

ČÁST VIII - M I K R O Č Á S T I C E A JEJICH CHOVÁNÍ

32 Základní částice

33 Dynamika mikročástic

34 Atom - elektronový obal

35 Atomové jádro

36 Radioaktivita

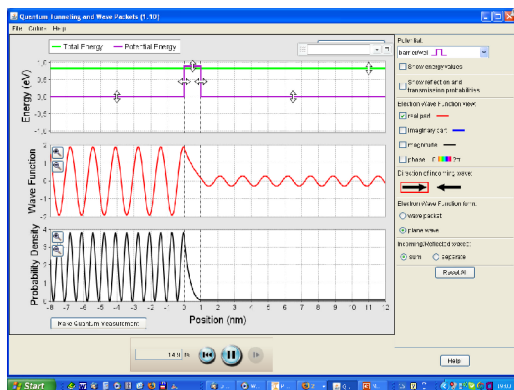
37 Molekuly

TABULKA: Základní částice

Druh	Název	Spin náboj	Klidová hmotnost (m_e)	Energetický ekvivalent (MeV)	Poločas rozpadu (s)
částice pole	foton	1/ 0	0	0	stabilní
	graviton	1	0	0	stabilní
Leptony	neutrino e	1/2	0	0	stabilní
	neutrino ν	1/2	0	0	stabilní
	elektron	1/2 / -1 e	1	0,51	stabilní
	mezon μ	1/2	207	106	$1,5 \cdot 10^{-6}$
Mezony	mezon (neutr.) π	0	264	135	$7 \cdot 10^{-17}$
	mezon (elektr. nabitý) K	0	273	140	$1,8 \cdot 10^{-8}$
	mezon η	0	1073	548	$1 \cdot 10^{-18}$

Baryony	proton	1/2 / +1e	1836	938	stabilní
	neutron	1/2 / 0	1839	940	6,5.10²
	hyperon	1/2	2182	1115	1,7.10 ⁻¹⁰
	hyperon (neutr.) Λ	1/2	2332	1194	1,0.10 ⁻¹²
	hyperon (elektr. nabitý) Σ	1/2	2341	1197	1,2.10 ⁻¹⁰
	hyperon (neutr.) Σ	1/2	2571	1310	1,0.10 ⁻¹⁰
	hyperon (elektr. nabitý) Σ	1/2	2583	1320	0,9.10 ⁻¹⁰
	hyperon Ω	3/2	3290	1676	1.10 ⁻¹⁰

Co je to dynamika mikročastic? Ukažme si typický experiment - tunelování



33 DYNAMIKA MIKROČÁSTIC

Mikročástice v potenciálové jámě

Tunelový jev

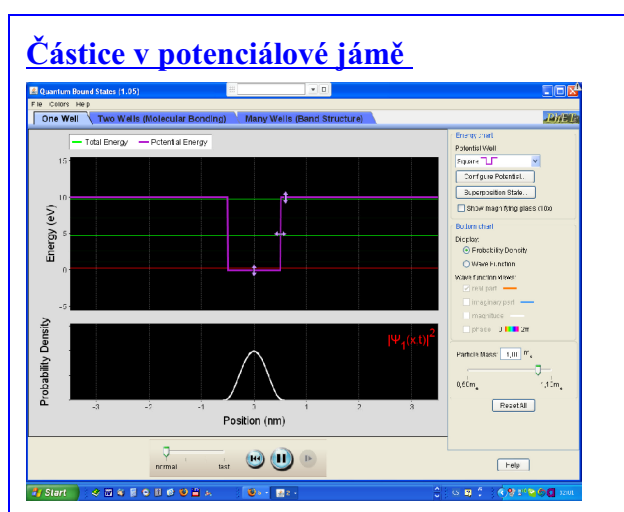
Harmonický oscilátor

Mikročástice se při svém pohybu vyznačují mnoha zvláštnostmi, které pomocí klasické fyziky nelze vysvětlit a jsou často v přímém rozporu se "zdravým" rozumem. Tyto zvláštnosti však vyplývají úplně přirozeně ze Schrödingerovy rovnice, a co je nejdůležitější, jsou v dokonalém souhlase s experimentem. Triviálním případem je pohyb úplně volné částice. Jelikož na ni nepůsobí vnější síla, je

$W_p = \text{konst.}$, což při vhodné volbě vztažné soustavy přejde na $W_p = 0$, a řešení rovnice (31.2) - např. pro částici pohybující se ve směru osy $+x$ můžeme vyjádřit ve tvaru

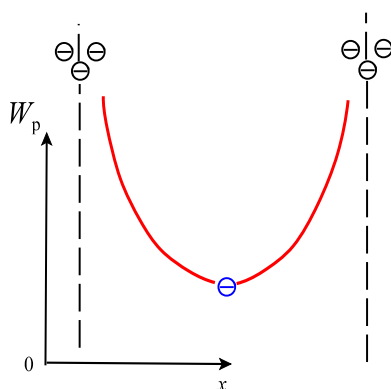
$$\psi = A e^{\left[\frac{j}{\hbar} (2mW)^{\frac{1}{2}} x \right]},$$

V případě volné částice nemáme žádné omezující podmínky, proto i energie W vystupující v této funkci může mít libovolnou hodnotu.



