Task1

October 13, 2018

```
In [30]: import numpy as np
         import matplotlib.pyplot as plt
         import scipy.stats as sts
         %matplotlib inline
```

```
In [31]: N = 1000
         K = 1000
         step = 10
```

1 Нормальное распределение

Создадим выборку размера N для нормального стандартного распределения ($a = 0$, $\sigma^2 = 1$):

```
In [32]: norm_rv = sts.norm()
         norm_sample = norm_rv.rvs(N)
```

Для всех $n \leqslant N$ посчитаем значения полученных оценок методом моментов. Для a оценка $\hat{a} = \overline{X}$, а для σ^2 получили $\hat{\sigma}^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$

Для этого создадим общую для всех функцию, которая будет принимать на вход выборку и функцию, считающую оценку, а возвращать - значение самой оценки для каждого n.

```
In [33]: def CountEstimators(sample, CountEstimator):
             estimators = np.zeros(N)
             for n in range(1, N):
                 estimators[n] = CountEstimator(sample[:n + 1])
             return estimators
```

Посчитаем оценки параметров a и σ

```
In [34]: def CountNormEstimatorLoc(sample):
             return np.mean(sample)
```

```
In [35]: def CountNormEstimatorScale(sample):
             return np.mean(sample ** 2) - np.mean(sample) ** 2
```

```
In [36]: a_estimators = CountEstimators(norm_sample, CountNormEstimatorLoc)
         sigma_estimators = CountEstimators(norm_sample, CountNormEstimatorScale)
```

Сгенерируем $K = 1000$ бутстрепных выборок для каждой оценки параметра a с помощью параметрического бутстрепа. Размер бутстрепной выборки будет равняться размеру исходной выборки, также будем считать для каждого n с шагом в 10. Кроме этого, переменной *start* будем задавать начало интервала, по которому будем перебирать значения n.

```
In [37]: def GetVarianceParamOfLoc(sample, param_estimators, sigma=1, start):
             s = np.zeros((N - start) // step)
             for n in range(start, N, step):
                 bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                 norm_rv = sts.norm(loc=param_estimators[n], scale=sigma ** 0.5)
                 bootstrap_param_samples = norm_rv.rvs((K, n))
                 for k in range(K):
                     bootstrap_estimators[k] = CountNormEstimatorLoc(bootstrap_param_samples[k])
                 s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                 np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
             return s
```

```
In [39]: param_s = GetVarianceParamOfLoc(norm_sample, a_estimators, start=10)
```

Аналогично делаем с помощью непараметрического бутстрепа. В данном случае, так как непараметрический бутсреп не зависит на прямую от распределения, а зависит только от конкретной выборки, то напишем общую для всех функцию, принимающую выборку и функцию, считающую оценку параметра

```
In [40]: def GetVarianceNonparam(sample, CountEstimator, start):
             s = np.zeros((N - start) // step)
             for n in range(start, N, step):
                 bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                 bootstrap_param_samples = np.random.choice(sample[:n], size=(K, n))
                 for k in range(K):
                     bootstrap_estimators[k] = CountEstimator(bootstrap_param_samples[k])
                 s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                 np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
             return s
```

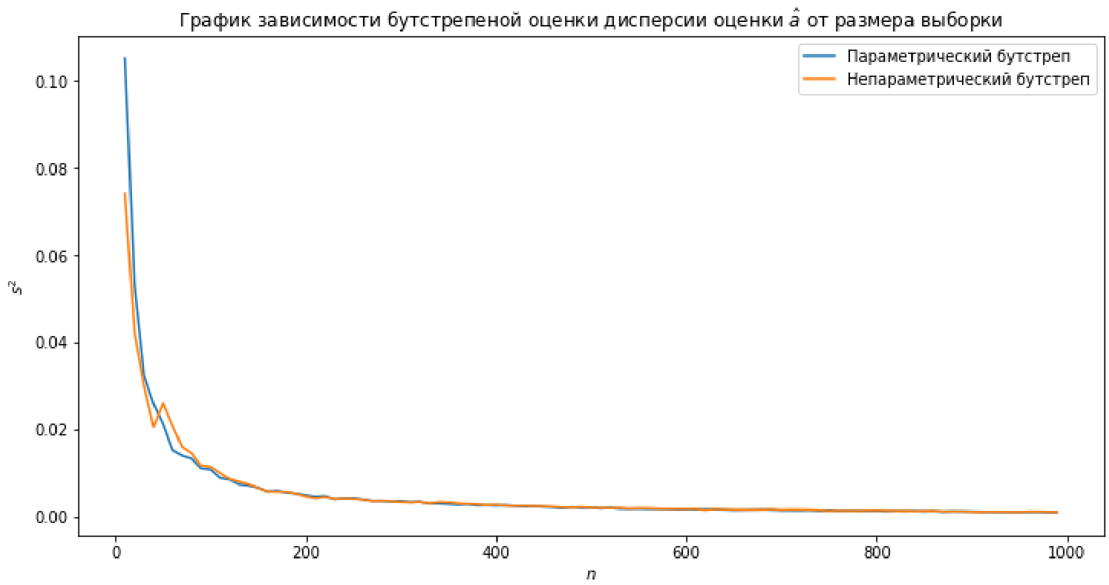
```
In [41]: nonparam_s = GetVarianceNonparam(norm_sample, CountNormEstimatorLoc, start=10)
```

Создадим функцию, которая будет строить график зависимости бутстрепной оценки дисперсии от размера выборки при параметрическом и непараметрическом бутстрепе

```
In [1]: def CreatePlot(param_s, nonparam_s, estimator, start):
            plt.figure(figsize=(12, 6))
            plt.xlabel(r"$n$")
            plt.ylabel(r"$s^2$")
            plt.title("График зависимости бутстрепеной оценки дисперсии оценки " + \
                      estimator +" от размера выборки")
            plt.plot(range(start, N, step), param_s, label="Параметрический бутстреп")
            plt.plot(range(start, N, step), nonparam_s, label="Непараметрический бутстреп")
            plt.legend(loc='best');
```

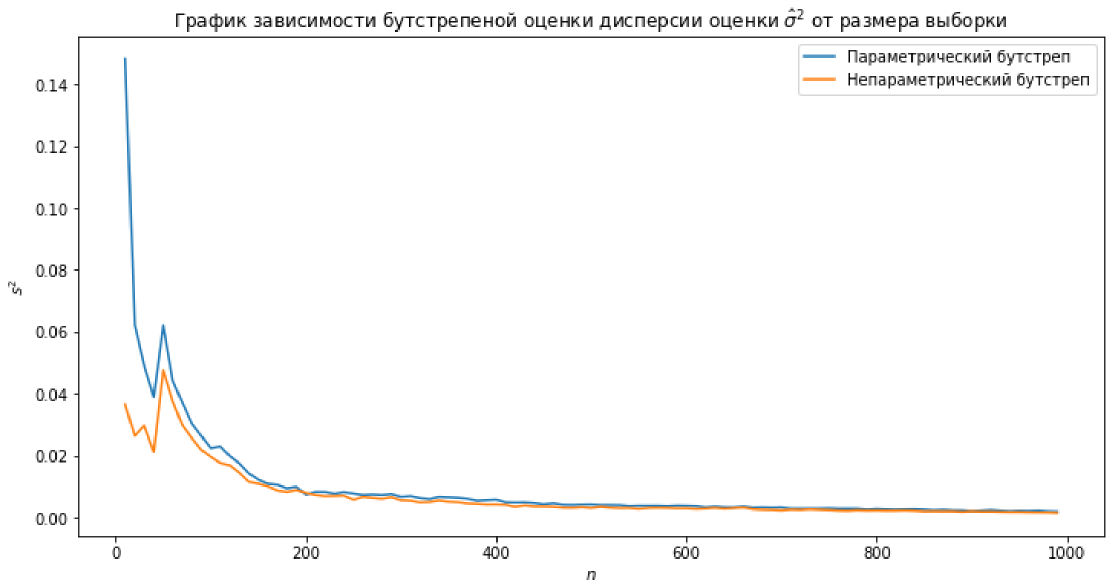
Строим график зависимости бутстрепной оценки дисперсии оценки $\hat{a}$ от размера выборки

```
In [44]: CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{a}$", start=10)
```



То же самое выполним для оценки параметра θ^2

```
In [45]: def GetVarianceParamOfScale(sample, param_estimators, a=0, start):
             s = np.zeros((N - start) // step)
             for n in range(start, N, step):
                 bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                 norm_rv = sts.norm(loc=a, scale=param_estimators[n] ** 0.5)
                 bootstrap_param_samples = norm_rv.rvs((K, n))
                 for k in range(K):
                     bootstrap_estimators[k] = CountNormEstimatorScale(bootstrap_param_samples[k
                 s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                 np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
             return s

In [50]: param_s = GetVarianceParamOfScale(norm_sample, sigma_estimators, start=10)

In [51]: nonparam_s = GetVarianceNonparam(norm_sample, CountNormEstimatorScale, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\sigma}^2$", start=10)
```

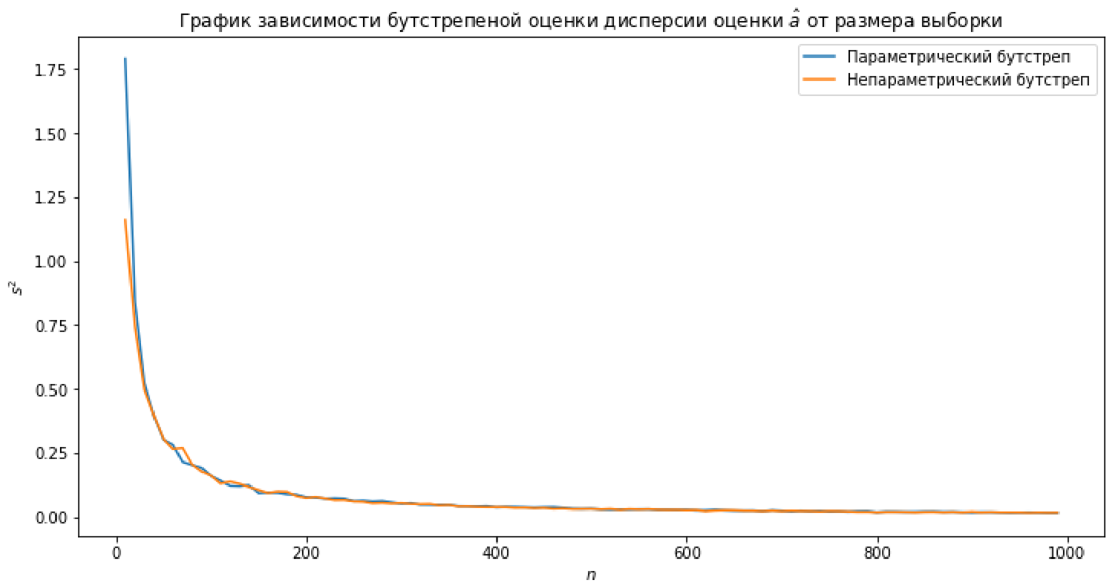


Проделаем то же самое для других значений параметров a и θ^2:
$a = 5$, $\sigma^2 = 16$

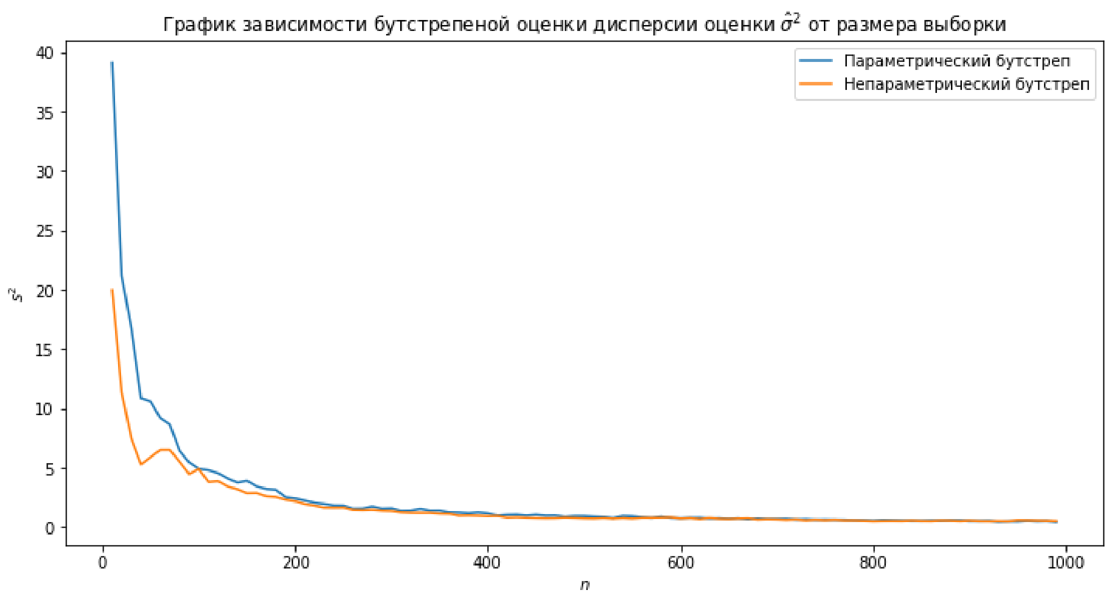
In [52]:
```
a = 5
sigma = 16
```

In [53]:
```
norm_rv = sts.norm(loc=a, scale=sigma ** 0.5)
norm_sample = norm_rv.rvs(N)
a_estimators = CountEstimators(norm_sample, CountNormEstimatorLoc)
sigma_estimators = CountEstimators(norm_sample, CountNormEstimatorScale)
```

In [54]:
```
param_s = GetVarianceParamOfLoc(norm_sample, a_estimators, sigma, start=10)
nonparam_s = GetVarianceNonparam(norm_sample, CountNormEstimatorLoc, start=10)
CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{a}$", start=10)
```




```
In [55]: param_s = GetVarianceParamOfScale(norm_sample, sigma_estimators, a, start=10)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(norm_sample, CountNormEstimatorScale, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\sigma}^2$", start=10)
```

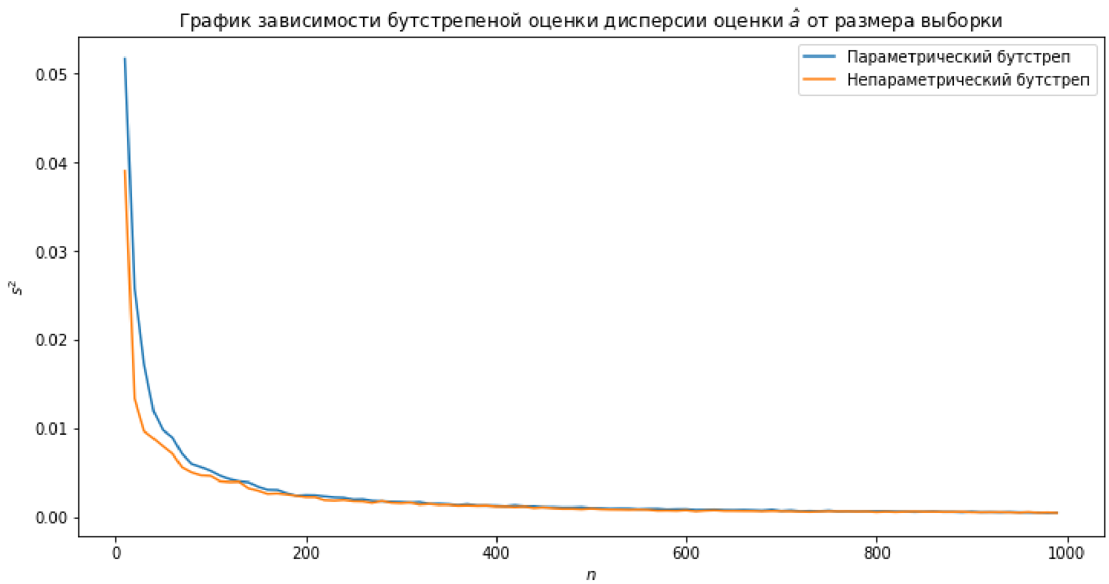


$a = 15$, $\sigma^2 = 0.5$

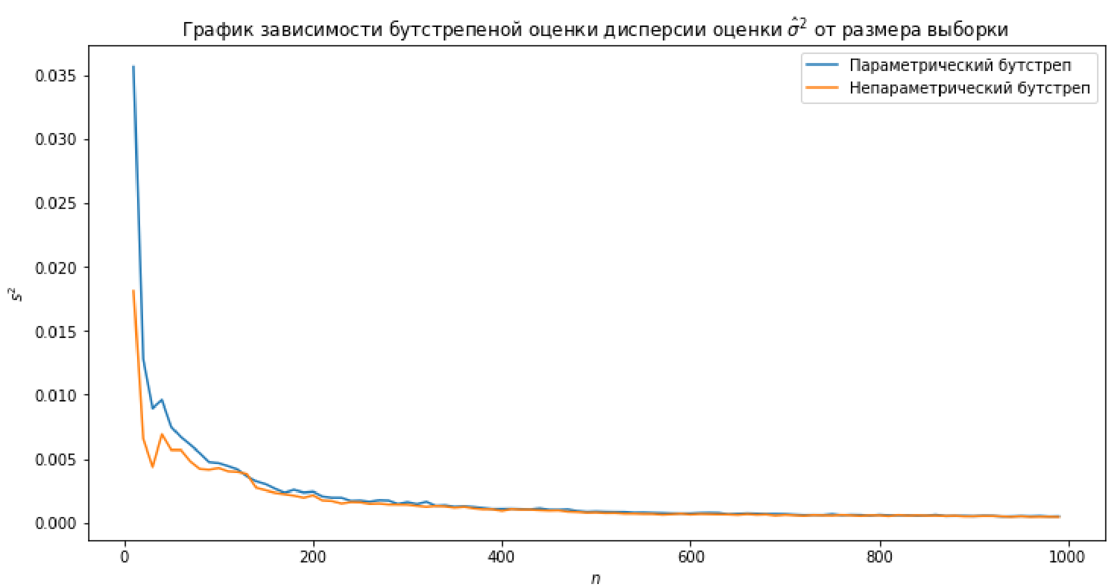
```
In [56]: a = 15
         sigma = 0.5
```

```
In [57]: norm_rv = sts.norm(loc=a, scale=sigma ** 0.5)
         norm_sample = norm_rv.rvs(N)
         a_estimators = CountEstimators(norm_sample, CountNormEstimatorLoc)
         sigma_estimators = CountEstimators(norm_sample, CountNormEstimatorScale)
```

```
In [58]: param_s = GetVarianceParamOfLoc(norm_sample, a_estimators, sigma, start=10)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(norm_sample, CountNormEstimatorLoc, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{a}$", start=10)
```




```
In [59]: param_s = GetVarianceNonparam(norm_sample, CountNormEstimatorLoc, start=10)
         nonparam_s = GetVarianceParamOfScale(norm_sample, sigma_estimators, a, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\sigma}^2$", start=10)
```



