

# Εξαμηνιαία Εργασία

Ονοματεπώνυμο : Σιφναίος Σάββας

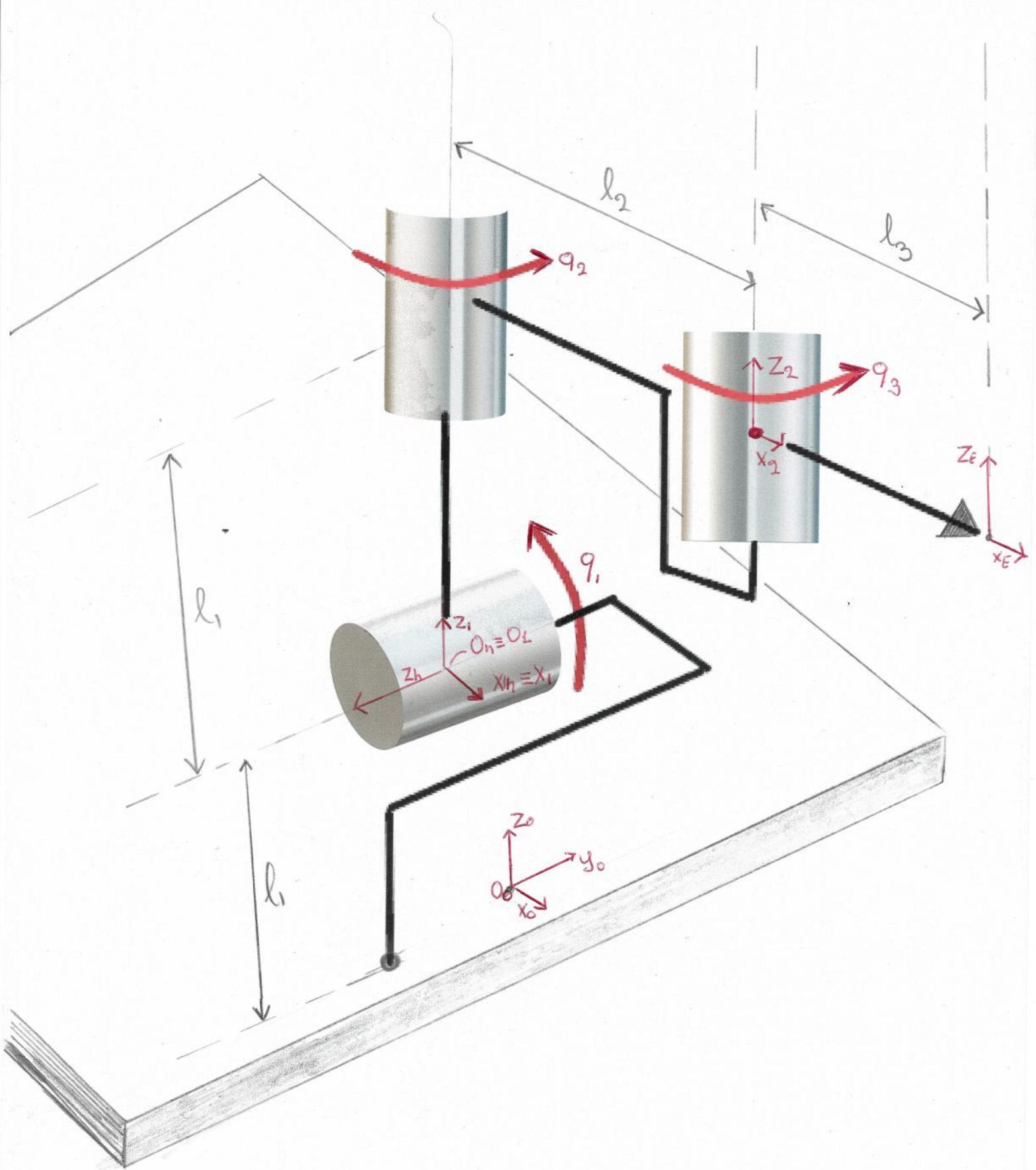
ΑΜ : 03116080

Εξάμηνο : 7<sup>o</sup>

## Εισαγωγή

Στη συγκεκριμένη εργασία μας δίνεται ένας ρομποτικός χείριστης με τρεις στροφικές αρθρώσεις. Σκοπός μας είναι , αρχικά , να πραγματοποιήσουμε μια πλήρη θεωρητική ανάλυση του κινηματικού μοντέλου του συγκεκριμένου χειριστή και στην συνέχεια , βασιζόμενοι στα αποτελέσματα της θεωρητικής επεξεργασίας του μοντέλου, να πραγματοποιήσουμε προσομοίωση μιας απλής περιοδικής κίνησης του ρομποτικού χειριστή μεταξύ 2 σημείων A,B στο επίπεδο  $z = h$ .

Παρακάτω παρατίθεται σχήμα στο οποίο φαίνεται ο υπό εξεργασία χείριστης , με τα πλαίσια αναφοράς τοποθετημένα σύμφωνα με την μεθοδολογία DH.



# Mέρος Α: Ορισμένη Ανάλυση

## 1) Ανάλυση Denavit-Hartenberg.

Τοποθετούμε τα πήδαια αναγόπας σύμφωνα με τους κανόνες της βεδοδοτοφορίας Denavit-Hartenberg.

Ο πινακας παραχέτων D-H παρατίθεται παρακάτω:

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
$h$	0	$l_0$	0	$\pi/2$
1	$q_1$	0	0	$-\pi/2$
2	$q_2$	$l_1$	$l_2$	0
E	$q_3$	0	$l_3$	0

Αν την κάθε γραμμή των πινακών παραμέτρων DH προσδιορίζουμε τις συγκεκριμένες ψευδοχρήσεις  $A_h^0, A_1^h, A_2^1, A_E^2$ , αντιστοίχα. Ενοβεννός, έχουμε:

$$A_h^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1^h = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_E^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στο σημείο αυτό θα γίνει ουτόπιν ΤΙΕΡΙΓΑΡΗΝ ή  
Τρόπου ότι το ονόμα τονοδέτην και τα πλαισια αναφέρεις  
των ουδέτερων των βραχιονών.

Εξικάψε ανά το αρχικό πλαισιο πλακόσημων αντεταχθέντων  
Οι το ονόμα δίδεται ανά των Εκφύγων. Σε κάθε αρίθμων  
των πολυτελούς βραχιονών ότι τονοδέτηται το πλαισιο  
αναφέρεις Οι-1 (του προηγουμένου ουδέτερου) ότι Τρόπο  
Τέρτιο, ωστε ο αγόρας  $Z_{i-1}$  να ταυτίζεται ότι τον  
αγόρα απρόσις/ψευταπόντιος της αρίθμωνς  $q_i$ .

Στην ΤΙΕΡΙΓΑΡΗΝ, προφανώς, αν αγόρες  $Z_{i-1}$  ταυτίζεται  
ώτι τον αγόρα περιστροφής της  $q_i$ . Εντούτοις,  
στην φειδόδο DH, πρέπει ο αγόρας  $X_i$  να βρίσκεται πάνω  
στην κοινή κάθετη των αγόρων  $Z_{i-1}$  και  $Z_i$ .

Για το συγκεκριμένο αρχικό πλαισιο, παρατηρήσεις πως ο αγόρας  
Ζε δεν ταυτίζεται ότι τον αγόρα απρόσις της  $q_1$ . Συνεπώς,  
οι τονοδέτην από την αναποτελεσματικό πλαισιο  $h$ , ωστε ο  
 $Z_h$  να ταυτίζεται ότι τον αγόρα της  $q_1$ , οτο σημείο το οποίο  
των αγόρων  $Z_h, Z_0, \dots, Z_{n-1}$  πάνω στην κάθετη αρίθμων.

Στην συνέχεια, ορίζεται την  $Z_1$  να ταυτίζεται ότι τον αγόρα  
της  $q_2$ . Οι αγόρες  $Z_1$  και  $Z_h$  ταυτίζονται και αντοί, συνεπώς  
το πλαισιο  $Z_1$  θα τονοδέται οτο σημείο το οποίο το οποίο  
σηλάδην πάνω στην πρώτη αρίθμων. Στην συνέχεια, οντως  
και προηγουμένως, ορίζεται την  $Z_2$  να ταυτίζεται ότι τον  
αγόρα της  $q_3$ . Τώρα, οι αγόρες  $Z_2, Z_3$  είναι πλακόσημων  
και εναρέων, μηδενικής να τονοδέτηνται το πλαισιο  $Z_2$   
πάνω στην αρίθμων 3. Τέλος, δια να μεταβούμε ανά το  
πλαισιο  $Z_2$  στο πλαισιο του εργατειού δράστης, το ονόμα  
σινεται = πάνω στο εργατειού

πλακόσημων οι αγόρες  $Z_2$  και  $Z_3$  είναι  
πλακόσημων και αρά δεν χρειάζεται να τονοδέτηνται σετερά  
αναποτελεσματικό πλαισιο.

