

Formulario di Fisica Medica

Facoltà di Medicina

Università degli studi di Milano

Davide Savoldelli

March 27, 2020

Contents

1	Meccanica	3
1.1	Cinematica	3
1.1.1	Moto rettilineo uniforme	3
1.1.2	Moto rettilineo uniformemente accelerato	3
1.1.3	Moto armonico	3
1.1.4	Moto circolare	4
1.1.5	Moto del proiettile	4
1.2	Dinamica	5
1.2.1	Leggi di Newton	5
1.2.2	Forze	5
1.2.3	Energia	6
1.2.4	Impulso e quantità di moto	7
2	Termodinamica	8
2.1	Temperatura	8
2.2	Gas	8
2.3	Calore	9
2.3.1	Capacità termica e calore specifico	9
2.4	Primo Principio della Termodinamica	10
2.5	Trasformazioni	10
2.5.1	Isocora	10

2.5.2	Isobara	10
2.5.3	Isoterma	10
2.5.4	Adiabatica	11
2.6	Macchina di Carnot	11
2.6.1	Rendimento della macchina di Carnot	12
2.7	Entropia e Secondo Principio	13
3	Fluidi	14
3.1	Fluidostatica	14
3.2	Fluidodinamica	14
3.2.1	Fluidi Ideali	14
3.2.2	Fluidi Reali	15
3.3	Tensione superficiale	16
4	Elettromagnetismo	18
4.1	Elettrostatica	18
4.2	Campo elettromagnetico	19
4.2.1	Condensatori	20
5	Onde	21
5.1	Mood	21

1 Meccanica

1.1 Cinematica

1.1.1 Moto rettilineo uniforme

Velocità media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Velocità istantanea:

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Legge oraria:

$$\vec{x}(t) = x_0 + vt$$

1.1.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato

Accelerazione media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Accelerazione istantanea:

$$\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Legge oraria:

$$\vec{x}(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Velocità:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= v_0 + at \\ v^2(x) &= v_0^2 + 2ax\end{aligned}$$

1.1.3 Moto armonico

Accelerazione legata alla posizione del punto:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\omega^2 x(t)$$

è un'equazione differenziale che si può risolvere con una funzione del tipo:
Posizione:

$$\vec{x}(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Velocità:

$$\vec{v}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Accelerazione:

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequenza:

$$\nu = T^{-1} = \frac{\omega}{2\pi}$$

1.1.4 Moto circolare

Vettore raggio:

$$\vec{r}(t) = Rx(t)\hat{i} + Ry(t)\hat{j} = R\cos(\theta(t))\hat{i} + R\sin(\theta(t))\hat{j}$$

Posizione:

$$\vec{x}(t) = \theta(t)R$$

Velocità (tangenziale):

$$\vec{v}(t) = \omega(t)R$$

Accelerazione tangenziale:

$$\vec{a}_t(t) = \alpha(t)R$$

Accelerazione centripeta:

$$\vec{a}_c(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \omega^2(t)R$$

Accelerazione:

$$\vec{a}(t) = a_t(t)\hat{\tau} + a_c(t)\hat{n}$$

1.1.5 Moto del proiettile

Equazioni del moto:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + vt \\ y(t) = y_0 + v_o t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

1.2 Dinamica

1.2.1 Leggi di Newton

- Principio d'inerzia: Un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme. Condizione di equilibrio:

$$\vec{R}_{tot} = 0$$

- Seconda legge di Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- Principio azione-reazione:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

1.2.2 Forze

Forza Peso

$$\vec{F}_p = -m\vec{g}$$

Forza Normale Rappresenta la forza che un vincolo oppone a un corpo (secondo la terza legge della dinamica) Essa è perpendicolare alla superficie del vincolo.

Tensione Rappresenta la forza che una corda tesa subisce e, se non ci sono deformazioni, *trasmette costante per tutta la sua lunghezza*

Forza di attrito

- Attrito statico e dinamico:

$$\vec{F}_{att} = -\mu_{s/d}|\vec{N}|$$

- Attrito aerodinamico:

$$|\vec{D}| = \frac{1}{2}C\rho A v^2$$

Forza centripeta

$$\vec{F}_c = m \frac{v^2}{R}$$

Gravitazione

- Forza Gravitazionale:

$$\vec{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- Velocità di fuga

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Forza elastica (di Hooke)

$$\vec{F}_h = -k\Delta\vec{x}$$

1.2.3 Energia

Lavoro

$$L = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Lavoro con F costante

$$L = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \int_l d\vec{x} = \vec{F}(x_2 - x_1)$$

Esempio con F non costante (lavoro della forza elastica)

$$L = \int_l -kx \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Energia potenziale

$$U = m\vec{g}h$$

Energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Teorema dell'energia cinetica

$$L_{TOT} = \Delta K$$

Conservazione dell'energia meccanica

$$\Delta E_m = \Delta U + \Delta K = 0 \text{ (campi di forze conservative)}$$

$$\Delta E_m = \Delta U + \Delta K = L_{Fnc} \text{ (campi di forze non conservative)}$$

Potenza media

$$P_m = \frac{L}{\Delta t}$$

Potenza istantanea

$$P_i = \frac{dL}{dt} = \vec{F} d\vec{v}$$

1.2.4 Impulso e quantità di moto

Quantità di moto

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Teorema dell'impulso

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{m d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} dt = m d\vec{v} = d\vec{p} = \vec{I}$$

Lavoro con F costante

$$L = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{x} = \vec{F} \int_l d\vec{x} = \vec{F}(x_2 - x_1)$$

