

Prestazioni CDMA

Andrea Savastano

Francesco Musto

Mario Zito

December 27, 2024

Contents

1	Calcolo teorico media e varianza	2
1.1	Calcolo di $E[X_k]$ e $\text{VAR}[X_k]$	2
1.2	Calcolo di $E[n]$ e $\text{VAR}[n]$	2
2	Grafici	3
2.1	Distribuzione somma di X_k	3
2.2	Prestazioni CDMA al variare di SNR_{dB}	4
2.3	Prestazioni CDMA al variare di N	5

1 Calcolo teorico media e varianza

- N : numero di utenti
- \mathcal{E}_s : Energia del segnale trasmesso s
- s_1 : segnale aspettato
- c_n : chirping code dell'utente n -esimo
- L_c : lunghezza del chirping code per ogni utente

$$s_1 = \mathcal{E}_s \pm \sum_{k=1}^{L_c} \left(\sum_{n=2}^N c_{1k} \cdot c_{nk} \right) = \mathcal{E}_s \pm \sum_{k=1}^{L_c} X_k$$

- $\{X_k\}_{k=1, \dots, L_c}$: variabili aleatorie indipendenti

1.1 Calcolo di $E[X_k]$ e $\text{VAR}[X_k]$

$$\left(c_{nk} \in [-1, 1] \right) \implies \left(E[c_{nk}] = 0 \right)$$

$$E[X_k] = E \left[\sum_{n=2}^N c_{1k} \cdot c_{nk} \right] = c_{1k} \cdot E \left[\sum_{n=2}^N c_{nk} \right] = c_{1k} \cdot \sum_{n=2}^N E[c_{nk}] = 0$$

$$\text{VAR}[X_k] = E[X_k^2] - E^2[X_k] = E[X_k^2] = E \left[\left(\sum_{n=2}^N c_{1k} \cdot c_{nk} \right)^2 \right] = E \left[c_{1k}^2 \cdot \sum_{n=2}^N c_{nk}^2 \right] = E \left[\sum_{n=2}^N 1 \right] = N - 1$$

1.2 Calcolo di $E[n]$ e $\text{VAR}[n]$

$$E[n] = E \left[\sum_{k=1}^{L_c} X_k \right] = \sum_{k=1}^{L_c} E[X_k] = \sum_{k=1}^{L_c} 0 = 0$$

$$\left(\{X_k\}_{k=1, \dots, L_c} \text{ indipendenti} \right) \implies \left(\text{VAR}[X_1 + X_2 + \dots + X_{L_c}] = \text{VAR}[X_1] + \text{VAR}[X_2] + \dots + \text{VAR}[X_{L_c}] \right)$$

$$\implies \text{VAR}[n] = \text{VAR} \left[\sum_{k=1}^{L_c} X_k \right] = \sum_{k=1}^{L_c} \text{VAR}[X_k] = \sum_{k=1}^{L_c} (N - 1) = L_c \cdot (N - 1)$$