## 2) Ευθεία κινήσεων Ανάδυση

Γνωριζόμενες οι για τον τελικόν  
μετασχηματισμού τοξύες:

ορισμένη θέση

$$T = A_E^o = A_h^o \cdot A_1^h \cdot A_2' \cdot A_E^2$$

$$A_h^o \cdot A_1^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apa,

$$A_1^o = A_h^o \cdot A_1^h = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^o = A_1^o \cdot A_2' = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apa,

$$A_2^o = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_2 C_1 & -S_1 & -l_1 S_1 + l_2 C_1 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & C_1 & l_0 + l_1 C_1 + l_2 S_1 C_2 \\ 0 & 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$A_E^o = A_2^o \cdot A_E^2 = \begin{vmatrix} c_1c_2 & -s_2c_1 & -s_1 & -l_1s_1 + l_2c_1c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & c_1 & l_0 + l_1c_1 + l_2s_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & s_3 & 0 & l_3c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_E^o = \begin{vmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2s_2 & -s_2c_1c_2 - s_2s_1c_3 & -s_1 & l_3c_1c_2c_3 - l_3s_2s_3c_1 - l_1s_1 + l_2c_1c_2 \\ c_3s_2 + s_3c_2 & -s_3s_2 + c_2c_3 & 0 & l_3s_2c_3 + l_3s_3c_2 + l_2s_2 \\ c_3s_1c_2 - s_3s_1s_2 & -s_1s_2c_2 - s_1s_3c_3 & c_1 & l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_1l_2c_1 + l_2s_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tετικά, κανονικό τεύχος οξειδεύνει  $\cos a \cos b - \sin a \sin b =$   
 $= \cos(a+b)$  και  $\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a+b)$  προκύπτει  
 ότι :

$$T = A_E^o =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 & l_3c_1c_{23} - l_1s_1 + l_2c_1c_2 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_3s_{23} + l_2s_2 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 & l_3s_1c_{23} + l_0 + l_1c_1 + l_2s_1c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

### 3) Εύθυ Διαφορικό Κίνησεων Μοντέλο

Ο πολυπολικούς δρασιώνας του έξταζης είναι τριών βαθμών ελευθερίας (3-DOF). Συνεπώς, η λακυβιάνη μητρά θα είναι διαστάσεις  $6 \times 3$ .

Η λακυβιάνη μητρά θα είναι την πολλή:

$$J = \begin{bmatrix} J_L & J_{L_2} & J_{L_3} \\ J_A & J_{A_2} & J_{A_3} \end{bmatrix}, \text{ οπου } J_L \text{ και } J_A \text{ } \cancel{\text{πίστα}} \text{ η συνεισφορά του } q_i \text{ σεντρ φραγκική και } \text{ γενιαλή } \text{ ταχύτητα, } \text{ αντιτοιχία, } \text{ του } \text{ τελικού } \text{ εργαλείου } \text{ δράσης}$$

Την πλεινών δεις, που όλες οι αριθμώσεις είναι στρογγικές ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} J_{L_i} \\ J_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i-1} \times r_{i-1, E} \\ b_{i-1} \end{bmatrix}, \text{ οπου } b_{i-1} \text{ ο αριθμός των } \text{ αριθμώσεων } i \text{ } \cancel{\text{και}} \text{ } r_{i-1, E} \text{ } \cancel{\text{το } \text{ διάνωση}} \text{ } \cancel{\text{δει}} \text{ } \cancel{\text{δει}} \rightarrow (O_{i-1}, \overset{\rightarrow}{OE})$$

Ενολίερως, πλα τον υπολογισμό της λακυβιάνης μητρώς χρειάζεται να προσθέσει ο "υπολογισμός" των  $b$ ,  $r$

$$b_h = R_h^o \cdot \underline{b} = [0 \ -1 \ 0]^T, \quad b_1 = R_1^o \cdot \underline{b} = [-s, \ 0 \ c]^T$$

$$b_2 = R_2^o \cdot \underline{b} = [-s, \ 0 \ \tilde{c}]^T, \text{ οπου } \underline{b} = [0 \ 0 \ 1]^T, \text{ } \cancel{\text{και}} \text{ } \cancel{\text{στην }} \cancel{\text{μέθοδο }} \text{ DH } \text{ ο αριθμός } \text{ των } \text{ αριθμώσεων } i \text{ } \cancel{\text{ταυτίζεται }} \text{ } \cancel{\text{ψε }} \text{ των } Z_{i-1}.$$

Για τα διανούματα της εξουσίας:

$$r_{0,E} = \text{Pend-effector} = P_E^o = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} + l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 \end{bmatrix}$$

(\*)

$$r_{h,E} = r_{0,E} - r_{0,h} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} + l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{h,E} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix}$$

$$r_{1,E} = r_{0,E} - r_{0,1} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix}$$

$$r_{2,E} = r_{0,E} - r_{0,2} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 \\ l_2 s_2 \\ l_0 + l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} \\ -l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix}$$

Apa

$$J_L = b_h \times r_{h,E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -1 & 0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = -\hat{x} C + \hat{z} A, \text{ οπου } A = -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23}, B = l_3 s_{23} + l_2 s_2, C = l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23}$$

$$J_A = b_h = [0 \ -1 \ 0]^T$$

$$\text{Apa } J_L = \begin{bmatrix} -(l_1 c_1 + l_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23}) \\ 0 \\ -l_1 s_1 + l_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{L_2} = b_1 \times r_{1,E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -S_1 & 0 & C_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = -\hat{x} B C_1 + \hat{y} (S_1 C + C_1 A) - \hat{z} S_1 B$$

$$\text{onou } A = -l_1 S_1 + l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_2 C_3$$

$$B = l_3 S_2 C_3 + l_2 S_2$$

$$C = l_1 C_1 + l_2 S_1 + l_3 S_1 C_2 C_3$$

Apa

$$J_{L_2} = \begin{bmatrix} -(l_3 S_2 C_1 + l_2 S_2 C_1) \\ l_2 C_2 + l_3 C_2 C_3 \\ -S_1 (l_3 S_2 C_3 + l_2 S_2) \end{bmatrix}, J_{A_2} = \begin{bmatrix} -S_1 \\ 0 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{L_3} = b_2 \times r_{2,E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -S_1 & 0 & C_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = -\hat{x} B C_1 + \hat{y} (S_1 C + C_1 A) - \hat{z} S_1 B$$

Apa

$$J_{L_3} = \begin{bmatrix} -l_3 S_2 C_1 \\ l_3 C_2 C_3 S^2 + l_3 C_2 C_3 C^2 \\ -l_3 S_2 S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 S_2 C_1 \\ l_3 C_2 C_3 \\ -l_3 S_1 S_2 \end{bmatrix}, J_{A_3} = \begin{bmatrix} -S_1 \\ 0 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

Endverws, m iakwbiavni þinTga sivai n efis:

$$J = \begin{bmatrix} -(l_1 C_1 + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_2 C_3) & -C_1 (l_3 S_2 C_3 + l_2 S_2) & -l_3 S_2 C_1 \\ 0 & l_2 C_2 + l_3 C_2 C_3 & l_3 C_2 C_3 \\ l_3 C_1 C_2 C_3 + l_2 C_1 C_2 - l_1 S_1 & -S_1 (l_3 S_2 C_3 + l_2 S_2) & -l_3 S_1 S_2 C_3 \\ 0 & -S_1 & -S_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

#### 4) Αυτοτρόπο Αιαφορικό Κινητακό Μοντέλο

Προκειμένου να εξετάσουμε τις ιδιότητες διατάξεων (κινητακές) των πολυτελούς βραχιόνων, αναφορικά με την γραφική ταχύτητα, αναφοριώντας την "Πίνακα"  $3 \times 3$  λακυθιών υπό την μορφή  $J_L$ .

Γνωρίζουμε, πως οι ιδιότητες κινητακές διατάξεων πολυτελούς βραχιόνων είναι οι τονοδεμονείς εξεινες των αριθμοτερών εξατάξεων ονομάτων το συστόμα, σα την δεδομένη διατάξη, εδυνατεί να αντιτίθεται ταχύτητα (σημ. Περιπτώσεις που περιείχε γραφική) προς κανονικές κατεύθυνσης σε ανακοντική απόσταση. Απειλητικά αυτό φεταγμένα σε υπενθύμιση της οριζόντιας της ~~επιφάνειας~~  $J_L$  σε  $J_A$ .

