30 VLNOVÉ VLASTNOSTI ČÁSTIC

Doktorská disertace 1924

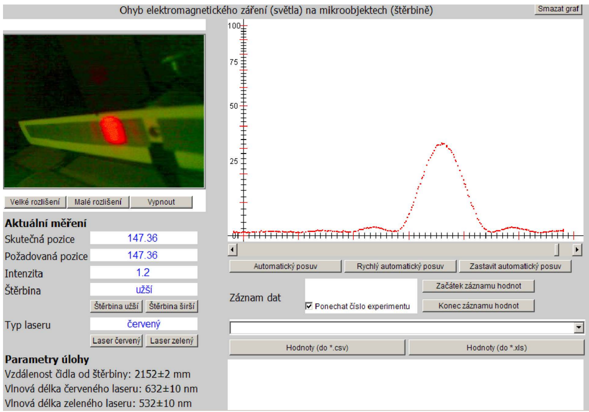
Každá ?ástice = vlna

Frekvence $\nu = \dfrac{W}{h}$

Vlnová délka $\lambda = \dfrac{h}{p}$

Louis de Broglie
Nobelova cena 1929

Elektrony na štěrbině ?



Materiální vlny

Planckův postulát a další objevy v oblasti částicových vlastností elektromagnetických vln porušily určitou symetrii přírody - částice měly jen (své) částicové vlastnosti, zatímco elektromagnetické vlny měly kromě (svých) vlnových vlastností ještě i částicové. Jinými slovy: látka má jen látkové vlastnosti, zatímco pole má kromě "polních" (tj. vlnových) vlastností ještě i látkové vlastnosti. Této anomálie si poprvé povšimnul L.de Broglie a pokusil se zavést do fyziky opět symetrii tím, že přiřadil - nejprve jen spekulativně - i částicím vlnové vlastnosti. Další vývoj ukázal, že se nejednalo jen o planou spekulaci, ale o jeden z nejpozoruhodnějších přínosů do fyziky vůbec.

30.1 Materiální vlny

30.1

Postuláty o vlnové podstatě částic (Louis de Broglie) : každé částici s celkovou energií $W = mc^2$ a hybností $p = mv$ můžeme přiřadit materiální vlnu s kmitočtem

$$\nu = \frac{W}{h} \qquad (30.1)$$

a vlnovou délkou

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \qquad (30.2)$$

• **Příklad** Elektron je urychlen napětím U = 100 V.Jaká je jeho vlnová délka materiálních vln ?
Kinetická energie a hybnost elektronu je

$$eU = \frac{1}{2}mv^2, \Rightarrow p = mv = \sqrt{2meU},$$

takže vlnová délka je

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{6{,}6\,10^{-34}Js}{\sqrt{2\;\;9{,}1\,10^{-31}kg\;\;1{,}6\,10^{-19}C\;\;100V}} = 0{,}12nm.$$

Vidíme, že typická vlnová délka mikročástic je v oblasti zlomků nm. Abychom pozorovali vlnové jevy, musíme použít objekty řádově s těmito rozměry - kde je vzít v roce 1900?

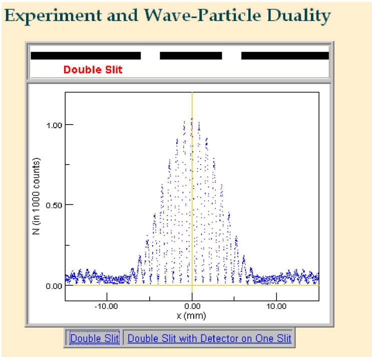
Jak testovat vlnové vlastnosti částic? takto - vytvořit experimenty, které jsou známy z fyzikální optiky (interference a ohyb).

Poznámka:

V kapitole 27 Fyzikální optika byla podmínka maxima pro polohy na stínítku $x_m = \frac{N\lambda D}{a}$, ()

kde λ je vlnová délka, N je řád maxima, D je vzdálenost štěrbina - stínítko, a je vzdálenost štěrbin.

Elektrony dopadají na dvě štěrbiny

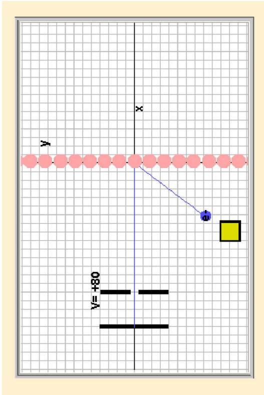


Experiment Davissona - Germera (Bell labs. 1927), Nobelova cena 1937

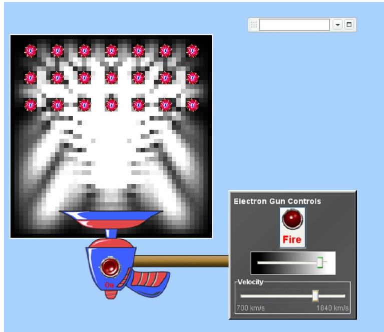
- ostřelování povrchu monokrystalu Ni elektrony a zjišťování jejich odrazu v závislosti na urychlujícím napětí

Davisson, C. J., "Are Electrons Waves?," Franklin Institute Journal 205, 597 (1928)

