r^2}{2}.$$

La integral se reduce a:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^2}{2}\cdot r\,dr\,d\theta.$$

Simplificando:

$$\frac{r^2}{2}\cdot r = \frac{r^3}{2}.$$

Reescribimos la integral como:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^3}{2}\, dr\, d\theta.$$

Evaluamos la integral en r:

$$\int_0^1 \frac{r^3}{2}\, dr = \frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Ahora, evaluamos la integral en θ:

$$\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi.$$

Finalmente, el valor de la integral es:

$$\frac{1}{8} \cdot 2\pi = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Solución b)

Calculamos la integral:

$$\iiint_W \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\, dy\, dz,$$

donde W está definida por $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Cambio a coordenadas cilíndricas

Coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \quad dx\, dy\, dz = r\, dr\, d\theta\, dz,$$

y $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2+z^2}$.

Reescribimos la integral como:

$$\int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\, dr\, dz\, d\theta.$$

Integral respecto a r

Sea $u = r^2 + z^2$, entonces $du = 2r\,dr$. Los límites son:

$$r = 0 \implies u = z^2, \quad r = \sqrt{1 - z^2} \implies u = 1.$$

La integral queda:

$$\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}\,dr = \frac{1}{2}\int_{z^2}^{1} u^{-1/2}\,du = \sqrt{1} - \sqrt{z^2} = 1 - z.$$

Integral respecto a z

La integral ahora es:

$$\int_{1/2}^{1} (1 - z)\,dz = \int_{1/2}^{1} 1\,dz - \int_{1/2}^{1} z\,dz.$$

Resolviendo:

$$\int_{1/2}^{1} 1\,dz = \frac{1}{2}, \quad \int_{1/2}^{1} z\,dz = \frac{3}{8}.$$

Por lo tanto:

$$\int_{1/2}^{1} (1 - z)\,dz = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$

Integral respecto a θ

Finalmente:

$$\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi.$$

El resultado es:

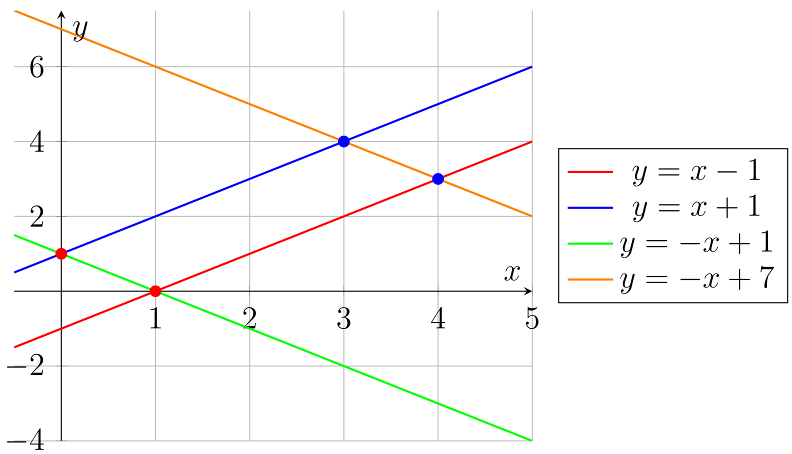
$$\iiint_W \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,dx\,dy\,dz = 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Ejercicio 31

Evalúa:

$$\iint_B (x + y)\,dx\,dy$$

donde B es el rectángulo en el plano xy con vértices en $(0, 1), (1, 0), (3, 4)$, y $(4, 3)$.



Solución.

Obteniendo las funciones que intersecan en los puntos $(0,1),(1,0),(3,4),(4,3)$, podemos realizar el cambio de variable:

$$y = x - 1 \quad (1)$$
$$y = x + 1 \quad (2)$$
$$y = -x + 1 \quad (3)$$
$$y = -x + 7 \quad (4)$$

Despejando ecuaciones semejantes:

$$u = y - x, \quad v = y + x.$$

Donde

$$-1 \leq u \leq 1, \quad 1 \leq v \leq 7.$$

Transformación de variables

Sumando y restando las dos ecuaciones se despeja x y y

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2}.$$

Por lo que llegamos a $T(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$

Determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Con esto:

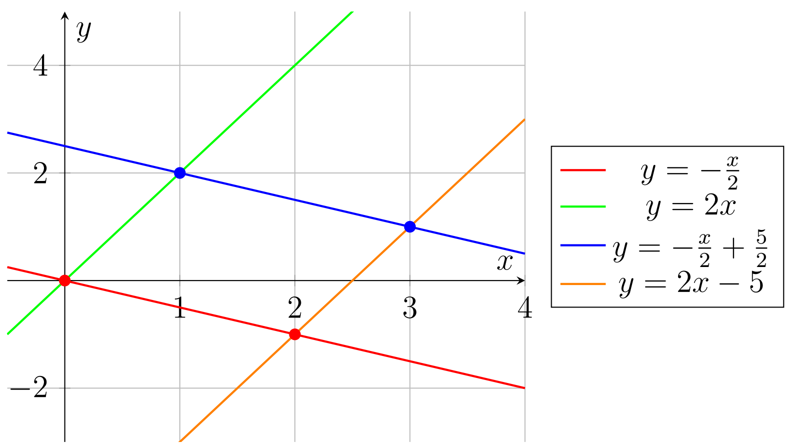
$$
\begin{aligned}
\iint_B (x+y)\,dx\,dy &= \int_1^7 \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\left(\frac{v-u}{2} + \frac{v+u}{2}\right) du\,dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^7 \int_{-1}^1 v\,du\,dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^7 2v\,dv \\
&= \frac{v^2}{2}\bigg|_1^7 \\
&= \frac{49}{1} - \frac{1}{2} \\
&= 24
\end{aligned}
$$

Ejercicio 32

Evalúa:

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy$$

donde D es el cuadrado con vértices en $(0,0), (1,2), (3,1)$, y $(2,-1)$.



Solución.

Obteniendo las funciones que intersecan en los puntos $(0,1), (1,0), (3,4), (4,3)$, podemos realizar el cambio de variable:

$$y = -\frac{x}{2} \tag{5}$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \tag{6}$$

$$y = 2x \tag{7}$$

$$y = 2x - 5 \tag{8}$$

Despejando ecuaciones semejantes:

$$u = y + \frac{x}{2}, \quad v = y - 2x.$$

Donde

$$0 \leq u \leq \frac{5}{2}, \quad -5 \leq v \leq 0.$$

Transformación de variables

Sumando y restando las dos ecuaciones se despeja x y y

$$x = \frac{2u - 2v}{5}, \quad y = \frac{4u + v}{5}.$$

Por lo que llegamos a $T(u, v) = (\frac{2u-2v}{5}, \frac{4u+v}{5})$

Determinante Jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = -\frac{8}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{2}{5}$$

Con esto:

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{5}{2}}\int_{-5}^{0} -\frac{2}{5}\left(\frac{2u-2v}{5}+\frac{4u+v}{5}\right)du\,dv$$

$$= -\frac{2}{5}\int_0^{\frac{5}{2}}\int_{-5}^{0}\left(\frac{6u}{5}-\frac{v}{5}\right)du\,dv$$

$$= -\frac{2}{5}\int_0^{\frac{5}{2}}\left[\frac{3u^2}{5}-\frac{vu}{5}\right]_{-5}^{0} dv$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{\frac{5}{2}}(v+15)\,dv$$

$$= \frac{2}{5}\left[\frac{v^2}{2}+15v\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{5}\left[\frac{325}{8}\right]$$

$$= \frac{65}{4}$$

Ejercicio 33

Sea E el elipsoide $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)\leq 1$, donde a, b y c son positivos.

(a) Encuentra el volúmen de E

(b) Evalúa

$$\iiint_E [(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)]\,dx\ dy\ dz$$

(Pista: Cambia de variables y luego utiliza coordenadas esféricas.)

Solución.

