Prestazioni CDMA

Andrea Savastano

December 30, 2024

Contents

1 Calcolo teorico media e varianza **2**

1.1 Calcolo di $\mathrm{E}[X_k]$ e $\mathrm{VAR}[X_k]$ . . . 2

1.2 Calcolo di $\mathrm{E}[n]$ e $\mathrm{VAR}[n]$ . . . 2

2 Grafici **3**

2.1 Distribuzione somma di X_k . . . 3

2.2 Prestazioni CDMA al variare di SNR_{dB} . . . 4

2.3 Prestazioni CDMA al variare di N . . . 5

1 Calcolo teorico media e varianza

- N: numero di utenti
- $\mathcal{E}_s$: Energia del segnale trasmesso s
- s_1: segnale aspettato
- c_n: chirping code dell'utente n-esimo
- L_c: lunghezza del chirping code per ogni utente

$$s_1 = \mathcal{E}_s \pm \sum_{k=1}^{L_c} \left(\sum_{n=2}^{N} c_{1k} \cdot c_{nk} \right) = \mathcal{E}_s \pm \sum_{k=1}^{L_c} X_k$$

- $\{X_k\}_{k=1,\dots,L_c}$: variabili aleatorie indipendenti

---

1.1 Calcolo di $\mathrm{E}[X_k]$ e $\mathrm{VAR}[X_k]$

$$\Big(c_{nk} \in [-1, 1] \Big) \implies \Big(\mathrm{E}[c_{nk}] = 0 \Big)$$

$$\mathrm{E}[X_k] = \mathrm{E}\left[\sum_{n=2}^{N} c_{1k} \cdot c_{nk} \right] = c_{1k} \cdot \mathrm{E}\left[\sum_{n=2}^{N} c_{nk} \right] = c_{1k} \cdot \sum_{n=2}^{N} \mathrm{E}[c_{nk}] = 0$$

$$\mathrm{VAR}[X_k] = \mathrm{E}[X_k^2] - \mathrm{E}^2[X_k] = \mathrm{E}[X_k^2] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{n=2}^{N} c_{1k} \cdot c_{nk} \right)^2 \right] = \mathrm{E}\left[c_{1k}^2 \cdot \sum_{n=2}^{N} c_{nk}^2 \right] = \mathrm{E}\left[\sum_{n=2}^{N} 1 \right] = N - 1$$

1.2 Calcolo di $\mathrm{E}[n]$ e $\mathrm{VAR}[n]$

$$\mathrm{E}[n] = \mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{L_c} X_k \right] = \sum_{k=1}^{L_c} \mathrm{E}\left[X_k \right] = \sum_{k=1}^{L_c} 0 = 0$$

$$\Big(\{X_k\}_{k=1,\dots,L_c} \text{indipendenti} \Big) \implies \Big(\mathrm{VAR}[X_1 + X_2 + \dots + X_{Lc}] = \mathrm{VAR}[X_1] + \mathrm{VAR}[X_2] + \dots + \mathrm{VAR}[X_{Lc}] \Big)$$

