Task2

December 2, 2018

```
In [228]: import numpy as np
          import matplotlib.pyplot as plt
          import scipy.stats as sts
          %matplotlib inline
```

Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim N(a, \sigma^2)$ Критерий Стьюдента для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$:

$$S = \left\{ X : \sqrt{n-1} \left| \frac{\overline{X} - \theta_0}{s} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\},$$

где $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}}$, а $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - квантиль распределения Стьюдента.

В нашем случае $\theta_0 = 0, \alpha = 0.05$. Функция мощности $\beta(Q_\theta, S) = Q_\theta(X \in S)$, где $Q_\theta \in \mathbf{P}$. Построим данную функцию на $\theta = [-10, 10]$, то есть создадим равномерную сетку на данном отрезке и для каждого узла этой сетки сгенерируем $samples = 100$ выборок с распределением $N(\theta, 1)$ и посчитаем количество выборок, которые попали в S, таким образом получим эмпирическое распределение функции мощности. Проделаем данную процедуру для разных размеров выборки и нарисуем графики функций мощности.

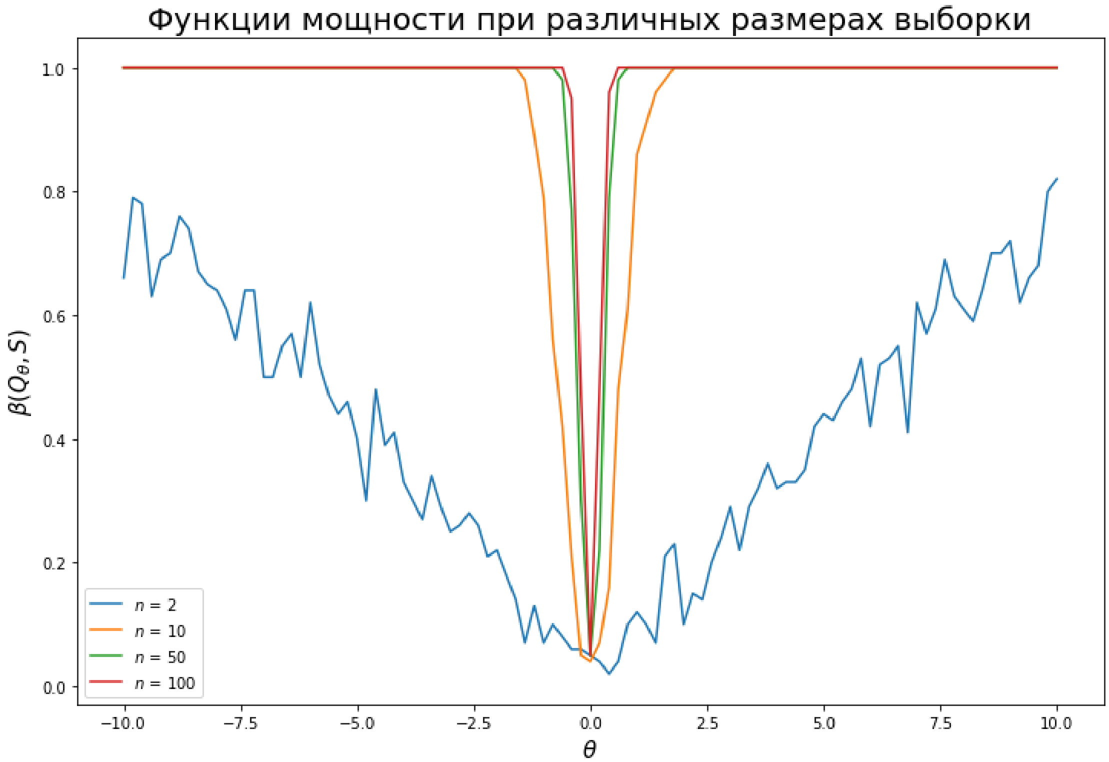
```
In [229]: thetas = np.linspace(-10, 10, 101)
```

```
In [230]: samples = 100
          plt.figure(figsize=(12, 8))
          for n in [2, 10, 50, 100]:
              probability = []
              t = sts.distributions.t.ppf(0.975, n - 1)
              for theta in thetas:
                  norm_rv = sts.norm(loc=theta, scale=1)
                  sample = norm_rv.rvs(size=(samples, n))

                  s = np.array([(np.sum((sample[i] - np.mean(sample[i])) ** 2) \
                                / n) ** 0.5 for i in range(samples)])

                  probability.append(np.sum([np.abs(np.sqrt(n - 1) * \
                                                   np.mean(sample[i]) / s[i]) > t
                                    for i in range(samples)]) / samples)
              plt.plot(thetas, probability, label=r"$n$ = {}".format(n))
          plt.xlabel(r"$\theta$", fontsize=15)
          plt.ylabel(r"$\beta(Q_{\theta}, S)$", fontsize=15)
```

```
plt.title("Функции мощности при различных размерах выборки", fontsize=20)
plt.legend();
```



Как можно заметить из графика, при увеличении размера выборки для $\theta \neq \theta_0$ значение функции мощности стремится к единице, так как данный критерий состоятельный, а при $\theta = 0$ функция мощности равна 0.05, так как критерий точный и имеет уровень значимости $\alpha = 0.05$.