33.1 Mikročástice v potenciálové jámě

Velmi ilustrativním příkladem zvláštností při pohybu mikročástic je jejich pohyb v tzv. potenciálové jámě. Je to prostor, ve kterém má částice menší potenciální energii, než mimo něj. Příkladem potenciálové jámy může být elektron v atomu (obr. 33.1).



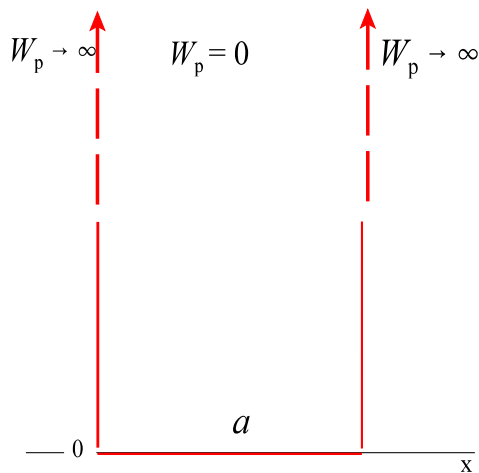
Obr. 33.1 Příklad reálné potenciálové jámy

33.1 ČÁSTICE V “JÁMĚ”

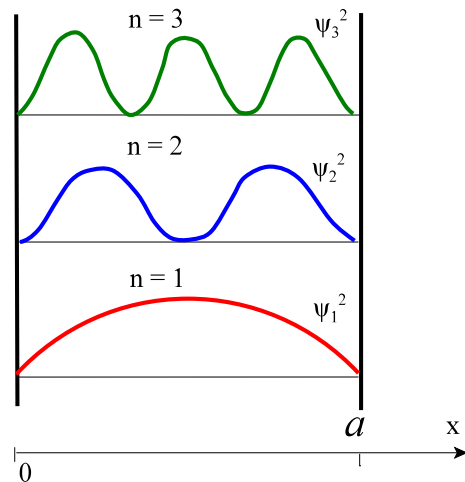
Celková energie částice v nekonečně hluboké potenciálové jámě je kvantovaná a je určena vztahem

$$W = \frac{h^2}{8ma^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (33.1)$$

kde n je kvantové číslo, a je šířka potenciálové jámy a m je hmotnost částice.



Obr. 33.2 Nekonečně hluboká pravoúhlá potenciálová jáma



Obr. 33.3 Rozložení hustoty pravděpodobnosti výskytu částice v potenciálové jámě pro nejnižší dovolené stavy $n = 1, 2, 3$

Odvození

Matematicky definujeme nekonečnou potenciálovou jámu podmínkami (obr. 33.2).

$$\begin{aligned} -\infty < x \leq 0, & \quad W_p \Rightarrow \infty, \\ 0 < x < a, & \quad W_p = 0, \\ a \leq x < \infty, & \quad W_p \Rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(33.3)

Jelikož jsme položili $W_p=0$, má Schrödingerova rovnice pro oblast potenciálové jámy tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = W\psi \quad (33.4)$$

a její řešení je určeno funkcí

$$\psi = A e^{\frac{j}{\hbar} px} + B e^{-\frac{j}{\hbar} px}, \quad (33.5)$$

$$p = (2mW)^{\frac{1}{2}}.$$

Potenciálové stěny jsou nekonečně vysoké, proto pravděpodobnosti výskytu mikročástice na hranicích potenciálové jámy jsou rovny nule, což můžeme vyjádřit podmínkami

$$\psi(0) = 0 \quad \psi(a) = 0. \quad (33.6)$$

Prvou z nich splníme volbou $B = -A$, takže řešení (33.5) můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \psi &= A \left(e^{\frac{j}{\hbar} px} - e^{-\frac{j}{\hbar} px} \right) = \\ &= A \left(\cos \frac{px}{\hbar} + j \sin \frac{px}{\hbar} - \cos \frac{px}{\hbar} + j \sin \frac{px}{\hbar} \right) = \\ &= 2jA \sin \frac{px}{\hbar}. \end{aligned} \quad (33.7)$$