Συνεπώς, σα να βρούμε τις ιδιότητες των ανακινητών παραπομπών που προκύπτει η  $\det(J_L) = 0$

$$\det(J_L) = \begin{vmatrix} -l_1C_1 - l_2S_1C_2 - l_3S_1C_3 & -C_1l_3S_{23} - l_2C_1S_2 & -l_3S_{23}C_1 \\ 0 & l_2C_2 + l_3C_{23} & l_3C_{23} \\ l_3C_1C_{23} + l_2C_1C_2 - l_1S_1 & -(S_1l_3S_{23} + l_2S_1S_2) & -l_3S_1S_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= (-l_1C_1 - l_2S_1C_2 - l_3S_1C_3)[l_3S_1S_{23}(l_2C_2 + l_3C_{23}) + l_3C_{23}(l_3S_1S_{23} + l_2S_1S_2)] + \\ + (l_3C_1C_{23} + l_2C_1C_2 - l_1S_1)[-l_3C_{23}(C_1l_3S_{23} + l_2C_1S_2) + l_3S_{23}C_1(l_2C_2 + l_3C_{23})] =$$

$$= -(l_1C_1 + l_2S_1C_2 + l_3S_1C_3)(l_3l_2S_1S_2C_{23} - l_3l_2S_1S_{23}C_2) + \\ + (l_3C_1C_{23} + l_2C_1C_2 - l_1S_1)(-l_2l_3S_2C_1C_{23} + l_2l_3S_{23}C_1C_2) = \\ = (l_3C_1C_{23} + l_2C_1C_2 - l_1S_1)l_2l_3C_1S_3 + (l_1C_1 + l_2S_1C_2 + l_3S_1C_3)l_2l_3S_1S_{23} = \\ = l_2l_3S_3(l_3C_{23} + l_2C_2) \quad (8)$$

$$\text{Αρα } \det(J_L) = 0 \Rightarrow l_2 l_3 S_3 (l_3 C_3 + l_2 C_2) = 0 \quad \blacksquare$$

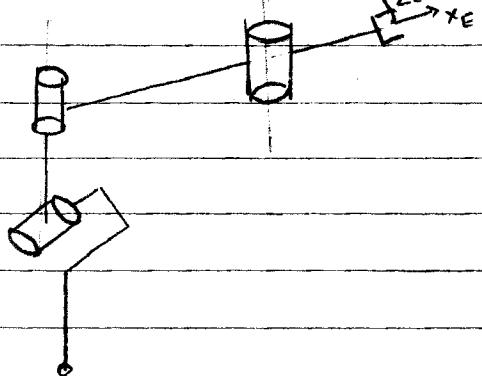
- $S_3 = 0 \Rightarrow q_3 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $l_3 C_3 + l_2 C_2 = 0$

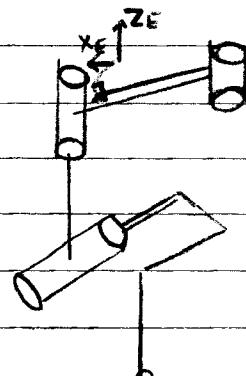
- Στην πρώτη περίπτωση που  $q_3 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  έχει ειδικότητα στο workspace, καθώς δια  $q_3 = 0$  και  $q_3 = k\pi$  ή καρπού, ο ρυθμιζόμενος βρισκεται σε πλήρη έκταση και συνεπώς το τελικό εργαλείο δράσης βρισκεται στο "θέρκο" όπου του χώρα εργασίας. Κατ' ενέκρισην, θα φανούσειν να πάνε σε είναι αδύνατη η ανάτριψη γραμμής ταχύτητας κατα βικός του αφού  $X_E$ , καθώς το εργαλείο είναι στο όπιο του χώρου εργασίας όπως ταύτιση αναρέρεται. Αντίστοιχα, όταν  $q_3 = \pi$  ( $\text{η } q_3 = k\pi \text{ με } k \text{ περιττό}$ ) η θέση του τελικού εργαλείου δράσης ταυτίζεται με αυτή της αριθμών 2.

Επομένως, όταν αυτή η διάταξη το εργαλείο βρισκεται στο "αρνητικό" όπιο του χώρου εργασίας και ισχουν όσα είναι παραπάνω.

$$q_3 = 0 \text{ (η } q_3 \text{ καρπού)}$$

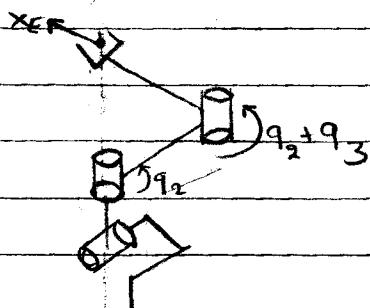


$$q_3 = \pi \text{ (η } q_3 \text{ με } k \text{ περιττό)}$$



(9)

Στην δεύτερη περίπτωση, όπου ισχύει  $b_3 C_{23} + b_2 C_2 = 0$   
 ο πολυτικός βραχιός θα έχει αυτή την μορφή /διάγραμμα/



Στην παραπάνω διάραγμα έχουμε επιπλέον διορθωσία, καθώς  
 • Στη συγκεκριμένη θέση, ονομάστοε στροφή της  
 δεύτερης αρθρώσης διανυτεί να προκαλέσει ~~την~~ αντίστροφη  
 πολυτικής ταχύτητας στο τελικό εργαλείο δράσης.

Για τον υπολογισμό της  $J_L^{-1}$  θα χρειαστεί να υπολογιστούμε  
 πάντα τον adjoint τύπου και στην συνέχεια να  
 διαμορφώσουμε ~~την~~ την αριθμητική της  $J_L$ , την οποία μπο-  
 ρούμε να υπολογίσουμε.

Για τον Adjoint χρειαζεται να υπολογιστούμε ότις της υπο-  
 λογίζεται της  $J_L$ . Για την διαδικασία αυτή δέρουμε

$$J_L = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \quad \text{Από} \quad J_L^{\text{adj}} = \begin{bmatrix} EI - HF & -(BI - HC) & BF - EC \\ -(DI - GF) & AI - GC & -(AF - DC) \\ (DH - EG) & -(AH - BG) & AE - DB \end{bmatrix}$$

Υπολογίζεται τους παραπάνω όρους:

$$EI - HF = -l_2 l_3 S_1 S_3$$

$$BI - HC = l_3 S_1 S_{23} (l_3 C_1 S_{23} + l_2 C_1 S_2) - l_3 S_{23} C_1 (S_1 l_3 S_{23} + l_2 S_1 S_2) = 0$$

$$\begin{aligned} BF - EC &= -l_3 C_{23} (C_1 l_3 S_{23} + l_2 C_1 S_2) + l_3 S_{23} C_1 (l_2 C_2 + l_3 C_{23}) = \\ &= l_3^2 S_{23} C_1 C_{23} + l_2 l_3 S_{23} C_1 C_2 - l_3^2 S_{23} C_1 C_{23} - l_2 l_3 S_2 C_1 C_{23} = \\ &= l_2 l_3 C_1 (S_{23} C_2 - C_{23} S_2) = l_2 l_3 C_1 S_3 \end{aligned}$$

$$DI - GF = -l_3^2 C_1 C_{23}^2 - l_2 l_3 C_1 C_2 C_{23} + l_1 l_3 S_1 C_{23}$$

$$\begin{aligned} AI - GC &= l_3 S_1 S_{23} (l_1 C_1 + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23}) + l_3 S_{23} C_1 (l_3 C_1 C_{23} + l_2 C_1 C_2 - l_1 S_1) = \\ &= l_1 l_3 S_1 S_{23} C_1 + l_2 l_3 S_1^2 S_{23} C_2 + l_3^2 S_1^2 S_{23} C_{23} + l_3^2 S_{23} C_1^2 C_{23} + l_2 l_3 S_1^2 C_2 - \\ &- l_1 l_3 S_{23} C_1 S_1 = l_2 l_3 S_{23} C_2 + l_3^2 S_{23} C_{23} = \\ &= l_3 (l_2 S_{23} C_2 + l_3 S_{23} C_{23}) \end{aligned}$$

$$AF - DC = -(l_1 l_3 C_1 C_{23} + l_2 l_3 S_1 C_2 C_{23} + l_3^2 S_1 C_{23}^2)$$

$$\begin{aligned} DH - EG &= -(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) (l_3 C_{23} + l_2 C_1 C_2 - l_1 S_1) = \\ &= -(l_2 l_3 C_1 C_2 C_{23} + l_2^2 C_1 C_2^2) - l_1 l_2 S_1 C_2 + l_3^2 C_1 C_{23}^2 + l_2 l_3 C_1 C_2 C_{23} - \\ &- l_1 l_3 S_1 C_{23} = \dots \end{aligned}$$

$$AE - DB = -(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) (l_1 C_1 + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23})$$