Найдем такой минимальный n, что при $|\theta_0 - \theta_1| = 1$ при проверке гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ критерием Стьюдента уровня значимости 0.05 вероятность ошибки второго рода станет меньше вероятности ошибки первого рода. Для того, чтобы посчитать это возьмем ту же сетку и для каждого узла θ_0 найдем $\theta_1 = \theta_0 + 1$ и сгенерируем по $samples = 100$ выборок для каждого $n \in [10, 25]$ из распределения $N(\theta_0, 1)$. Тогда ошибкой первого рода называется ошибка, когда мы отвергаем H_0, если она верна, то есть выборка $X \in S_{\theta_0}$, а ошибкой второго рода называется ошибка, когда мы принимаем H_1, если она не верна. То есть мы строим критерий Стьюдента для θ_1 и смотрим, когда наша выборка $X \notin S_{\theta_1}$, то есть мы приняли H_1, хотя она и не верна, так как наша выборка из нормального распределения с параметром θ_0.

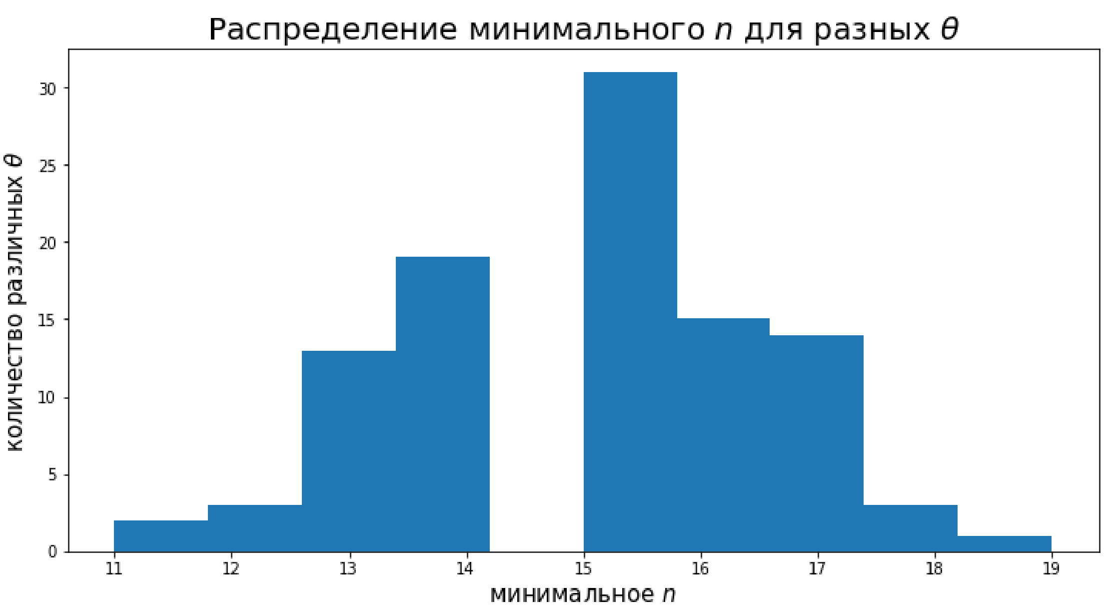
Таким образом мы для каждого n считаем по сотне сгенерированных выборок вероятности ошибок первого и второго рода и находим такое минимальное n, когда вероятность ошибки второго рода станет меньше вероятности ошибки первого рода. И так для каждого θ_0 из нашей сетки.

```
In [231]: samples = 100
          min_n = []
          for theta in thetas:
              theta2 = theta + 1
```

```python
    for n in range(10, 25):
        norm_rv = sts.norm(loc=theta, scale=1)
        sample = norm_rv.rvs(size=(samples, n))
        t = sts.distributions.t.ppf(0.975, n - 1)
        s = np.array([(np.sum((sample[i] - np.mean(sample[i])) ** 2) / n) ** 0.5
                      for i in range(samples)])

        first_error = np.sum([np.abs(np.sqrt(n - 1) * \
                                     np.mean(sample[i] - theta) / s[i]) > t
                              for i in range(samples)]) / samples
        second_error = 1 - np.sum([np.abs(np.sqrt(n - 1) * \
                                          np.mean(sample[i] - theta2) / s[i]) > t
                                   for i in range(samples)]) / samples
        if first_error > second_error:
            min_n.append(n)
            break

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.hist(min_n)
plt.xlabel(r"минимальное $n$", fontsize=15)
plt.ylabel(r"количество различных $\theta$", fontsize=15)
plt.title(r"Распределение минимального $n$ для разных $\theta$", fontsize=20);
```



Таким образом для любого θ минимальный размер выборки, при котором ошибка второго рода становится меньше ошибки первого рода, равен примерно 18-19.

Вывод: мы убедились в том, что критерий Стьюдента является состоятельными критерием, так как функция мощности стремится к 1 для любого распределения, не равного истинному.

Также данный критерий является точным и имеет уровень значимости α. Также мы убедились, что даже при небольших размерах выборки (около 18-19) вероятность ошибки второго рода (то есть принятия не верной гипотезы) начинает становится меньше вероятности ошибки первого рода (отвержения верной гипотезы), если разность между истинным и предпологаемым параметром θ из $N(\theta, 1)$ равна 1, а так как в нашем критерии ошибка первого рода не превосходит 0.05, то с вероятностью большей, чем 0.95 мы сможем отвергнуть неверную гипотезу, что является очень неплохим результатом.