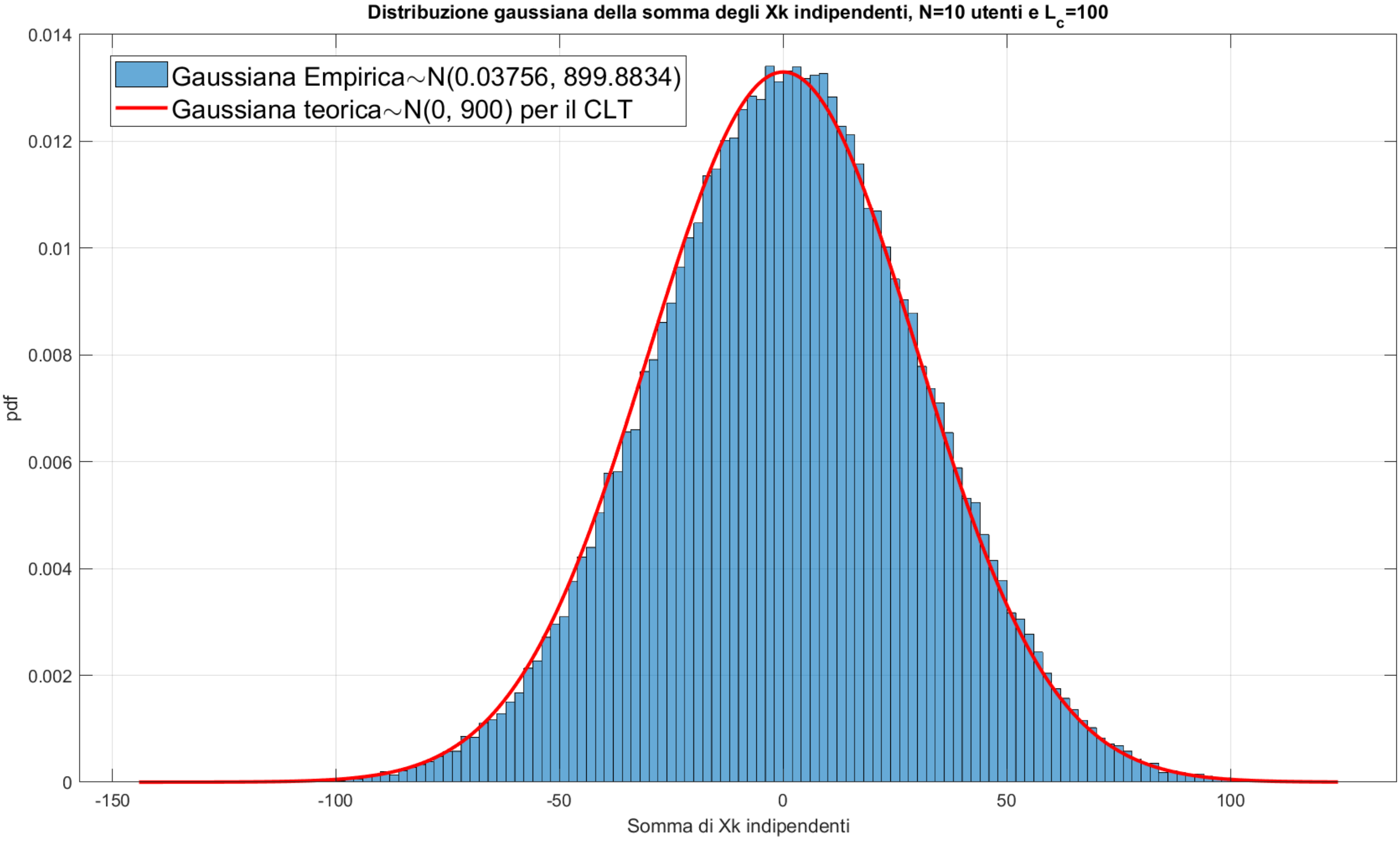
$$\implies \mathrm{VAR}[n] = \mathrm{VAR}\left[\sum_{k=1}^{L_c} X_k \right] = \sum_{k=1}^{L_c} \mathrm{VAR}\left[X_k \right] = \sum_{k=1}^{L_c} (N-1) = L_c \cdot (N-1)$$

Applicando il *Teorema Centrale del Limite*,
essendo $\{X_k\}_{k=1,\dots,L_c}$ indipendenti con $\mathrm{E}[X_k] = 0$ e $\mathrm{VAR}[X_k] = (N-1)$ la loro somma genera una variabile aleatoria n con distribuzione Gaussiana e questa è il rumore che si aggiunge in ricezione.

$$\sum_{k=1}^{L_c} X_k = n, \quad \boxed{n \sim \mathcal{N}\Big(0,\, L_c(N-1)\Big)} \implies \left(s_1 = \mathcal{E}_s \pm \sum_{k=1}^{L_c} X_k = \mathcal{E}_s \pm n \right)$$