Tenemos que el elipsoide está definido por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

en donde $a, b, c > 0$

Aplicamos el cambio de variables:

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw$$

entonces, tenemos:

$$\frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} + \frac{(cw)^2}{c^2} \leq 1$$
$$= u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$$

Con esto podemos mapear el elipsoide a una esfera unitaria en el espacio uvw

Después calculamos el Jacobiano del cambio de variables:

$$det(J) = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right| = \left|abc\right|$$

Con lo que tenemos que:

$$dx\ dy\ dz = \left|abc\right| du\ dv\ dw$$

Ahora bien, sabemos que el volumen de una esfera unitaria en el espacio $\mathbb{R}^3$ es $\frac{4\pi}{3}$

Por lo que $V_E = \left|abc\right| \cdot \frac{4\pi}{3}$

$$V_E = \frac{4\pi abc}{3}$$

Ahora, procedemos a calcular la integral:

$$\iiint_E \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\, dx\ dy\ dz$$

Aplicamos el mismo cambio de variable:

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw$$

Con esto nos queda:

$$\iiint_E \frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} + \frac{(cw)^2}{c^2}\ \left|abc\right| du\ dv\ dw$$

$$= abc \cdot \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} u^2 + v^2 + w^2\, du\ dv\ dw$$

Ahora bien, debemos transformar nuestra integral utilizando coordenadas esféricas:

$$u = \rho\ sin\phi\ cos\theta, \quad v = \rho\ sin\phi\ sin\theta, \quad w = \rho\ cos\phi$$

$$du\ dv\ dw = \rho^2\ sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

además, $\rho \in [0,1],\ \phi \in [0,\pi]$, y $\theta \in [0, 2\pi]$

Ahora sí, sustituimos en la integral:

$$abc \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho^2 sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

Podemos separar las integrales:

$$abc \cdot \int_0^{2\pi} d\theta\ \int_0^{\pi} sin\phi\ d\phi\ \int_0^1 \rho^4\ d\rho$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^{\pi} sin\phi\ d\phi = 2$$

$$\int_0^1 \rho^4\ d\rho = \frac{1}{5}$$

Por último, multiplicamos todos los términos:

$$abc \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4\pi abc}{5}$$

Así que:

$$\iiint_E \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\, dx\ dy\ dz = \frac{4\pi abc}{5}$$

Ejercicio 34

Usando coordenadas esféricas, calcula la integral de $f(\rho, \phi, \theta) = \frac{1}{\rho}$ sobre la región en el primer octante de $\mathbb{R}^3$, que está delimitada por los conos $\phi = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \arctan(2)$ y la esfera $\rho = \sqrt{6}$.

Solución.

Primero debemos definir los limites de integración:

Para la coordenada radial ρ, la distancia del origen al punto tenemos que $\rho = \sqrt{6}$. Lo qué significa que ρ varia de 0 a $\sqrt{6}$. Por lo tanto, los limites para ρ son: $0 \leq \rho \leq \sqrt{6}$.

Ahora bien, el angulo polar ϕ, es el ángulo de la proyección del punto con respecto al eje z. En este caso, la región esta acotada por dos conos:

1. $\phi = \frac{\pi}{4}$
2. $\phi = \arctan(2)$

Por lo tanto, los limites para ϕ son: $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \arctan(2)$.

Finalmente, θ el ángulo en el plano XY, esta limitado por: $\leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

En coordenadas esféricas, el diferencial de volumen es:

$$dV = \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Habiendo definido los limites de integración para cada coordenada, podemos escribir la integral como:

$$\iiint_{\mathrm{R}} \frac{1}{\rho}\, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)} \int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\rho} \rho^2 \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Simplificando la función:

$$\frac{1}{\rho}\rho^2 \sin(\phi) = \rho \sin(\phi),$$

la integral la reescribimos como:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)} \int_0^{\sqrt{6}} \rho \sin(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Integral respecto a ρ

$$\int_0^{\sqrt{6}} \rho\, d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Esto reduce la integral a:

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)} \sin(\phi)\, d\phi\, d\theta.$$

Integral respecto a ϕ

La integral respecto a ϕ es:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)} \sin(\phi)\, d\phi = [-\cos(\phi)]_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)}.$$

Calculamos los valores:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(\arctan(2)) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Entonces:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)} \sin(\phi)\, d\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Integral respecto a θ

La integral respecto a θ es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Resultado:

El resultado de la integral es:

$$\iiint_{\text{región}} \frac{1}{\rho}\, dV = 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Así, el valor de la integral es:

$$\boxed{\frac{3\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}.$$

Ejercicio 35

La transformación $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ mapea el rectángulo $1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 3$ del plano uv a una región R del plano xy.