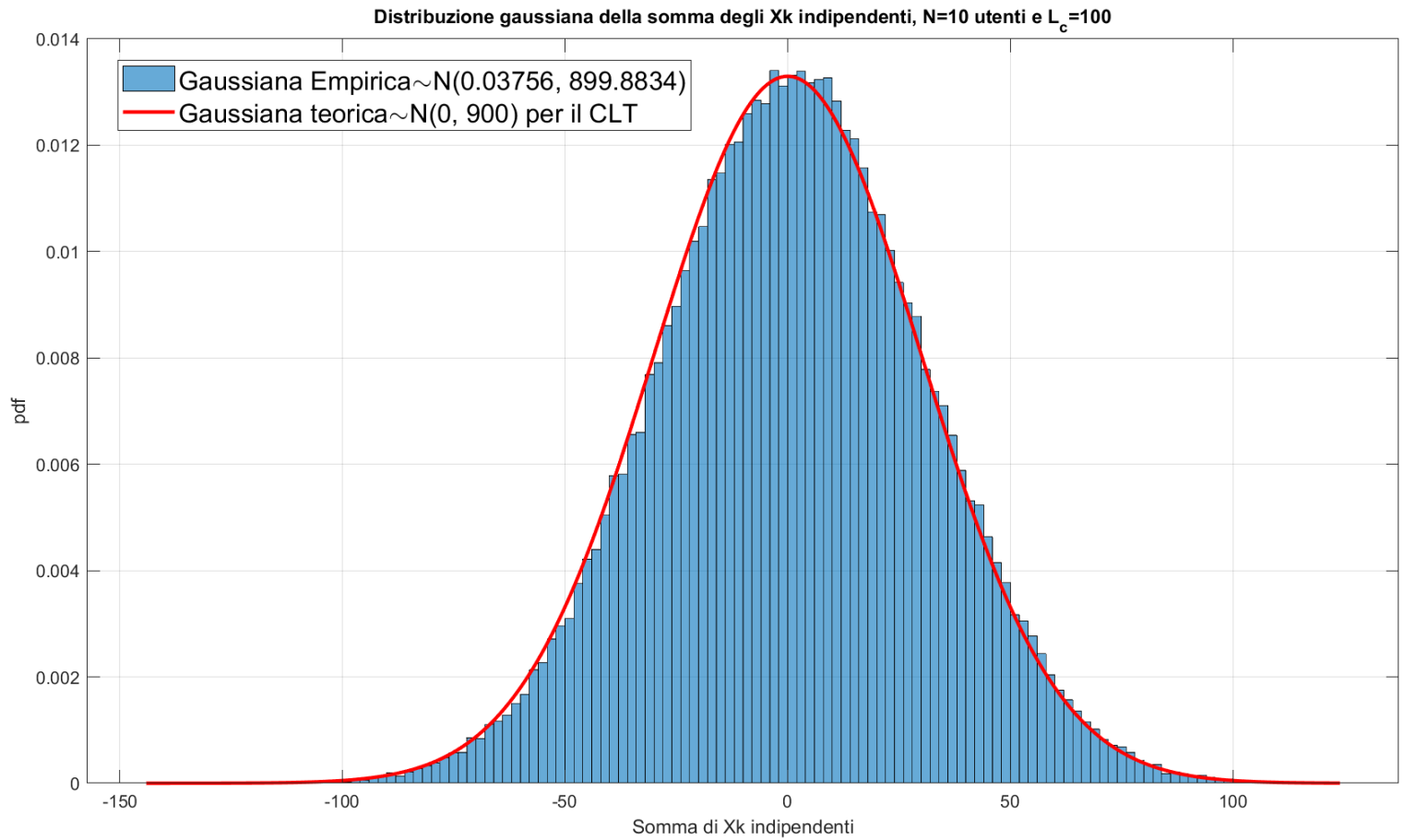
Applicando il *Teorema Centrale del Limite*,

essendo $\{X_k\}_{k=1, \dots, L_c}$ indipendenti con $E[X_k] = 0$ e $\text{VAR}[X_k] = (N - 1)$ la loro somma genera una variabile aleatoria n con distribuzione Gaussiana e questa è il rumore che si aggiunge in ricezione.

$$\sum_{k=1}^{L_c} X_k = n, \quad \boxed{n \sim \mathcal{N}(0, L_c(N - 1))} \implies \left(s_1 = \mathcal{E}_s \pm \sum_{k=1}^{L_c} X_k = \mathcal{E}_s \pm n \right)$$

