Formulario di Fisica Medica

Facoltà di Medicina
Università degli studi di Milano

Davide Savoldelli

March 26, 2020

Contents

1 Meccanica

1.1 Cinematica

1.1.1 Moto rettilineo uniforme

Velocità media:

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Velocità istantanea:

$$\vec{v_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Legge oraria:

$$\vec{x}(x) = x_0 + vt$$

1.1.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Accelerazione media:

$$\vec{a_m} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Accelerazione istantanea:

$$\vec{a_i} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Legge oraria:

$$\vec{x}(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Velocità:

$$\vec{v}(t) = v_0 + at$$

$$v^2(x) = v_0^2 + 2ax$$

1.1.3 Moto armonico

Accelerazione legata alla posizione del punto:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t)$$

è un'equazione differenziale che si può risolvere con una funzione del tipo:
Posizione:

$$\vec{x}(t) = x_0 cos(\omega t + \phi)$$

Velocità:

$$\vec{v}(t) = -\omega x_0 sin(\omega t + \phi)$$

Accelerazione:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 x_0 cos(\omega t + \phi)$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequenza:

$$\nu = T^{-1} = \frac{\omega}{2\pi}$$

1.1.4 Moto circolare

Vettore raggio:

$$\vec{r}(t) = Rx(t)\hat{i} + Ry(t)\hat{j} = Rcos(\theta(t))\hat{i} + Rsin(\theta(t)))\hat{j}$$

Posizione:

$$\vec{x}(t) = \theta(t)R$$

Velocità (tangenziale):

$$\vec{v}(t) = \omega(t)R$$

Accelerazione tangenziale:

$$\vec{a_t}(t) = \alpha(t)R$$

Accelerazione centripeta:

$$\vec{a_c}(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \omega^2(t)R$$

Accelerazione:

$$\vec{a}(t) = a_t(t)\hat{\tau} + a_c(t)\hat{n}$$

1.1.5 Moto del proiettile

Equazioni del moto:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + vt \\ y(t) = y_0 + v_o t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

1.2 Dinamica

1.2.1 Leggi di Newton

- Principio d'inerzia: Un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme. Condizione di equilibrio:

$$\vec{R_{tot}} = 0$$

- Seconda legge di Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Principio azione-reazione:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

1.2.2 Forze

Forza Peso

$$\vec{F}_p = -m\vec{g}$$

Forza Normale Rappresenta la forza che un vincolo oppone a un corpo (secondo la terza legge della dinamica) Essa è perpendicolare alla superficie del vincolo.

Tensione Rappresenta la forza che una corda tesa subisce e, se non ci sono deformazioni, *trasmette costante per tutta la sua lunghezza*

Forza di attrito

- Attrito statico e dinamico:

$$\vec{F}_{att} = -\mu_{s/d}|\vec{N}|$$

- Attrito aerodinamico:

$$|\vec{D}| = \frac{1}{2}C\rho A\vec{v^2}$$

Forza centripeta

$$\vec{F}_c = m\frac{\vec{v^2}}{R}$$

Gravitazione

- Forza Gravitazionale:
$$\vec{F}_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
- Velocità di fuga
$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Forza elastica (di Hooke)

$$\vec{F}_h = -k\Delta\vec{x}$$

1.2.3 Energia

Lavoro

$$L = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Lavoro con F costante

$$L = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \int_l d\vec{x} = \vec{F}(x_2 - x_1)$$

Esempio con F non costante (lavoro della forza elastica)

$$L = \int_l -kx \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Energia potenziale

$$U = m\vec{g}h$$

Energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v^2}$$

Teorema dell'energia cinetica

$$L_{TOT} = \Delta K$$

Conservazione dell'energia meccanica

$$\Delta E_m = \Delta U + \Delta K = 0 \text{ (campi di forze conservative)}$$

$$\Delta E_m = \Delta U + \Delta K = L_{Fnc} \text{ (campi di forze non conservative)}$$

Potenza media

$$P_m = \frac{L}{\Delta t}$$

Potenza istantanea

$$P_i = \frac{dL}{dt} = \vec{F} d\vec{v}$$

1.2.4 Impulso e quantità di moto

Quantità di moto

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Teorema dell'impulso

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{md\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F}dt = md\vec{v} = d\vec{p} = \vec{I}$$

Lavoro con F costante

$$L = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \int_l d\vec{x} = \vec{F}(x_2 - x_1)$$

Esempio con F non costante (lavoro della forza elastica)

$$L = \int_l -kx \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{2} k \Delta x^2$$