Druhou podmínku (33.6) splníme tak, že požadujeme splnění rovnice $\sin pa/\hbar = 0$. Vyhovují jí řešení splňující podmínku

$$\frac{pa}{\hbar} = \frac{a}{\hbar} (2mW)^{\frac{1}{2}} = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (33.8)$$

Z této rovnice vyplývá, že energie mikročástice W může nabýt jen určité diskrétní hodnoty určené vztahem (33.1). Rozdíl mezi prvými dvěma energetickými hladinami je (obr. 33.3.)

$$\Delta W = \frac{3}{8} \frac{h^2}{ma^2}.$$

Pro elektron s hmotností $m = 10^{-30}$ kg v potenciálové jámě šířky rovnající se meziatomové vzdálenosti v krystalech ($a \approx 0,3$ nm) je tato energie přibližně $\Delta W \approx 13$ eV. Pro makroskopické částice (např. balon s hmotností $m = 0,1$ kg se vzdáleností mezi stěnami $a = 0,1$ m) je tato energie přibližně $\Delta W \approx 10^{-45}$ eV, takže hovořit o kvantování energie nemá v tomto případě smysl.

Na tomto jednoduchém příkladě si ukážeme, jak je možno normovat vlnovou funkci a najít pravděpodobnost výskytu částice. Pravděpodobnost, že se částice nachází někde v potenciálové jámě je rovna 1. Proto podmínka normovanosti

vlnové funkce (30.10) má v tomto případě tvar

$$\int_0^a \psi \psi^* dx = 1. \quad (33.9)$$

Dosazením funkce (33.7) do této rovnice dostaneme vztah

$$4A^2 \int_0^a \sin^2 \left(\frac{px}{\hbar} \right) dx = 4A^2 \int_0^a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2px}{\hbar} \right) dx = 2aA^2 = 1, \quad (33.10)$$

protože platí

$$\int_0^a \cos \left(\frac{2px}{\hbar} \right) dx = \frac{\hbar}{2p} \left[\sin \frac{2px}{\hbar} \right]_0^a = \frac{\hbar}{2p} (\sin 2n\pi - \sin 0) = 0.$$

Hustota pravděpodobnosti výskytu částice tedy bude

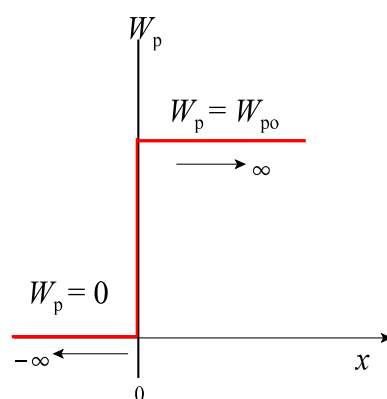
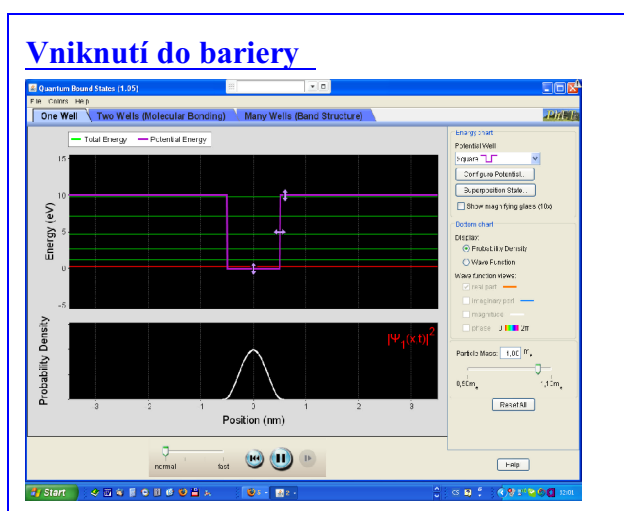
$$\psi \psi^* = \frac{2}{a} \sin^2 \left(\frac{px}{\hbar} \right) = \frac{2}{a} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} x \right), \quad (33.11)$$

kde jsme použili vyjádření dovolených hodnot hybností (33.8). Vidíme, že částice se nevyskytují se stejnou pravděpodobností uvnitř potenciálové jámy. Hustota pravděpodobnosti je pro daný kvantový stav vyjádřený číslem n funkcí souřadnice x . Při stěnách $x=0$ a $x=a$ je tato hustota pravděpodobnosti rovna nule. Pro první tři energetické hladiny je rozložení hustoty pravděpodobnosti výskytu částice znázorněno na obr. 33.3.