$$\begin{aligned} AH - BG &= (S_1 l_3 S_{23} + l_2 S_1 S_2) (l_1 C_1 + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23}) + (l_3 S_{23} C_1 + l_2 C_1 S_1) (l_3 C_1 C_{23} + l_2 C_1 C_2 - l_1 S_1) = \\ &= l_1 l_3 S_1 S_{23} C_1 + l_2 l_3 S_1^2 S_{23} C_2 + l_3^2 S_1^2 S_{23} C_{23} + l_1 l_2 S_1 S_2 C_1 + l_2^2 S_1^2 S_2 C_2 + \\ &+ l_2 l_3 S_1^2 S_2 C_{23} + l_3^2 S_{23} C_1^2 C_{23} + l_2 l_3 S_{23} C_1^2 C_2 - l_1 l_3 S_1 S_{23} C_1 + \\ &+ l_2 l_3 S_2 C_1^2 C_{23} + l_2^2 C_1 C_2^2 S_2 - l_1 l_2 S_1 S_2 C_1 = \\ &= l_2 l_3 S_{23} C_2 + l_3^2 S_{23} C_{23} + l_2^2 S_2 C_2 + l_2 l_3 S_2 C_{23} = \\ &= l_3 S_{23} (l_2 C_2 + l_3 C_{23}) + l_2 S_2 (l_2 C_2 + l_3 C_{23}) = (l_2 C_2 + l_3 C_{23}) (l_2 S_2 + l_3 S_{23}) \end{aligned}$$

$$A_{pa} \\ J_L^{adj} =$$

$$= \begin{bmatrix} -l_2 l_3 S_1 S_3 & 0 & l_2 l_3 C_1 S_3 \\ l_3^2 C_1 C_{23}^2 + l_2 l_3 C_1 C_2 C_{23} - l_1 l_3 S_1 C_{23} & l_3 S_{23} (l_2 C_2 + l_3 C_{23}) & l_1 l_3 C_1 C_{23} + l_2 l_3 C_1 C_2 + l_3^2 C_{23}^2 \\ -(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) (l_3 C_1 C_{23} + l_2 C_1 C_2 - l_1 S_1) & -(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) (l_2 S_2 + l_3 S_{23}) & -(l_2 C_2 + l_3 C_{23}) (l_1 C_1 + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23}) \end{bmatrix}$$

(11)

Teknik

$$J_l^{-1} = \frac{1}{\det(J_l)} \cdot J_l^{\text{adj}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_l^{-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} -s_1 & 0 & c_1 \\ l_3c_{23} + l_2c_2 & l_3c_{23} + l_2c_2 & l_1c_1c_{23} + l_2s_1c_{23} + l_3s_1c_{23}^2 \\ l_3c_1c_{23}^2 + l_2c_1c_{23} - l_1s_1c_{23} & s_{23} & l_1c_1c_{23} + l_2s_1c_{23} + l_3s_1c_{23}^2 \\ l_2(l_3c_{23} + l_2c_2) & l_2s_3 & l_2s_3(l_2c_2 + l_3c_{23}) \\ l_3c_1c_{23} + l_2c_1c_2 - l_1s_1 & l_2s_2 + l_3s_{23} & l_1c_1 + l_2s_1c_2 + l_3s_1c_{23} \\ l_2l_3s_3 & l_2l_3s_3 & l_2l_3s_3 \end{vmatrix}$$

Apa

$$J_l^{-1} = \begin{vmatrix} -s_1 & 0 & c_1 \\ l_2c_2 + l_3c_{23} & l_2c_2 + l_3c_{23} & l_1c_1c_{23} \\ l_1c_{23} - \frac{l_1s_1c_{23}}{l_2s_3(l_2c_2 + l_3c_{23})} & \frac{s_{23}}{l_2s_3} & \frac{s_1c_{23}}{l_2s_3} + \frac{l_1c_1c_{23}}{l_2s_3(l_2c_2 + l_3c_{23})} \\ l_1s_1 - c_1(l_2c_2 + l_3c_{23}) & \frac{l_2s_2 + l_3s_{23}}{l_2l_3s_3} & \frac{l_1c_1 + s_1(l_2c_2 + l_3c_{23})}{l_2l_3s_3} \\ l_2l_3s_3 & l_2l_3s_3 & l_2l_3s_3 \end{vmatrix}$$

## 5) Αντιστροφό Γεωμετρικό Μοντέλο

Ανά την εύθεια κίνησης της έξιωσης η ανταντικύρηση της  
 πρώτη στοιχεία της τέταρτης στοιχείου, τα οποία  
 αναπαριστάνται την δύση της τετρικής εργαζείου δράσης.  
 Για την εύρεση του αντιστροφού γεωμετρικού μοντέλου,  
 χρησιμοποιούμε την ίδια στοιχεία 4<sup>ης</sup> στοιχείου  
 του Τ) και επιτυγχάνουμε τις 3 έξιωσεις ως παραπάνω.

- Ιδικές προβλέψεις, έξουψε:

$$\begin{bmatrix} P_{Ex} \\ P_{Ey} \\ P_{Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 C_1 C_{23} - l_1 S_1 + l_2 C_1 C_2 \\ l_2 S_2 + l_3 S_{23} \\ l_0 + l_1 C_1 + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23} \end{bmatrix}$$

Από προκύπτονταν οι εξής έξιωσεις:

$$P_{Ex} = -l_1 S_1 + l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_{23} \quad (1)$$

$$P_{Ey} = l_2 S_2 + l_3 S_{23} \quad (2)$$

$$P_{Ez} = l_0 + l_1 C_1 + l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23} \quad (3)$$

$$(1), (3) \Rightarrow P_{Ex} = -l_1 S_1 + C_1 (l_2 C_2 + l_3 C_{23}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{δεικνύεται} \\ P' = l_2 C_2 + l_3 C_{23} \end{array} \right.$$

$$P_{Ex} = -l_1 S_1 + P' C_1$$

Οριζόντιες συναρτήσεις της θέσης

$$P_{Ez} = l_0 = P' S_1 + l_1 C_1$$

$$P' = \cos \alpha \cdot d \quad (\alpha)$$

$$l_1 = \sin \alpha \cdot d \quad (\beta)$$

$$d = \sqrt{P'^2 + l_1^2}$$

Συναρτήσεις έξουψε

$$P_{Ex} = -d S_1 \sin \alpha + d C_1 \cos \alpha \quad \left. \begin{array}{l} P_{Ex} = +d \cos(\varphi_1 + \alpha) \end{array} \right\} =$$

$$P_{Ez} - l_0 = d \cos \alpha S_1 + d \sin \alpha C_1 \quad \left. \begin{array}{l} P_{Ez} - l_0 = d \sin(\varphi_1 + \alpha) \end{array} \right\}$$

(13)

$$q_1 + \alpha = \arctan 2(P_{ez} - l_0, P_{ex}) \quad (\text{X})$$

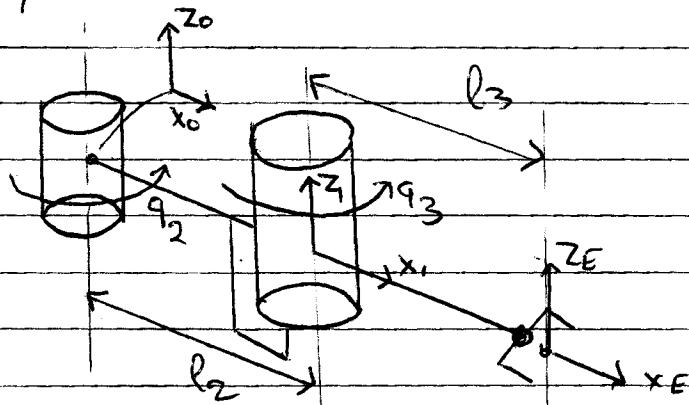
$$(a), (b) \Rightarrow \alpha = \arctan 2(l_1, p') \quad (\text{S})$$

Ano (S) kai (S)

$$q_1 = \arctan 2(P_{ez} - l_0, P_{ex}) - \arctan 2(l_1, p') \quad (\text{A})$$

Iuxixi jaupe hē tōv uno logi othō tōs  $q_2$

Eotaw tō uno - ou othō tōa  $q_2$  tōv anote dēitai anō tōv  
Sētētēn kai tōv tētēn apūpōn tōv polnotikoi spaxiora  
tōv ejera jaupe



Ioxiē oīz.  $A^0 = \text{Rot}(z, q_2) \text{Tra}(x, l_2)$  kai

$A_E^0 = \text{Rot}(z, q_3) \text{Tra}(x, l_3)$

$$\text{Apa } A^0 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_E = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^0 = A_1^0 A_E^1 = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & l_2 c_2 + l_3 c_{23} \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apa

$$P_{2R} = \begin{bmatrix} l_2 C_2 + l_3 C_{23} \\ l_2 S_2 + l_3 S_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αρχικά, συμβινούμε τις ο προσδιορίσας της  $q_2$  προκύπτει  
τις το ίδιο ακριβώς τρόπο τις υπογραφές της  $q_1$ , Ενίσης,  
πλατινούμε οι  $P_{2x} = p'$  και οι  $P_{2y} = P_{cy}$