Energia potenziale

$$U = m\vec{g}h$$

2 Termodinamica

2.1 Temperatura

Dilatazione termica

$$V = V_0 + (1 + \alpha T)$$

2.2 Gas

Equazione di stato dei gas perfetti Termini macroscopici

$$pV = nRT$$

Teoria cinetica dei gas Termini microscopici

$$pV = \frac{2}{3} n N_a \bar{K}$$

da cui

$$\bar{K} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_a} T$$

Miscele di gas Legge di Dalton

$$P_{tot} = \sum_{i}^{n_{gas}} P_i \quad \text{con Pi pressione parziale del gas i-esimo nella miscela}$$

Legge di Henry

$$c_i = \alpha \cdot p_i \quad \text{con alpha coefficiente di solubilità}$$

2.3 Calore

Flusso di calore

$$\Phi = \frac{Q}{A\Delta t}$$

Conduzione

$$\Phi = K_{cond}\frac{(T_a - T_b)}{L}$$

Convezione

$$\Phi = K_{conv}(T_b - T_a)$$

Irraggiamento Potenza totale emessa (in Watt)

$$H = e\sigma AT^4$$

Flusso emesso

$$\Phi = \frac{H}{A} = e\sigma T^4$$

2.3.1 Capacità termica e calore specifico

Capacità termica

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Calore specifico

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$$

Calore specifico molare

$$c = \frac{C}{n} = \frac{\Delta Q}{n\Delta T}$$

Gas Perfetti Legge di Mayer:

$$c_v = c_p - R$$

Gas monoatomici:

$$c_v = \frac{3}{2}R$$

$$c_p = \frac{5}{2}R$$

Gas biatomici:

$$c_v = \frac{5}{2}R$$

$$c_p = \frac{7}{2}R$$

2.4 Primo Principio della Termodinamica

$$\Delta U_{sistema} = -\Delta U_{ambiente}$$

$$\Delta U = Q_{entrante} - L_{uscente}$$

2.5 Trasformazioni

2.5.1 Isocora

$$dU = nc_v dT$$

$$L = 0 \quad \text{dV è nullo}$$

$$Q = dU = nc_v dT$$

2.5.2 Isobara

$$dU = nc_v dT$$

$$L = PdV$$

$$Q = nc_p dT$$

2.5.3 Isoterma

$$dU = 0 \quad \text{dT è nullo}$$

$$L = nRT_0 ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q = L = nRT_0 ln \frac{V_2}{V_1}$$

Funzione Essendo la temperatura costante

$$pV = nRT_0 = cost$$

il grafico nel piano di Clapeyron è un'iperbole.

2.5.4 Adiabatica

$$dU = nc_v dT$$
$$L = -dU = -nc_v dT$$
$$Q = 0$$

Funzione

$$pV^\gamma = cost$$
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Dipendendo da gamma, il grafico è più inclinato dell'iperbole dell'isoterma.

2.6 Macchina di Carnot

Serie di Trasformazioni, in totale è una trasfomazione ciclica, quindi dU = 0, Q = L Poichè vi sono due isoterme, le temperature che variano non sono 4 (corrispondenti ai 4 stati) ma 2.

- Espansione isoterma A-B

$$\text{Stato: } T_a = T_b = T_1, V_a < V_b, p_a > p_b$$

$$dU = 0 \quad \text{dT è nullo}$$
$$L = nRT_1 ln\frac{V_b}{V_a}$$
$$Q_1 = L = nRT_1 ln\frac{V_b}{V_a}$$

- Espansione adiabatica B-C

$$\text{Stato: } T_b > T_c = T_2, V_b < V_c, p_b > p_c$$

$$dU = nc_v(T_c - T_b)$$
$$L = -dU = -nc_v d(T_c - T_b)$$
$$Q = 0$$

- Compressione isoterma C-D

$$\text{Stato: } T_c = T_d = T_2, V_c > V_d, p_c < p_d$$

$$dU = 0 \quad \text{dT è nullo}$$
$$L = nRT_2 ln\frac{V_d}{V_c}$$
$$Q_2 = L = nRT_2 ln\frac{V_d}{V_c}$$

- Compressione adiabatica D-A

$$\text{Stato: } T_d < T_a = T_1, V_d > V_a, p_d < p_a$$

$$dU = nc_v(T_a - T_d)$$
$$L = -dU = -nc_v(T_a - T_d)$$
$$Q = 0$$

2.6.1 Rendimento della macchina di Carnot

Rendimento:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{assorbito}}$$
$$L_{tot} = nR(T_1 - T_2)ln\frac{V_b}{V_a} = Q_{tot}$$
$$L_{tot} = Q_{tot} = Q_1 + Q_2 < Q_1 \quad \text{essendo Q2 negativo}$$
$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \quad \text{Valida per tutte le trasfomazioni cicliche}$$

