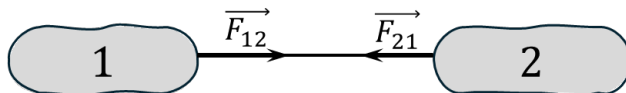


Динамика

Df: Раздел механики, изучающий механическое движение на основе силовых представлений

Df: Сила — векторная физическая величина, характеризующая направление и интенсивность взаимодействия между телами

Размерность силы $[\vec{F}] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$

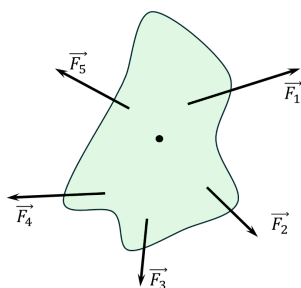


Законы Ньютона

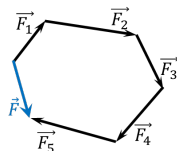
Lw 1: Существуют такие системы отсчёта, относительно которых МТ движется равномерно и прямолинейно, если на неё не действуют другие тела или их воздействия скомпенсированы

Lw 2: Ускорение МТ (центра масс абсолютно твёрдого тела) прямопропорционально равнодействующей всех сил и обратнопропорционально её массе.

Равнодействующая сила:



$$\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_5 = \sum_{i=1}^5 \vec{F}_i \quad (1)$$



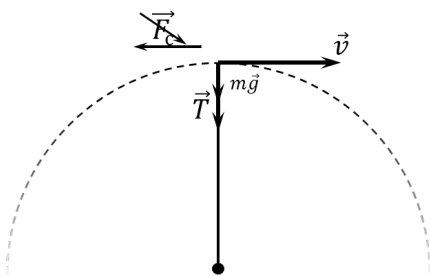
$$|\vec{a}| = |\vec{F}|$$

$$a \sim \frac{1}{m}$$

$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} \Leftrightarrow m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2)$$

Ex:



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

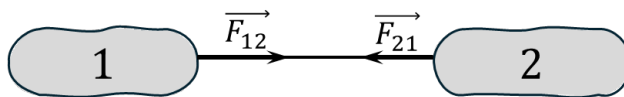
$$T = m(a_n - g) = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

$$\frac{v^2}{l} = g$$

$$v_{\min} = \sqrt{gl} \quad (3)$$

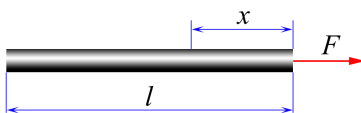
Лв 3: Тела (материальные точки) действуют друг на друга, равными по модулю и противоположными по направлению.

- F_{12} и F_{21} возникают и исчезают одновременно
- F_{12} и F_{21} имеют одинаковую природу
- Складывать силы нельзя, т.к. они приложены к разным телам



$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}} \quad (4)$$

Ех: 2.1.5. Какая сила действует в поперечном сечении однородного стержня длины l на расстоянии x от того конца, к которому вдоль стержня приложена сила F ?



К задаче 2.1.5

Решение. Если рассматривать стержень массой m как единое целое, то он будет двигаться с ускорением

$$a = \frac{F}{m}$$

Т.к. стержень нерастяжим, то ускорение всех его частей одинаково и равно a

Рассмотрим малый участок стержня длины Δx и массы Δm . Т.к. стержень однородный

$$\Delta m = m \frac{\Delta x}{l}$$

Запишем второй закон ньютона для этого участка.

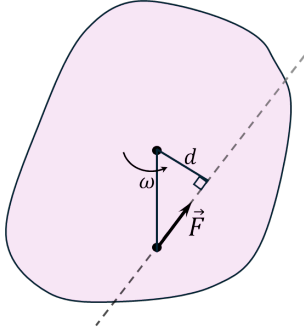
$$a \Delta m = F(x + \Delta x) - F(x) \quad (1)$$

Где $F(x + \Delta x)$ и $F(x)$ сила взаимодействия вместе с соседями. Просуммируем выражение (1) по горизонтальной координате от x до l :

$$\sum am \frac{\Delta x}{l} = \sum \Delta F$$

$$F(x) = ma \frac{l-x}{l} \Leftrightarrow \boxed{F(x) = F(1 - \frac{x}{l})} \quad (5)$$