Вывод: Как видно из графиков, бутсрепная оценка дисперсии тем меньше, чем меньше истинное значение дисперсии нормального распределенеия σ^2, причем бустрепная дисперсия оценки значительно меньше истинной. Кроме этого ее значение примерно одинаковое для параметрического и непараметрического бутстрепа, хотя параметрический все равно работает немного хуже. Откуда можно сделать вывод, что оба метода работают достаточно хорошо и можно использовать любой из них. Также, значение бутстрепной оценки дисперсии убывает при увеличении размера выборки, причем уже приблизительно при $n = 300$ ее значение становится очень маленьким и при увеличении выборки почти не меняется.

2 Гамма распределение

Проведем аналогичные исследования для Гамма распределения с параметрами α и λ. Для α оценка $\hat{\alpha} = \frac{(\overline{X})^2}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}$, для λ оценка $\hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}$,

```
In [60]: alpha = 1
         lambd = 0.5
```

```
In [61]: gamma_rv = sts.gamma(a=alpha, scale=1/lambd)
         gamma_sample = gamma_rv.rvs(N)
```

```
In [62]: def CountGammaEstimatorAlpha(sample):
             return np.mean(sample) ** 2 / (np.mean(sample ** 2) - np.mean(sample) ** 2)
```

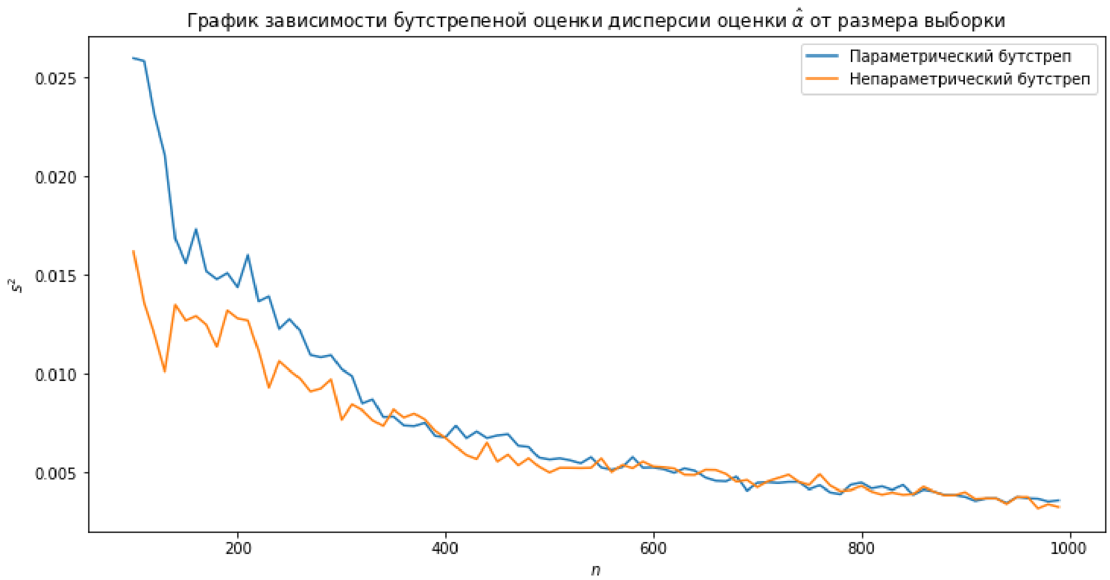
```
In [63]: def CountGammaEstimatorLambda(sample):
             return np.mean(sample) / (np.mean(sample ** 2) - np.mean(sample) ** 2)
```

```
In [64]: alpha_estimators = CountEstimators(gamma_sample, CountGammaEstimatorAlpha)
         lambda_estimators = CountEstimators(gamma_sample, CountGammaEstimatorLambda)
```

Найдем бутстрепную оценку дисперсии для α

```
In [65]: def GetVarianceParamOfAlpha(sample, param_estimators, lambd, start):
             s = np.zeros((N - start) // step)
             for n in range(start, N, step):
                 bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                 gamma_rv = sts.gamma(a=param_estimators[n], scale=1/lambd)
                 bootstrap_param_samples = gamma_rv.rvs((K, n))
                 for k in range(K):
                     bootstrap_estimators[k] = CountGammaEstimatorAlpha(bootstrap_param_samples[
                 s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                 np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
             return s
```

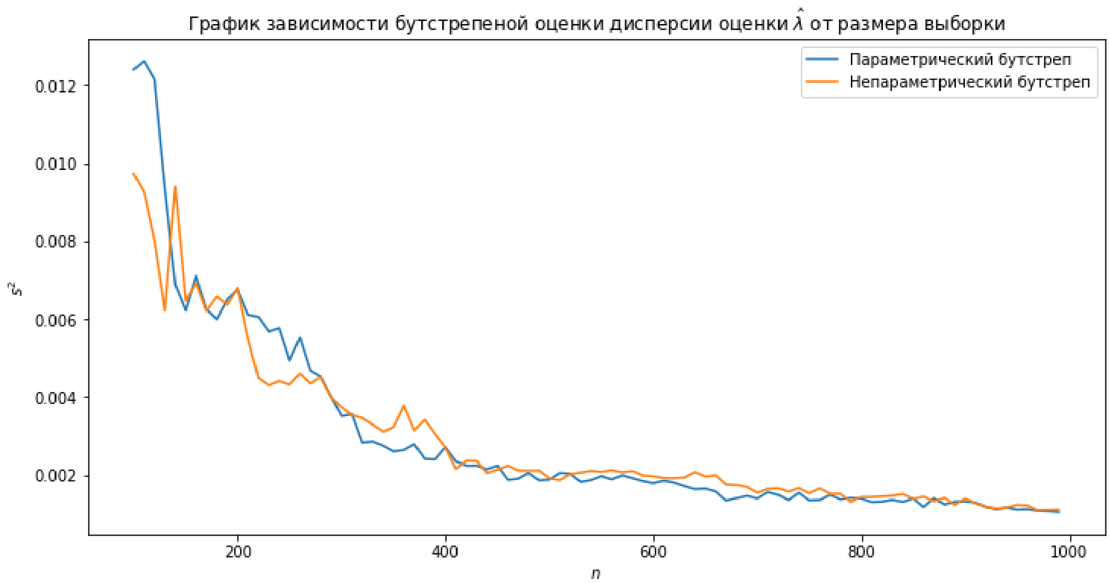
```
In [69]: param_s = GetVarianceParamOfAlpha(gamma_sample, alpha_estimators, lambd, start=100)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(gamma_sample, CountGammaEstimatorAlpha, start=100)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\alpha}$", start=100)
```



Аналогично для λ

```
In [70]: def GetVarianceParamOfLambda(sample, param_estimators, alpha, start):
             s = np.zeros((N - start) // step)
             for n in range(start, N, step):
                 bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                 gamma_rv = sts.gamma(a=alpha, scale=1/param_estimators[n])
                 bootstrap_param_samples = gamma_rv.rvs((K, n))
                 for k in range(K):
                     bootstrap_estimators[k] = CountGammaEstimatorLambda(bootstrap_param_samples
                 s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                 np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
             return s
```

```
In [71]: param_s = GetVarianceParamOfLambda(gamma_sample, lambda_estimators, alpha, start=100)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(gamma_sample, CountGammaEstimatorLambda, start=100)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda}$", start=100)
```

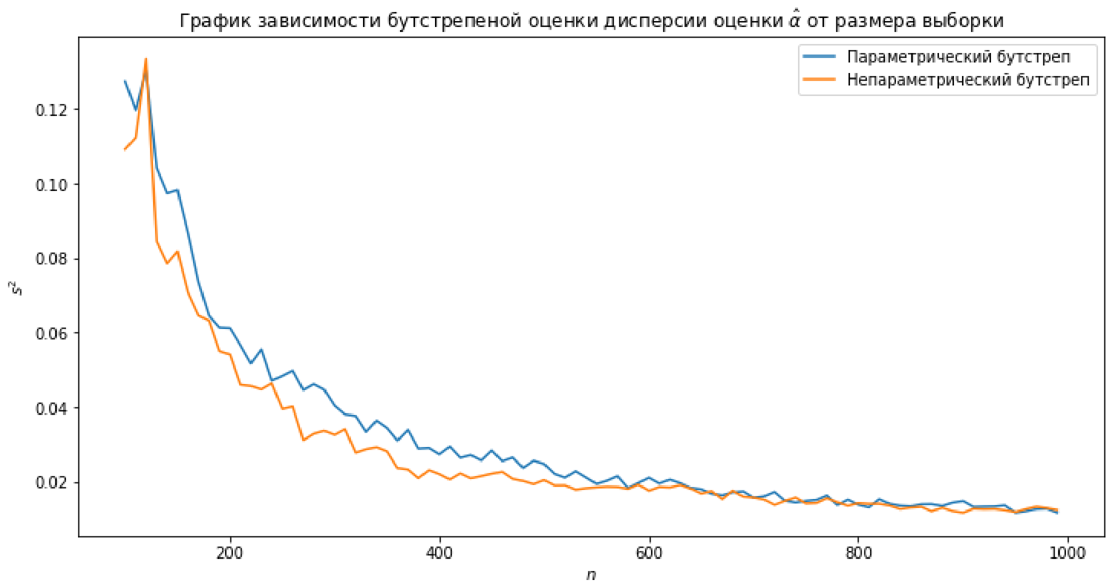


Рассмотрим оценки при других параметрах.
$\alpha = 2$, $\lambda = 1$

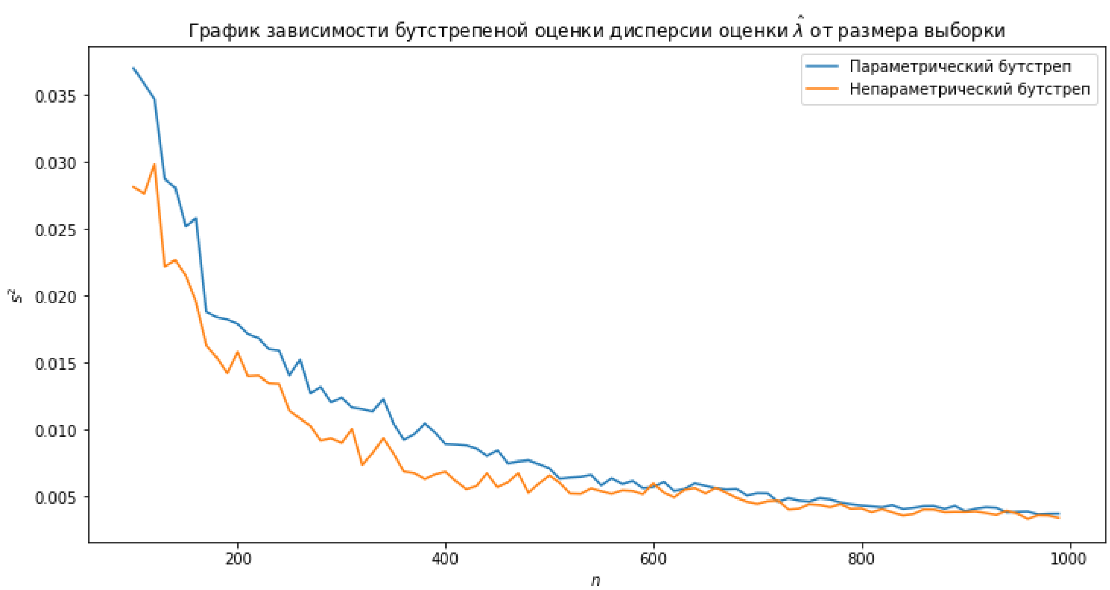
In [72]:
```
alpha = 2
lambd = 1
```

In [73]:
```
gamma_rv = sts.gamma(a=alpha, scale=1/lambd)
gamma_sample = gamma_rv.rvs(N)
alpha_estimators = CountEstimators(gamma_sample, CountGammaEstimatorAlpha)
lambda_estimators = CountEstimators(gamma_sample, CountGammaEstimatorLambda)
```

In [74]:
```
param_s = GetVarianceParamOfAlpha(gamma_sample, alpha_estimators, lambd, start=100)
nonparam_s = GetVarianceNonparam(gamma_sample, CountGammaEstimatorAlpha, start=100)
CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\alpha}$", start=100)
```




```
In [75]: param_s = GetVarianceParamOfLambda(gamma_sample, lambda_estimators, alpha, start=100)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(gamma_sample, CountGammaEstimatorLambda, start=100)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda}$", start=100)
```

