Task1

October 13, 2018

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        import scipy.stats as sts
        %matplotlib inline
```

```
In [2]: N = 10 ** 4
```

Напишем функцию, которая создает выборку размера N из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$:

```
In [3]: def CreateSample(theta):
            uniform_rv = sts.uniform(loc=0, scale=theta)
            sample = uniform_rv.rvs(N)
            return sample
```

Создадим выборку размером $N = 10^4$ с $\theta = 2$:

```
In [4]: theta = 2
        sample = CreateSample(theta)
```

Напишем функцию, которая по заданной выборке считает оценки параметра θ из теоретической задачи: $2\overline{X}$, $\overline{X} + \frac{X_{(n)}}{2}$, $(n+1)X_{(1)}$, $X_{(1)} + X_{(n)}$, $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

```
In [5]: def CreateEstimators(sample):
            estimators = np.zeros((5, N))
            for i in range(N):
                estimators[0][i] = np.mean(sample[:i + 1]) * 2
                estimators[1][i] = (np.mean(sample[:i + 1]) + np.max(sample[:i + 1]) / 2)
                estimators[2][i] = (i + 2) * np.min(sample[:i + 1])
                estimators[3][i] = np.min(sample[:i + 1]) + np.max(sample[:i + 1])
                estimators[4][i] = (i + 2) / (i + 1) * np.max(sample[:i + 1])
            return estimators
```

Создадим вектор из оценок параметра θ:

```
In [6]: estimators = CreateEstimators(sample)
```

Напишем функцию, которая будет строить график зависимости модуля разности оценки и истинного значения параметра θ от размера выборки для каждой оценки:

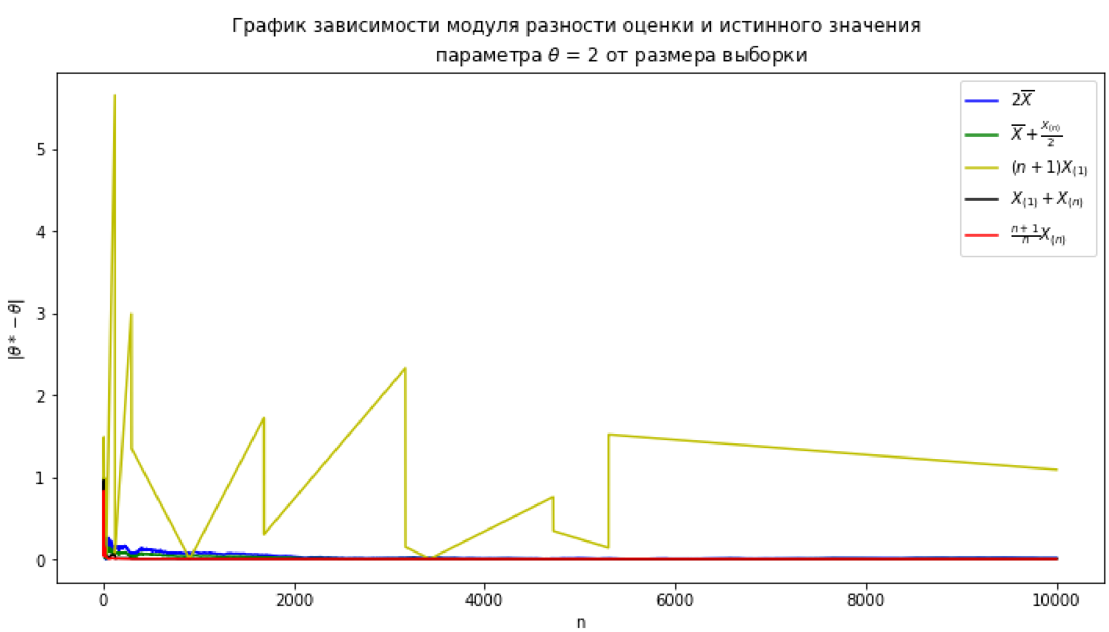
```
In [10]: def MakePlot(estimators, theta):
             x = range(1, N+1)
             plt.figure(figsize=(12, 6))
             names = [r'$2\overline{X}$', r'$\overline{X} + \frac{X_{(n)}}{2}$', \
                       r'$(n + 1)X_{(1)}$', \
                       r'$X_{(1)} + X_{(n)}$', r'$\frac{n + 1}{n}X_{(n)}$']

             for estimator, color, name in zip(estimators, ['b', 'g', 'y', 'black', 'r'], names):
                 plt.plot(x, abs(estimator - theta), color, label=name)

             plt.title(r"""График зависимости модуля разности оценки и истинного значения
                        параметра $\theta$ = {} от размера выборки""".format(theta))
             plt.xlabel("n")
             plt.ylabel(r"$|\theta* - \theta|$")
             plt.legend(loc='best');
```

Строим график зависимости для $\theta = 2$:

```
In [11]: MakePlot(estimators, theta)
```



Как видно из графика, оценка $(n+1)X_{(1)}$ сильно отличается от истинного значения. Это связано с тем, что данная оценка не является состоятельной, что было доказано на семинаре, то есть она не сходится даже по вероятности к истинному значению θ и поэтому имеет с ним такую большую разницу даже при больших n. Остальные же оценки являются сильно состоятельными, то есть сходятся почти наверно к θ и поэтому их отклонение заметно меньше даже при небольших n.

Тогда построим график без учета оценки $(n+1)X_{(1)}$, чтобы лучше разглядеть скорость сходимости остальных оценок:

```
In [12]: def MakePlotWithoutThird(estimators, ylim, theta):
             x = range(1, N + 1)
             plt.figure(figsize=(12, 6))

             new_estimators = np.delete(estimators, 2, 0)

             names = [r'$2\overline{X}$', r'$\overline{X} + \frac{X_{(n)}}{2}$', \
                      r'$X_{(1)} + X_{(n)}$', r'$\frac{n + 1}{n}X_{(n)}$']

             for estimator, color, name in zip(new_estimators, ['b', 'g', 'black', 'r'], names):
                 plt.plot(x, abs(estimator - theta), color, label=name)

             plt.title(r"""График зависимости модуля разности оценки и истинного
             значения параметра $\theta$ = {} от размера выборки""".format(theta))
             plt.xlabel("n")
             plt.ylabel(r"$|\theta* - \theta|$")
             plt.ylim(0, ylim)
             plt.legend(loc='best');
```

```
In [13]: MakePlotWithoutThird(estimators, 0.02, theta)
```

Из графика видно, что быстрее всего сходится оценка $\frac{(n+1)}{n}X_{(n)}$, медленей всего - $2\overline{X}$. Тем не менее, все оценки дают точность не менее 0.002 при $N = 10^4$.

Проведем те же опыты для $\theta = 10, 100, 1000$ не учитывая оценку $(n+1)X_{(1)}$, так как она не сходится к истинной и ухудшает качество измереняя точности других оценок

```
In [14]: theta = 10
         sample = CreateSample(theta)
         estimators = CreateEstimators(sample)
```

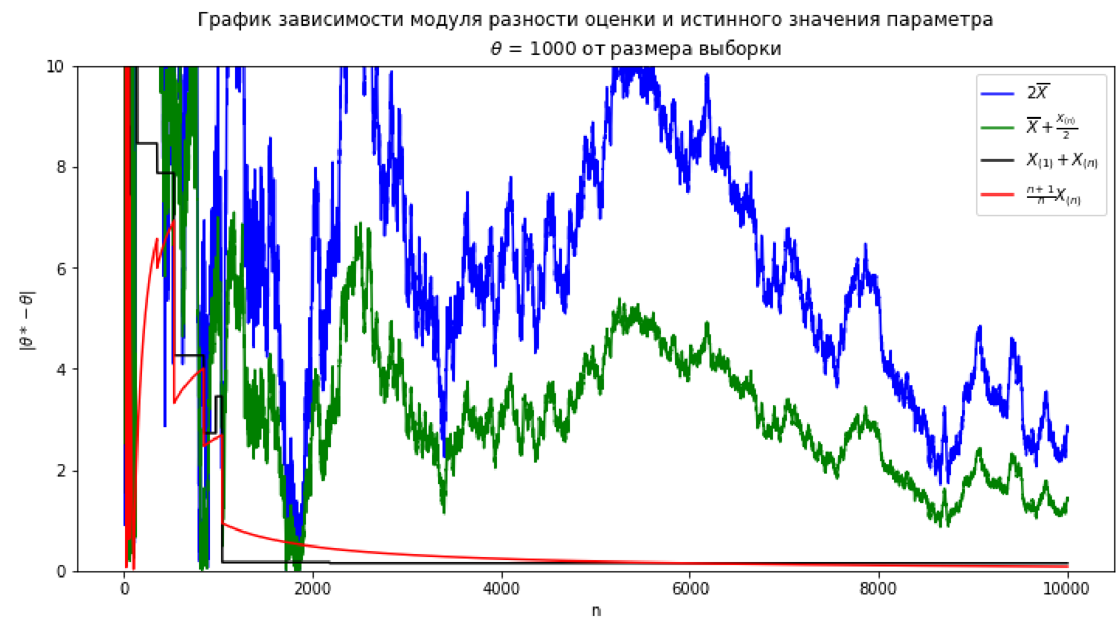
```
In [15]: MakePlotWithoutThird(estimators, 0.2, theta)
```


```
In [16]: theta = 100
         sample = CreateSample(theta)
         estimators = CreateEstimators(sample)
```

```
In [17]: MakePlotWithoutThird(estimators, 2, theta)
```

```
In [20]: theta = 1000
         sample = CreateSample(theta)
         estimators = CreateEstimators(sample)
```

```
In [21]: MakePlotWithoutThird(estimators, 10, theta)
```



Вывод: в данной задаче мы исследовали, как ведут себя оценки параметра θ равномерного распределения и на практике подтвердили теоретические рассчеты о том, что величина $(n+1)X_{(1)}$ не сходится к истинному значению θ даже при очень большом размере выборки, в то время как остальные величины сходятся к θ, при чем наиболее быстро сходятся оценки $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ и $X_{(1)} + X_{(n)}$. Также, по графикам видно, что сходимость не зависит от выбора θ.