Task3

October 13, 2018

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        import scipy.stats as sts
        %matplotlib inline
```

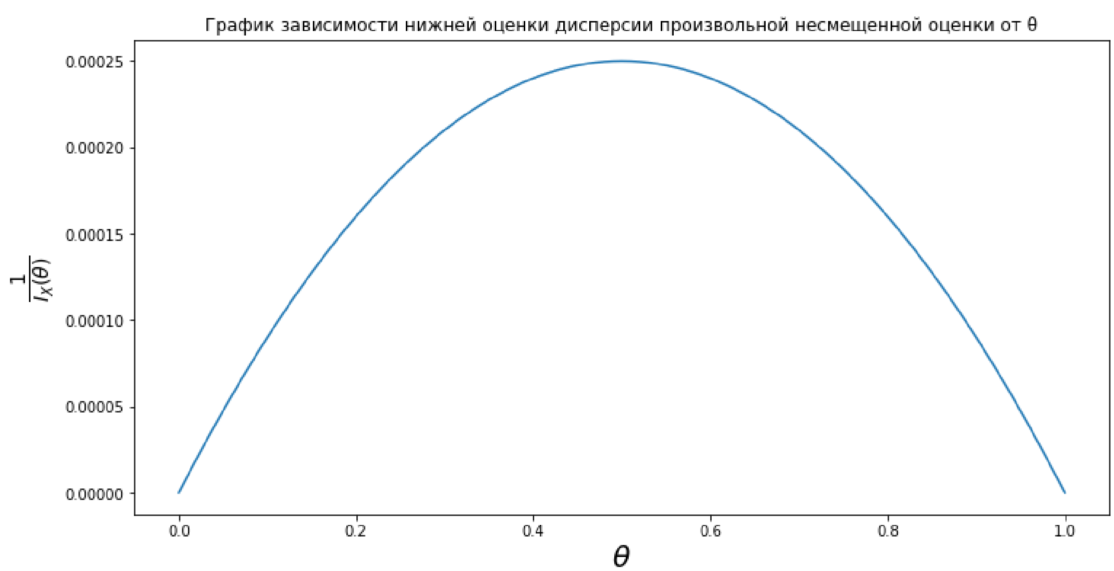
```
In [2]: N = 1000
```

Создадим сетку параметров θ распределения Бернулли с шагом 0.01 на отрезке $[0,1]$

```
In [3]: thetas = np.linspace(0, 1, 101)
```

Построим график зависимости нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки из неравенства Рао-Крамера от θ. Нижняя оценка дисперсии равна $\frac{1}{I_X(\theta)}$, которая в случае распределения Бернулли равна $\frac{\theta(1-\theta)}{N}$

```
In [4]: plt.figure(figsize=(12, 6))
        plt.plot(thetas, thetas * (1 - thetas) / N)
        plt.title(r"""График зависимости нижней оценки
                  дисперсии произвольной несмещенной оценки от θ""")
        plt.xlabel(r"$\theta$", fontsize=20)
        plt.ylabel(r"$\frac{1}{I_X(\theta)}$", fontsize=20);
```



Как видно из графика, данная нижняя оценка симметрична и достигает своего максимума при $\theta = 0.5$.

```
In [5]: K = 500
```

Напишем функцию, считающую бутстрепную оценку дисперсии. В данном случае, бутстреп параметрический, количество бутстрепных выборок равно $K = 500$, размер каждой выборки равен $N = 1000$

```
In [6]: def GetVarianceParam(estimator):
            bootstrap_estimators = np.zeros(K)
            for k in range(K):
                bern_rv = sts.bernoulli(estimator)
                bootstrap_param_sample = bern_rv.rvs(N)
                bootstrap_estimators[k] = np.mean(bootstrap_param_sample)
            return np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                    np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
```

Для каждого значения θ из нашей сетки посчитаем эффективную оценку $\hat{\theta} = \overline{X}$, которая также является несмещенной, а затем бутстрепную оценку дисперсии этой эффективной оценки:

```
In [7]: bootstrap_variance_estimators = np.zeros(101)
        for i, theta in enumerate(thetas):
            bern_rv = sts.bernoulli(theta)
            sample = bern_rv.rvs(N)
            effective_estimator = np.mean(sample)
            bootstrap_variance_estimators[i] = GetVarianceParam(effective_estimator)
```

Нарисуем график зависимости бутстрепной оценки дисперсии эффективной оценки от параметра θ:

```
In [8]: plt.figure(figsize=(12, 6))
        plt.plot(thetas, bootstrap_variance_estimators)
        plt.title(r"""График зависимости бутстрепной оценки
                  дисперсии эффективной оценки параметра $\theta$ от $\theta$""")
        plt.xlabel(r"$\theta$", fontsize=20)
        plt.ylabel(r"$s^2(\hat{\theta})$", fontsize=20);
```

Вывод: Как видно из графика, бутстрепная оценка дисперсии эффективной, несмещенной оценки приближается к нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки, что означает, что бутстрепный метод является очень хорошим методом для оценивание дисперсии эффективных оценок и почти не улучшаем, так как он почти равен нижней оценки дисперсии.