33.2 - VNIKNUTÍ MIKROČÁSTICE DO ENERGETICKÉ BARIÉRY

Mikročástice s celkovou energií W menší než je výška potenciálové bariéry W_{po} může proniknout do prostoru potenciálového pole. Hustota pravděpodobnosti výskytu částice v této oblasti ve vzdálenosti x od rozhraní je určena vztahem (Obr. 33.4)

$$p = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} [2m(W_{po} - W)]^{\frac{1}{2}} x \right\}. \quad (33.2)$$



Obr. 33.4 Rozhraní dvou potenciálových polí

Odvození

Jestliže přejdeme k reálnému případu potenciálového pole, ve kterém nejsou bariéry nekonečně velké zjistíme zajímavý - z hlediska klasické fyziky nepochopitelný - jev, že totiž částice s menší energií než je výška bariéry se mohou dostat do oblasti bariéry. Jestliže pak má bariéra jen konečnou tloušťku existuje konečná pravděpodobnost proniknutí částice touto bariérou (obr. 33.4). Za účelem důkazu tohoto jevu uvažujeme o případě jednoduchého rozhraní dvou potenciálových polí - jednoho ve kterém je potenciální energie částice rovna nule $W_p=0$, druhého s potenciální energií $W_p=W_{po}$ (obr. 33.4). V prvním poli platí rovnice (33.4) s řešením (33.5), které označíme jako ψ_1 , ve druhém poli má Schrödingerova rovnice tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} = (W - W_{po}) \psi_2. \quad (33.12)$$

Jejím řešením je funkce

$$\psi_2 = A_2 e^{\frac{j}{\hbar} p' x} + B_2 e^{-\frac{j}{\hbar} p' x}, \quad p' = [2m(W - W_{po})]^{\frac{1}{2}}. \quad (33.13)$$

Pro nás je zajímavý případ, ve kterém je $W < W_{po}$, tj. částice má menší energii než je výška potenciálové bariéry. Je proto možno psát $p' = j[2m(W_{po} - W)]^{1/2} = j p_2$, kde p_2 je reálná veličina. Funkce (33.13) přejde do tvaru

$$\psi_2 = A_2 e^{-\frac{p_2 x}{\hbar}} + B_2 e^{\frac{p_2 x}{\hbar}}. \quad (33.14)$$

Ze standartních podmínek (věta 31.3) vyplývá, že na rozhraní ($x=0$) musí být vlnová funkce ψ_1 a ψ_2 a jejich derivace spojité

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad (33.15)$$

$$\frac{d\psi_1}{dx} = \left| \frac{d\psi_2}{dx} \right| \quad (33.16)$$

a kromě toho podmínky konečnosti vlnové funkce vyplývá, že pro $x \rightarrow \infty$ musí být ψ_2 konečná. Tuto podmínku splníme volbou $B_2 = 0$. Podmínky (33.15) a (33.16) nám potom umožní vypočítat podíly B_1/A_1 resp. A_2/A_1 . Na tomto místě si znovu připomeňme, že prvá část vlnové funkce ψ_1 charakterizuje částice pohybující se opačným směrem, tj. částice odražené od této bariéry. Funkce ψ_2

$$\psi_2 = A_2 e^{-\frac{1}{\hbar}(p_2 x)} \quad (33.17)$$

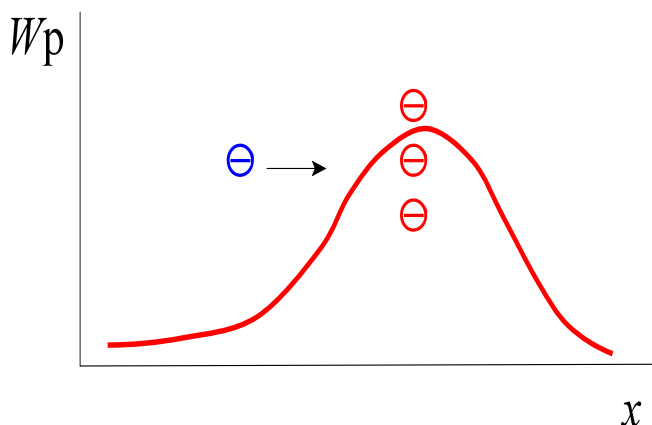
popisuje částice pohybující se dovnitř potenciálového pole (energie W_{po}). Nalezením podílů $(B_1/A_1)^2$ můžeme tak nalézt poměr pravděpodobností výskytu částic v jednotlivých situacích, tj. částic odražených od potenciálové bariéry, resp. část těch, které vnikly do bariéry. Jelikož odraz částic s menší energií od potenciálové bariéry s větší energií je přirozeným jevem,