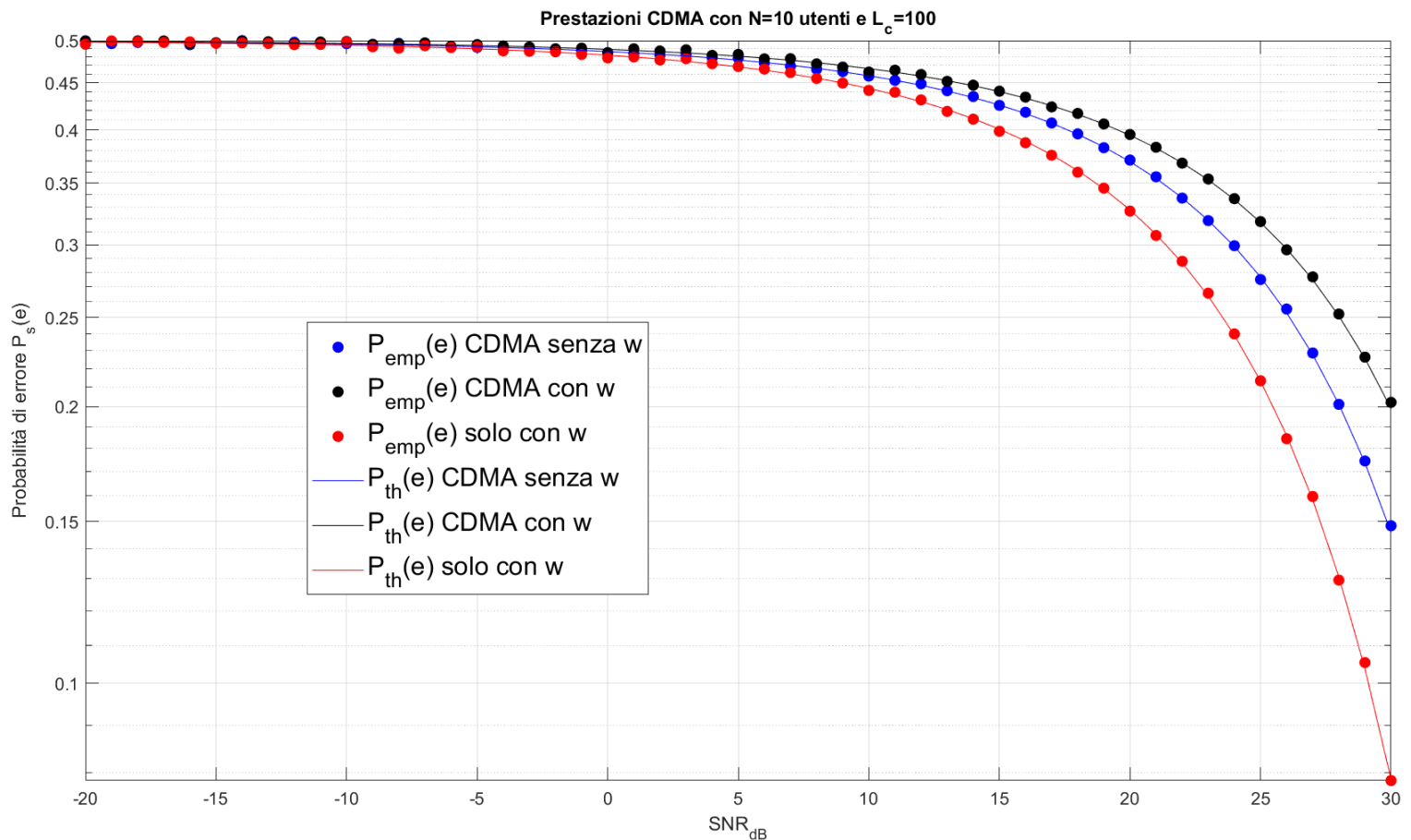
2 Grafici

2.1 Distribuzione somma di X_k



Svolgendo l'esperimento $\sum_{k=1}^{L_c} \left(\sum_{n=2}^N c_{1k} \cdot c_{nk} \right) = \sum_{k=1}^{L_c} X_k$ con $N = 10$ utenti e $L_c = 100$ lunghezza del chirping code per ogni utente, si dimostra empiricamente che la somma degli X_k indipendenti $\sum_{k=1}^{L_c} X_k = n$ ha una distribuzione gaussiana (di colore blu nel grafico) che segue quella teorica (di colore rosso nel grafico), con media $0.038 \rightarrow 0$ e varianza $899.883 \rightarrow 900 = L_c(N-1)$, come era stato dimostrato teoricamente nella pagina precedente.

2.2 Prestazioni CDMA al variare di SNR_{dB}



Simulando la trasmissione CDMA con $N = 10$ e $L_c = 100$ sono state ricavate le tre $P_{emp}(e)$ e le rispettive $P_{th}(e)$ che seguono lo stesso andamento.

La $P_{emp}(e)$ blu rappresenta le prestazioni della trasmissione CDMA senza rumore w aggiuntivo, considerando quindi $s_1 = \mathcal{E}_s \pm n$, $n \sim \mathcal{N}(0, L_c(N - 1))$.