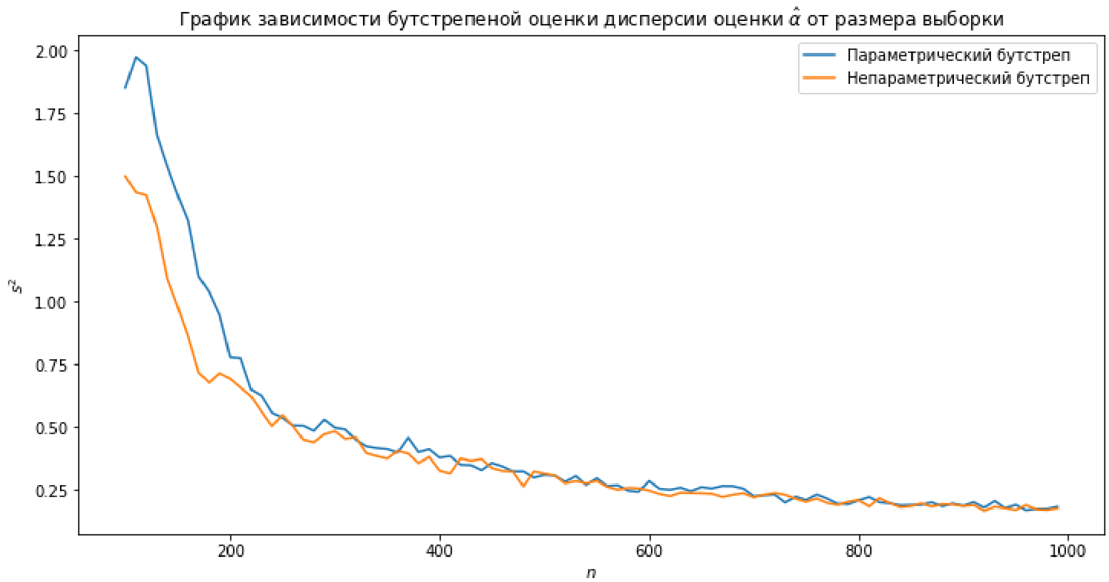


$\alpha = 9$, $\lambda = 0.5$

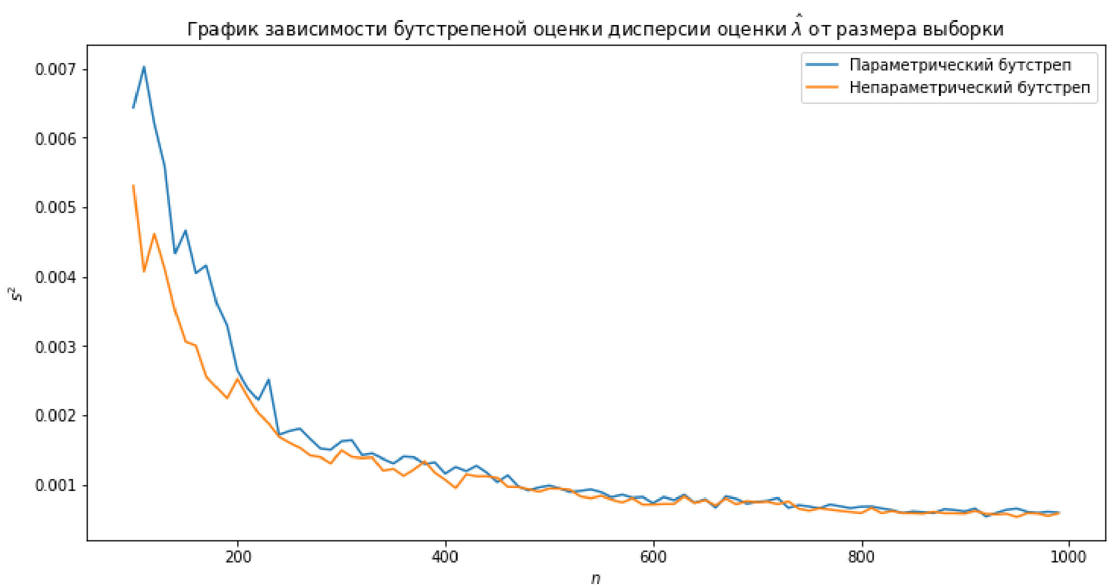
```
In [76]: alpha = 9
         lambd = 0.5
```

```
In [77]: gamma_rv = sts.gamma(a=alpha, scale=1/lambd)
         gamma_sample = gamma_rv.rvs(N)
         alpha_estimators = CountEstimators(gamma_sample, CountGammaEstimatorAlpha)
         lambda_estimators = CountEstimators(gamma_sample, CountGammaEstimatorLambda)
```

```
In [78]: param_s = GetVarianceParamOfAlpha(gamma_sample, alpha_estimators, lambd, start=100)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(gamma_sample, CountGammaEstimatorAlpha, start=100)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\alpha}$", start=100)
```




```
In [79]: param_s = GetVarianceParamOfLambda(gamma_sample, lambda_estimators, alpha, start=100)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(gamma_sample, CountGammaEstimatorLambda, start=100)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda}$", start=100)
```



Вывод: Аналогично нормальному распределению, значение s^2 тем больше, чем больше значение оцениваемого параметра, при увеличении размера выборки s^2 уменьшается и стремится к нулю, и для параметрического и непараметрического бутстрепа оценки приблизительно равны. Кроме того, графики были построены начиная с $n = 100$, это связано с тем, что при маленьких размерах выборки дисперсия получается неимоверно большой и мешает изучению графика при болших n.

3 Равномерное распределение

Для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$. Для a оценка $\hat{a} = \overline{X} - \sqrt{3\left(\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right)}$, для b оценка $\hat{b} = \overline{X} + \sqrt{3\left(\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2\right)}$

```
In [80]: a = 0
         b = 1
```

```
In [81]: uniform_rv = sts.uniform(loc=a, scale=b-a)
         uniform_sample = uniform_rv.rvs(N)
```

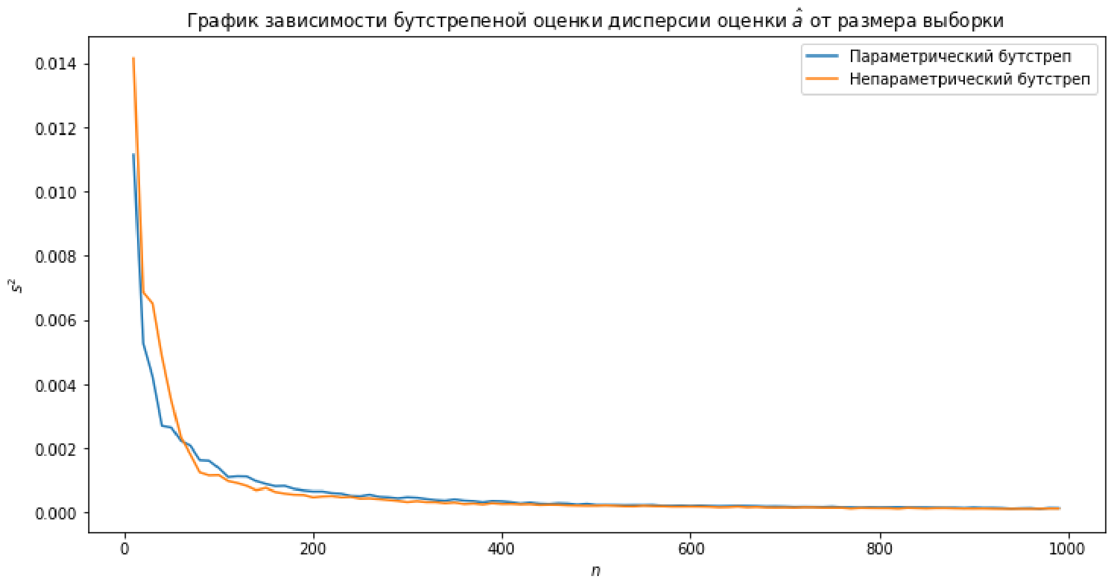
```
In [82]: def CountUniformEstimatorA(sample):
             return np.mean(sample) - (3 * (np.mean(sample ** 2) - np.mean(sample) ** 2)) ** 0.5
```

```
In [83]: def CountUniformEstimatorB(sample):
             return np.mean(sample) + (3 * (np.mean(sample ** 2) - np.mean(sample) ** 2)) ** 0.5
```

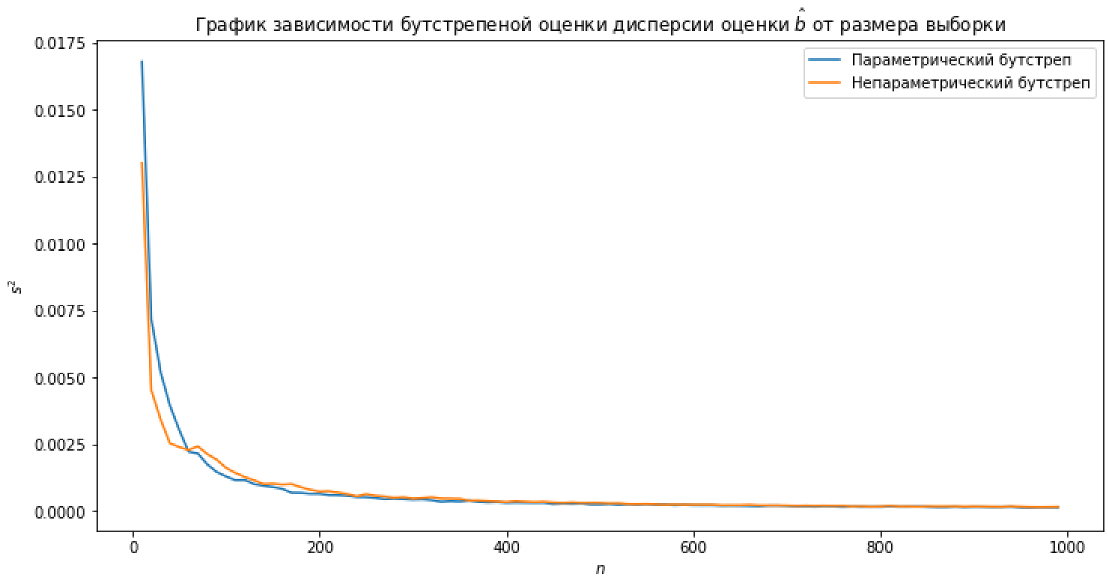
```
In [84]: a_estimators = CountEstimators(uniform_sample, CountUniformEstimatorA)
         b_estimators = CountEstimators(uniform_sample, CountUniformEstimatorB)
```

```
In [87]: def GetVarianceParamOfA(sample, param_estimators, b, start):
             s = np.zeros((N - start) // step)
             for n in range(start, N, step):
                 bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                 uniform_rv = sts.uniform(loc=param_estimators[n], scale=b-param_estimators[n])
                 bootstrap_param_samples = uniform_rv.rvs((K, n))
                 for k in range(K):
                     bootstrap_estimators[k] = CountUniformEstimatorA(bootstrap_param_samples[k]
                 s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                 np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
             return s
```

```
In [88]: param_s = GetVarianceParamOfA(uniform_sample, a_estimators, b, start=10)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(uniform_sample, CountUniformEstimatorA, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{a}$", start=10)
```




```
In [89]: def GetVarianceParamOfB(sample, param_estimators, a, start):
             s = np.zeros((N - start) // step)
             for n in range(start, N, step):
                 bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                 uniform_rv = sts.uniform(loc=a, scale=param_estimators[n]-a)
                 bootstrap_param_samples = uniform_rv.rvs((K, n))
                 for k in range(K):
                     bootstrap_estimators[k] = CountUniformEstimatorB(bootstrap_param_samples[k]
                 s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                 np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
             return s

In [90]: param_s = GetVarianceParamOfB(uniform_sample, b_estimators, a, start=10)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(uniform_sample, CountUniformEstimatorB, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{b}$", start=10)
```

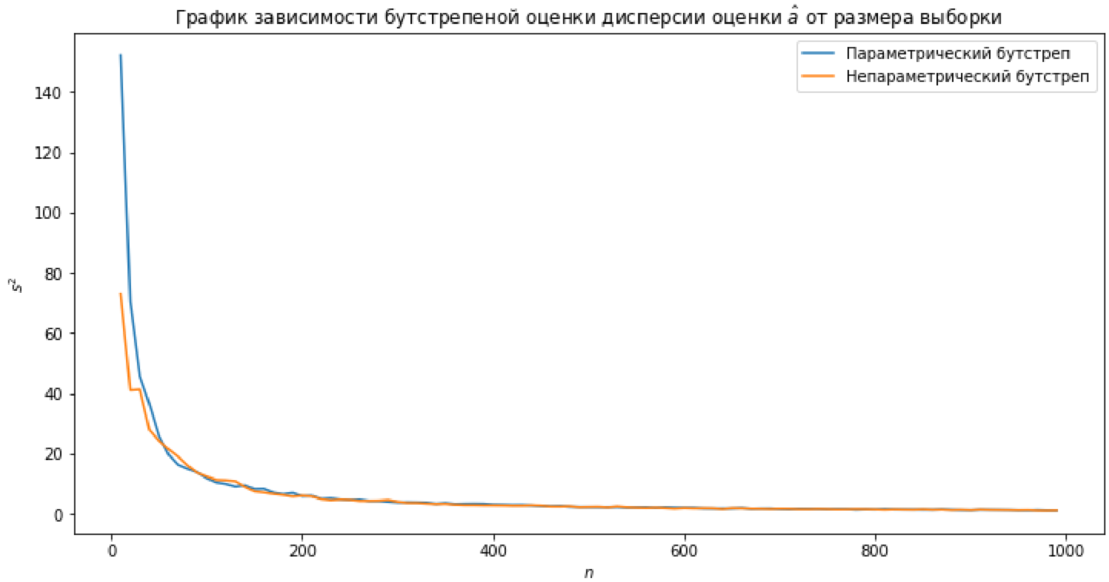


Рассмотрим оценки при других параметрах.
$a = 5$, $b = 100$

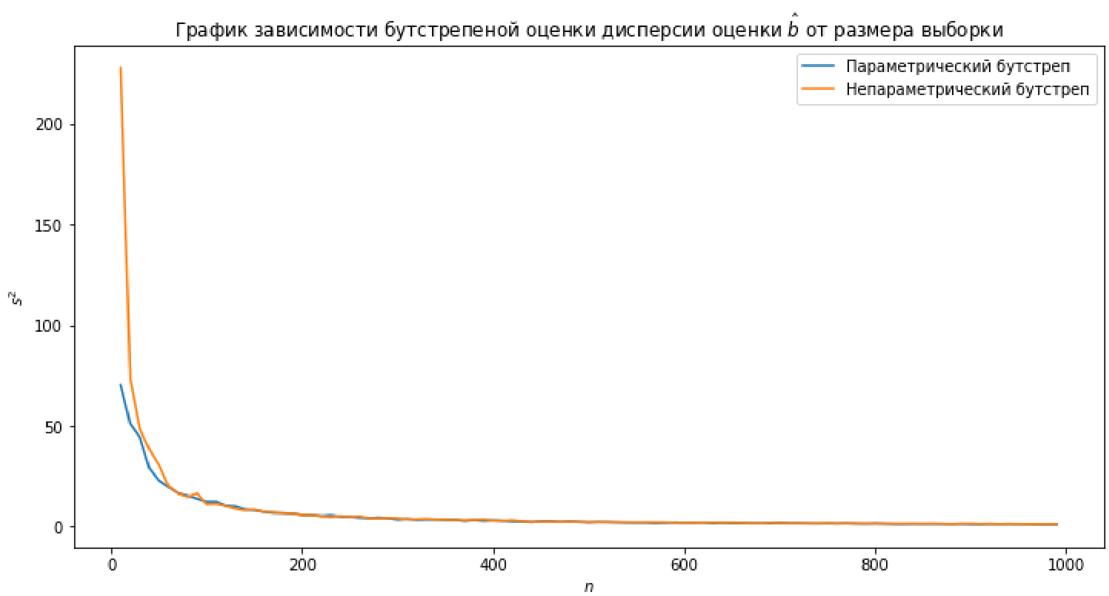
In [91]:
```
a = 5
b = 100
```

In [92]:
```
uniform_rv = sts.uniform(loc=a, scale=b-a)
uniform_sample = uniform_rv.rvs(N)
a_estimators = CountEstimators(uniform_sample, CountUniformEstimatorA)
b_estimators = CountEstimators(uniform_sample, CountUniformEstimatorB)
```

In [93]:
```
param_s = GetVarianceParamOfA(uniform_sample, a_estimators, b, start=10)
nonparam_s = GetVarianceNonparam(uniform_sample, CountUniformEstimatorA, start=10)
CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{a}$", start=10)
```




```
In [94]: param_s = GetVarianceParamOfB(uniform_sample, b_estimators, a, start=10)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(uniform_sample, CountUniformEstimatorB, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{b}$", start=10)
```