Динамика вращательного движения



\vec{F} — сила
 d — плечо силы

$$M \pm F \cdot d = \pm F \cdot r \cdot \sin \alpha$$

Размерность момента силы $[M] = \text{Н} \cdot \text{м} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}} \quad (1)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

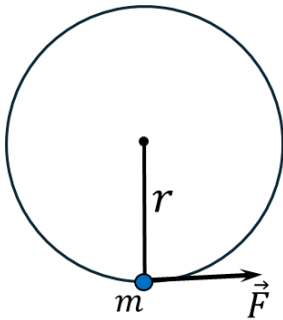
Df: Момент инерции (J) — скалярная физическая величина, характеризующая инертные свойства тела при вращательном движении

Размерность момента инерции $[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$

Lw: Произведение момента инерции на угловое ускорение тела равно сумме моментов сил, действующих на тело

$$\boxed{J\beta = \sum_{i=1}^k \pm M_i} \quad (2)$$

Ex: Материальная точка



Второй закон Ньютона

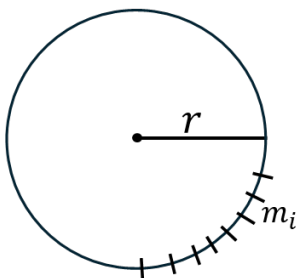
$$ma = F$$

$$mar = F \cdot r$$

$$a = \beta \cdot r$$

$$(mr^2)\beta = M \Rightarrow \boxed{J = mr^2} \quad (3)$$

Ех: Кольцо



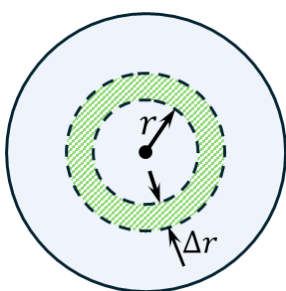
NO: Момент инерции аддитивен

$$J = J_1 + J_2 + \dots + J_n \quad (4)$$

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} J_i$$

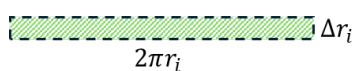
$$J = \sum_{i=1}^{\infty} m_i r^2 = r^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i = m r^2$$

Ех: Однородный диск



Поверхностная плотность диска

$$\sigma = \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS} = \text{const}$$



$$J_i = m_i r_i^2$$

$$\Delta S_i = 2\pi r_i \Delta r_i$$

$$m_i = \sigma \Delta S_i = \sigma 2\pi r_i \Delta r_i$$

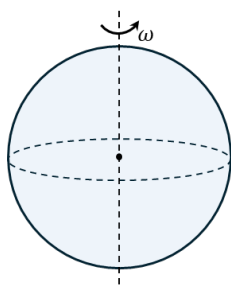
$$J_i = m_i r_i^2 = 2\pi \sigma r_i^3 \Delta r_i$$

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} 2\pi \sigma r_i^3 \Delta r_i$$

$$J = 2\pi \sigma \sum_{i=1}^{\infty} r_i^3 \Delta r_i = 2\pi \sigma \frac{r^4}{4} = \frac{\sigma \pi r^4}{2} \Rightarrow J = \frac{m R^2}{2} \quad (5)$$

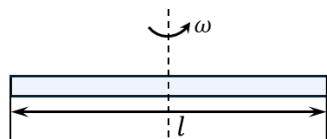
Другие примеры:

Ех: Шар



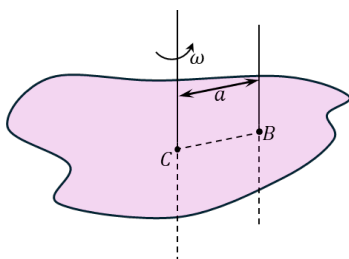
$$J = \frac{2mR^2}{5} \quad (6)$$

Ех: Однородный стержень



$$J = \frac{ml^2}{12} \quad (7)$$

Th: Теорема Штейнера

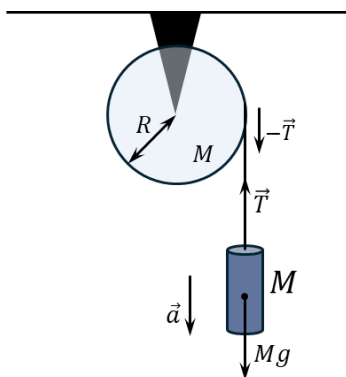


C — центр масс
 J_0 — момент инерции относительно центра масс

$$J(a) = J_B = J_0 + ma^2$$

$$\boxed{J = J_0 + ma^2} \quad (8)$$

Ex: Груз на блоке



Момент инерции блока:

$$J = \frac{mR^2}{2}$$

Груз:

$$Ma = Mg - T$$

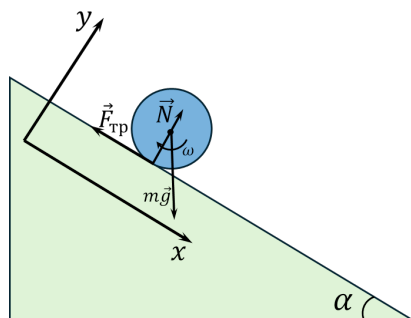
Блок:

$$J\beta = \sum_{i=1}^k \pm M_i = T \cdot R$$

$$Ja = TR^2 \Rightarrow T = \frac{Ja}{R^2}$$

$$\boxed{a = \frac{Mg}{M + \frac{J}{R^2}} = \frac{g}{1 + \frac{m}{2M}}} \quad (9)$$

Ex: Скатывание с наклонной плоскости



$F_{\text{тр}}$ — сила трения покоя

$$a = g \sin \alpha \quad (M = 0)$$

$$a = g(\sin \alpha - M \cos \alpha)$$

Второй закон Ньютона:

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \quad (OX)$$

$$mg \cos \alpha = N \quad (OY)$$

$$J\beta = F_{\text{тр}}R \Leftrightarrow F_{\text{тр}} = \frac{Ja}{R^2}$$

$$ma = mg \sin \alpha - \frac{Ja}{R^2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J}{mR^2}}} \quad (10)$$

Импульс тела. Закон сохранения импульса

Df: Импульс материальной точки — векторная физическая величина равная

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad (1)$$

Размерность импульса $[p] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$

NO: А. Эйнштейн (СТО)

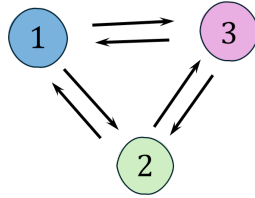
$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Df: Импульс силы: $\vec{F}\Delta t$ Второй закон Ньютона в импульсной форме

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{p}_2 - \vec{p}_1 &= \vec{F}\Delta t \\ \Delta \vec{p} &= \vec{F}\Delta t \\ \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned}} \quad (4)$$

Изменение импульса системы равно импульсу действовавшей на неё силы

Df: Замкнутая система тел — совокупность произвольных объектов, взаимодействующих только между собой



$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{i,j} \Delta t_{i,j} = \vec{0}$$

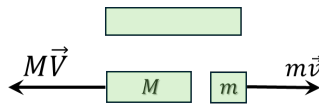
$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t = \vec{0}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \text{const}$$

Lw: Импульс любой замкнутой механической системы не изменяется при любых взаимодействиях внутри неё

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 + \dots$$

Ex: Явление отдачи



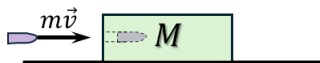
$$M\vec{V} + m\vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{V} = -\frac{m\vec{v}}{M}$$

Ex: Неупругий удар

Закон сохранения импульса

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{V}$$

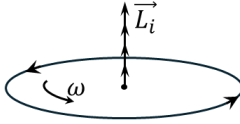
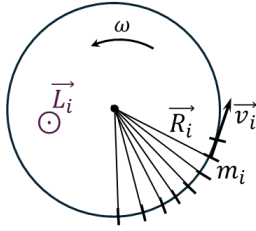


$$\boxed{\vec{V} = \frac{m}{m + M} \vec{v}} \quad (7)$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m + M)V^2}{2} + Q = \frac{mv^2}{2}$$