Con il ciclo di Carnot, in particolare:

$$\eta = 1 + \frac{T_2}{T_1} \quad \text{Sostituisco a Q1 e Q2 quelli trovati per la macchina di Carnot}$$

2.7 Entropia e Secondo Principio

L'entropia è una funzione di stato, perciò

$$\Delta S = S_f - S_i$$

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} \quad \text{trasformazione reversibile}$$

$$\Delta S > \int_i^f \frac{\delta Q}{T} \quad \text{trasformazione irreversibile}$$

Esempio: Considero l'espansione libera di un gas in un sistema isolato, esso è un processo irreversibile, per valutarlo devo connettere gli stati inziale e finale con una trasformazione reversibile, per esempio un'isoterma reversibile. Calcolo l'entropia:

$$\Delta S_{sistema} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_i^f \delta Q = \frac{1}{T}\int_i^f \delta L = \frac{1}{T}\int_i^f pdV$$

$$= \frac{1}{T}\int_i^f \frac{nRTdV}{V} = \frac{1}{T}nRTln\frac{V_f}{V_i} = nRln\frac{V_f}{V_i} > 0$$

Calcolo ciò che succede per l'universo (sistema + ambiente):

$$\Delta S_{sistema} > 0$$

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{ambiente}$$

Ma il sistema è isolato, quindi non ha variazione di entropia, perciò:

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{sistema} > 0$$

3 Fluidi

3.1 Fluidostatica

Legge di Stevino

$$P(h) = P_0 + \rho_F g h$$
$$\Delta P = \rho_F g h$$

Principio di Pascal

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = \Delta P$$

Principio di Archimede

$$F_{arch} = \rho_F g V$$

3.2 Fluidodinamica

Portata

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Equazione di continuità

$$Q = Av$$

3.2.1 Fluidi Ideali

Teorema di Bernoulli

$$\rho g h_1 + P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2 + P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = k$$

Paradosso di Bernoulli *La pressione è maggiore dove la sezione è maggiore.* Oseervando l'equazione di Bernoulli, P è maggiore quando v è minore (a parità di tutti gli altri contributi ed essendo la somma di questi costante). Perciò se v è minore per l'equazione di continuità l'area è maggiore, considerando un fluido stazionario (a portata costante).

Teorema di Torricelli

$$v_{uscita} = \sqrt{2gh}$$

3.2.2 Fluidi Reali

$$\rho g h_1 + P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2 + P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + R$$

Gradiente di velocità

$$lim_{\Delta r \to 0} \frac{(v + \Delta v)}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Sforzo tangenziale

$$\frac{F_{att}}{A} = \eta \frac{dv}{dr}$$

$$F_{att} = \eta A \frac{dv}{dr}$$

Legge di Poiseuille (regime laminare)

$$v(r) = \frac{1}{4}\frac{P_1 - P_2}{l \cdot \eta}(R^2 - r^2)$$

$$v_{max} = \frac{1}{4}\frac{\Delta P}{l \cdot \eta}R^2$$

$$v(r) = v_{max}(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

Calcolo portata, data la velocità in un condotto circolare

$$Q = \frac{\pi}{8}\frac{\Delta P}{l \cdot \eta}R^4$$

$$\Delta P = \mathcal{R}Q$$

$$\mathcal{R} = \frac{8}{\pi}\frac{l \cdot \eta}{R^4}$$

Analogia con la resistenza elettrica:

- Per condotti in parallelo:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + ... + \frac{1}{\mathcal{R}_n}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathcal{R}_i}}$$

- Per condotti in serie:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + ... + \mathcal{R}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$$

Regime turbolento (Re = 2000) Velocità critica di passaggio da regime laminare a turbolento

$$v_{crit} = \frac{Re \cdot \eta}{R \cdot \rho}$$

Fluidi Newtoniani La viscosità dipende solo dalla temperatura

Fluidi non Newtoniani La viscosità dipende dalla temperatura e dal gradiente di velocità del fluido. Si distinguono in fluidi:

- pseudoplastici, per i quali la viscosità diminuisce all'aumentare del grandiente di velocità (come il sangue)

- dilatanti, per i quali la viscosità aumenta all'aumentare del gradiente di velocità

3.3 Tensione superficiale

L'aumento di superficie di un fluido è possibile agendo *contro* le forze di coesione che uniscono le molecole del liquido. Un fluido infatti tende sempre ad avere una forma che gli consenta di esporsi il meno possibile ad un fluido di diversa natura.

