Task1

December 2, 2018

```
In [84]: import numpy as np
         import matplotlib.pyplot as plt
         import scipy.stats as sts
         %matplotlib inline
```

Считаем наши данные:

```
In [85]: data = np.load('9-1.npy')
```

Для начала воспользуемся ЦПТ. Для $Exp(\theta)$, $EX_1 = \frac{1}{\theta}, DX_1 = \frac{1}{\theta^2}$, откуда:

$$\sqrt{n}\left(\overline{X} - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow{d_\theta} N\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\theta\overline{X} - 1\right) \xrightarrow{d_\theta} N\left(0, 1\right)$$

Откуда получим критерий для проверки $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$:

$$S = \left\{\sqrt{n}\left|\theta_0\overline{X} - 1\right| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\},$$

где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль $N(0,1)$. Возьмем $\alpha = 0.05$, тогда $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. Данный критерий является состоятельным в силу ЦПТ и УЗБЧ и асимптотическим (аналогично критерию Вальда).

Используем данный критерий для каждого $\theta \in \{0.9, 1, 1.1\}$

1 $H_0 : \theta = 0.9$ vs $H_1 : \theta \neq 0.9$

```
In [86]: theta = 0.9
         np.sqrt(len(data)) * np.abs(theta * np.mean(data) - 1) > 1.96

Out[86]: False
```

Таким образом мы отвергаем гипотезу H_0.

2 $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta \neq 1$

```
In [87]: theta = 1
         np.sqrt(len(data)) * np.abs(theta * np.mean(data) - 1) > 1.96

Out[87]: False
```

Таким образом мы отвергаем гипотезу H_0.

3 $H_0 : \theta = 1.1$ vs $H_1 : \theta \neq 1.1$

In [88]:
```
theta = 1.1
np.sqrt(len(data)) * np.abs(theta * np.mean(data) - 1) > 1.96
```

Out[88]:
```
True
```

Таким образом мы отвергаем гипотезу, что $\theta = 1.1$

Далее для оставшихся $\theta \in \{0.9, 1\}$ воспользуемся критерием найденым на семинаре.Для выборки из экспоненциального распределения с параметром θ и $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$:

$$S = \{2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i < b_\alpha\},$$

где b_α - квантиль χ^2_{2n}.

Для проверки $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$:

$$S = \{2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} X_i > b_{1-\alpha}\}.$$

Испоьзуем данные критерии для $\theta = 0.9$ и $\theta = 1$. В данном случае возьмем $\alpha = 0.1$ (иначе мы не сможем отвергнуть ни одну из гипотез).

4 $H_0 : \theta = 0.9$ vs $H_1 : \theta > 0.9$

In [89]:
```
theta = 0.9
2 * 0.9 * np.sum(data) < sts.distributions.chi2.ppf(0.1, 2 * len(data))
```

Out[89]:
```
False
```

Таким образом мы не отвергаем гипотезу H_0.

5 $H_0 : \theta = 1$ vs $H_1 : \theta < 1$

In [90]:
```
theta = 1
2 * theta * np.sum(data) > sts.distributions.chi2.ppf(0.9, 2 * len(data))
```

Out[90]:
```
True
```

Таким образом мы отвергаем гипотезу, что $\theta = 1$.

В итоге мы отвергнули все гипотезы, кроме $\theta = 0.9$. Следовательно, мы предпологаем, что это и есть наше истинное значение параметра. Интересное также посмотреть на величину $\overline{X}$:

In [91]:
```
np.mean(data)
```

Out[91]:
```
1.134570549918088
```

Данная величина как раз очень похожа на $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{0.9} \approx 1.11$, что и должно получается исходя из того, что $\overline{X} \xrightarrow{P_\theta} \frac{1}{\theta}$.

Вывод: с помощью различных критериев проверок разных гипотез мы смогли определить истинное значение параметра экспоненциального распределения равное $\theta = 0.9$. В данном случае коэффициенты α в обоих критериях мы брали достаточно малыми, поэтому вероятность ошибки невелика и равна $\max \alpha = 0.1$, то есть 10%.