(a) Demuestra que T es inyectiva.

(b) Encuentra el área de R utilizando la fórmula de cambio de variables.

Solución.

La transformación $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ transforma el rectángulo $1 \le u \le 2$, $1 \le v \le 3$ del plano uv en una región R del plano xy.

(a) Mostrar que T es uno a uno.

(b) Encontrar el área de R utilizando la fórmula de cambio de variables.

Demostración de que la transformación es uno a uno

Para demostrar que T es uno a uno, asumimos que existen dos puntos (u_1, v_1) y (u_2, v_2) tales que:

$$T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2).$$

Esto implica:

$$u_1^2 - v_1^2 = u_2^2 - v_2^2,$$

$$2u_1v_1 = 2u_2v_2.$$

De la segunda ecuación, tenemos que $u_1v_1 = u_2v_2$. Al sustituir esto en la primera ecuación y resolver para u_1, v_1 en términos de u_2, v_2, concluimos que $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$, demostrando que T es uno a uno.

Cálculo del Jacobiano

El determinante del Jacobiano de $T(u, v)$ se calcula como:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

donde $x = u^2 - v^2$ y $y = 2uv$. Por lo tanto:

$$J = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = (2u)(2u) - (-2v)(2v) = 4u^2 + 4v^2.$$

Configuración de la integral para el área

El área de la región R está dada por la integral doble:

$$\text{Área de } R = \iint_R \frac{1}{|J|}\, dA,$$

donde $|J| = 4u^2 + 4v^2$. En términos de las coordenadas u, v, la integral es:

$$\text{Área de } R = \int_{u=1}^{2} \int_{v=1}^{3} \frac{1}{4u^2 + 4v^2}\, dv\, du.$$

Resolución paso a paso

Paso 1: Simplificar el integrando

El integrando es:

$$\frac{1}{4u^2 + 4v^2} = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}.$$

Paso 2: Configurar la integral interna

La integral interna es:

$$\int_{v=1}^{3} \frac{1}{u^2 + v^2}\, dv.$$

Paso 3: Resolver la integral interna

La integral de $\frac{1}{u^2+v^2}$ respecto a v es:

$$\int \frac{1}{u^2 + v^2}\, dv = \frac{1}{u} \arctan\left(\frac{v}{u}\right).$$

Evaluando de $v = 1$ a $v = 3$:

$$\frac{1}{u}\left[\arctan\left(\frac{3}{u}\right) - \arctan\left(\frac{1}{u}\right)\right].$$

Paso 4: Configurar la integral externa

La integral externa se convierte en:

$$\int_{u=1}^{2} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u}\left[\arctan\left(\frac{3}{u}\right) - \arctan\left(\frac{1}{u}\right)\right] du.$$

Paso 5: Resolver la integral externa

Dividimos la integral en dos términos:

$$\int_{u=1}^{2} \frac{1}{u} \arctan\left(\frac{3}{u}\right) du - \int_{u=1}^{2} \frac{1}{u} \arctan\left(\frac{1}{u}\right) du.$$

Utilizando herramientas computacionales, se obtiene que el valor aproximado de la integral es:

$$\text{Área de } R \approx 0.0722.$$

Concepto clave

Una integral doble evalúa el volumen bajo una superficie descrita por una función $f(x, y)$ sobre una región específica en el plano xy. El proceso involucra:

1. **Integral interna:** Se fija una variable (por ejemplo, x) y se integra $f(x, y)$ respecto a y en los límites dados, calculando un çorte"del volumen para un valor específico de x.
2. **Integral externa:** Se integra el resultado de la integral interna respecto a x en sus límites, sumando todos los cortes para obtener el volumen total.

En este problema, se utilizó la función racional $f(u, v) = \frac{1}{4(u^2+v^2)}$, lo que requirió usar propiedades de la función arctangente durante la integración.

Ejercicio 36

Sea R la región dentro de $x^2 + y^2 = 1$, pero fuera de $x^2 + y^2 = 2y$ con $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

(a) Dibuja esta región.