Surenis, Έξουψε

$$q_2 = \arctan 2(P_{2y}, P_{2x}) - \arctan 2(l_3 S_3, l_2 + l_3 C_3)$$

Apa, τελικά

$$q_2 = \arctan 2(P_{cy}, p') - \arctan 2(l_3 S_3, l_2 + l_3 C_3) \quad (B)$$

Ενιστρέψουμε στο αρχικό σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} P_{Ex} = -l_1 S_1 + p' C_1 \\ P_{Ez} = l_0 + l_1 C_1 + p' S_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_{Ex}^2 = (C_1 p' - l_1 S_1)^2 \\ (P_{Ez} - l_0)^2 = (S_1 p' + l_1 C_1)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{Ex}^2 = (C_1 p')^2 - 2l_1 S_1 C_1 p' + (l_1 S_1)^2 \\ (P_{Ez} - l_0)^2 = (S_1 p')^2 + 2l_1 S_1 C_1 p' + (l_1 C_1)^2 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} P_{Ex}^2 + (P_{Ez} - l_0)^2 = p'^2 + l_1^2 \Rightarrow \quad (E)$$

$$\Rightarrow p'^2 = P_{Ex}^2 - l_1^2 + (P_{Ez} - l_0)^2 \Rightarrow p' = \pm \sqrt{P_{Ex}^2 - l_1^2 + (P_{Ez} - l_0)^2} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} p'_x = l_2 C_2 + l_3 C_{23} \\ p'_y = l_2 S_2 + l_3 S_{23} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p'^2 = (l_2 C_2 + l_3 C_{23})^2 \\ p'^2 = (l_2 S_2)^2 + 2l_2 l_3 S_2 S_{23} + (l_3 S_{23})^2 \end{array} \right\} \stackrel{(E)}{=} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{Ex}^2 - l_1^2 + (P_{Ez} - l_0)^2 = (l_2 C_2)^2 + 2l_2 l_3 C_2 C_{23} + (l_3 C_{23})^2 \\ P_{Ey}^2 = (l_2 S_2)^2 + 2l_2 l_3 S_2 S_{23} + (l_3 S_{23})^2 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{=} \quad (15)$$

$$P_{Ex}^2 + P_{Ey}^2 + (P_{Ez} - l_0)^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 = 2l_2l_3(c_2c_{23} + s_2s_{23}) \Rightarrow$$

$$c_3 = \frac{P_{Ex}^2 + P_{Ey}^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_3 = \pm \arccos\left(\frac{P_{Ex}^2 + P_{Ey}^2 + (P_{Ez} - l_0)^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right)$$

Temos, ta  $q_1, q_2$  jofwu -us (4) spiccorae

$$q_1 = \arctan 2(P_{Ez} - l_0, P_{Ex}) - \arctan 2(l_1, \sqrt{P_{Ex}^2 - l_1^2 + (P_{Ez} - l_0)^2})$$

$$q_2 = \arctan 2(P_{Ey}, \sqrt{P_{Ex}^2 - l_1^2 + (P_{Ez} - l_0)^2}) - \arctan 2(l_3s_3, l_2 + l_3c_3)$$

## **Μέρος Β: Κινηματική Προσομοίωση**

Για την εκτέλεση της κινηματικής προσομοίωσης του ρομποτικού χειριστή ορίζουμε ένα σενάριο λειτουργίας . Στο σενάριο αυτό, θεωρούμε πως το τελικό στοιχείο δράσης του ρομποτικού βραχίονα καλείται να πραγματοποιήσει μια ευθύγραμμη περιοδική κίνηση μεταξύ των σημείων A(3 , -2, 8) και B(-4, 3, 8) με περίοδο  $T = 20 \text{ sec}$ . Επιπλέον, θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ομαλότητα της κίνησης τόσο ως προς την ταχύτητα , όσο και ως προς την επιτάχυνση.

Προκειμένου, λοιπόν, να καταστεί εφικτή η ομαλότητα της κίνησης ,μεταξύ των σημείων αυτών ,τόσο ως προς την ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης όσο και ως προς την επιτάχυνση του, σχεδιάζουμε την επιθυμητή τροχιά μέσω πολυωνύμων παρεμβολής. Συγκεκριμένα, κάνουμε χρήση της μεθόδου των τριών φάσεων. Σύμφωνα με μέθοδο αυτή, η τροχιά του τελικού στοιχείου δράσης υπαγορεύεται από τρία πολυώνυμα , με αποτέλεσμα η περιγραφή της επιθυμητής τροχιάς να χωρίζεται σε 3 διακριτά μέρη. Στο πρώτο μέρος της τροχιάς, το τελικό εργαλείο δράσης κινείται με θετική επιτάχυνση , στο δεύτερο μέρος της τροχιάς το εργαλείο του ρομποτικού βραχίονα κινείται με σταθερή ταχύτητα (μηδενική επιτάχυνση) , ενώ στο τρίτο και τελευταίο μέρος της τροχιάς το στοιχείο δράσης έχει αρνητική επιτάχυνση με αποτέλεσμα να επιβραδύνει ,μέχρι την στιγμή που φτάνει στην ορισμένη ,ως τελική, θέση με μηδενική ταχύτητα.

Για την συγκεκριμένη εργασία, επιλέγουμε το στοιχείο δράσης του ρομποτικού βραχίονα να ξεκινά την κίνηση του την χρονική στιγμή  $t_0=0$  με μηδενική αρχική επιτάχυνση και να καταλήγει στο ορισμένο ,ως τελικό, σημείο την χρονική στιγμή  $t_f$  με επίσης μηδενική επιτάχυνση. Η επιλογή μηδενικής αρχικής και τελικής επιτάχυνσης συνεπάγεται την δυνατότητα χρήσης πολυωνύμων 4<sup>ου</sup> βαθμού για την περιγραφή του πρώτου και του τρίτου μέρους της τροχιάς . Στο σημείο αυτό σημειώνεται πως αν επιλέγαμε να είχαμε κάποια αρχική επιτάχυνση του τελικού εργαλείου δράσης, η χρήση πολυωνύμων 5<sup>ου</sup> βαθμού θα ήταν υποχρεωτική για να εξασφαλιστεί συνεχής 2<sup>η</sup> παράγωγος της θέσης (ομαλότητα της επιτάχυνσης). Τέλος, το

δεύτερο μέρος της κίνησης του στοιχείου δράσης του ρομποτικού χειριστή , το οποίο αποτελεί και το μεγαλύτερο μέρος της κίνησής του, θα περιγράφεται αναγκαστικά από ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού , ώστε να εξασφαλίζεται μηδενική δεύτερη παράγωγος της θέσης ( μηδενική επιτάχυνση και συνεπώς σταθερή ταχύτητα).

Τα όσα περιγράψαμε παραπάνω , συνοψίζονται στην παρακάτω σχέση :

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) = \alpha_4 * t^4 + a_3 * t^3 + a_2 * t^2 + a_1 * t + a_0, & t < 2\Delta \\ x_2(t) = b_1 * t + b_0, & 2\Delta \leq t < T' - 2\Delta \\ x_3(t) = c_4 * t^4 + c_3 * t^3 + c_2 * t^2 + c_1 * t + c_0, & t < T' \end{cases}$$

, όπου  $T' = \frac{T}{2}$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε πως συνολικά για τον πλήρη ορισμό των πολυωνύμων αυτών απαιτείται ο προσδιορισμός 12 συντελεστών . Αυτό σημαίνει πως χρειαζόμαστε και 12 γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις, μέσω των οποίων θα καταστεί εφικτός ο προσδιορισμός των συντελεστών αυτών και επομένως των πολυωνύμων και της ιδίας της τροχιάς . Έξι από τις 12 εξισώσεις προκύπτουν από την απαίτηση συνέχειας της τροχιάς ως προς την θέση , την ταχύτητα και την επιτάχυνση. Δηλαδή :

- **Συνέχεια Θέσης** :  $x_1(2\Delta) = x_2(2\Delta)$  ,  $x_2(T' - 2\Delta) = x_3(T' - 2\Delta)$
- **Συνέχεια Ταχύτητας** :  $u_1(2\Delta) = u_2(2\Delta)$  ,  $u_2(T' - 2\Delta) = u_3(T' - 2\Delta)$
- **Συνέχεια Επιτάχυνσης** :  $\alpha_1(2\Delta) = \alpha_2(2\Delta)$  ,  $\alpha_2(T' - 2\Delta) = \alpha_3(T' - 2\Delta)$

Άλλες τέσσερις εξισώσεις προκύπτουν από τις οριακές συνθήκες για την ταχύτητα και την θέση. Συγκεκριμένα :

