Task3

December 2, 2018

```
In [433]: import numpy as np
          import matplotlib.pyplot as plt
          import scipy.stats as sts
          from scipy.integrate import quad
          %matplotlib inline
```

```
In [434]: n = 100
          N = 10000
```

Запишем статистику байесовского критерия для проверки гипотезы $H_0 : X \sim N(0, \sigma)$ vs $H_1 : X \sim Laplace(\theta)$ в явном виде:

$$K = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sigma^2}} e^{-\sigma} I(\sigma > 0) d\sigma}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{\theta}} e^{-\theta} I(\theta > 0) d\theta} = \frac{\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2\sigma^2}} e^{-\sigma} d\sigma}{\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |X_i|}{\theta}} e^{-\theta} d\theta}.$$

В данном случае априорные распределения σ и θ - это стандартные экспоненциальные распределения.

Построим критерий уровня значимости $\alpha = 0.05$ с помощью моделирования. Для этого сгенерируем $N = 10000$ выборок размера $n = 100$, каждая из которых генерируется из нормального рапсределения с параметрами 0 и σ, где σ берется из априорного стандартного экспоненциального распределения.

Сначала сгенерируем $N = 10000$ параметров σ из стандартного эскпоненциального распределения:

```
In [435]: exp_rv = sts.expon(1)
          sigmas = exp_rv.rvs(size=N)
```

Создадим функции, которые считают подынтегральные выражения нашей статистики K:

```
In [436]: def f0(sigma, sample):
              return ((1 / (2 * np.pi * (sigma ** 2))) ** 0.5) ** len(sample) \
                  * np.exp(-np.sum(sample ** 2) / (2 * (sigma ** 2))) * np.exp(-sigma)
```

```
In [437]: def f1(theta, sample):
              return (1 / (2 * theta)) ** len(sample) \
                  * np.exp(-np.sum(np.abs(sample)) / theta) * np.exp(-theta)
```

Для каждого параметра σ сгенерим выборку из $N(0, \sigma)$ и посчитаем значение статистики K:

```
In [438]: K = np.zeros(N)
          for i, sigma in enumerate(sigmas):
              norm_rv = sts.norm(loc=0, scale=sigma**0.5)
              sample = norm_rv.rvs(n)
              K[i] = quad(f0, 0, np.inf, args=(sample,))[0] / \
              quad(f1, 0, np.inf, args=(sample,))[0]
```

Посмотрим на эмпирическое распределение статистики K и найдем такое $k_{0.05}$, что $P(K \leqslant k_{0.05}) = \alpha = 0.05$ при верной H_0. Для этого отсортируем все значения статистики K и посмотрим на $N \cdot 0.05 = 500$ элемент. Он и будет равен $k_{0.05}$

```
In [439]: plt.figure(figsize=(12, 8))
          plt.hist(K, bins=100, range=(0, 200));
          K = sorted(K)
          k = K[int(N * 0.05) - 1]
          print("k_0.05 = ", k)
          plt.axvline(x=k, color="red", label=r"$k_{0.05}$");
          plt.title("Эмпирическое распределение статистики K", fontsize=20)
          plt.legend(prop={'size': 20});
```

```
k_0.05 =  1.2039135351449521
```

Таким образом получаем критерий:

$$S = \{K \leqslant 1.204\}.$$

Можно сказать, что чем больше значение статистики K, тем выборка более похожа на нормальное распределение, чем на распределение Лапласа.

Посмотрим значение данной статистики на нашей выборке.

```
In [440]: sample = np.load('9-3.npy')
          len(sample)
```

```
Out[440]: 100
```

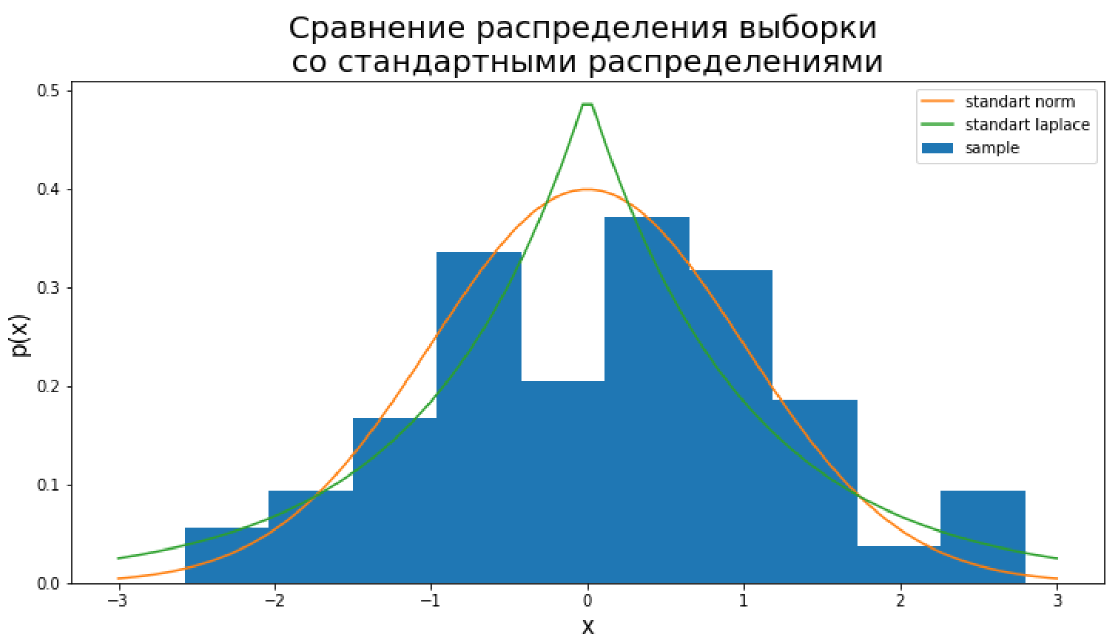
```
In [441]: print("K = ", quad(f0, 0, np.inf, args=(sample,))[0] \
                / quad(f1, 0, np.inf, args=(sample,))[0])
```

```
K =  14311.948632273956
```

Как мы видим значение статистики очень велико, следовательно мы принимаем гипотезу H_0.

Интересно так же наглядно сравнить распределение выборки с, к примеру, плотностями стандартных распределений нормального и Лапласа.

```
In [442]: plt.figure(figsize=(12, 6))
          plt.hist(sample, density=True, label="sample");
          x = np.linspace(-3, 3, 100)
          plt.plot(x, sts.norm.pdf(x), label="standart norm")
          plt.plot(x, sts.laplace.pdf(x), label="standart laplace")
          plt.xlabel("x", fontsize=15)
          plt.ylabel("p(x)", fontsize=15)
          plt.title("""Сравнение распределения выборки
          со стандартными распределениями""", fontsize=20)
          plt.legend();
```



Как мы видим, данные распределения довольно похожи, поэтому на взгляд, не использовав, какие либо методы проверок гипотез очень сложно определить из какого распределения взята наша выборка.

Вывод: с помощью байесовского подхода к проверке гипотез мы смогли проверить гипотезу о распределении выборки. В нашем случае мы приняли гипотезу о том, что наша выборка имеет распределение $N(0, \sigma)$, так как значение статистики было очень большим, а данная статистика по сути и показывает на сколько данная выборка больше похожа на выборку с нормальным распределением, чем с распределением Лапласа.