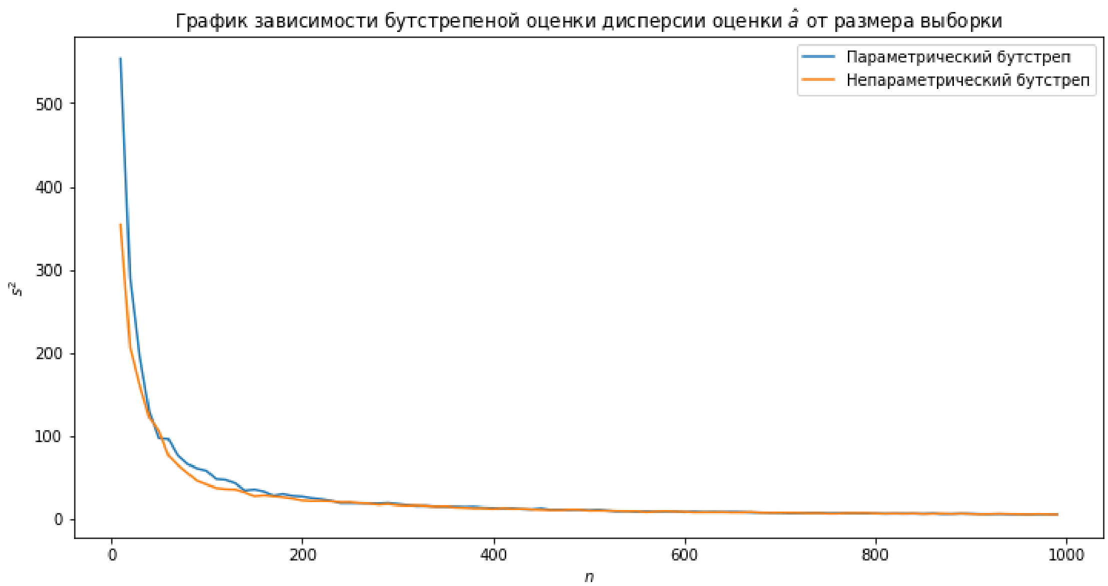


$a = -100$, $b = 100$

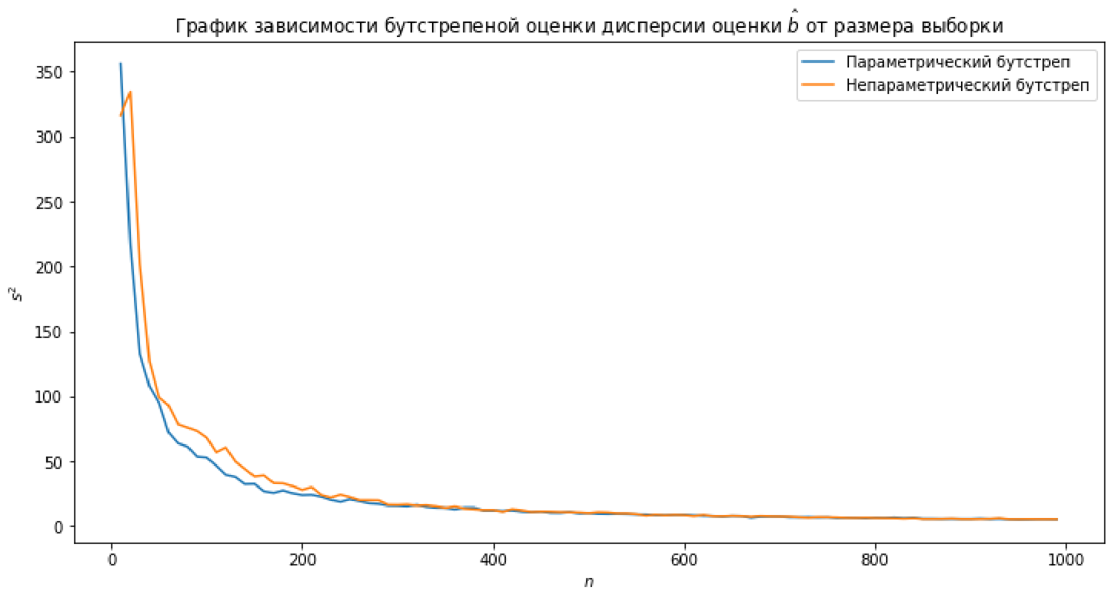
```
In [95]: a = -100
         b = 100
```

```
In [96]: uniform_rv = sts.uniform(loc=a, scale=b-a)
         uniform_sample = uniform_rv.rvs(N)
         a_estimators = CountEstimators(uniform_sample, CountUniformEstimatorA)
         b_estimators = CountEstimators(uniform_sample, CountUniformEstimatorB)
```

```
In [97]: param_s = GetVarianceParamOfA(uniform_sample, a_estimators, b, start=10)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(uniform_sample, CountUniformEstimatorA, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{a}$", start=10)
```




```
In [98]: param_s = GetVarianceParamOfB(uniform_sample, b_estimators, a, start=10)
         nonparam_s = GetVarianceNonparam(uniform_sample, CountUniformEstimatorB, start=10)
         CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{b}$", start=10)
```



Вывод: В данном примере интересен тот факт, что значения s^2 для параметров a и b примерно равны, это связано с тем, что дисперсия равномерного распределения симметрична относительно a и b и равна $\frac{(b-a)^2}{12}$, отсюда получаем, что и бутстрепные оценки дисперсии будут почти одинаковые. Остальные свойства, которые были выполнены для предыдущих оценок, также выполнены.

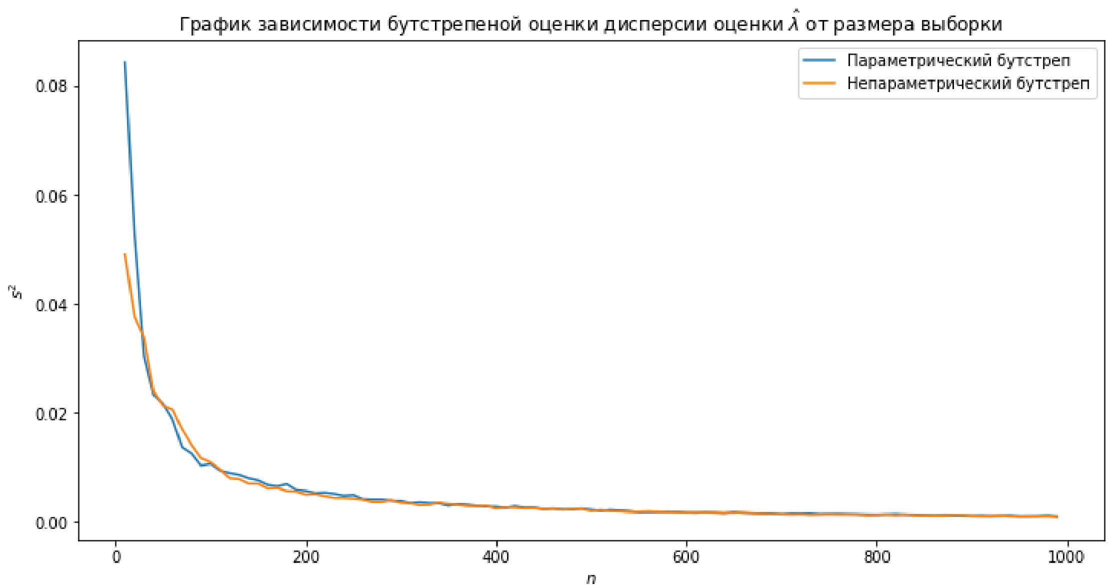
4 Пуассоновское распределение

Для Пуассоновского распределения с параметром λ. Для λ оценка $\hat{\lambda} = \overline{X}$.

```
In [99]: lambd_ = 1

In [100]: poisson_rv = sts.poisson(mu=lambd_)
          poisson_sample = poisson_rv.rvs(N)

In [101]: def CountPoissonEstimator(sample):
              return np.mean(sample)

In [102]: lambda_estimators = CountEstimators(poisson_sample, CountPoissonEstimator)

In [103]: def GetVarianceParamOfPoissonLambda(sample, param_estimators, start):
              s = np.zeros((N - start) // step)
              for n in range(start, N, step):
                  bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                  poisson_rv = sts.poisson(mu=param_estimators[n])
                  bootstrap_param_samples = poisson_rv.rvs((K, n))
                  for k in range(K):
                      bootstrap_estimators[k] = CountPoissonEstimator(bootstrap_param_samples[k]
```

```
            s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
            np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
        return s
```

```
In [104]: param_s = GetVarianceParamOfPoissonLambda(poisson_sample, lambda_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(poisson_sample, CountPoissonEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda}$", start=10)
```

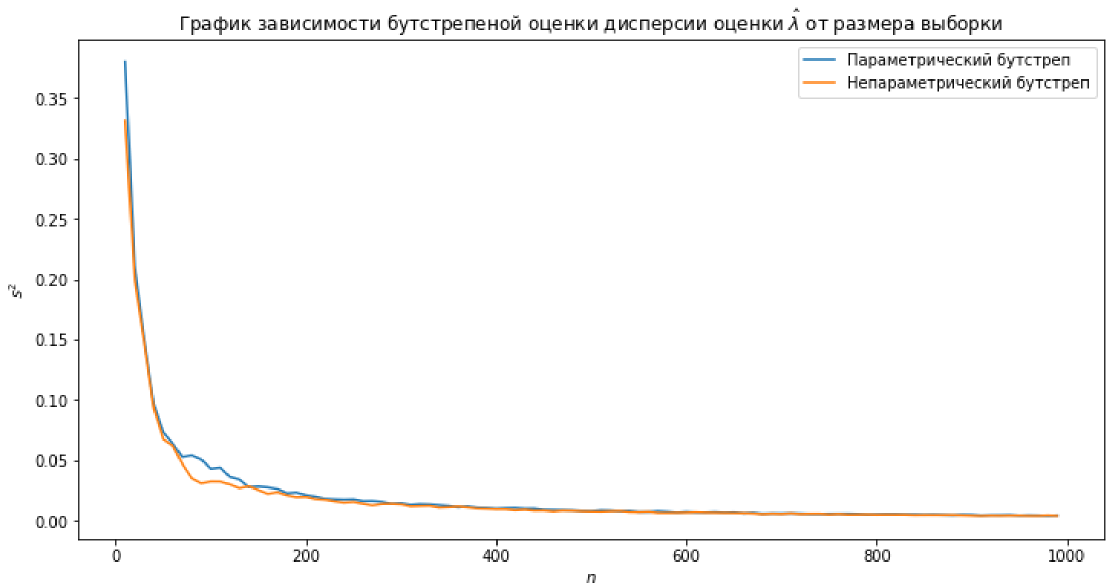


Рассмотрим оценки при других параметрах.
$\lambda = 4$

```
In [105]: lambd_ = 4
```

```
In [106]: poisson_rv = sts.poisson(mu=lambd_)
          poisson_sample = poisson_rv.rvs(N)
          lambda_estimators = CountEstimators(poisson_sample, CountPoissonEstimator)
```

```
In [107]: param_s = GetVarianceParamOfPoissonLambda(poisson_sample, lambda_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(poisson_sample, CountPoissonEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda}$", start=10)
```

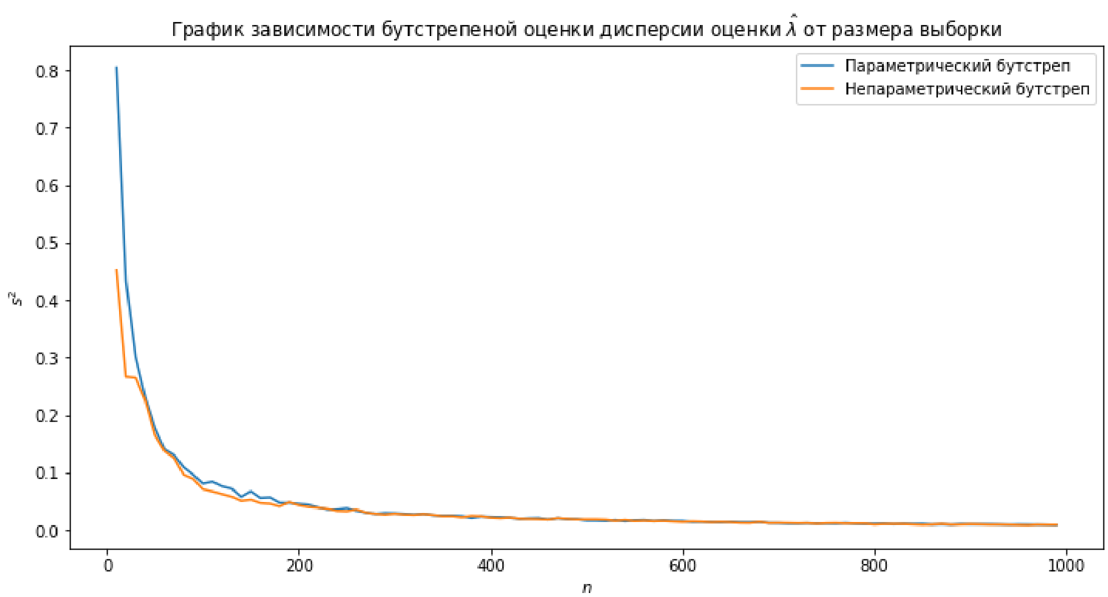


$\lambda = 9$

```
In [108]: lambd_ = 9
```

```
In [109]: poisson_rv = sts.poisson(mu=lambd_)
          poisson_sample = poisson_rv.rvs(N)
          lambda_estimators = CountEstimators(poisson_sample, CountPoissonEstimator)
```

```
In [110]: param_s = GetVarianceParamOfPoissonLambda(poisson_sample, lambda_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(poisson_sample, CountPoissonEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda}$", start=10)
```



Вывод: можно сделать вывод аналогичный предыдущим распределениям.

5 Биномиальное распределение

Биномиальное распределение с параметрами m и p. Для m оценка $\hat{m} = \frac{(\overline{X})^2}{(\overline{X})^2 - \overline{X^2} + \overline{X}}$, для p оценка $\hat{p} = \frac{(\overline{X})^2 - \overline{X^2} + \overline{X}}{\overline{X}}$

```
In [111]: m = 5
          p = 0.4
```

```
In [112]: binom_rv = sts.binom(m, p)
          binom_sample = binom_rv.rvs(N)
```

```
In [113]: def CountBinomEstimatorM(sample):
              return np.mean(sample) ** 2 / (np.mean(sample) ** 2 -  \
                      np.mean(sample ** 2) + np.mean(sample))
```

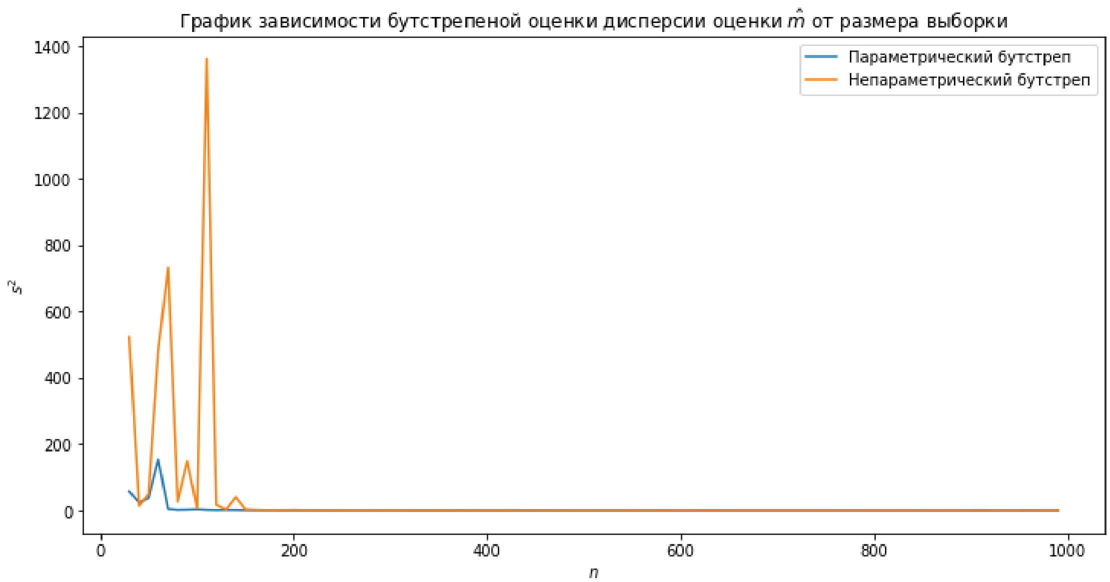
```
In [114]: def CountBinomEstimatorP(sample):
              return (np.mean(sample) ** 2 -  np.mean(sample ** 2) + \
                      np.mean(sample)) / np.mean(sample)
```

```
In [115]: m_estimators = CountEstimators(binom_sample, CountBinomEstimatorM)
          p_estimators = CountEstimators(binom_sample, CountBinomEstimatorP)
```

```
In [117]: def GetVarianceParamOfM(sample, param_estimators, p, start):
              s = np.zeros((N - start) // step)
              for n in range(start, N, step):
                  bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                  binom_rv = sts.binom(int(param_estimators[n]), p)
                  bootstrap_param_samples = binom_rv.rvs((K, n))
                  for k in range(K):
                      bootstrap_estimators[k] = CountBinomEstimatorM(bootstrap_param_samples[k])
                  s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                  np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
              return s
```

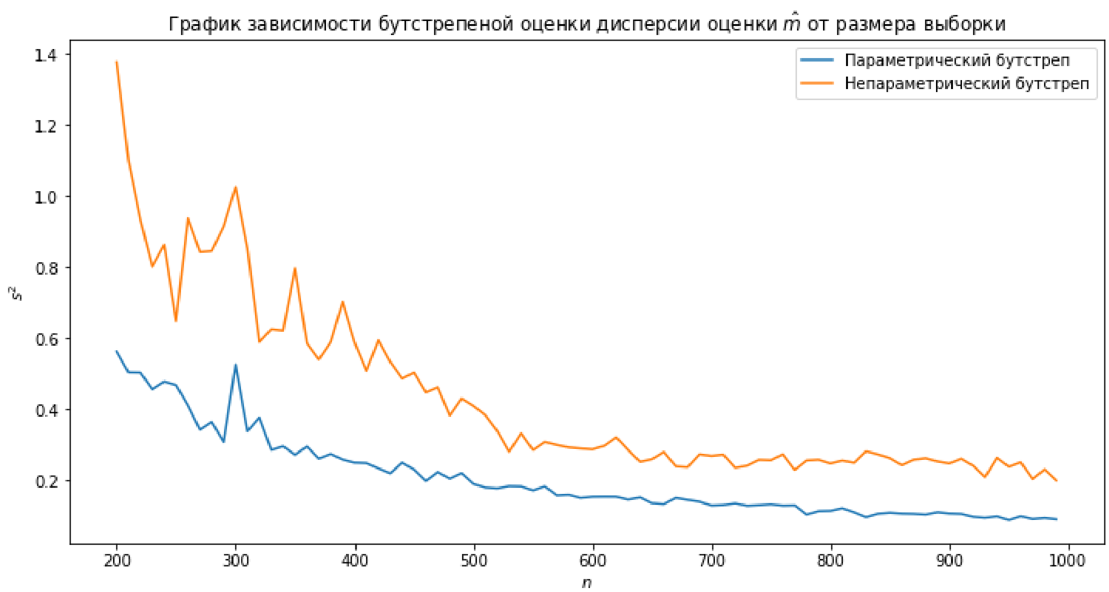
```
In [118]: param_s = GetVarianceParamOfM(binom_sample, m_estimators, p, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(binom_sample, CountBinomEstimatorM, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{m}$", start=10)
```

```
/home/sava/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/ipykernel_launcher.py:2: RuntimeWarning: divide

/home/sava/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/ipykernel_launcher.py:9: RuntimeWarning: invali
  if __name__ == '__main__':
/home/sava/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/ipykernel_launcher.py:8: RuntimeWarning: invali
```