(b) Sea $u = x^2 + y^2, v = x^2 + y^2 - 2y$. Dibuja la región D en el plano uv, que corresponde a R bajo este cambio de coordenadas..

(c) Compute $\displaystyle\iint_R xe^y \, dx \, dy$ usando este cambio de coordenadas.

Solución.

Parte (a): Esbozar la región R

La región R está definida por:

1. Dentro del círculo: $x^2 + y^2 = 1$,
2. Fuera de la parábola: $x^2 + y^2 = 2y$,
3. Con restricciones: $x \geq 0$ y $y \geq 0$ (primer cuadrante).

Los pasos para esbozar R:

- El círculo $x^2 + y^2 = 1$ es un círculo estándar de radio 1 centrado en el origen.
- Reescribiendo la parábola $x^2 + y^2 = 2y$ obtenemos $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, que es un círculo de radio 1 centrado en $(0, 1)$.
- La región R es la porción del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ que se encuentra fuera del círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ y dentro del primer cuadrante.

Parte (b): Esbozar D bajo el cambio de variables

El cambio de coordenadas es:

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 + y^2 - 2y.$$

Pasos:

1. De las ecuaciones:
   - $u = x^2 + y^2$, que representa la distancia radial al cuadrado en coordenadas polares.
   - $v = u - 2y \implies y = \frac{u-v}{2}$.
2. Los límites de R en coordenadas u, v:
   - El círculo $x^2 + y^2 = 1$ se transforma en $u = 1$.
   - El círculo $x^2 + (y-1)^2 = 1$ se transforma en $v = 1$.
3. La región D en el plano uv es un triángulo definido por:
   - $u = 1$ (límite superior),
   - $v = 1$ (límite inferior),
   - $v \leq u$ (asegurando $y \geq 0$).

Parte (c): Calcular $\iint_R xe^x \, dx \, dy$

La integral se evaluará utilizando el cambio de variables. Pasos clave:

1. **Encontrar el Jacobiano:** Calcular el determinante de la matriz Jacobiana para la transformación.
   $$u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 + y^2 - 2y.$$
   Diferenciamos u y v respecto a x y y.
2. **Cambiar los límites de la integral:** Usar la región D en el plano uv.
3. **Transformar el integrando y calcular:** Sustituir x, e^x y el determinante de Jacobiano en la integral.

El determinante del Jacobiano para la transformación es $-4x$. Esto se incorpora a la integral al transformar las variables.

La integral transformada es:

$$\iint_D (xe^x \cdot |-4x|) \, du \, dv.$$

Donde D está definido por:

- $1 \leq u \leq 1$ (frontera del círculo),
- $1 \leq v \leq u$ (triángulo en el plano uv).

El valor de la integral evaluada es 0. Este resultado surge porque la función $xe^x \cdot (-4x)$ integrada sobre la región simétrica R (o equivalente D) se cancela debido a la simetría o cambios de signo en el espacio transformado.

Resumen de resultados

1. La región R es la porción del círculo unitario $x^2+y^2=1$ fuera del círculo $x^2+(y-1)^2=1$, confinada al primer cuadrante.
2. Bajo el cambio de coordenadas, R se transforma en una región triangular D en el plano uv, definida por $1 \leq u \leq 1$ y $1 \leq v \leq u$.
3. La integral $\iint_R xe^x \, dx \, dy$ evalúa a 0.

Explicación del concepto clave

El teorema de cambio de variables permite transformar una región y el integrando a una forma más simple introduciendo nuevas variables. El determinante de Jacobiano escala el elemento de área (o volumen) para tener en cuenta la distorsión debido a la transformación.

En este problema:

1. La región original R se describió en términos de x, y, pero la transformación la simplificó a una región triangular D en coordenadas uv.
2. La integral se transformó adecuadamente, con el determinante de Jacobiano asegurando el escalado correcto del área diferencial.

La región D es degenerada porque los límites $u = 1$ y $v = 1$ colapsan la región triangular en un segmento de línea, lo que significa que:

$$\iint_D = 0.$$

El resultado confirma que la integral evalúa a cero.

Ejercicio 37

Sea D la región delimitada por $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$, para $x \geq 0$, $y \geq 0$, y los ejes coordenados $x = 0, y = 0$.
Expresa

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

como una integral sobre el triángulo D^*, el cual es el conjunto de puntos $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a - u$. (No intentes evaluar.)