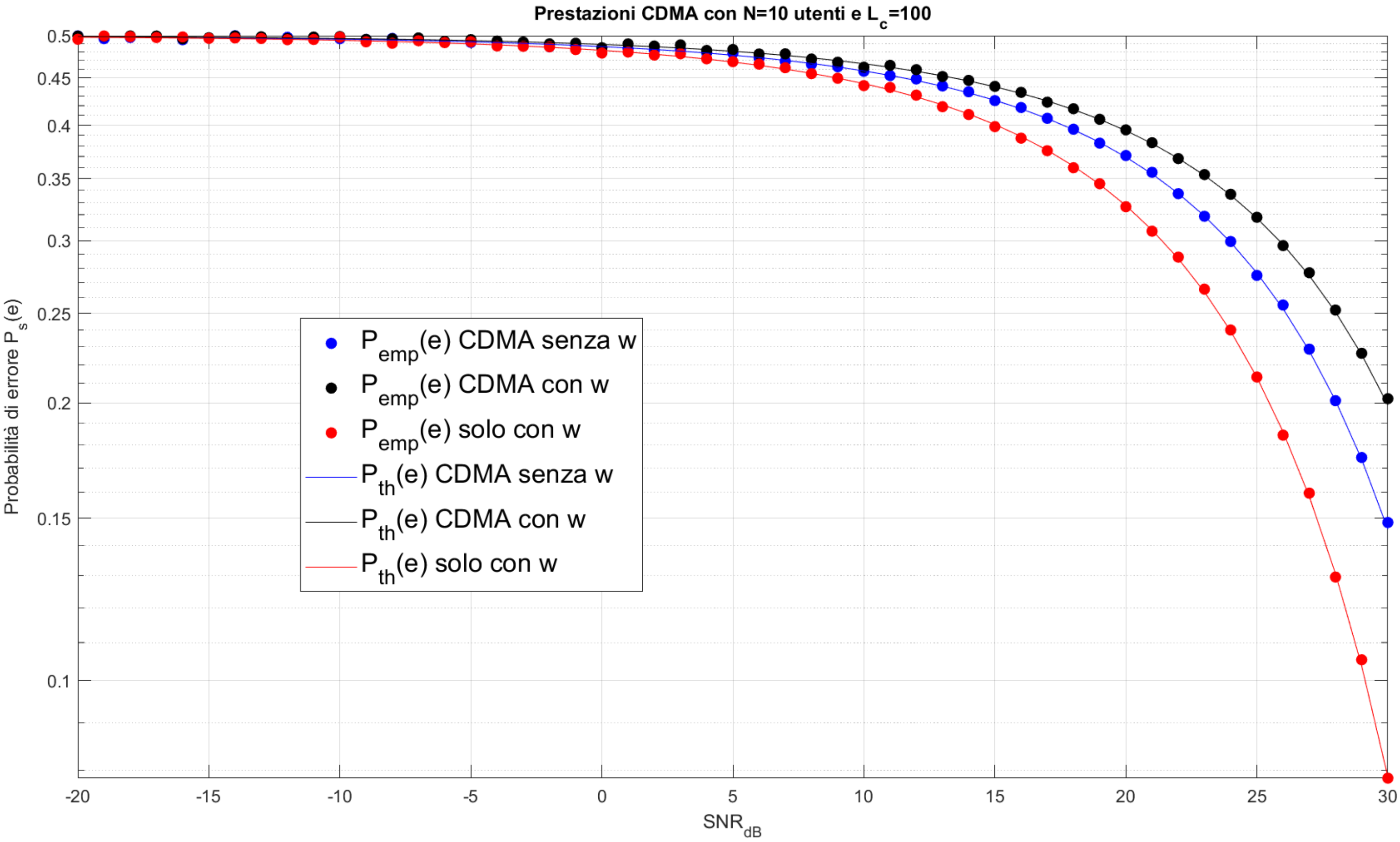
2 Grafici

2.1 Distribuzione somma di X_k



Svolgendo l'esperimento $\sum_{k=1}^{L_c}\left(\sum_{n=2}^{N} c_{1k}\cdot c_{nk}\right)=\sum_{k=1}^{L_c} X_k$ con $N=10$ utenti e $L_c=100$ lunghezza del chirping code per ogni utente, si dimostra empiricamente che la somma degli X_k indipendenti $\sum_{k=1}^{L_c} X_k = n$ ha una distriuzione gaussiana (di colore blu nel grafico) che segue quella teorica (di colore rosso nel grafico), con media $0.038 \to 0$ e varianza $899.883 \to 900 = L_c(N-1)$, come era stato dimostrato teoricamente nella pagina precedente.

2.2 Prestazioni CDMA al variare di SNR_{dB}



Simulando la trasmissione CDMA con $N = 10$ e $L_c = 100$ sono state ricavate le tre $P_{emp}(e)$ e le rispettive $P_{th}(e)$ che seguono lo stesso andamento.