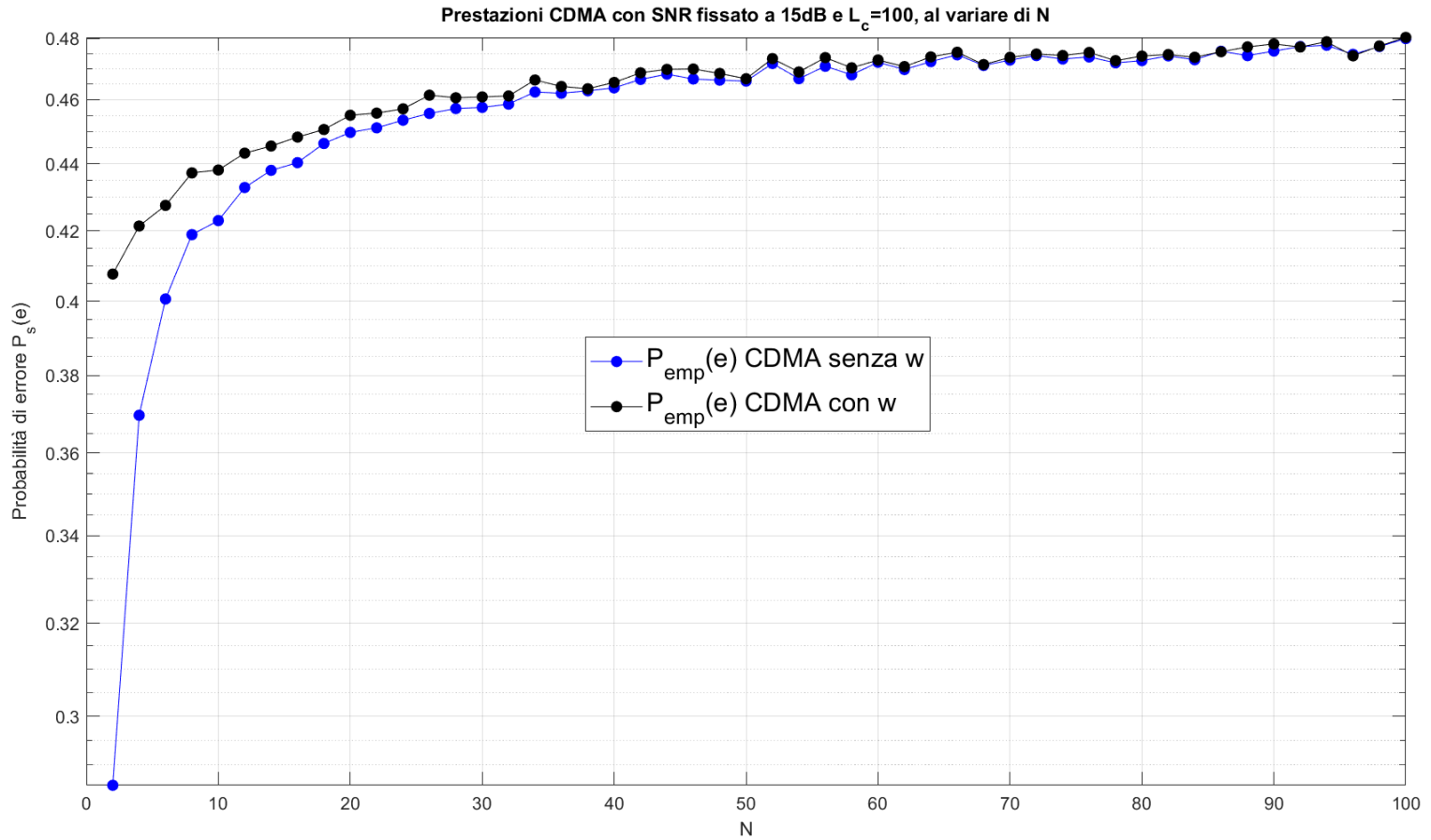
La $P_{emp}(e)$ nera rappresenta le prestazioni della trasmissione CDMA con rumore w aggiuntivo, considerando quindi $s_1 = \mathcal{E}_s \pm n + w$, $w \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$.

La $P_{emp}(e)$ rossa rappresenta le prestazioni della trasmissione con solo rumore w , considerando quindi $s_1 = \mathcal{E}_s + w$.

Si nota dal grafico che la $P(e)$ nera decade più lentamente rispetto alle altre al crescere di SNR_{dB} e denota quindi le prestazioni peggiori.

In questa simulazione è stato scelto N_0 di w tale da non influire eccessivamente nella trasmissione per ottenere tre andamenti distinti. Infatti se si aumentasse N_0 , la $P(e)$ nera si sovrapporrebbe con la $P(e)$ rossa perchè il rumore n risulterebbe trascurabile rispetto a w , mentre la $P(e)$ blu denoterebbe le prestazioni migliori.

2.3 Prestazioni CDMA al variare di N



In questa seconda simulazione è stato scelto di fissare l' SNR_{dB} a 15 dB ed L_c a 100 e valutare le prestazioni al variare di $N \in [2, 100]$.

Entrambe le $P_{emp}(e)$ crescono all'aumentare di N perchè aumenta sempre più la varianza del rumore n che dipende da L_c ed N , infatti $n \sim \mathcal{N}(0, L_c(N-1))$.

Per N piccoli, quindi per $N \in [2, 30]$, si nota una maggiore differenza tra la $P_{emp}(e)$ senza w aggiuntivo e quella con w , infatti quest'ultima denota prestazioni peggiori.

Invece al crescere di N , quindi per $N > 30$, la varianza del rumore n aumenta sempre di più per entrambe le $P_{emp}(e)$ fino a far diventare trascurabile w rispetto ad n per la $P_{emp}(e)$ nera, facendo sovrapporre i due grafici.