Solución.

Parametrización de la región D

La región D está definida por la ecuación:

$$x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}, \quad \text{para } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0.$$

Consideramos todos los puntos (x, y) en el primer cuadrante que satisfacen esta restricción. Los ejes coordenados proporcionan límites, formando una región delimitada en el primer cuadrante.

Transformación de variables

Realizamos un cambio de variables para simplificar la región D. Sea:

$$u = x^{3/2}, \quad v = y^{3/2}.$$

La transformación resulta en:

$$x = u^{2/3}, \quad y = v^{2/3}.$$

En consecuencia, la ecuación original $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$ se transforma en:

$$u + v = a^{3/2}.$$

La región D^* en las nuevas variables

La región D^* está definida como:

$$0 \leq u \leq a^{3/2}, \quad 0 \leq v \leq a^{3/2} - u.$$

Esto produce una región triangular en el espacio (u, v), delimitada por la línea $u + v = a^{3/2}$ y los ejes coordenados.

Jacobiano de la transformación

Necesitamos calcular el Jacobiano de la transformación para reescribir el elemento de área $dx\,dy$. La transformación $x = u^{2/3}$, $y = v^{2/3}$ nos lleva a las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3}u^{-1/3}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2}{3}v^{-1/3}.$$

Esto resulta en el determinante del Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}v^{-1/3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9}u^{-1/3}v^{-1/3}.$$

Expresión de la integral sobre D^*

Finalmente, expresamos la integral doble sobre la región D como una integral sobre D^*. La integral se convierte en:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{a^{3/2}} \int_0^{a^{3/2}-u} f(u^{2/3}, v^{2/3}) \cdot \frac{4}{9}u^{-1/3}v^{-1/3}\,dv\,du.$$

Cada (x, y) corresponde a un par (u, v), transformando los límites e involucrando el Jacobiano.

Conceptos clave

Cambio de variables

Para resolver integrales dobles complejas, un cambio de variables puede simplificar la integración. En este tema, transformamos las variables de integración del sistema de coordenadas original a uno nuevo, con el propósito de simplificar la región y el cálculo.

En este caso, la región original está definida por la ecuación $x^{3/2}+y^{3/2} = a^{3/2}$. Al introducir las nuevas variables $u = x^{3/2}$ y $v = y^{3/2}$, la ecuación se transforma en $u + v = a^{3/2}$, convirtiendo la región en una forma más manejable.

Las nuevas variables u y v describen una región triangular. Este cambio de variables es una herramienta efectiva para navegar por regiones complejas en integrales dobles.

Jacobiano

El Jacobiano es esencial al realizar un cambio de variables en integrales dobles. Ajusta el factor de escala que ocurre durante la transformación. Básicamente, al cambiar de sistemas de coordenadas, los elementos de área $dx\,dy$ se transforman en $du\,dv$ mediante un factor de escala llamado determinante del Jacobiano.

En nuestra transformación de (x, y) a (u, v), el Jacobiano se deriva de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2}{3}u^{-1/3}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2}{3}v^{-1/3}.$$

La matriz Jacobiana es diagonal, y el determinante del Jacobiano es:

$$J = \frac{4}{9}u^{-1/3}v^{-1/3}.$$

Este determinante se utiliza en la integral transformada para ajustar el cambio en la escala del área de un sistema de coordenadas a otro.

Parametrización

La parametrización implica expresar una región geométrica en términos de un conjunto diferente de variables. Es una técnica utilizada para mapear regiones complicadas en formas paramétricas más simples.

Para la región dada D, la ecuación $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$ se parametriza mediante u y v, con la transformación:

$$x = u^{2/3}, \quad y = v^{2/3}.$$

Esto convierte la condición de frontera en:

$$u + v = a^{3/2}.$$

Esta parametrización redefine D en una región triangular más simple D^* en el espacio (u, v). Así, la parametrización se alinea estrechamente con el cambio de variables y es una herramienta efectiva para integrales dobles.

Ejercicio 38

Muestra que $S(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$, la transformación de cambio de coordenadas esféricas, es inyectiva excepto en un conjunto que es la unión de un número finito de gráficas de funciones continuas.