Verze I



Verze II

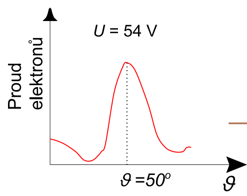


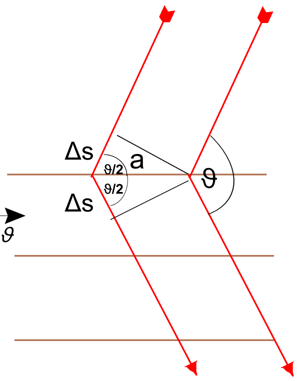
Pro maximum musí platit (z fyzik. optiky)

$$\Delta s = 2a \sin(90 - \frac{\vartheta}{2}) = N\lambda.$$

Z měření

$$(90 - \frac{\vartheta}{2}) = 65^{\circ} \ (pro\ U = 54\ V).$$





Dosazením (zde N = 2) a a_{Ni} = 352 nm

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{2}\, 0{,}352nm\ \sin(65^{\circ}) = 0{,}159nm.}$$

Vlnová délka z de Broglieovy teorie v dobré shodě vychází:

$$\boxed{\lambda = = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = 0{,}165nm.}$$

Prvek	ozn.	Mřížk. konst. *a* (nm)
Uhlík	C	0,246
Nikl	Ni	0,352
Měď	Cu	0,361
Zlato	Au	0,407
Stříbro	Ag	0,408

30.2

Rovinnou materiální vlnu, která popisuje chování volné částice s energií W a hybností p můžeme vyjádřit vlnovou funkcí, která je obecně funkcí souřadnice a času $\Psi(x,t)$

$$\psi = \psi_o \, e^{-\frac{j}{\hbar}(Wt - px)}, \qquad (30.3)$$

kde jako v dřívějších kapitolách je $\hbar = h/2\pi$ a $j = \sqrt{-1}$.

30.3

Vlnová funkce ψ se interpretuje (v tzv. Bornově pojetí) tak, že její druhá mocnina absolutní hodnoty, což je vzhledem k její komplexní povaze $\psi\psi^*$, určuje hustotu pravděpodobnosti výskytu částice. Výraz

$$\boxed{dP = \psi(\boldsymbol{r})\psi^*(\boldsymbol{r})\,d\tau, \qquad (30.4)}$$

kde dτ je element objemu, má proto význam pravděpodobnosti výskytu částice v objemu $d\tau$ nacházejícího se v místě $\boldsymbol{r}$.. V tomto případě $\Psi(\boldsymbol{r})$ je tzv. vlnová funkce stacionární, nezávislá na čase, což pro mnoho výpočtů dostačuje.

Pravděpodobnost, že částice je vůbec někde v prostoru je rovna 1, proto musí platit i rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi\psi^* d\tau = 1 . \qquad (30.10)$$

Jestliže vlnová funkce ψ splňuje rovnici (30.10) říkáme, že je to vlnová funkce normovaná.

30.4

Heisenbergovy relace neurčitosti jsou

re

sp

.

$$\boxed{\Delta p \Delta x \geq \hbar, \qquad (30.5)}$$

$$\boxed{\Delta W \Delta t \geq \hbar. \qquad (30.6)}$$

kde Δp, Δx, ΔW a Δt jsou neurčitosti v určení hybnosti, souřadnice, energie a času.

Přiblížení relací neurčitosti

Pokusme se najít vlnovou funkci libovolné částice pomocí tzv.vlnového klubka (balíku).vytvořeného z rovinných monochromatických vln typu, obr. 30.1.

Jestliže předpokládáme, že amplitudy vln tvořících klubko jsou stejné, tj. A(k)=A, můžeme integrál (24.27) jednoduše vypočítat. Pro čas t=0 dostaneme funkci

$$\psi = \int_{k_o-\Delta k}^{k_o+\Delta k} A\ sin\ (kx)dk = -A\left[\frac{cos\ (kx)}{x}\right]_{k_o.\Delta k}^{k_o+\Delta k} =$$

$$= -A\frac{1}{x}\{cos\ [(k_o+\Delta k)x] - cos\ [(k_o-\Delta k)x]\} =$$

$$= 2A\Delta k\ \frac{sin\ (\Delta k\ x)}{\Delta kx}\ sin\ (k_o x).$$

Průběh této funkce je znázorněn na obr. 30.1. Skládá se z křivky, jejíž obálka má výrazné hlavní maximum a další vedlejší maxima, která ovšem klesají k nule velmi rychle. Zdá se, že je rozumný předpoklad, že vlastní částice se rozprostírá mezi prvými nulovými body hlavního maxima. Tyto body jsou určeny rovnicemi

$$\Delta kx_2 = \pi, \qquad \Delta kx_1 = -\pi,$$

takže částice se zřejmě nachází v intervalu

$$x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\Delta k},$$

tj. neurčitost její souřadnice pro výše uvedený předpoklad je

$$\Delta x \geq \frac{2\pi}{\Delta k}. \tag{30.8}$$

Podle vztahu (30.2) můžeme veličinu Δk charakterizovat jako "rozptyl" hybností p tvořících vlnové klubko

$$\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta\lambda} = \frac{2\pi\Delta p}{h}.$$

