Task1

October 13, 2018

```
In [170]: import numpy as np
          import matplotlib.pyplot as plt
          import scipy.stats as sts
          %matplotlib inline
```

```
In [171]: N = 1000
          M = 100
```

Напишем функцию, которая создает M выборок размера N из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$:

```
In [172]: def CreateSamples(theta):
              uniform_rv = sts.uniform(loc=0, scale=theta)
              sample = uniform_rv.rvs(size=(M, N))
              return sample
```

Создадим $M = 100$ выборок размером $N = 1000$ с $\theta = 2$:

```
In [173]: theta = 2
          samples = CreateSamples(theta)
```

Напишем функцию, которая по заданым выборкам считает оценки параметра θ из теоретической задачи: $2\overline{X}$, $(n+1)X_{(1)}$, $X_{(1)} + X_{(n)}$, $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ для каждого фиксированого n и для каждой выборки.

```
In [174]: def CreateEstimators(samples):
              estimators = np.zeros((4, N, M))
              for n in range(N):
                  estimators[0][n] = np.array([np.mean(samples[m][:n + 1]) * 2 for m in range(M)
                  estimators[1][n] = np.array([(n + 2) * np.min(samples[m][:n + 1]) \
                                               for m in range(M)])
                  estimators[2][n] = np.array([np.min(samples[m][:n + 1]) + \
                                               np.max(samples[m][:n + 1]) for m in range(M)])
                  estimators[3][n] = np.array([(n + 2) / (n + 1) * \
                                               np.max(samples[m][:n + 1]) for m in range(M)])
              return estimators
```

Создадим вектор из оценок параметра θ:

```
In [175]: estimators = CreateEstimators(samples)
```

Напишем функцию, которая будет строить график зависимости усредненной по всем выборкам функции потерь $\overline{(\hat{\theta}-\theta)^2}$ от размера выборки n для каждой оценки:

```
In [178]: def MakePlot(estimators, theta):
              x = range(1, N+1)
              plt.figure(figsize=(12, 6))
              names = [r'$2\overline{X}$', r'$(n + 1)X_{(1)}$', \
                       r'$X_{(1)} + X_{(n)}$', r'$\frac{n + 1}{n}X_{(n)}$']

              for estimator, color, name in zip(estimators, ['b', 'y', 'g', 'r'], names):
                  plt.plot(x, [np.mean((estimator[n] - theta) ** 2) for n in range(N)],
                           color, label=name)

              plt.title(r"""График зависимости усредненной по всем выборкам функции потерь
              параметра $\theta$ = {} от размера выборки""".format(theta))
              plt.xlabel("n")
              plt.ylabel(r"$(\hat{\theta} - \theta)^2$")
              plt.legend(loc='best')
```

Строим график зависимости для $\theta = 2$:

```
In [179]: MakePlot(estimators, theta)
```

Как видно из графика, оценка $(n+1)X_{(1)}$ сильно отличается от истинного значения. Это связано с тем, что матожидание ее квадратичной функции потерь равна $\frac{n\theta^2}{n+2}$, которая в пределе стремится к θ^2, в то время, как остальные оценки стремятся к нулю. Рассмотрим эти стремления более подробно, выкинув из графика оценку $(n+1)X_{(1)}$

In [180]:
```
def MakePlotWithoutSecond(estimators, ylim, theta):
    x = range(1, N + 1)
    plt.figure(figsize=(12, 6))

    new_estimators = np.delete(estimators, 1, 0)

    names = [r'$2\overline{X}$', r'$X_{(1)} + X_{(n)}$', \
             r'$\frac{n + 1}{n}X_{(n)}$']

    for estimator, color, name in zip(new_estimators, ['b', 'g', 'r'], names):
        plt.plot(x, [np.mean((estimator[n] - theta) ** 2) for n in range(N)],
                 color, label=name)

    plt.title(r"""График зависимости усредненной по всем выборкам функции потерь
    параметра $\theta$ = {} от размера выборки""".format(theta))
    plt.xlabel("n")
    plt.ylabel(r"$\overline{(\theta* - \theta)^2}$")
    plt.ylim(0, ylim)
    plt.legend(loc='best');
```