soustředíme se jen na částice, které vnikají dovnitř potenciálového pole. Pravděpodobnost jejich vniku najdeme aniž bychom museli hledat hodnoty konstant A_1 , B_1 a A_2 . Počet těch částic, které se na rozhraní $x=0$ "ocitly" se směrem postupu do potenciálového pole bariéry určuje zřejmě výraz $\psi_2^*(x) \psi_2(x)$, proto jejich podíl, neboli pravděpodobnost vniku do bariéry je s ohledem na tvar funkce (33.17) vyjádřena vztahem

$$P(x) = \frac{\psi_2^*(x) \psi_2(x)}{\psi_2^*(0) \psi_2(0)} = e^{-\frac{2}{\hbar} [2m(W_{po} - W)]^{\frac{1}{2}} x}, \quad (33.18)$$

což je vztah (33.2). Vidíme, že v reálných podmínkách se tato pravděpodobnost nikdy nerovná nule, což značí, že i částice s malou energií mají určitou pravděpodobnost průniku do oblasti potenciálového pole bariéry charakterizované větší potenciální energií. Tato pravděpodobnost se však významně liší od nuly jen v mikroskopických podmínkách. Např. pro elektrony ($m \approx 10^{-30}$ kg) při rozdílu energií $W_{po} - W = 1$ eV (které jsou běžné např. na kontaktech) je pravděpodobnost výskytu vzdálenosti $x=0,1$ nm asi $p=0,6$, ve vzdálenosti $0,3$ nm je $P = 0,1$ a ve vzdálenosti $x = 1$ nm již jen $P = 0,003$.

Je možno lehce ukázat, že existuje i od nuly různá pravděpodobnost, že se částice odrazí od stěny i tehdy, jestliže má větší energii, než je potenciální energie bariéry. Z hlediska klasické fyziky je každá překážka pro částici buď neprostupná, nebo prostupná, v kvantové fyzice každá překážka částice částečně odráží a částečně propouští.

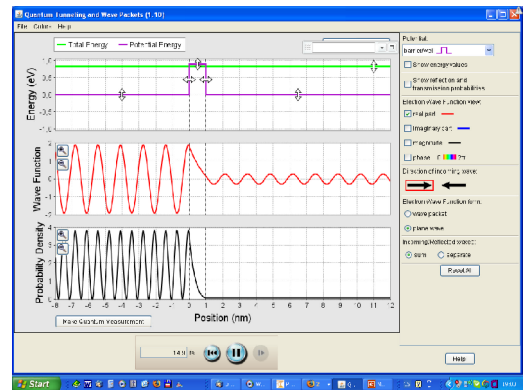


Obr. 33.5 Potenciálová bariéra elektronu tvořená vrstvou záporného náboje

33.2 Tunelový jev

Již v předcházejícím článku jsme se dozvěděli, že reálná potenciálová bariéra nemůže zabránit tomu, aby část mikročástic vnikla do oblasti bariéry. Můžeme proto očekávat, že jestliže oblast potenciálového pole bude dostatečně úzká, mohou se částice bariérou dostat na druhou stranu, i když mají menší energii než je potenciální energie bariéry. Tento jev se podobá překonání kopce vlakem průjezdem tunelu, proto se uvedený jev nazývá obecně tunelovým jevem. V současné elektronice se široce využívá, proto se jím budeme podrobněji zabývat (věty 33.3 a 33.4).

TUNELOVÁNÍ MIRKOČÁSTICE

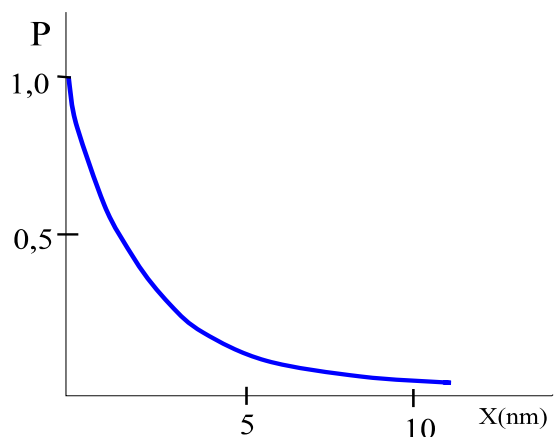


33.3 PRAVDĚPODOBNOST TUNELOVÁNÍ

Pravděpodobnost průchodu částic pravoúhlou potenciálovou bariérou výšky W_{po} a šířky d je určena vztahem

$$p = e^{-\left\{ \frac{2}{\hbar} [2m(W_{po} - W)]^{\frac{1}{2}} d \right\}}, \quad (33.19)$$

kde m je hmotnost částic a W jejich celková energie.