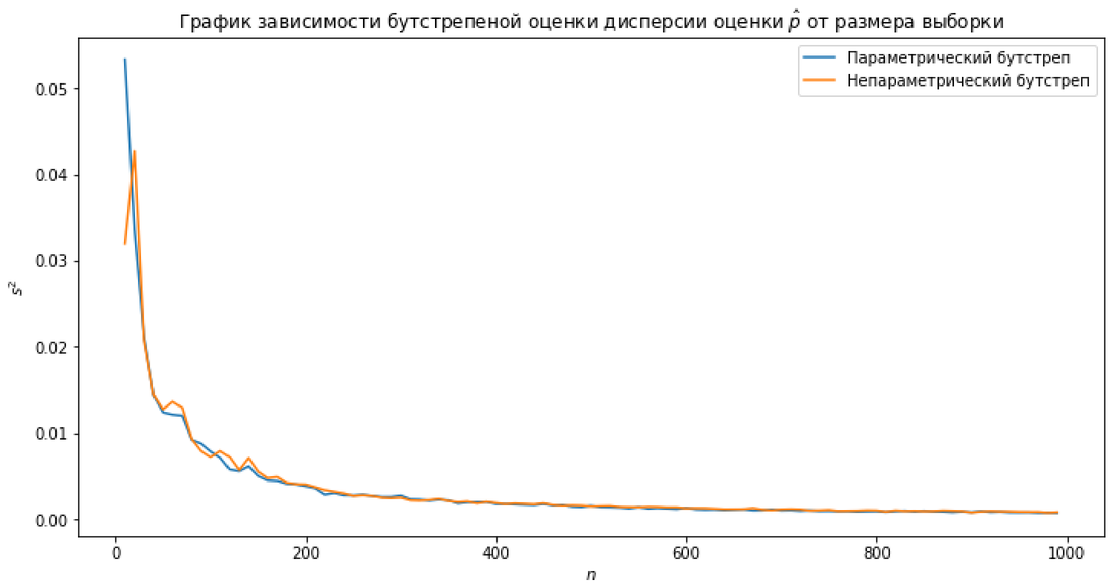
Как можно заметить из графика, при малых размерах выборки происходит деление на ноль в непараметрическом бутстрепе, а также получаются пики. Рассмотрим более подробно график при размерах выборки больше 200.

In [121]:
```
param_s = GetVarianceParamOfM(binom_sample, m_estimators, p, start=200)
nonparam_s = GetVarianceNonparam(binom_sample, CountBinomEstimatorM, start=200)
CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{m}$", start=200)
```



```
In [122]: def GetVarianceParamOfP(sample, param_estimators, m, start):
              s = np.zeros((N - start) // step)
              for n in range(start, N, step):
                  bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                  binom_rv = sts.binom(m, param_estimators[n])
                  bootstrap_param_samples = binom_rv.rvs((K, n))
                  for k in range(K):
                      bootstrap_estimators[k] = CountBinomEstimatorP(bootstrap_param_samples[k])
                  s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                  np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
              return s
```

```
In [123]: param_s = GetVarianceParamOfP(binom_sample, p_estimators, m, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(binom_sample, CountBinomEstimatorP, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{p}$", start=10)
```



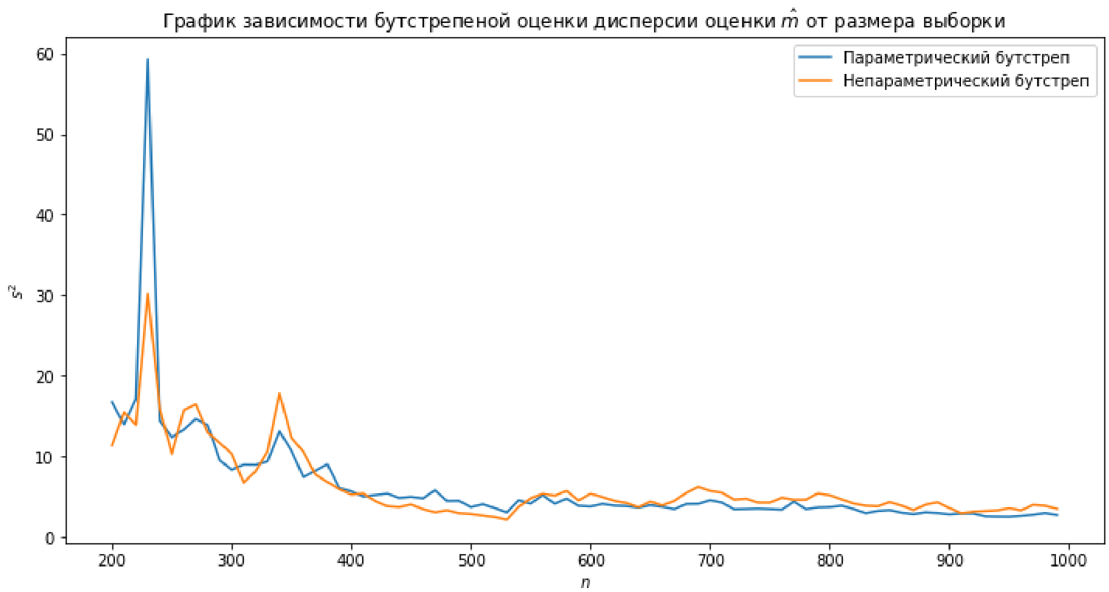
Рассмотрим оценки при других параметрах. При оценке параметра m размер выборки будем брать больше 200.

$m = 15$, $p = 0.3$

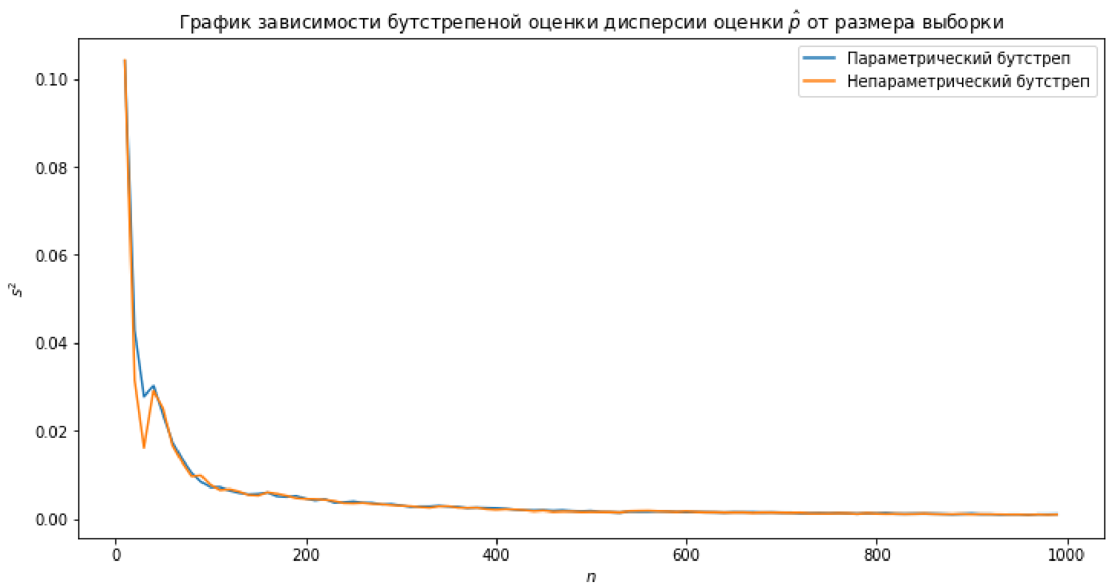
```
In [124]: m = 15
          p = 0.3
```

```
In [125]: binom_rv = sts.binom(m, p)
          binom_sample = binom_rv.rvs(N)
          m_estimators = CountEstimators(binom_sample, CountBinomEstimatorM)
          p_estimators = CountEstimators(binom_sample, CountBinomEstimatorP)
```

```
In [126]: param_s = GetVarianceParamOfM(binom_sample, m_estimators, p, start=200)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(binom_sample, CountBinomEstimatorM, start=200)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{m}$", start=200)
```




```
In [127]: param_s = GetVarianceParamOfP(binom_sample, p_estimators, m, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(binom_sample, CountBinomEstimatorP, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{p}$", start=10)
```

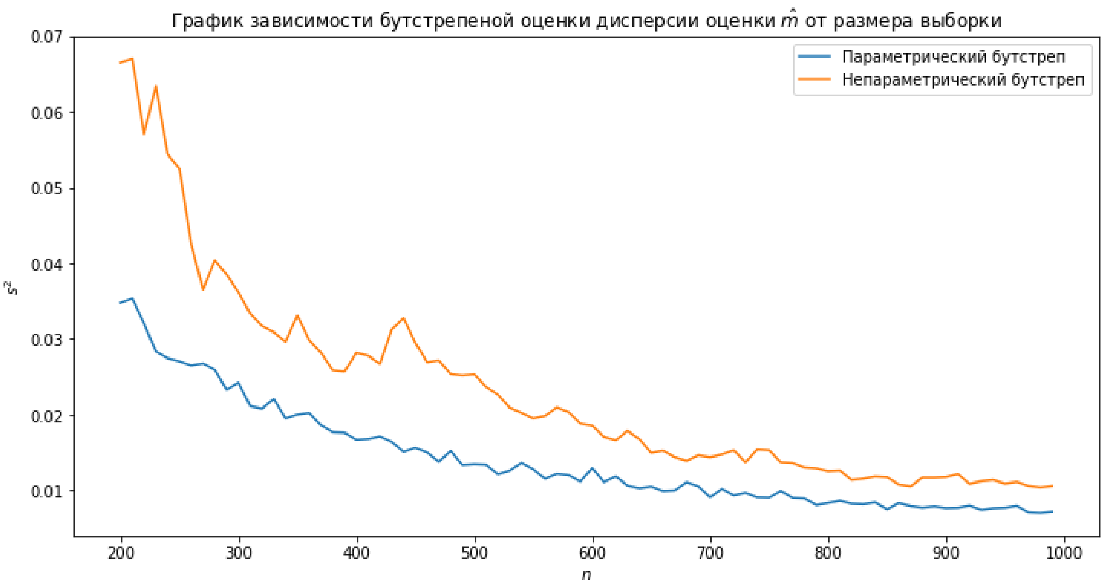


$m = 8,\ p = 0.8$

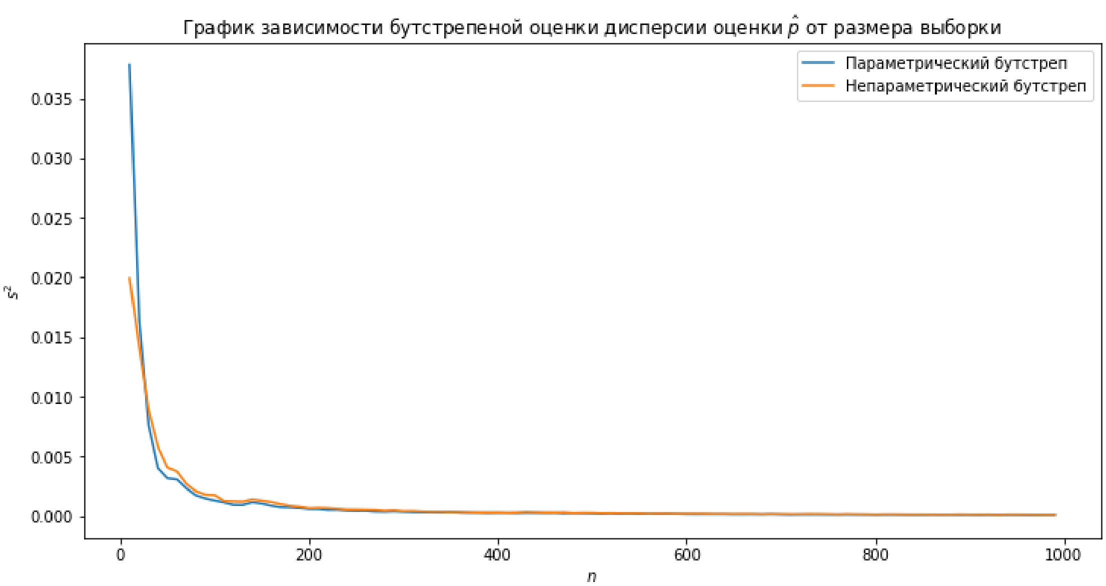
```
In [128]: m = 8
          p = 0.8
```

```
In [129]: binom_rv = sts.binom(m, p)
          binom_sample = binom_rv.rvs(N)
          m_estimators = CountEstimators(binom_sample, CountBinomEstimatorM)
          p_estimators = CountEstimators(binom_sample, CountBinomEstimatorP)
```

```
In [130]: param_s = GetVarianceParamOfM(binom_sample, m_estimators, p, start=200)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(binom_sample, CountBinomEstimatorM, start=200)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{m}$", start=200)
```




```
In [131]: param_s = GetVarianceParamOfP(binom_sample, p_estimators, m, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(binom_sample, CountBinomEstimatorP, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{p}$", start=10)
```



Вывод: Как видно из графиков, бутстреп плохо работает, когда параметр может принимать лишь дискретное число значений (как в случае параметра m), в этом случае при некоторых небольших размерах выборки могут возникать большие значения оценки дисперсии, причем что и в параметрическом, что и в непараметрическом случаях, хотя в большей части параметрический случай лучше, но все равно дает плохие результаты. При больших размерах выборки бутстрепная оценка дисперсии все-таки начинает стремиться к нулю, но непараметрический бутстреп все равно оказывается хуже параметрического. Тем не менее для параметра p оба способа бутстрепа дали очень хорошие значения бутстрепной оценки дисперсии, так как параметр p может принимать любое значение на отрезке $[0,1]$.