Построим график без учета второй оценки, а также уменьшим масштаб по y:

In [181]:
```
MakePlotWithoutSecond(estimators, 0.01, theta)
```

Вывод: Как видно из графика, усредненная квадратичная функция потерь для оценки $2\overline{X}$ стремится к нулю медленее, чем остальные. Это связано с тем, что матожидание данной функции для $2\overline{X}$ равно $\frac{\theta^2}{3n}$, то есть пропорциональна $\frac{1}{n}$, в то время, как для оценки $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ матожидание квадратичной функции потерь равно $\frac{\theta^2}{n(n+2)}$, то есть пропорционально $\frac{1}{n(n+2)}$.

Таким образом усредненные квадратичные функции потерь оценок $X_{(1)} + X_{(n)}$, $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ на графике стремятся к нулю быстрее, чем усредненная функция потерь оценки $2\overline{X}$.

Проведем те же опыты для $\theta = 10, 100$

```
In [183]: theta = 10
          samples = CreateSamples(theta)
```

```
In [184]: estimators = CreateEstimators(samples)
```

```
In [185]: MakePlot(estimators, theta)
```

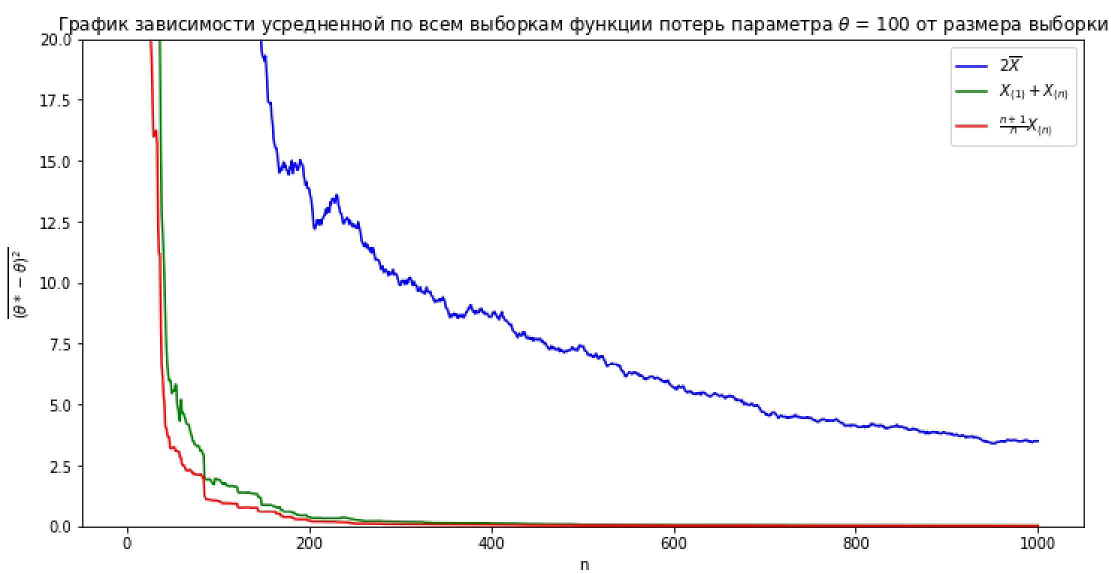

```
In [188]: MakePlotWithoutSecond(estimators, 0.5, theta)
```

```
In [192]: theta = 100
          samples = CreateSamples(theta)

In [193]: estimators = CreateEstimators(samples)

In [194]: MakePlot(estimators, theta)
```


```
In [198]: MakePlotWithoutSecond(estimators, 20, theta)
```



Вывод: Как видно из графиков, для разных значений параметра θ все наши предположения сделанные для $\theta = 2$ сохраняются, следовательно можно сделать вывод, что теоретические данные совпали с практическими.