- $x_1(0) = x_A$  ,  $x_3(T') = x_B$
- $u_1(0) = 0$  ,  $u_3(T') = 0$

Τέλος, εξαιτίας της επιλογής μηδενικών αρχικών και τελικών επιταχύνσεων του τελικού στοιχείου δράσης προκύπτουν οι εξής 2 τελευταίες εξισώσεις:

$$\bullet \quad u_2(2\Delta) = \frac{x_2(2\Delta) - x_1(0)}{\Delta}, \quad u_3(T' - 2\Delta) = \frac{x_3(T') - x_2(T' - 2\Delta)}{\Delta}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα των 12 αγνώστων με 12 γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις λαμβάνουμε τους συντελεστές όλων των πτολυωνύμων και επομένως έχουμε καταφέρει να περιγράψουμε την ακριβή τροχιά την οποία πρέπει να ακολουθήσει το τελικό εργαλείο δράσης κατά την μετακίνησή του από το σημείο A στο σημείο B

Παρακάτω παρατίθεται ο κώδικας τη συνάρτησης coeffs , η οποία υπολογίζει και επιστρέφει του συντελεστές σε κατάλληλη , για μετέπειτα χρήση , σειρά :

```

syms a4 a3 a2 a1 a0 b1 b0 c4 c3 c2 c1 c0
% x1(t) = a4*t^4 + a3*t^3 + a2*t^2+ a1*t+a0 ,x2(t) = b1*t + b0 ,
% x3(t) = c4*t^4 +...+c1*t+c0
% Set time with const speed as 70% of total time
total_time = tf - t0; t1 = t0 + total_time*(1-time_with_const_velocity)/2; t2 = t0+ total_time*(1-(1-time_with_const_velocity)/2));
Delta = total_time*0.15/2;
%x1(t1) = x2(t1)
equ1 = a4*t1^4 + a3*t1^3 + a2*t1^2 + a1*t1 +a0 - b1*t1 -b0 == 0;
%x2(t2) = x3(t2)
equ2 = c4*t2^4 + c3*t2^3 +c2*t2^2 +c1*t2 +c0 -b1*t2-b0 == 0;
%x1(t0) = start_point
equ3 = a4*t0^4 + a3*t0^3 + a2*t0^2+ a1*t0 +a0 - start_point ==0;
%x3(tf) = end_point
equ4 = c4*tf^4 + c3*tf^3 + c2*tf^2 + c1*tf +c0 - end_point == 0;
%u1(t1) = u2(t1)
equ5 = 4*a4*t1^3 + 3*a3*t1^2 + 2*a2*t1 + a1 - b1 == 0;
%u2(t2) = u3(t2)
equ6 = 4*c4*t2^3 + 3*c3*t2^2 + 2*c2*t2 + c1 - b1 == 0 ;
%u1(t0) = 0
equ7 = 4*a4*t0^3 + 3*a3*t0^2 + 2*a2*t0 + a1 == 0 ;
%u3(tf) = 0
equ8 = 4*c4*tf^3 + 3*c3*tf^2 + 2*c2*tf + c1 == 0 ;
%a1(t1) = a2(t1)
equ9 = 12*a4*t1^2 + 6*a3*t1 + 2*a2 == 0;
%a2(t2) = a3(t2)
equ10 = 12*c4*t2^2 + 6*c3*t2 + 2*c2 == 0;
%initial and final accel = 0
equ11= b1*t1 + b0 - (a0 + a1*t0 + a2*t0^2 + a3*t0^3 + a4*t0^4) - (Delta*b1) == 0; %ö-1
equ12 = (c0 + c1*tf + c2*tf^2 + c3*tf^3 + c4*tf^4) - (b0+b1*t2) - (Delta*b1) == 0; %ö-3

[A,B] = equationsToMatrix([ equ1 equ2 equ3 equ4 equ5 equ6 equ7 equ8 equ9 equ10 equ11 equ12] , [ a4 a3 a2 a1 a0 b1 b0 c4 c3 c2 c1 c0 ]);
traj = vpasolve(linsolve(A,B));

```

Στο σημείο αυτό, κρίνεται αναγκαίο να επισημάνουμε πως η κίνηση από το Α προς Β και η κίνηση από το Β προς το Α αντιμετωπίζονται ως δυο ανεξάρτητες κινήσεις , οι οποίες ξεκινάνε και οι δυο την χρονική στιγμή μηδέν και ολοκληρώνεται την χρονική στιγμή  $T/2$  . Η παραπάνω παραδοχή , δεν έχει καμία επίπτωση στο τελικό αποτέλεσμα της προσομοίωσης , καθώς όπως γνωρίζουμε κάθε κίνηση μπορεί να αναλυθεί στα επιμέρους συνθετικά της.

Έχουμε, τώρα, υπολογίσει τα παραπάνω τρία πολυώνυμα . Το επόμενο βήμα , για τη διαδικασία της προσομοίωσης, είναι να κάνουμε χρήση των συγκεκριμένων πολυωνύμων για τον προσδιορισμό της επιθυμητής θέσης του τελικού στοιχείου δράσης για κάθε χρονική στιγμή t. Επομένως, ορίζουμε το διάνυσμα χρόνου t με τιμές από 0 έως και T και ελάχιστο «βήμα» το  $dt = 0.01$ . Επιπλέον, στο σημείο αυτό πρέπει να αποφασίσουμε το χρονικό διάστημα επιτάχυνσης – επιβράδυνσης του τελικού στοιχείου δράσης και το διάστημα στο οποίο θα κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Αφού καθορίσουμε , το χρονικό διάστημα στο οποίο το εργαλείο του ρομποτικού βραχίονα κινείται με σταθερή ταχύτητα, με ένα επαναληπτικό βρόχο σε όλες τις χρονικές στιγμές από 0 έως και  $T/2$  υπολογίζουμε(με την συνάρτηση *polyval*) την συνιστώσα χ της επιθυμητής θέσης του εργαλείου (για την κίνηση από το Α προς Β), ελέγχοντας κάθε φορά την χρονική στιγμή ώστε να εξασφαλίζουμε ότι ο προσδιορισμός της θέσης γίνεται από το «σωστό» πολυώνυμο. Τέλος, παραγωγίζουμε την χρονική συνάρτηση της θέσης του εργαλείου και βρίσκουμε την ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης συναρτήσει του χρόνου (με συνδυασμό των συναρτήσεων *polymer* και *polyval*). Επαναλαμβάνουμε την ιδιά διαδικασία και την γ συνιστώσα .

Στην συνέχεια , με την διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω , υπολογίζουμε την επιθυμητή τροχιά του τελικού εργαλείου δράσης για την κίνηση από το Β προς το Α. Μόλις ολοκληρωθεί ο υπολογισμός των τροχιών από το Α προς το Β και από το Β προς το Α , συμπτύσσουμε (concatenate) τα επιμέρους αποτελέσματα σε ένα ενιαίο διάνυσμα , το οποίο και αποτελεί την συνολική επιθυμητή τροχιά του εργαλείου του ρομποτικού βραχίονα για την μετακίνηση από το Α προς το Β και πίσω .