Момент импульса тела. Закон сохранения момента импульса



Df: Вектор раный векторному произведению плеча импульса на сам вектор импульса

$$L = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1)$$

$$\vec{L}_i = R \vec{m}_i \omega R$$

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} L_i = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \omega R^2 = \omega R^2 \sum_{i=1}^{\infty} m_i = (m R^2) \omega = J \omega$$

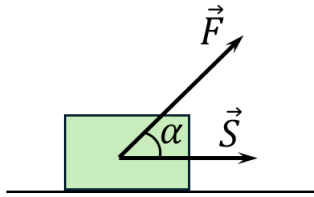
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{r}_i \times (m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i^2 = J \vec{\omega}$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= J \vec{\omega} \\ \vec{L} &= \vec{r} \times (m \vec{v}) \end{aligned} \quad (2)$$

NO: Второй закон Кеплера — закон сохранения момента импульса

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_2 v_2 \\ J_1 \omega_1 &= J_2 \omega_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Закон сохранения энергии



Df: Работа силы(A) — скалярная физическая величина, равная

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = F S \cos \alpha = F_x S \quad (1)$$

Размерность работы $[A] = \text{Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ Дж}$

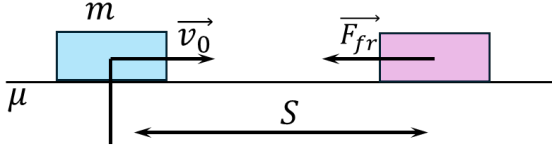
Df: Кинетическая энергия определяется выражением

$$E^k = \frac{mv^2}{2} \quad (2)$$

Теорема об изменении кинетической энергии: Изменение кинетической энергии механической системы равно работе внешних сил над ней

$$\Delta E^k = E_2^k - E_1^k = A \quad (3)$$

Ех: Тормозной путь автомобиля



Теорема об изменении кинетической энергии:

$$\begin{aligned}\Delta E_K &= A \\ 0 - \frac{mv_0^2}{2} &= \mu mg S \cos \pi \\ \frac{mv_0^2}{2} &= \mu mg S \Rightarrow \boxed{S = \frac{v_0^2}{2\mu g}} \quad (4)\end{aligned}$$

Ех: Приращение кинетической энергии ΔE_K , при $\Delta v \ll v$

$$\begin{aligned}\Delta E_K &= \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \\ \Delta E_K &= \frac{m(2v\Delta v + \Delta v^2)}{2} \approx \frac{2mv\Delta v}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta E_K = mv\Delta v} \quad (5)$$

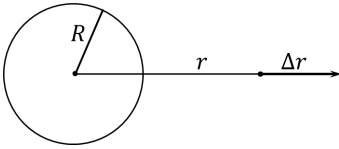
НО: Согласно (5), малое приращение кинетической энергии прямо пропорционально скорости, $\Delta E^K \sim v$

Дф: Консервативная механическая система — механическая совокупность тел, взаимодействующих без трения и сопротивления

Лw: В отсутствии сил трения и сопротивления сумма кинетической и потенциальной энергии системы — величина постоянная при любых взаимодействиях внутри системы

Теплота: $mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2} + Q$

Ех: Большие высоты ($h \sim R$)



$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

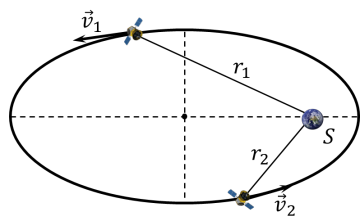
Покажем, что E в этом случае (для астрономические полётов)

$$r, r - \Delta r; \Delta r \ll r; \quad \boxed{E = -G \frac{mM}{r}} \quad (6)$$

$$A = FS \cos \alpha = \boxed{G \frac{mM}{r^2} \Delta r}$$

$$A = -\Delta E = E_1 - E_2 = -GmM \left(\frac{1}{r - \Delta r} - \frac{1}{r} \right)$$

$$A = -GmM \frac{\Delta r}{(r - \Delta r)r} \approx \boxed{G \frac{mM}{r^2} \Delta r}$$



$$\frac{mv_1^2}{2} - G \frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{mM}{r_2}$$

Первая космическая скорость: $v_1 = \sqrt{gR} = 7.9 \text{ км/с}$

Вторая космическая скорость: $v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \text{ км/с}$