Obr. 33.6 Pravděpodobnost tunelového jevu elektronu jako funkce šířky bariéry pro $W_{po}-W=0.01$ eV

33.4

Pravděpodobnost průchodu částic bariérou obecného tvaru $W_p(x)$ tloušťky d je

Odvození

Potenciálové bariéry vznikají nahromaděním elektrického náboje jednoho znaménka. Potenciální energie elektronu při průchodu vrstvou záporného náboje (obr. 33.5) se mění tak, jak je vyznačeno na obrázku. Idealizací takové obecné bariéry vytváříme si představu tzv. obdélníkové potenciální bariéry matematicky definované podmínkami

$$\begin{aligned} -\infty < x < 0, \quad W_p &= 0 \quad (1) \\ 0 \leq x \leq d, \quad W_p &= W_{po} \quad (2) \\ d < x < \infty, \quad W_p &= 0 \quad (3) \end{aligned} \quad (33.21)$$

které nám slouží jako model obecnějších potenciálových bariér, na které můžeme ilustrovat zvláštnosti tunelového jevu.

V oblasti 1 a 3 má Schrödingerova rovnice tvar (33.4) a řešení

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 e^{\frac{j}{\hbar} p x} + B_1 e^{-\frac{j}{\hbar} p x}, \\ p &= (2mW)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (33.22)$$

$$\psi_3 = A_3 e^{\frac{j}{\hbar} p x} + B_3 e^{-\frac{j}{\hbar} p x}, \quad (33.23)$$

a v oblasti 2 tvar (33.12) s řešením

$$\begin{aligned} \psi_2 &= A_2 e^{\frac{j}{\hbar} p' x} + B_2 e^{-\frac{j}{\hbar} p' x}, \\ p' &= [2m(W - W_{po})]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (33.24)$$

Podobně jako v předcházejícím případě (podmínky /33.15/ a /33.16/) musí i zde platit podmínky

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0), & \psi_2(d) &= \psi_3(d) \\ \frac{d\psi_1}{dx}\bigg|_0 &= \frac{d\psi_2}{dx}\bigg|_0, & \frac{d\psi_2}{dx}\bigg|_d &= \frac{d\psi_3}{dx}\bigg|_d. \end{aligned} \quad (33.25)$$

S použitím funkcí (33.22) - (33.25) dostaneme za těchto podmínek rovnice

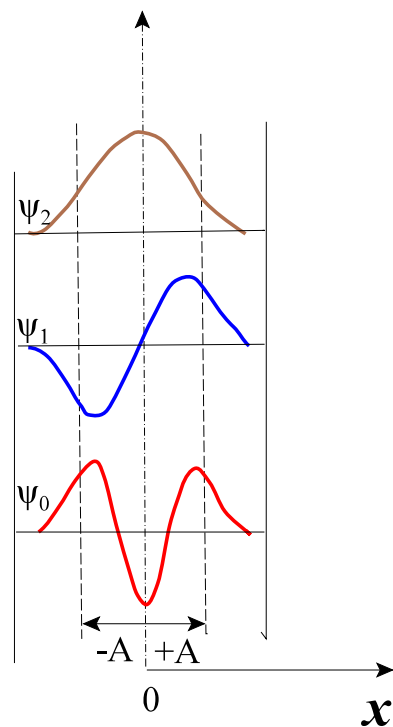
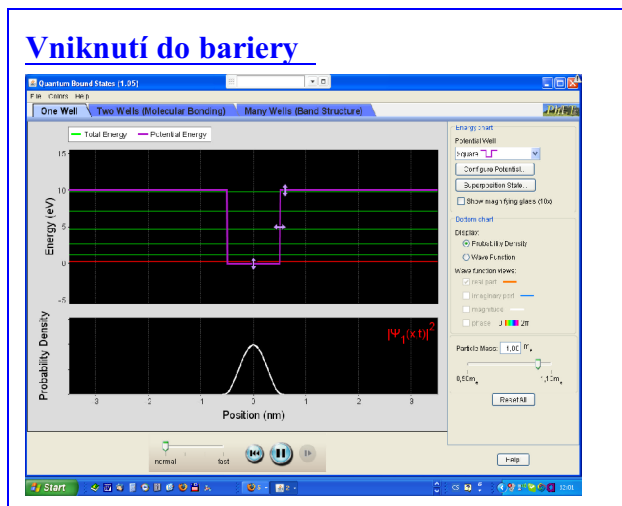
$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2, \\ p(A_1 - B_1) &= p'(A_2 - B_2), \\ A_2 e^{\frac{j p' d}{\hbar}} + B_2 e^{-\frac{j p' d}{\hbar}} &= A_3 e^{\frac{j p d}{\hbar}} + B_3 e^{-\frac{j p d}{\hbar}}, \\ p' \left[A_2 e^{\frac{j p' d}{\hbar}} - B_2 e^{-\frac{j p' d}{\hbar}} \right] &= p \left[A_3 e^{\frac{j p d}{\hbar}} - B_3 e^{-\frac{j p d}{\hbar}} \right]. \end{aligned} \quad (33.26)$$