Παρακάτω παρατίθεται ο κώδικας της συναρτήσεις *trajectory* με τον οποίο εκτελούμε τα όσα περιγράψαμε παραπάνω :

```

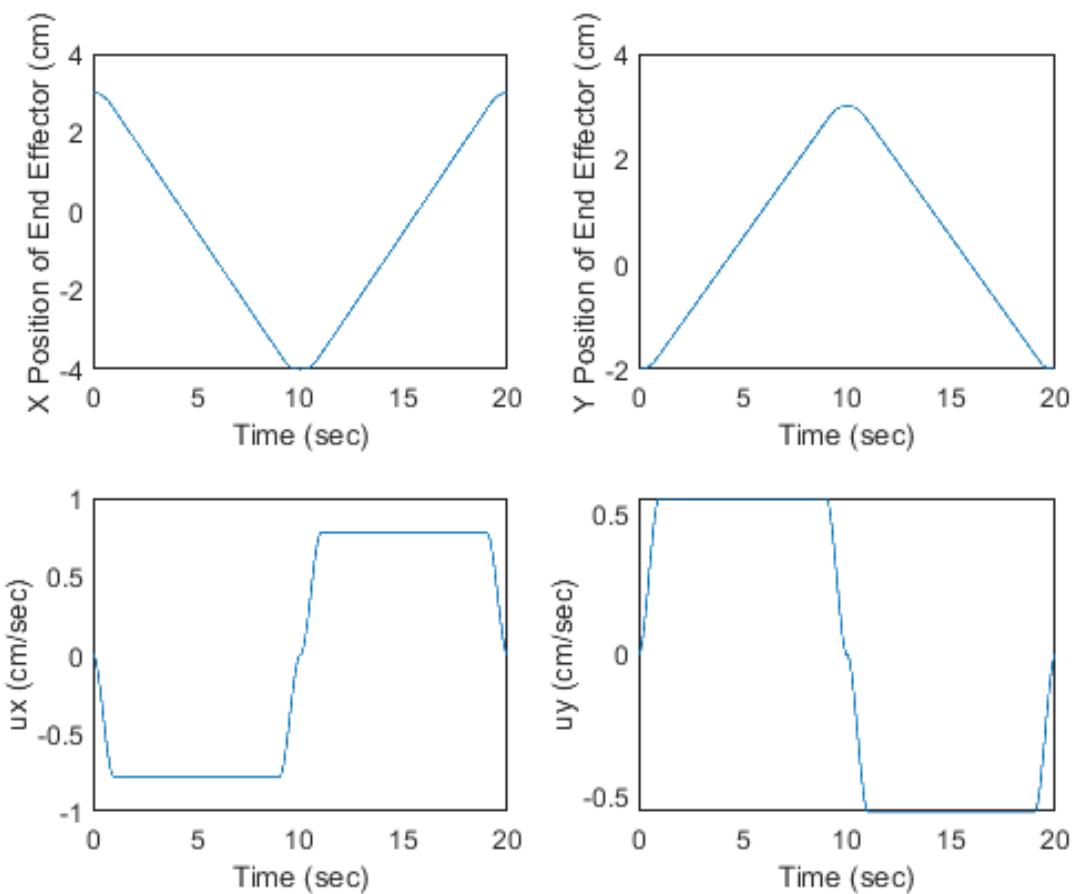
function [x,y,ux,uy]= trajectory(A,B,tf,dt)
coeff_x = double(coeffs(A(1),B(1),0,tf));
coeff_y = double(coeffs(A(2),B(2),0,tf));

num_samples = tf/dt ;
x1 = zeros(length(num_samples),1);
y1 = x1; ux1 = y1; uy1 = ux1;

for i = 1:num_samples
    time = (i-1)*dt;
    if (time < tf*0.1)%first polynom
        x1(i) = polyval(coeff_x(1:5),time);
        y1(i) = polyval(coeff_y(1:5),time);
        ux1(i) = polyval(polyder(coeff_x(1:5)),time);
        uy1(i) = polyval(polyder(coeff_y(1:5)),time);
    elseif (time < tf*0.9) % moving accoriding second pol
        x1(i) = polyval(coeff_x(6:7),time);
        y1(i) = polyval(coeff_y(6:7),time);
        ux1(i) = polyval(polyder(coeff_x(6:7)),time);
        uy1(i) = polyval(polyder(coeff_y(6:7)),time);
    elseif (time < tf) % moving according 3rd polynom
        x1(i) = polyval(coeff_x(8:12),time);
        y1(i) = polyval(coeff_y(8:12),time);
        ux1(i) = polyval(polyder(coeff_x(8:12)),time);
        uy1(i) = polyval(polyder(coeff_y(8:12)),time);
    end
end
x=x1; y=y1; ux=ux1; uy=uy1;

```

Στην συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα που περιγράφουν την θέση και την ταχύτητα του end effector ,συναρτήσει του χρόνου , για μια περίοδο.



Από τα διαγράμματα αυτά μπούμε να εντοπίσουμε την ικανοποίηση ορισμένων από τους περιορισμούς που έχουμε θέσει κατά την διάρκεια της προσομοίωσης. Αρχικά, φαίνεται πως πράγματι το εργαλείο δράσης ξεκινάει με μηδενική ταχύτητα την κίνηση του από το σημείο A και την χρονική στιγμή  $t=T/2=10$  sec φτάνει στο σημείο B, με τα ίδια να ισχύουν και για την κίνηση από το B προς το A. Επιπλέον, από τα διαγράμματα ταχυτήτων φαίνεται πως πράγματι στο περισσότερο διάστημα της μετατόπισής του, το εργαλείο δράσης κινείται με σταθερή ταχύτητα. Τέλος, από τα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε, με απλή εποπτεία, την συνέχεια τόσο της θέσης, όσο και της ταχύτητάς του end effector.

Έχοντας , πλέον , πλήρως καθορισμένη την τροχιά , της περιοδικής κίνησης, του εργαλείου δράσης μπορούμε να πραγματοποιήσουμε αντιστροφή κινηματική ανάλυση για να βρούμε την «τοποθέτηση» κάθε μιας από τις τρεις αρθρώσεις συναρτήσει της θέσης του εργαλείου του ρομποτικού βραχίονα .

Χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματά μας, από την θεωρητική επεξεργασία του κινηματικού μοντέλου, και έτσι επιτυγχάνουμε να ορίσουμε τα q1 , q2 , q3 που περιέχουν την τιμή της γωνίας στροφής της συγκεκριμένης άρθρωσης για κάθε θέση του end effector πάνω στην τροχιά που έχουμε υπολογίσει . Ο κώδικας φαίνεται παρακάτω

```
%% ***** INVERSE KINEMATICS --> DESIRED MOTION - JOINT SPACE *****
tmp = (x_ef.^2-11.^2+(z_ef-10).^2);
p = real(sqrt(tmp));
nom = (x_ef.^2)+(y_ef.^2)+((z_ef-10).^2)-(11.^2)-(12.^2)-(13.^2);
denom = (2*12*13);
q3 = acos(nom./denom);
q1=atan2(z_ef-10,x_ef)-atan2(11,+ (p)) ;
q2=atan2(y_ef,+ (p))-atan2(real(sin(q3(:))*13),real(12+cos(q3(:))*13));
```

Για τον υπολογισμό των ταχυτήτων στροφής των αρθρώσεων θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που λάβαμε κατά την ανάλυση του αντίστροφου διαφορικού μοντέλου .

Γνωρίζουμε ότι η συνεισφορά της κάθε άρθρωσης στην αναπτυσσόμενη ,από το end effector , ταχύτητα την προσδιορίζει η Ιακωβίνα μήτρα. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι :

$$\dot{p} = J\dot{q}$$

Επομένως , για τον προσδιορισμό των γωνιακών ταχυτήτων των αρθρώσεων έχουμε :

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{p}$$

Ωστόσο, στην παρούσα προσομοίωση ενδιαφερόμαστε μόνο για την γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης , επομένως η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής :

$$\dot{q} = J_L^{-1}\dot{p}_L$$

, όπου με  $\dot{p}_L$  συμβολίζουμε το διάνυσμα γραμμικών ταχυτήτων του end effector.

Για τον υπολογισμό της αντίστροφης λακωβιανής  $J_L^{-1}$  χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Jinv της οποίας ο κώδικας παρατίθεται παρακάτω :

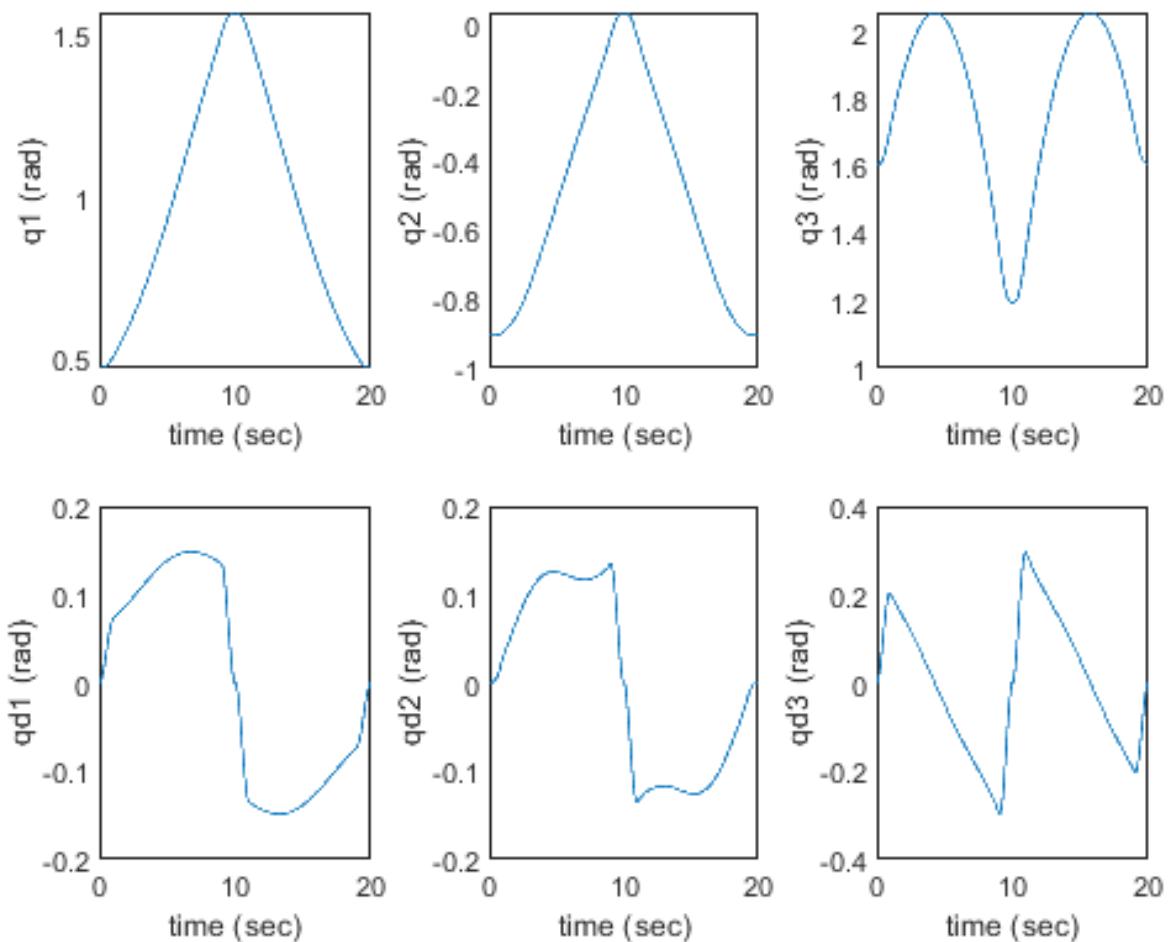
```
function [res,T] = Jinv(10,11,12,13,q1,q2,q3)

    % FORWARD KINEMATIC ANALYSIS
    A0h = [1,0,0,0 ; 0,0,-1,0 ; 0,1,0,10 ; 0,0,0,1];
    Ah1 = [cos(q1),0,-sin(q1),0 ; sin(q1),0,cos(q1),0 ; 0,-1,0,0 ; 0,0,0,1];
    A12 = [cos(q2),-sin(q2),0,12*cos(q2) ; sin(q2),cos(q2),0,12*sin(q2) ; 0,0,1,11 ; 0,0,0,1];
    A2E = [cos(q3),-sin(q3),0,13*cos(q3) ; sin(q3),cos(q3),0,13*sin(q3) ; 0,0,1,0 ; 0,0,0,1];
    A01 = A0h*Ah1; A02 = A01*A12; T = A02*A2E;
    % DIFFERENTIAL ANALYSIS + DIFFERENTIAL INVERSE ANALYSIS
    b0h = A0h(1:3,3); b1 = A01(1:3,3); b2 = A02(1:3,3);
    p0h = A0h(1:3,4); p1 = A01(1:3,4); p2 = A02(1:3,4); pe = T(1:3,4);
    J = [cross(b0h,pe-p0h),cross(b1,pe-p1),cross(b2,pe-p2) ; b0h,b1,b2]; res = inv(J(1:3,:));
end
```