Dosazením tohoto vztahu do vztahu (30.8) dostaneme zajímavou relaci

$$\Delta x \Delta p \geq h. \tag{30.9}$$

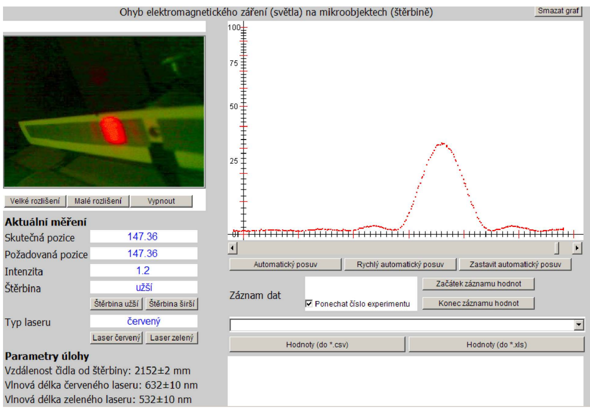
Tato relace nám říká, že z hlediska vlnových vlastností můžeme každou částici charakterizovat polohou a hybností nikoliv absolutně přesně, nýbrž s nepřesnostmi, jejichž součin nemůže být libovolně malý. Jinými slovy: vlnový popis chování částice neumožňuje předpovědět přesnou hodnotu souřadnice polohy x a hybnosti *p*, ale uvnitř intervalů, určených "neurčitostmi" x a p, splňujícími vztah (30.9). Nazývá se Heisenbergova relace neurčitosti a představuje vážné omezení pro používání pojmů klasické fyziky (polohy částice a její hybnosti) při zkoumání pohybu částic s přihlédnutím na jejich vlnové vlastnosti. Čím přesněji je určena polohy částice, tím méně přesně je známa její hybnost a naopak.

Příklady využití relace neurčitosti

Příklad 1 : Ohyb na štěrbině

Svazek elektronů dopadá na štěrbinu, podobně, jak tomu bylo při dopadu laserového svazku v praktiku. Již víme, že elektrony se chovají jako vlny. Jak se to projevuje?

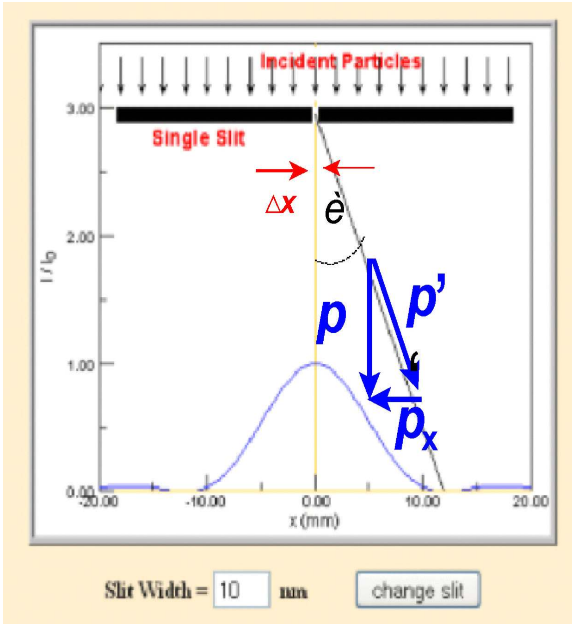
Elektrony na štěrbině ?



Na Obrázku je vidět, jak se chová proud elektronů s hybnosti p_y při dopadu na stínítko se štěrbinou velikosti Δx

Pokud se elektronový svazek chová jako vlna, musí platit pro polohu prvého minima:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{p_x}{p} = \frac{\Delta p_x}{p},$$



neboli

$$\frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{\Delta p_x}{p},$$

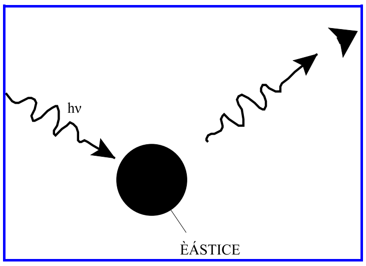
y x

mírnou úpravou pak získáme

$$\Delta x\, \Delta p_x = \lambda p = h.$$

Příklad 2 : Měření v mikrosvětě

Dalším příkladem relace neurčitosti v mikrosvětě je proces měření. Obecně měříme současně polohu (s neurčitostí Δx) pomocí lokalizace částice a hybnost (s neurčitostí Δp) pomocí na př. srážkou s jinou částicí. Při současných měřeních jak polohy, tak hybnosti vždy musí platit relace neurčitosti $\Delta x\, \Delta p_x > h$. Měření částicových vlastnosti částice je pro $\Delta x \to 0$ měření vlnových vlastností částice je pro $\Delta p \to 0$. Platí, že nelze současně pozorovat čistě částicové a vlnové vlastnosti částice.



Obr. 30.2 K neurčitosti zjištění polohy a hybnosti částice pomocí fotonu