Jsou to čtyři rovnice pro šest konstant. Konstanta B_3 však charakterizuje částice, které se vrací k bariéře z pravé strany. Tok částic má směr osy x , proto není důvodu předpokládat, že by se v oblasti 3 nacházely částice s opačně orientovanou rychlostí. Konstanta B_3 se proto rovná nule. Konstanta A_1 charakterizující proud částic k bariéře je úměrná intenzitě toku částic. Ostatní čtyři konstanty můžeme vypočítat z rovnic (33.26). Řešení je však

$$P = \frac{B_2 B_2^*}{A_1 A_1^*} = \frac{4}{1 + \left(\frac{W_{po} - W}{2W} \right)^2} e^{-\left\{ \frac{2}{\hbar} [2m(W_{po} - W)]^{\frac{1}{2}} d \right\}}. \quad (33.27)$$

Na obr. 33.6 je vynesena závislost pravděpodobnosti průniku elektronů potenciálovou bariérou různé šířky tunelovým jevem. Vidíme, že bariéry o tloušťce rovnající se několika desetínám nm, což je přibližně meziatomová vzdálenost v krystalech, jsou pro elektrony prakticky průhledné, zatímco bariéry o tloušťce větší jako několik desítek nm jsou již téměř úplně nepropustné. Tento výsledek nejen že vysvětluje mnoho z hlediska klasické fyziky nepochopitelných jevů (např. jevy na kontaktech, usměrňovací jev, činnost tzv. Tunelové diody), ale se i prakticky využívají.

33.3 Harmonický oscilátor



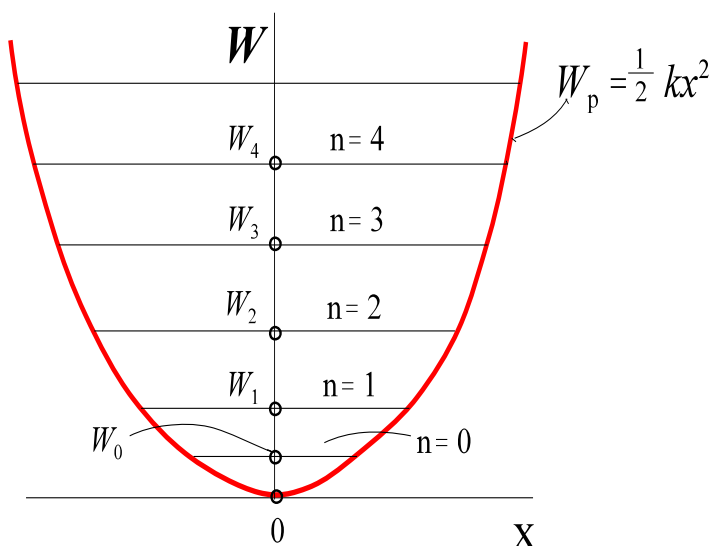
Z mechaniky a nakonec i z praktika víme, že klasický, makroskopický oscilátor může mít libovolnou energii. Mikroskopický oscilátor (na př. atom, kmitající kolem své rovnovážné polohy), má energie kvantovány. Stejně tak pravděpodobnost výskytu kmitající mikročástice je odlišná od pravděpodobnosti oscilátorů v makrosvětě.

33.5

Energie harmonického oscilátoru je kvantována podle vztahu

kde n je kvantovací číslo

$$W = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \dots \quad (33.28)$$



obr. 33.7 Energetické spektrum kvantového harmonického oscilátoru

Odvození

Potenciální energie harmonického oscilátoru pohybujícího se v ose x je podle vztahu (23.11) vyjádřena funkcí

$$W_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = 2\pi^2 m\nu^2 x^2. \quad (33.29)$$

Schrödingerova rovnice popisující pohyb harmonického oscilátoru má proto tvar

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - 2\pi^2 m\nu^2 x^2) = 0. \quad (33.30)$$

Není jednoduché najít přímo řešení takové rovnice, které vyhovuje podmínkám, kladeným na vlnovou funkci (věta 31.3). Zavedme označení

$$u = \left(\frac{2\pi m\nu}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x. \quad (33.31)$$

Pro první, resp. druhou derivaci vlnové funkce podle x -ové souřadnice dostaneme potom vztahy

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{du} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{du^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = 2\pi \frac{mv}{\hbar} \frac{d^2\psi}{du^2}. \quad (33.32)$$