Αφού , υπολογίσουμε την  $J_L^{-1}$  εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση και έτσι πραγματοποιούμε και τον υπολογισμό των γωνιακών ταχυτήτων των αρθρώσεων συναρτήσει της γραμμικής ταχύτητας του end effector.

```
qd1 = zeros(length(t),1); qd2=qd1; qd3=qd1;
for k = 1:length(t)
    [j,T] = Jinv(10,11,12,13,q1(k),q2(k),q3(k));
    qd1(k) = j(1,1)*ux_ef(k) + j(1,2)*uy_ef(k);
    qd2(k) = j(2,1)*ux_ef(k) + j(2,2)*uy_ef(k);
    qd3(k) = j(3,1)*ux_ef(k) + j(3,2)*uy_ef(k);
end
```

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα γωνιών του και γωνιακών ταχυτήτων των αρθρώσεων του ρομποτικού χειριστή , συναρτήσει του χρόνου .



Από τα παραπάνω διαγράμματα, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε πως η άρθρωση  $q_3$  δεν διέρχεται ποτέ από την θέση  $q_3 = 0$  ή  $q = \pi$  , οι οποίες όπως είδαμε στο θεωρητικό κομμάτι είναι ιδιόμορφες διατάξεις του ρομποτικού βραχίονα. Επιπλέον , όμοια με τα προηγούμενα διαγράμματα , έτσι και εδώ φαίνεται πως τόσο η ταχύτητα όσο και η θέση των αρθρώσεων είναι μια συνέχεις συνάρτηση του χρόνου , γεγονός που επιβεβαιώνει την ομαλότητα καθ' όλη την διάρκεια της κίνησής.

Τέλος, υλοποιούμε το animation της κίνησης. Συγκεκριμένα , για την απεικόνιση του συνολικού ρομποτικού μηχανισμού (σύνδεσμοι, αρθρώσεις και κινήσεις αυτών) απαιτείται επιπλέον ο υπολογισμός των θέσεων των συνδέσμων, που επιτυγχάνουμε χρησιμοποιώντας το ευθύ κινηματικό μοντέλο. Επειδή ωστόσο δεν έχουμε πλαίσιο πάνω στη δεύτερη άρθρωση, υπολογίζουμε γεωμετρικά τη θέση του άκρου του πρώτου συνδέσμου και άρα της δεύτερης άρθρωσης:

$$p_{x2} = -l_1 \sin(q_1)$$

$$p_{y2} = 0$$

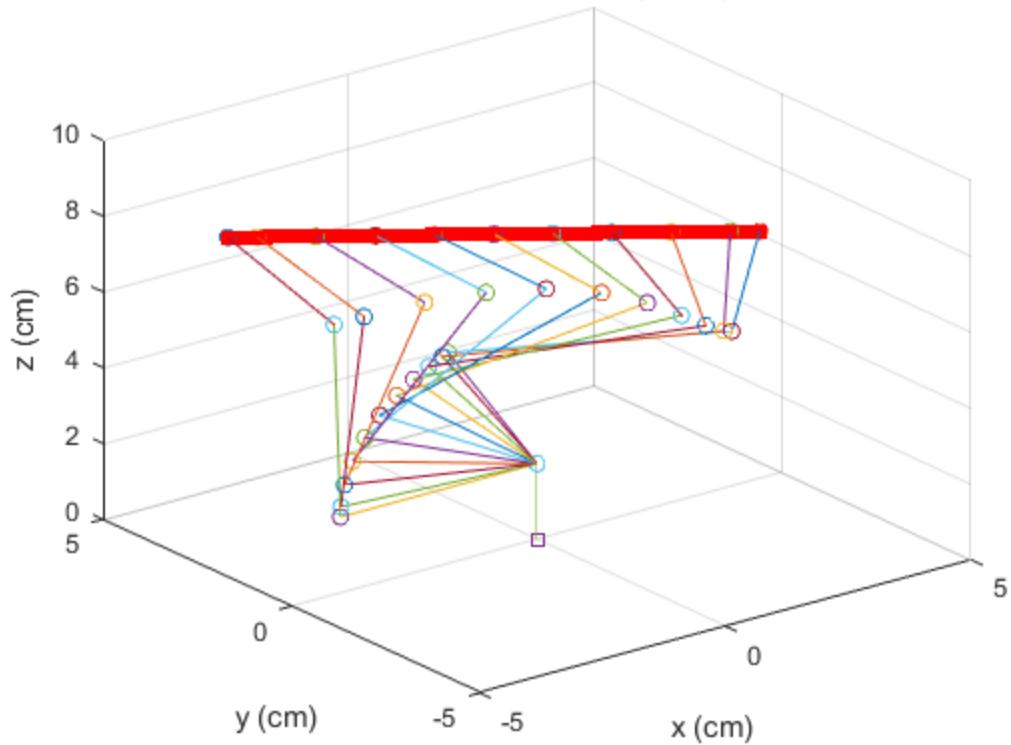
$$p_{z2} = l_0 + l_1 \cos(q_1)$$

Παρακάτω παρατίθεται ο κώδικας με τον οποίο πραγματοποιείται ο υπολογισμός του ευθεώς κινηματικού μοντέλου , καθώς επίσης και το animation της κίνησης από το σημείο A προς το σημείο B

```
%% ***** FORWARD KINEMATICS JOINT MOTION --> CARTESIAN POSITIONS
c1 = cos(q1); c2 = cos(q2); c3 = cos(q3); c23 = cos(q2+q3);
s1 = sin(q1); s2 = sin(q2); s3 = sin(q3); s23 = sin(q2+q3);

x0=zeros(size(q1)); y0=zeros(size(q1)); z0=zeros(size(q1));
x1=zeros(size(q1)); y1=zeros(size(q1)); z1=ones(size(q1)).*10;
x2=-11.*sin(q1); y2=zeros(size(q1)); z2= 10+11*cos(q1);
x3=c1.*c2.*l2-11.*s1; y3=s2.*l2; z3=10+c1.*l1+l2.*s1.*c2;
xe=c1.*c23.*l3+c1.*c2.*l2-s1.*l1;
ye=s23.*l3+s2.*l2;
ze=s1.*l3.*c23+s1.*c2.*l2+c1.*l1+10;
```

### Stick simulation of trajectory



Σημειώνουμε πως με κόκκινη γραμμή παρουσιάζεται η τροχιά που ακολουθήθηκε από το τελικό στοιχείο δράσης του ρομποτικού χειριστή , ενώ οι αρθρώσεις απεικονίζονται με «κυκλικοί».