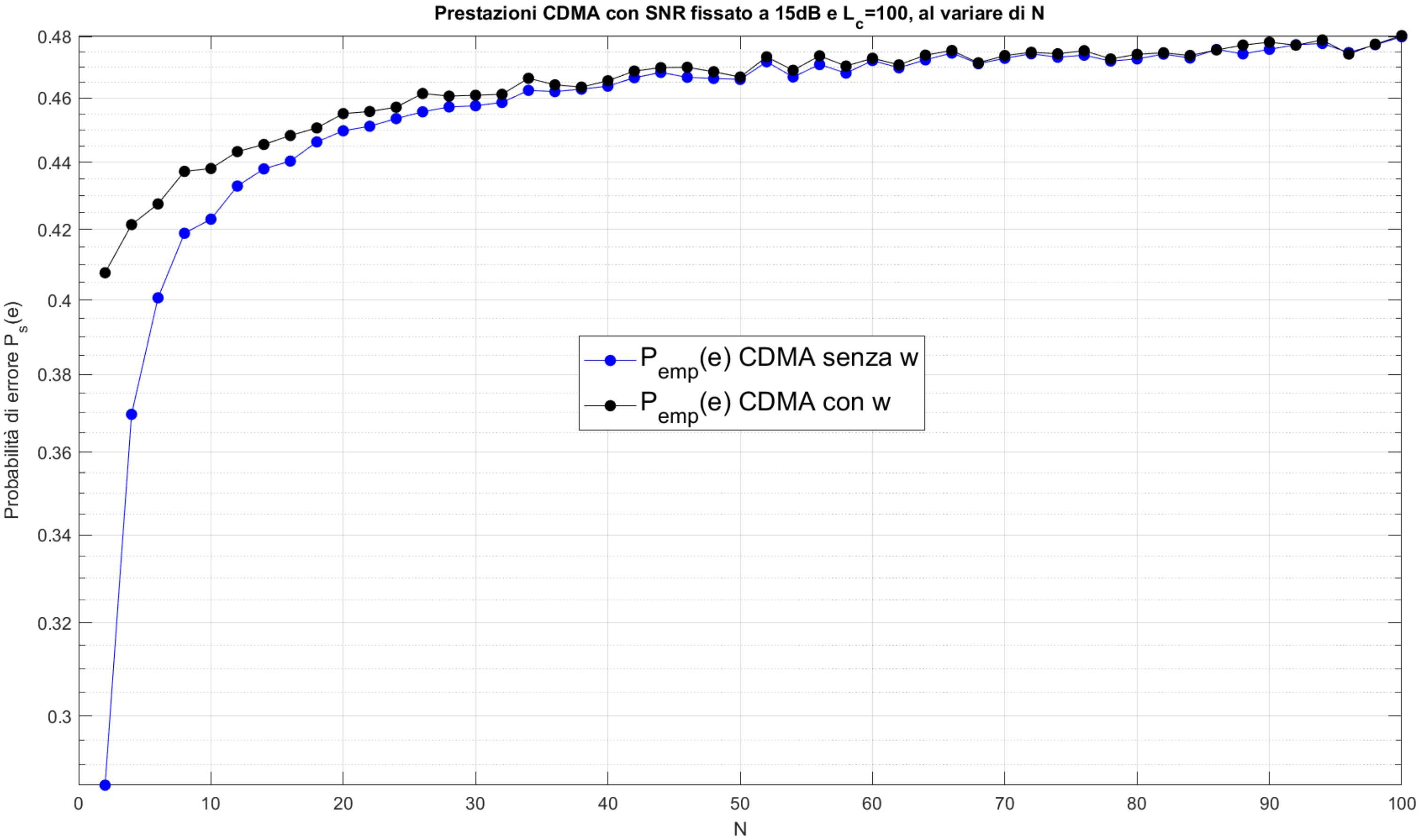
La $P_{emp}(e)$ blu rappresenta le prestazioni della trasmissione CDMA senza rumore w aggiuntivo, considerando quindi $s_1 = \mathcal{E}_s \pm n,\ n \sim \mathcal{N}(0,\ L_c(N-1))$.

La $P_{emp}(e)$ nera rappresenta le prestazioni della trasmissione CDMA con rumore w aggiuntivo, considerando quindi $s_1 = \mathcal{E}_s \pm n + w,\ w \sim \mathcal{N}(0,\ \frac{N_0}{2})$.

La $P_{emp}(e)$ rossa rappresenta le prestazioni della trasmissione con solo rumore w, considerando quindi $s_1 = \mathcal{E}_s + w$.

Si nota dal grafico che la $P(e)$ nera decade più lentamente rispetto alle altre al crescere di SNR_{dB} e denota quindi le prestazioni peggiori.
In questa simulazione è stato scelto N_0 di w tale da non influire eccessivamente nella trasmissione per ottenere tre andamenti distinti. Infatti se si aumentasse N_0, la $P(e)$ nera si sovrapporrebbe con la $P(e)$ rossa perchè il rumore n risulterebbe trascurabile rispetto a w, mentre la $P(e)$ blu denoterebbe le prestazioni migliori.

2.3 Prestazioni CDMA al variare di N



In questa seconda simulazione è stato scelto di fissare l'SNR_{dB} a $15\,dB$ ed L_c a 100 e valutare le prestazioni al variare di $N \in [2, 100]$.

Entrambe le $P_{emp}(e)$ crescono all'aumentare di N perchè aumenta sempre più la varianza del rumore n che dipende da L_c ed N, infatti $n \sim \mathcal{N}(0,\, L_c(N-1))$.
Per N piccoli, quindi per $N \in [2, 30]$, si nota una maggiore differenza tra la $P_{emp}(e)$ senza w aggiuntivo e quella con w, infatti quest'ultima denota prestazioni peggiori.
Invece al crescere di N, quindi per $N > 30$, la varianza del rumore n aumenta sempre di più per entrambe le $P_{emp}(e)$ fino a far diventare trascurabile w rispetto ad n per la $P_{emp}(e)$ nera, facendo sovrapporre i due grafici.