Solución.

Paso 1: Entender la transformación a coordenadas esféricas

La transformación $S(\rho, \theta, \phi)$ está definida como:

$$S(\rho, \theta, \phi) = (x, y, z),$$

donde:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\phi.$$

Aquí, las variables tienen las siguientes restricciones:

- $\rho \geq 0$ (radio),
- $0 \leq \phi \leq \pi$ (ángulo polar),
- $0 \leq \theta < 2\pi$ (ángulo azimutal).

Paso 2: Condiciones para que sea inyectiva (uno a uno)

Para que la transformación sea uno a uno, debemos demostrar que si dos puntos en coordenadas esféricas se transforman al mismo punto en coordenadas cartesianas, entonces representan las mismas coordenadas esféricas. Esto requiere resolver:

$$S(\rho_1, \theta_1, \phi_1) = S(\rho_2, \theta_2, \phi_2),$$

o equivalentemente:

$$\rho_1 \sin\phi_1 \cos\theta_1 = \rho_2 \sin\phi_2 \cos\theta_2,$$
$$\rho_1 \sin\phi_1 \sin\theta_1 = \rho_2 \sin\phi_2 \sin\theta_2,$$
$$\rho_1 \cos\phi_1 = \rho_2 \cos\phi_2.$$

Paso 3: Análisis de los posibles casos

1. **Caso 1:** $\rho = 0$
   Cuando $\rho = 0$, todas las coordenadas esféricas mapean al origen $(0, 0, 0)$. Por lo tanto, la transformación no es uno a uno en este punto.
2. **Caso 2:** $\rho > 0$
   En este caso, asumimos $S(\rho_1, \theta_1, \phi_1) = S(\rho_2, \theta_2, \phi_2)$. Esto implica:

   $$\sin\phi_1 \cos\theta_1 = \sin\phi_2 \cos\theta_2, \quad \sin\phi_1 \sin\theta_1 = \sin\phi_2 \sin\theta_2, \quad \cos\phi_1 = \cos\phi_2.$$

   - De $\cos\phi_1 = \cos\phi_2$, se deduce que $\phi_1 = \phi_2$ o $\phi_1 = \pi - \phi_2$.
   - Sustituyendo $\phi_1 = \phi_2$, las ecuaciones para x e y se reducen a:

     $$\cos\theta_1 = \cos\theta_2, \quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2.$$

     Esto implica que $\theta_1 = \theta_2$ (módulo 2π).
   - Para $\phi_1 = \pi - \phi_2$, obtenemos $z_1 = -z_2$. Este escenario corresponde a una simetría alrededor del eje z, lo que significa que la transformación falla en ser uno a uno a lo largo de los polos ($\phi = 0$ y $\phi = \pi$).

Paso 4: Identificar el conjunto problemático

La transformación $S(\rho, \theta, \phi)$ no es uno a uno en los siguientes casos:

- En el origen ($\rho = 0$),
- A lo largo de los ejes z positivo y negativo ($\phi = 0$ o $\phi = \pi$).

Estos conjuntos pueden describirse como gráficas de funciones continuas:

- El punto $\rho = 0$ corresponde a una gráfica degenerada.
- Los ejes $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ corresponden a relaciones continuas donde $z = \pm\rho$.

Respuesta final

La transformación a coordenadas esféricas $S(\rho, \theta, \phi)$ es uno a uno excepto en el conjunto $\rho = 0$ y la unión de los polos ($\phi = 0$ y $\phi = \pi$), los cuales son uniones de gráficas de funciones continuas.

Concepto clave

El concepto clave es el comportamiento de las transformaciones a coordenadas esféricas y las condiciones bajo las cuales no son inyectivas.

Explicación del concepto clave

Las coordenadas esféricas mapean un espacio tridimensional a ángulos polares y distancias radiales. Aunque la transformación es mayormente inyectiva (uno a uno), las degeneraciones surgen debido a la simetría a lo largo de ciertos ejes ($\phi = 0, \pi$) y en el origen ($\rho = 0$). Estas excepciones corresponden a casos en los que diferentes coordenadas esféricas resultan en el mismo punto cartesiano.