Jestliže toto vyjádření dosadíme do rovnice (33.30), dostaneme

$$\frac{2\pi mv}{\hbar} \frac{d^2\psi}{du^2} + \frac{2\pi mv}{\hbar} \left(\frac{2W}{h\nu} - \frac{2\pi mv}{\hbar} x^2 \right) \psi = 0. \quad (33.33)$$

Poslední člen v závorce je proměnná u^2 a označíme-li člen před ním symbolem A

$$A = \frac{2W}{h\nu} \quad (33.34)$$

můžeme rovnici (33.33) napsat v zjednodušeném tvaru

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + (A - u^2)\psi = 0. \quad (33.35)$$

Hledejme řešení této rovnice. Zkusme nejprve řešení ve tvaru

$$\psi_o = C_o e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (33.36)$$

Prvá derivace této funkce je $d\psi_o/du = -u\psi_o$ a druhá derivace zase funkce

$$\frac{d^2\psi_o}{du^2} - \psi_o + u^2\psi_o = (u^2 - 1)\psi_o \quad (33.37)$$

$$W_o = \frac{1}{2} h\nu. \quad (33.38)$$

Vidíme, že tato rovnice se ztotožní s rovnicí (33.35), jestliže položíme $A=1$, tj. podle vztahu (33.34)

Funkce (33.36) je tedy řešením diferenciální rovnice harmonického oscilátoru (33.35), vyhovuje-li jeho energie podmínce (33.38). Podobným postupem dokážeme, že i funkce

$$\psi_1 = 2 C_1 u e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (33.39)$$

je řešením rovnice (33.35), protože platí postupně

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{du} &= 2C_1 \left(e^{-\frac{u^2}{2}} - u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} \right) \\ &\quad \text{a dále} \\ \frac{d^2\psi_1}{du^2} &= 2C_1 \left(-u e^{-\frac{u^2}{2}} - 2u e^{-\frac{u^2}{2}} + u^3 e^{-\frac{u^2}{2}} \right) = \psi_1(u^2 - 3). \end{aligned}$$

jelikož v tomto případě je $A=3$, energie harmonického oscilátoru musí podle vztahu (33.34) splňovat podmínku

$$W_1 = 3 \frac{h\nu}{2} = \frac{1}{2} h\nu + h\nu = W_0 + h\nu. \quad (33.40)$$

takto bychom postupně dokázali, že všechny funkce typu

$$\psi_n = C_n \left[(-1)^n \cdot e^{u^2} \cdot \frac{d^n(e^{-u^2})}{du^n} \right] e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (33.41)$$

vyhovují diferenciální rovnici (33.35), přičemž energie harmonického oscilátoru musí splňovat podmínku

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega.$$

Tím jsme dokázali, že energie harmonického oscilátoru je skutečně kvantovaná podle vztahu (33.28). Jeho energetické spektrum je znázorněno na obr. 33.7.

V případě makroskopických harmonických oscilátorů je kvantovost určena vztahem (33.28) zanedbatelná, protože i při relativně vysokých kmitočtech $\nu \approx 10^3 \text{ Hz}$ jsou rozdíly mezi jednotlivými hladinami energie řádu 10^{-32} J , což při energiích kmitajících makroskopických těles neměřitelné hodnoty. Jak jsme již poukázali na několika místech můžeme i v případě harmonického oscilátoru konstatovat, že kvantovost nemá v makrofyzice žádný význam a že tedy makroskopický harmonický oscilátor může nabývat prakticky všechny možné energie vyplývající z klasického vztahu (23.3).

Jiná je situace v mikrosvětě. Tam se většinou realizují stavy s nízkými kvantovými čísly ($n=1, 2, 3, \dots$), takže rozdíl mezi jednotlivými dovolenými energiemi je stejného řádu jako samotná energie kmitajících částic.

Určitým nečekaným překvapením vyplývajícím z kvantověmechanického řešení problému harmonického oscilátoru je existence stavů charakterizovaných energií $h\nu/2$. Jelikož k vnitřní energii přispívají jen kvanta $h\nu$, musíme předpokládat,

že kmity charakterizované energiemi $h\nu/2$ nevymizí ani při poklesu teploty k absolutní nule. Nazýváme je proto nulovými kmity. Jejich úloha a význam v mikrosvětě nejsou doposud uspokojivě objasněny. Zdá se, že jejich existence se zřetelně projevuje při tuhnutí helia.

Na závěr ještě připomeňme, že funkce v hranaté závorce (33.41) se v matematice uvádí pod jménem Hermitovy polynomy. Grafický obraz prvních tří funkcí (33.41) poskytuje obr. 33.8. Na obr. je vždy vyznačena oblast $(+A)$ v níž by se měla výhradně vyskytovat částice kmitající "klasicky" se stejnou celkovou energií W_n .