6 Геометрическое распределение

Геометрическое распределение с параметром p. Для p оценка $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$

```
In [132]: p = 0.5
```

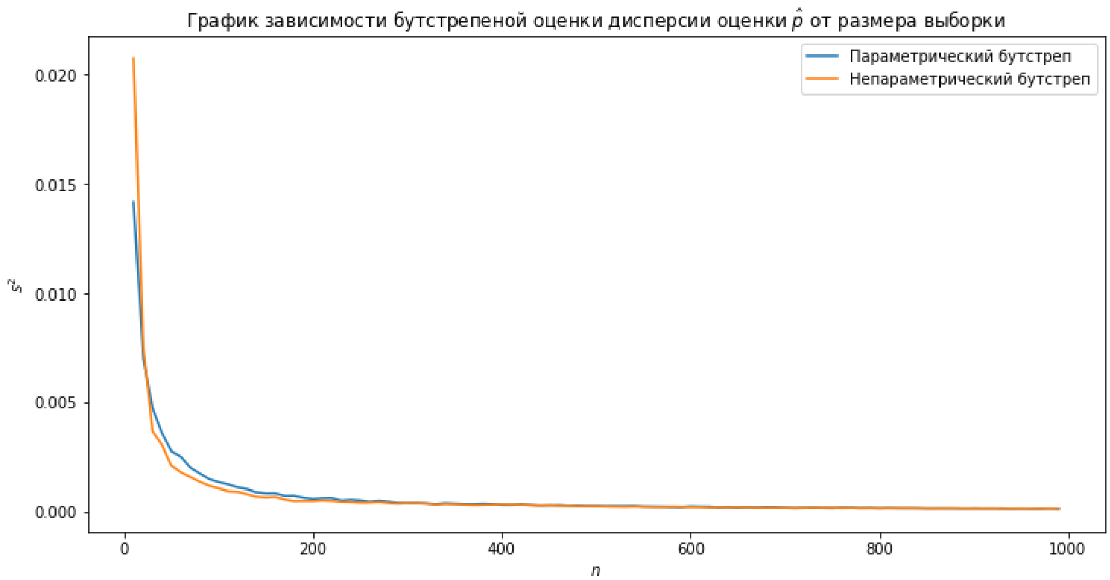
```
In [133]: geom_rv = sts.geom(p)
          geom_sample = geom_rv.rvs(N)
```

```
In [134]: def CountGeomEstimator(sample):
              return 1 / np.mean(sample)
```

```
In [135]: p_estimators = CountEstimators(geom_sample, CountGeomEstimator)
```

```
In [136]: def GetVarianceParamOfPGeom(sample, param_estimators, start):
              s = np.zeros((N - start) // step)
              for n in range(start, N, step):
                  bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                  geom_rv = sts.geom(param_estimators[n])
                  bootstrap_param_samples = geom_rv.rvs((K, n))
                  for k in range(K):
                      bootstrap_estimators[k] = CountGeomEstimator(bootstrap_param_samples[k])
                  s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                  np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
              return s
```

```
In [137]: param_s = GetVarianceParamOfPGeom(geom_sample, p_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(geom_sample, CountGeomEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{p}$", start=10)
```

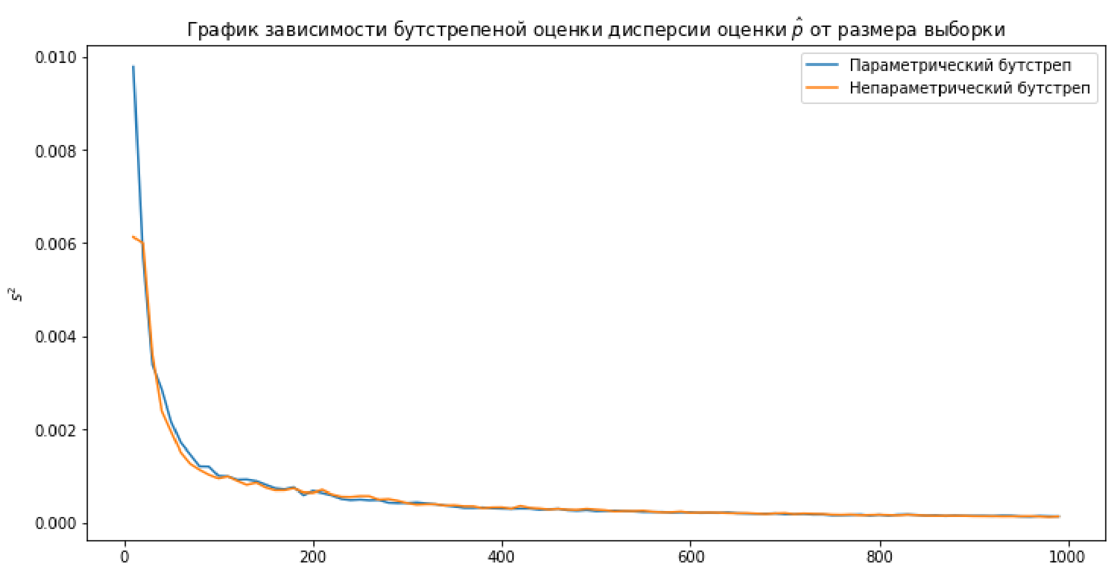


Рассмотрим оценки при других параметрах.
$p = 0.8$

In [138]:
```
p = 0.8
```

In [139]:
```
geom_rv = sts.geom(p)
geom_sample = geom_rv.rvs(N)
p_estimators = CountEstimators(geom_sample, CountGeomEstimator)
```

In [140]:
```
param_s = GetVarianceParamOfPGeom(geom_sample, p_estimators, start=10)
nonparam_s = GetVarianceNonparam(geom_sample, CountGeomEstimator, start=10)
CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{p}$", start=10)
```

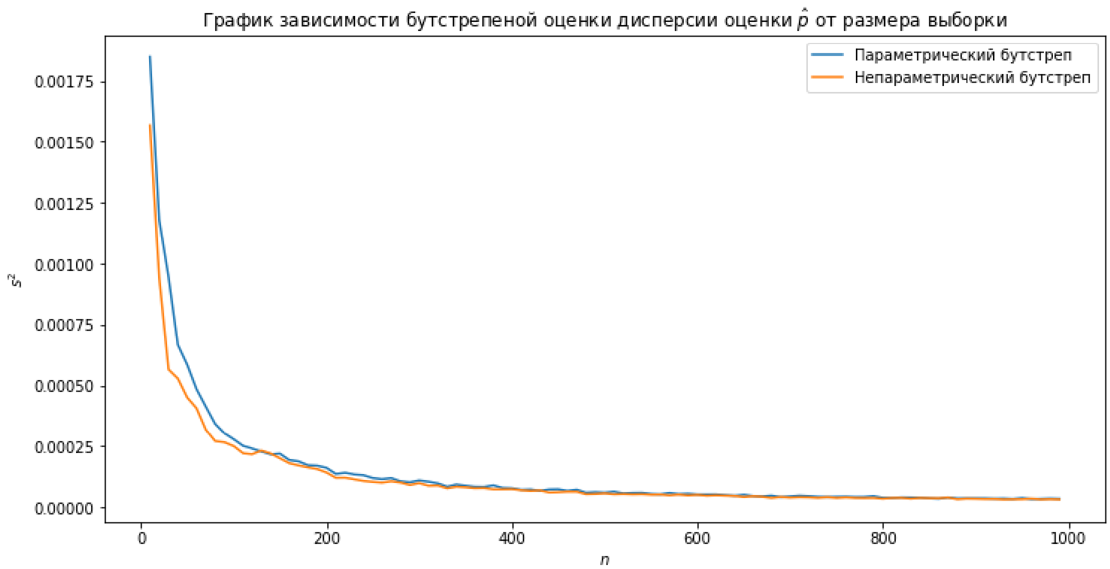


$p = 0.2$

```
In [141]: p = 0.2
```

```
In [142]: geom_rv = sts.geom(p)
          geom_sample = geom_rv.rvs(N)
          p_estimators = CountEstimators(geom_sample, CountGeomEstimator)
```

```
In [143]: param_s = GetVarianceParamOfPGeom(geom_sample, p_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(geom_sample, CountGeomEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{p}$", start=10)
```



Вывод: Свойства представленные выше, к примеру для нормального распределения, также сохраняются.

7 Бета распределение

Бета распределение с параметрами λ_1 и λ_2. Для λ_1 оценка $\hat{\lambda_1} = \frac{\overline{X^2} \cdot \overline{X} - \left(\overline{X}\right)^2}{\left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X^2}}$, для λ_2 оценка $\hat{\lambda_2} = \frac{\left(\overline{X^2} - \overline{X}\right)\left(1 - \overline{X}\right)}{\left(\overline{X}\right)^2 - \overline{X^2}}$

```
In [144]: lambda_one = 0.5
          lambda_two = 0.5
```

```
In [145]: beta_rv = sts.beta(lambda_one, lambda_two)
          beta_sample = beta_rv.rvs(N)
```

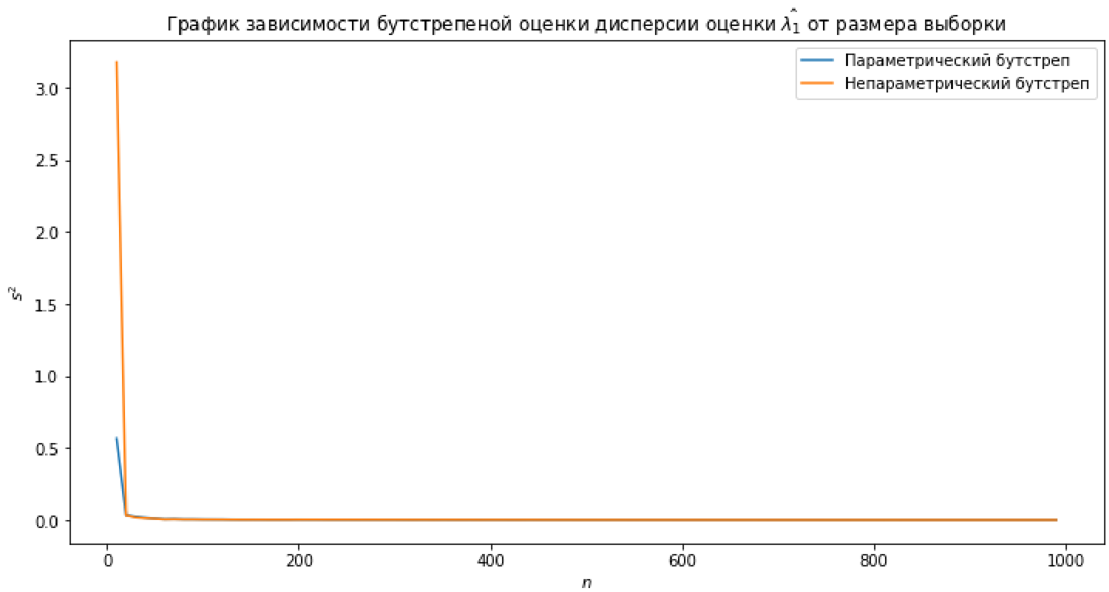
```
In [146]: def CountLambdaOneEstimator(sample):
              return (np.mean(sample ** 2) * np.mean(sample) - \
                      np.mean(sample) ** 2) / (np.mean(sample) ** 2  \
                                               - np.mean(sample ** 2))
```

```
In [147]: def CountLambdaTwoEstimator(sample):
              return (np.mean(sample ** 2) - np.mean(sample)) * \
                      (1 - np.mean(sample)) / (np.mean(sample) ** 2 - \
                                               np.mean(sample ** 2))
```

```
In [148]: lambda_one_estimators = CountEstimators(beta_sample, CountLambdaOneEstimator)
          lambda_two_estimators = CountEstimators(beta_sample, CountLambdaTwoEstimator)
```

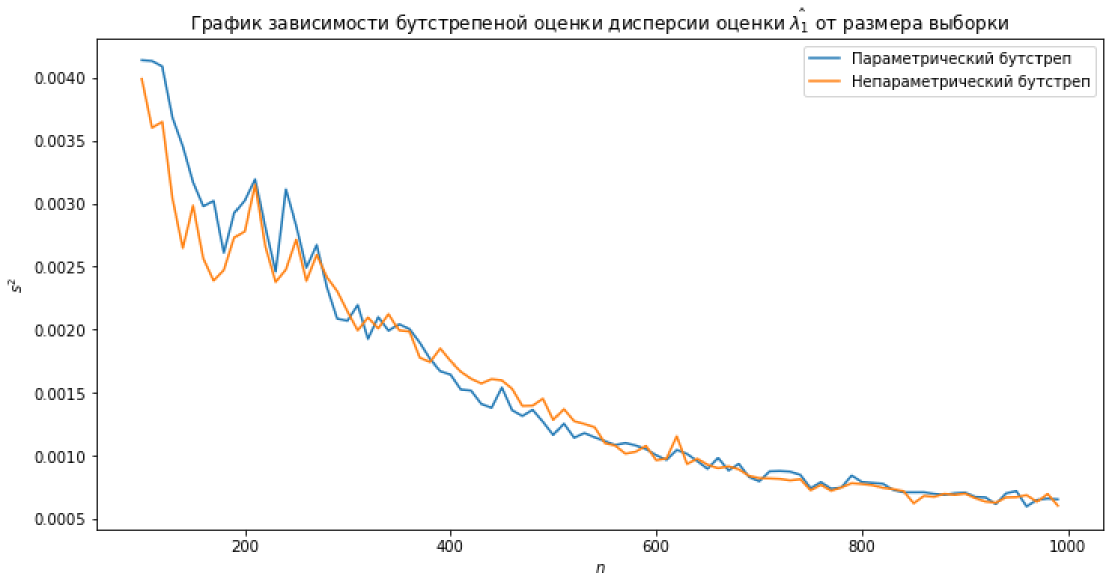
```
In [149]: def GetVarianceParamOfLambdaOne(sample, param_estimators, lambda_two, start):
              s = np.zeros((N - start) // step)
              for n in range(start, N, step):
                  bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                  beta_rv = sts.beta(param_estimators[n], lambda_two)
                  bootstrap_param_samples = beta_rv.rvs((K, n))
                  for k in range(K):
                      bootstrap_estimators[k] = CountLambdaOneEstimator(bootstrap_param_samples[
                  s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                  np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
              return s
```

```
In [150]: param_s = GetVarianceParamOfLambdaOne(beta_sample, lambda_one_estimators,
                                                lambda_two, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(beta_sample, CountLambdaOneEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda_1}$", start=10)
```

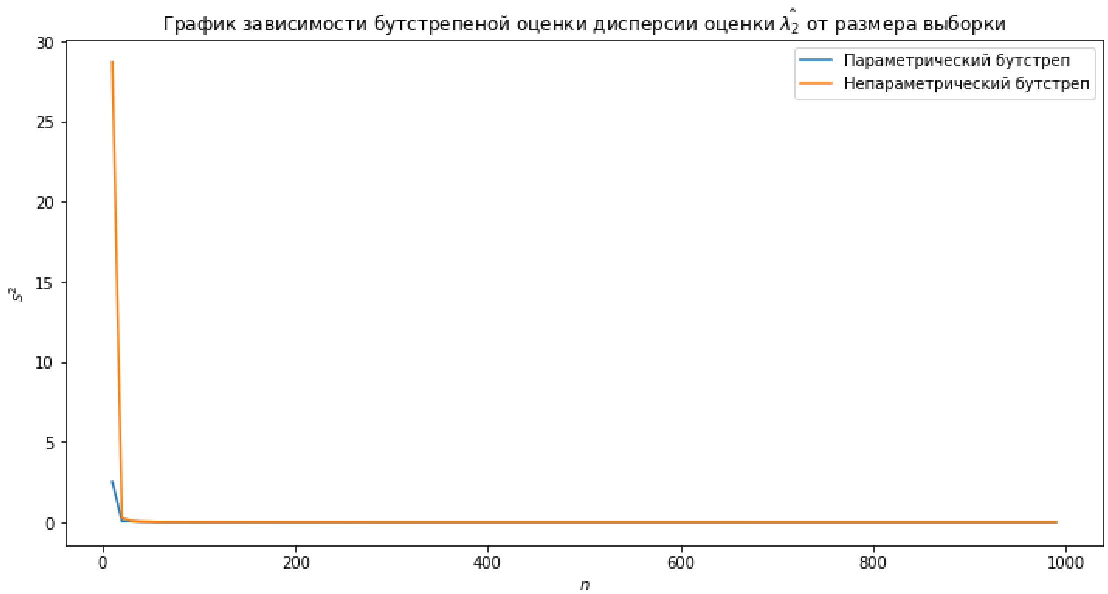


В данном случае имеем, что при очень малых размерах выборки непараметрическая оценка дисперсии ведет себя очень плохо. Рассмотрим более подробно график при размерах выборки больше 100.

```
In [152]: param_s = GetVarianceParamOfLambdaOne(beta_sample, lambda_one_estimators,
                                                lambda_two, start=100)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(beta_sample, CountLambdaOneEstimator, start=100)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda_1}$", start=100)
```

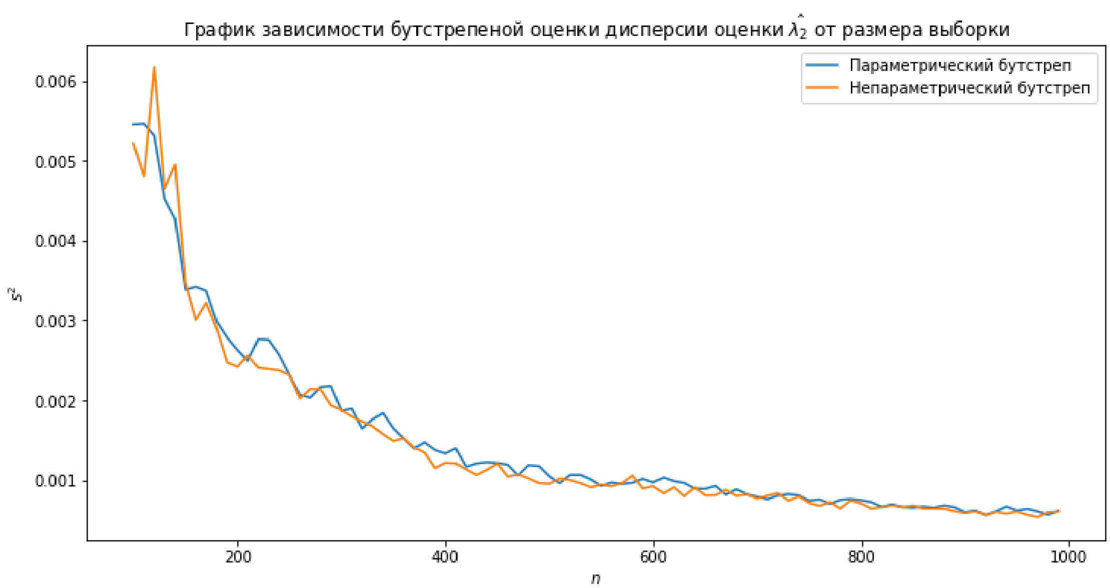



```
In [153]: def GetVarianceParamOfLambdaTwo(sample, param_estimators, lambda_one, start):
              s = np.zeros((N - start) // step)
              for n in range(start, N, step):
                  bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                  beta_rv = sts.beta(lambda_one, param_estimators[n])
                  bootstrap_param_samples = beta_rv.rvs((K, n))
                  for k in range(K):
                      bootstrap_estimators[k] = CountLambdaTwoEstimator(bootstrap_param_samples[
                  s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                  np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
              return s

In [154]: param_s = GetVarianceParamOfLambdaTwo(beta_sample, lambda_two_estimators,
                                                lambda_one, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(beta_sample, CountLambdaTwoEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda_2}$", start=10)
```