Forza necessaria ad espandere la superficie

$F = 2\tau l$ $\quad \tau$ detta tensione superficiale e dipendente dal fluido

Lavoro per unità di superficie

$$L_c = 2\tau l \Delta x = 2\tau \Delta S$$

In una superficie sferica:

$$\Delta L_c = F\delta s = P_c \delta A \Delta R$$

$$L_{tot} = P_c \Delta R S_{tot} = P_c \Delta R 4\pi R^2$$

possiamo esprimere il lavoro anche come:

$$\Delta S = 4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2$$

$$\Delta S = 4\pi R^2 + 4\pi \Delta R^2 + 8\pi R \Delta R - 4\pi R^2$$

$$4\pi \Delta R^2 \quad \text{trascurabile}$$

Perciò calcolo il lavorro usando il nuovo differenziale di superficie:

$$L = 2\tau \Delta S = 16\tau\pi R \Delta R$$

uguagliando con il lavoro trovato in precendenza

$$16\tau\pi R \Delta R = P_c \Delta R 4\pi R^2$$

trovo la Pressione di Laplace.

- per una superfice sferica:
$$P_c = \frac{4\tau}{R}$$

- con una sola interfaccia:
$$L_c = 2\tau \Delta S$$
$$P_c = \frac{2\tau}{R}$$

- per una superfice ellissoidale:
$$P_c = \tau\left(\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}\right)$$

- per una superfice cilidrica:
$$P_c = \tau \frac{1}{R}$$

4 Elettromagnetismo

4.1 Elettrostatica

Campo elettrico

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}, \quad \epsilon = \epsilon_0\epsilon_r, \quad \hat{r} \text{ versore raggio di modulo 1}$$

Forza elettrostatica

$$\vec{F}_{el} = k\frac{Qq}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$$

Lavoro forza elettrostatica

$$L = -k\frac{Qq}{r}$$

Energia potenziale elettrostatica

$$W(r) = -L = k\frac{Qq}{r}$$

Potenziale elettrostatico

$$\Delta V = V_b - V_a = -\frac{L_{a,b}}{q} = k\frac{Q}{r}$$

$$V(r) = \frac{W(r)}{q} = -\frac{L_{\infty,r}}{q}$$

Momento dipolo elettrico

$$P = qd$$

4.2 Campo elettromagnetico

Corrente elettrica

$$I(t) = \frac{dq}{dt}$$

Prima legge di Ohm

$$V = \mathcal{R}I$$

Seconda legge di Ohm

$$\mathcal{R} = \rho\frac{L}{S}$$

$$\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha T)$$

Forza elettromotrice Lavoro che il campo elettromotore compie per far percorrere ad una carica unitaria positiva l'intero giro del circuito. Rappresenta la ddp quando il generatore non eroga corrente (ma solo tensione).

Leggi di Kirchhoff

- Legge dei nodi

$$\sum_j I_{j,entranti} = \sum_k I_{k,uscenti}$$

- Legge delle maglie

$$\sum_i \Delta V_{i,maglia} = 0$$

Resistenze

- Resistenze in parallelo:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + ... + \frac{1}{\mathcal{R}_n}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathcal{R}_i}}$$

- Resistenze in serie:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + ... + \mathcal{R}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$$

Potenza elettrica

$$L = \Delta Q$$
$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{VQ}{\Delta t} = VI$$
$$P = \frac{V^2}{\mathcal{R}} = \mathcal{R}I^2$$

Capacità

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Capacità conduttore sferico

$$C = 4\pi\epsilon_0 r$$

4.2.1 Condensatori

Campo elettrico

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Potenziale condensatore piano

$$\Delta V = \frac{L}{Q} = \vec{E}d$$

Capacità condensatore piano

$$C = \epsilon\frac{A}{d}$$

Lavoro necessario a spostare una carica

$$L_{tot} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}V^2C = \frac{1}{2}QV$$

- Condensatori in serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}$$
$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

- Condensatori in parallelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Legge di carica del condensatore (in circuiti RC)

$$I_c(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_c(t) = \frac{dI_c(t)}{dt} = V_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

5 Onde

Don't forget to include examples of topicalization. They look like this:

(1) Topicalization from sentential subject:

a John$_i$	[a kltukl	[el	**l-**oltoir	er ngii$_i$	a Mary]]
	R-clear	COMP	**IR**.3S-love	P	him

John, (it's) clear that Mary loves (him).

How to handle topicalization

I'll just assume a tree structure like (2).

(2) Structure of A′ Projections:

CP

Spec C′

C SAgrP

5.1 Mood

Mood changes when there is a topic, as well as when there is WH-movement. *Irrealis* is the mood when there is a non-subject topic or WH-phrase in Comp. *Realis* is the mood when there is a subject topic or WH-phrase.