Аналогично параметру λ_1 рассмотрим график при больших значениях n

```
In [155]: param_s = GetVarianceParamOfLambdaTwo(beta_sample, lambda_two_estimators,
                                                lambda_one, start=100)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(beta_sample, CountLambdaTwoEstimator, start=100)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda_2}$", start=100)
```



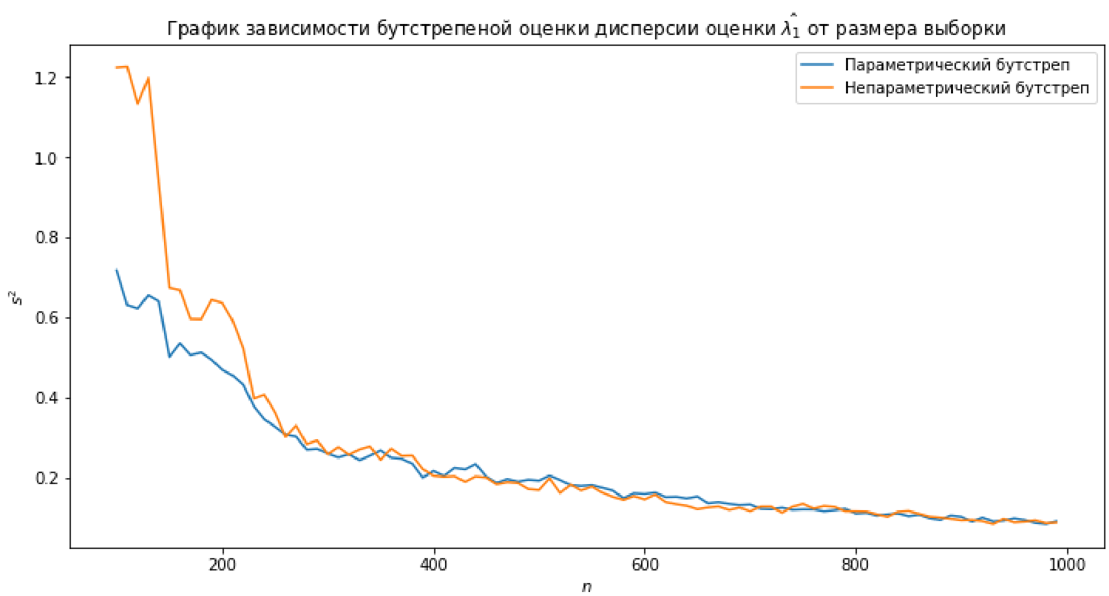
Рассмотрим оценки при других параметрах. Будем строить графики при размерах выборки больших 100, для лучшей наглядности.

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$

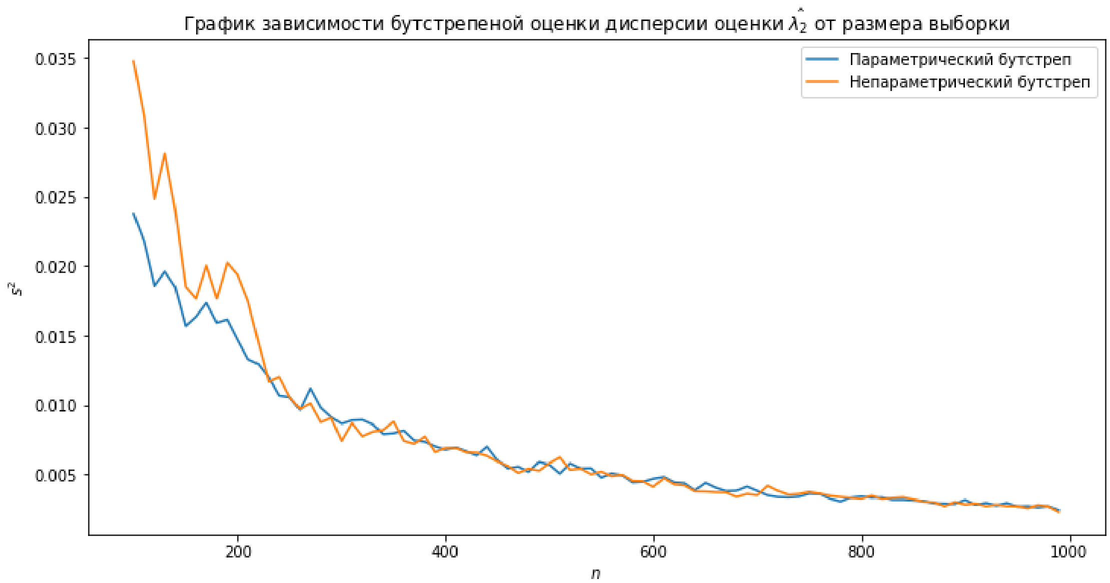
```
In [156]: lambda_one = 5
          lambda_two = 1
```

```
In [157]: beta_rv = sts.beta(lambda_one, lambda_two)
          beta_sample = beta_rv.rvs(N)
          lambda_one_estimators = CountEstimators(beta_sample, CountLambdaOneEstimator)
          lambda_two_estimators = CountEstimators(beta_sample, CountLambdaTwoEstimator)
```

```
In [158]: param_s = GetVarianceParamOfLambdaOne(beta_sample, lambda_one_estimators,
                                                lambda_two, start=100)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(beta_sample, CountLambdaOneEstimator, start=100)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda_1}$", start=100)
```




```
In [159]: param_s = GetVarianceParamOfLambdaTwo(beta_sample, lambda_two_estimators,
                                                lambda_one, start=100)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(beta_sample, CountLambdaTwoEstimator, start=100)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda_2}$", start=100)
```

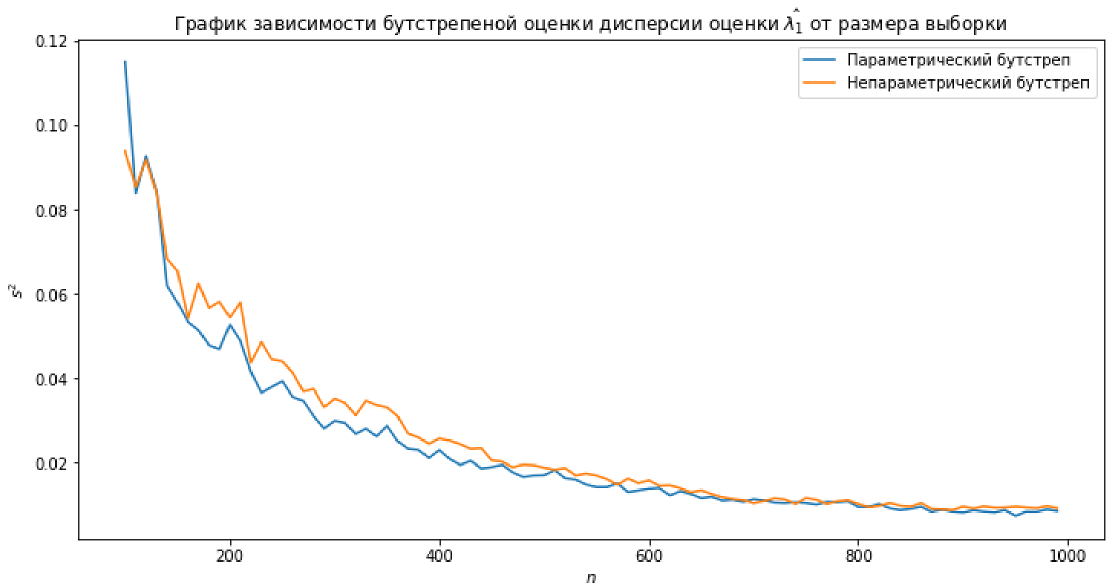


$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$

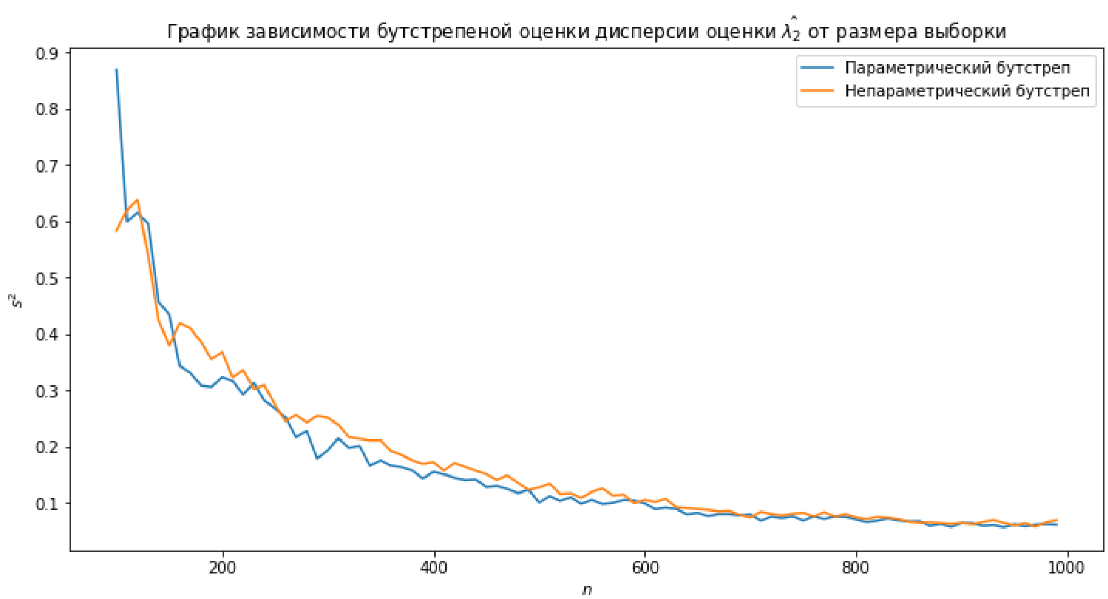
In [160]:
```
lambda_one = 2
lambda_two = 5
```

In [161]:
```
beta_rv = sts.beta(lambda_one, lambda_two)
beta_sample = beta_rv.rvs(N)
lambda_one_estimators = CountEstimators(beta_sample, CountLambdaOneEstimator)
lambda_two_estimators = CountEstimators(beta_sample, CountLambdaTwoEstimator)
```

In [162]:
```
param_s = GetVarianceParamOfLambdaOne(beta_sample, lambda_one_estimators,
                                      lambda_two, start=100)
nonparam_s = GetVarianceNonparam(beta_sample, CountLambdaOneEstimator, start=100)
CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda_1}$", start=100)
```




```
In [163]: param_s = GetVarianceParamOfLambdaTwo(beta_sample, lambda_two_estimators,
                                                lambda_one, start=100)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(beta_sample, CountLambdaTwoEstimator, start=100)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\lambda_2}$", start=100)
```



Вывод: В данном распределении бутстрепный метод ведет себя очень плохо при маленьких размерах выборки. Тем не менее, при больших n оценка дисперсии стремится к нулю, причем значения при параметрическом и непараметрическом бутстрепе почти совпадают.

8 Распределение Парето

Распределение Парето с параметром γ. Для γ оценка $\hat{\gamma} = \frac{1}{\ln X}$.

```
In [164]: gamma = 2
```

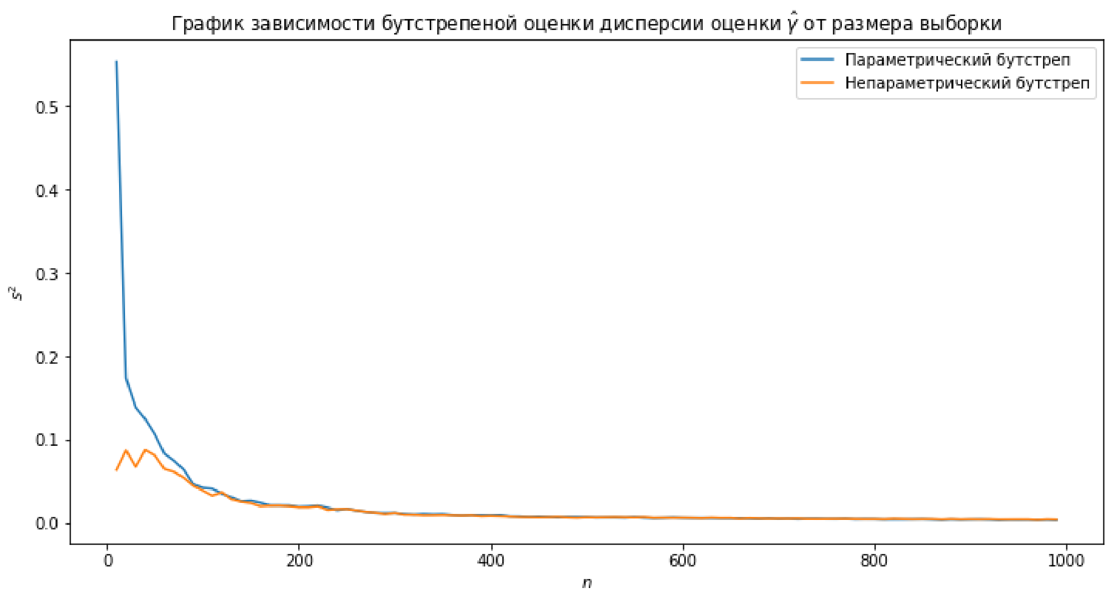
```
In [165]: pareto_rv = sts.pareto(gamma)
          pareto_sample = pareto_rv.rvs(N)
```

```
In [166]: def CountParetoEstimator(sample):
              return 1 / np.mean(np.log(sample))
```

```
In [167]: gamma_estimators = CountEstimators(pareto_sample, CountParetoEstimator)
```

```
In [168]: def GetVarianceParamOfGamma(sample, param_estimators, start):
              s = np.zeros((N - start) // step)
              for n in range(start, N, step):
                  bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                  pareto_rv = sts.pareto(param_estimators[n])
                  bootstrap_param_samples = pareto_rv.rvs((K, n))
                  for k in range(K):
                      bootstrap_estimators[k] = CountParetoEstimator(bootstrap_param_samples[k])
                  s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                  np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
              return s
```

```
In [169]: param_s = GetVarianceParamOfGamma(pareto_sample, gamma_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(pareto_sample, CountParetoEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\gamma}$", start=10)
```

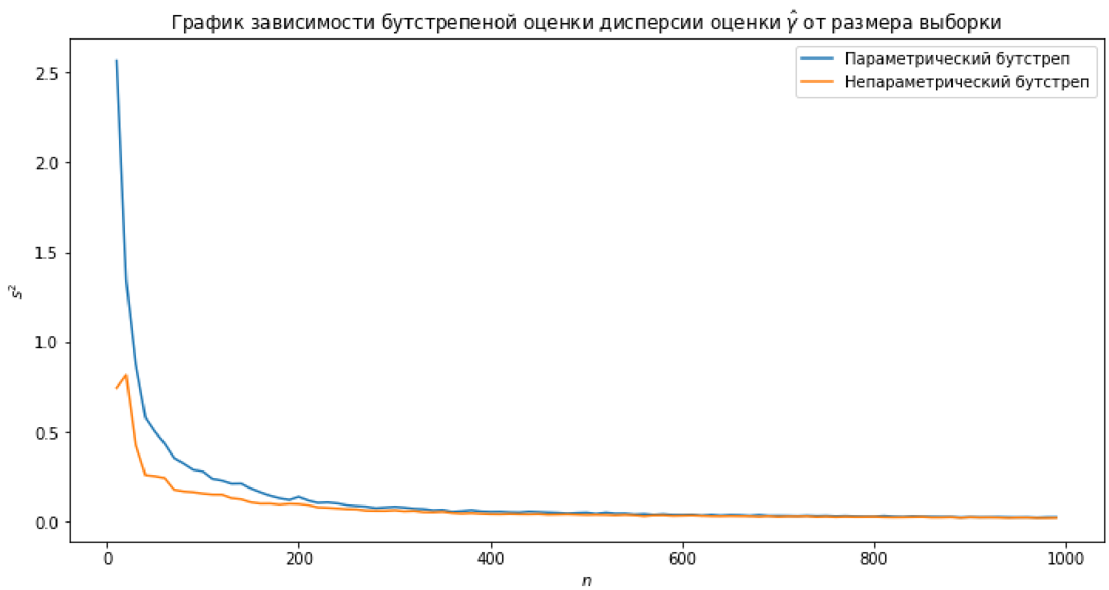


Рассмотрим оценки при других параметрах.
$\gamma = 5$

```
In [170]: gamma = 5
```

```
In [171]: pareto_rv = sts.pareto(gamma)
          pareto_sample = pareto_rv.rvs(N)
          gamma_estimators = CountEstimators(pareto_sample, CountParetoEstimator)
```

```
In [172]: param_s = GetVarianceParamOfGamma(pareto_sample, gamma_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(pareto_sample, CountParetoEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\gamma}$", start=10)
```

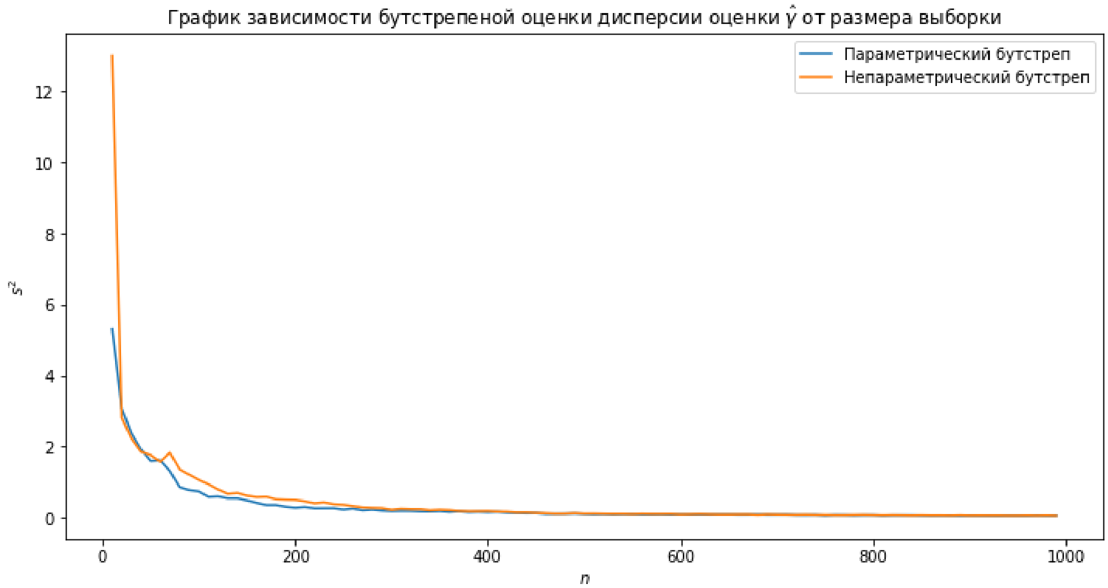


$\gamma = 8$

```
In [173]: gamma = 8
```

```
In [174]: pareto_rv = sts.pareto(gamma)
          pareto_sample = pareto_rv.rvs(N)
          gamma_estimators = CountEstimators(pareto_sample, CountParetoEstimator)
```

```
In [175]: param_s = GetVarianceParamOfGamma(pareto_sample, gamma_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(pareto_sample, CountParetoEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\gamma}$", start=10)
```



Вывод: Также как и для Бета распределения, при малых n бутстрепная оценка может быть заметно больше, чем при больших размерах выборки, причем как в параметрическом, так и в непараметрическом бутстрепе.

9 Распределение Коши

Распределение Коши с параметром θ. Для θ оценка $\hat{\theta} = \frac{1}{tg\left(\pi \overline{I(x \in [0,1])}\right)}$.

```
In [227]: theta = 0.5
```

```
In [228]: cauchy_rv = sts.cauchy(scale=theta)
          cauchy_sample = cauchy_rv.rvs(N)
```

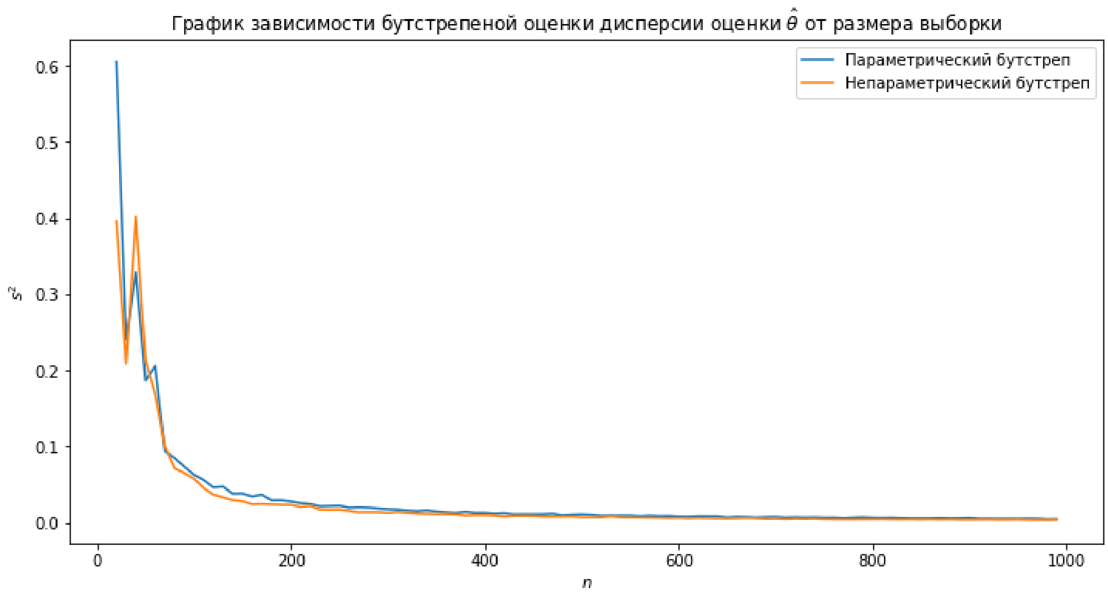
```
In [229]: def CountCauchyEstimator(sample):
              return 1 / np.tan(np.pi * \
                                np.mean([1 if x >= 0 and x <= 1 else 0 for x in sample]))
```

```
In [230]: cauchy_estimators = CountEstimators(cauchy_sample, CountCauchyEstimator)
```

```
In [231]: def GetVarianceParamOfCauchy(sample, cauchy_estimators, start=10):
              s = np.zeros((N - start) // step)
              for n in range(start, N, step):
                  bootstrap_estimators = np.zeros(K)
                  cauchy_rv = sts.cauchy(cauchy_estimators[n])
                  bootstrap_param_samples = cauchy_rv.rvs((K, n))
                  for k in range(K):
                      bootstrap_estimators[k] = CountCauchyEstimator(bootstrap_param_samples[k])
                  s[(n - start) // step] = np.mean(bootstrap_estimators ** 2) - \
                  np.mean(bootstrap_estimators) ** 2
              return s
```

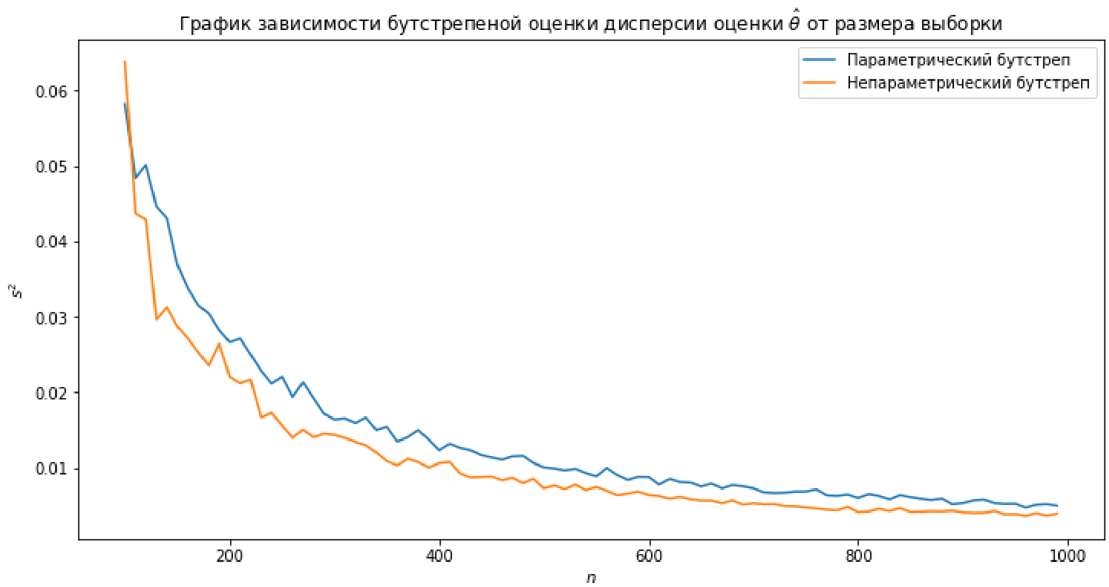
```
In [232]: param_s = GetVarianceParamOfCauchy(cauchy_sample, cauchy_estimators, start=10)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(cauchy_sample, CountCauchyEstimator, start=10)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\theta}$", start=10)
```

```
/home/sava/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/ipykernel_launcher.py:2: RuntimeWarning: divide

/home/sava/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/ipykernel_launcher.py:9: RuntimeWarning: invali
  if __name__ == '__main__':
/home/sava/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/ipykernel_launcher.py:8: RuntimeWarning: invali
```



Как можно заметить из графика, при маленьких размерах выборки значений оценки дисперсии значительно больше, также иногда может возникнуть деление на ноль. Поэтому рассмотрим более подробно график при $n > 100$.

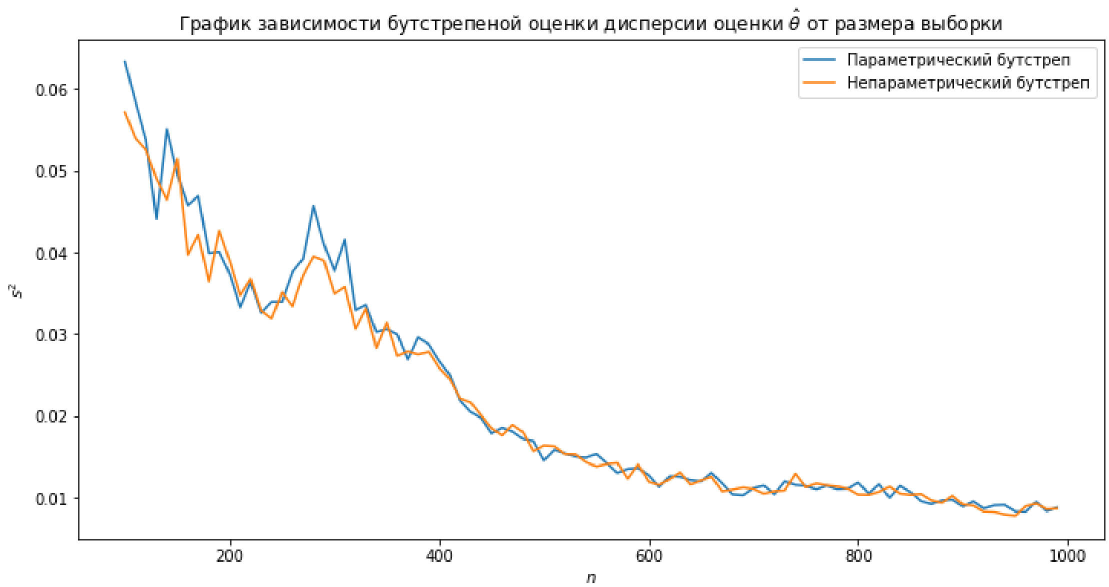
```
In [234]: param_s = GetVarianceParamOfCauchy(cauchy_sample, cauchy_estimators, start=100)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(cauchy_sample, CountCauchyEstimator, start=100)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\theta}$", start=100)
```



Рассмотрим оценки при других параметрах. Графики будем рисовать начиная с размера выборки равного 100.

$\theta = 1$

```
In [247]: theta = 1

In [248]: cauchy_rv = sts.cauchy(scale=theta)
          cauchy_sample = cauchy_rv.rvs(N)

In [249]: cauchy_estimators = CountEstimators(cauchy_sample, CountCauchyEstimator)

In [250]: param_s = GetVarianceParamOfCauchy(cauchy_sample, cauchy_estimators, start=100)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(cauchy_sample, CountCauchyEstimator, start=100)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\theta}$", start=100)
```



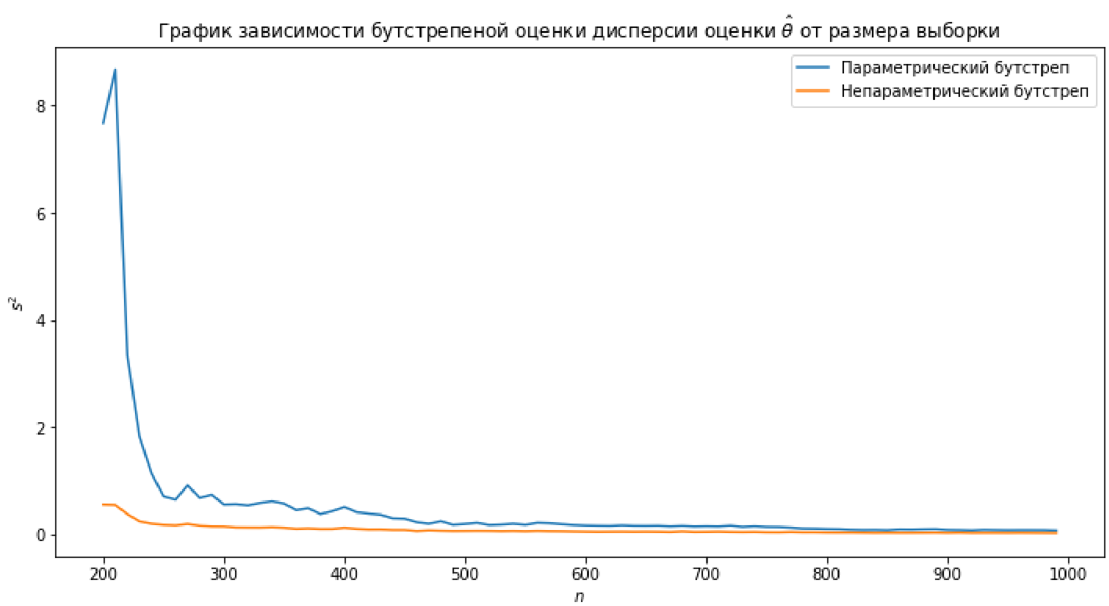
$\theta = 2$

```
In [251]: theta = 2
```

```
In [252]: cauchy_rv = sts.cauchy(scale=theta)
          cauchy_sample = cauchy_rv.rvs(N)
```

```
In [253]: cauchy_estimators = CountEstimators(cauchy_sample, CountCauchyEstimator)
```

```
In [254]: param_s = GetVarianceParamOfCauchy(cauchy_sample, cauchy_estimators, start=200)
          nonparam_s = GetVarianceNonparam(cauchy_sample, CountCauchyEstimator, start=200)
          CreatePlot(param_s, nonparam_s, r"$\hat{\theta}$", start=200)
```



Вывод: Оценка дисперсии оценки параметра в распределении Коши ведет себя очень плохо при маленьких n, при чем там часто возникает деление на ноль, пр посчете бутстрепной оценки. А также даже при больших значениях n, если θ тоже довольно большое, то параметрический бутстреп ведет себя гораздо хуже непараметрического и очень медленно стремится к нулю.

Общий вывод: Как мы увидели из графиков, для каждого распределения бутстрепная оценка дисперсии оценки параметра стремится к нулю при увеличении рамзера выборки, как для параметрического, так и для непараметрического бутстрепа. Это связано с тем, что количество бутстрепных выборок равно n, то есть увеличивается при увеличении размера выборки. Кроме того, мы увидели, что при некоторых распределениях (Коши, Бета и биномиальное) даже при размерах выборки около ста значение бутстрепной оценки дисперсии может быть очень большим по сравнению с значениями при $n > 200$. Более того, при размерах выборки меньших десяти, данные бустрепные оценки дисперсии дают огромнейшие значения, так как размер каждого бутстрепа также меньше 10 и соответсвенно дисперсия оказывается довольно большой. Тем не менее оба бутстрепа очень хорошо себя ведут при больших размерах выборки при любом распределении, что связан с большими размерами и бутстрепных выборок.