Esempio con F non costante (lavoro della forza elastica)

$$L = \int_l -kx \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Energia potenziale

$$U = m\vec{g}h$$

2 Termodinamica

2.1 Temperatura

Dilatazione termica

$$V = V_0(1 + \alpha T)$$

2.2 Gas

Equazione di stato dei gas perfetti Termini macroscopici

$$pV = nRT$$

Teoria cinetica dei gas Termini microscopici

$$pV = \frac{2}{3}nN_a\bar{K}$$

da cui

$$\bar{K} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_a} T$$

Miscele di gas Legge di Dalton

$$P_{tot} = \sum_i^{n_{gas}} P_i \quad \text{con } P_i \text{ pressione parziale del gas } i\text{-esimo nella miscela}$$

Legge di Henry

$$c_i = \alpha \cdot p_i \quad \text{con } \alpha \text{ coefficiente di solubilità}$$

2.3 Calore

Flusso di calore

$$\Phi = \frac{Q}{A\Delta t}$$

Conduzione

$$\Phi = K_{cond} \frac{(T_a - T_b)}{L}$$

Convezione

$$\Phi = K_{conv}(T_b - T_a)$$

Irraggiamento Potenza totale emessa (in Watt)

$$H = e\sigma AT^4$$

Flusso emesso

$$\Phi = \frac{H}{A} = e\sigma T^4$$

2.3.1 Capacità termica e calore specifico

Capacità termica

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Calore specifico

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$$

Calore specifico molare

$$c = \frac{C}{n} = \frac{\Delta Q}{n\Delta T}$$

Gas Perfetti Legge di Mayer:

$$c_v = c_p - R$$

Gas monoatomici:

$$c_v = \frac{3}{2}R$$

$$c_p = \frac{5}{2}R$$

Gas biatomici:

$$c_v = \frac{5}{2}R$$
$$c_p = \frac{7}{2}R$$

2.4 Primo Principio della Termodinamica

$$\Delta U_{sistema} = -\Delta U_{ambiente}$$

$$\Delta U = Q_{entrante} - L_{uscente}$$

2.5 Trasformazioni

2.5.1 Isocora

$$dU = nc_v dT$$

$$L = 0 \quad dV \text{ è nullo}$$

$$Q = dU = nc_v dT$$

2.5.2 Isobara

$$dU = nc_v dT$$

$$L = PdV$$

$$Q = nc_p dT$$

2.5.3 Isoterma

$$dU = 0 \quad dT \text{ è nullo}$$

$$L = nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q = L = nRT_0 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Funzione Essendo la temperatura costante

$$pV = nRT_0 = cost$$

il grafico nel piano di Clapeyron è un'iperbole.

2.5.4 Adiabatica

$$\begin{aligned}dU &= nc_v dT \\L &= -dU = -nc_v dT \\Q &= 0\end{aligned}$$

Funzione

$$\begin{aligned}pV^\gamma &= cost \\ \gamma &= \frac{c_p}{c_v}\end{aligned}$$

Dipendendo da gamma, il grafico è più inclinato dell'iperbole dell'isoterma.

2.6 Macchina di Carnot

Serie di Trasformazioni, in totale è una trasformazione ciclica, quindi $dU = 0$, $Q = L$ Poichè vi sono due isoterme, le temperature che variano non sono 4 (corrispondenti ai 4 stati) ma 2.

- Espansione isoterma A-B

$$\text{Stato: } T_a = T_b = T_1, V_a < V_b, p_a > p_b$$

$$\begin{aligned}dU &= 0 \quad dT \text{ è nullo} \\ L &= nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} \\ Q_1 &= L = nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}\end{aligned}$$

- Espansione adiabatica B-C

$$\text{Stato: } T_b > T_c = T_2, V_b < V_c, p_b > p_c$$

$$\begin{aligned}dU &= nc_v(T_c - T_b) \\ L &= -dU = -nc_v d(T_c - T_b) \\ Q &= 0\end{aligned}$$

- Compressione isoterma C-D

$$\text{Stato: } T_c = T_d = T_2, V_c > V_d, p_c < p_d$$

$$dU = 0 \quad dT \text{ è nullo}$$

$$L = nRT_2 \ln \frac{V_d}{V_c}$$

$$Q_2 = L = nRT_2 \ln \frac{V_d}{V_c}$$

- Compressione adiabatica D-A

$$\text{Stato: } T_d < T_a = T_1, V_d > V_a, p_d < p_a$$

$$dU = nc_v(T_a - T_d)$$

$$L = -dU = -nc_v(T_a - T_d)$$

$$Q = 0$$

2.6.1 Rendimento della macchina di Carnot

Rendimento:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{assorbito}}$$

$$L_{tot} = nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_b}{V_a} = Q_{tot}$$

$$L_{tot} = Q_{tot} = Q_1 + Q_2 < Q_1 \quad \text{essendo } Q_2 \text{ negativo}$$

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \quad \text{Valida per tutte le trasformazioni cicliche}$$

Con il ciclo di Carnot, in particolare:

$$\eta = 1 + \frac{T_2}{T_1} \quad \text{Sostituisco a } Q_1 \text{ e } Q_2 \text{ quelli trovati per la macchina di Carnot}$$

2.7 Entropia e Secondo Principio

L'entropia è una funzione di stato, perciò

$$\Delta S = S_f - S_i$$

$$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} \quad \text{trasformazione reversibile}$$

$$\Delta S > \int_i^f \frac{\delta Q}{T} \quad \text{trasformazione irreversibile}$$

Esempio: Considero l'espansione libera di un gas in un sistema isolato, esso è un processo irreversibile, per valutarlo devo connettere gli stati iniziale e finale con una trasformazione reversibile, per esempio un'isoterma reversibile. Calcolo l'entropia:

$$\begin{aligned} \Delta S_{sistema} &= \int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f \delta Q = \frac{1}{T} \int_i^f \delta L = \frac{1}{T} \int_i^f p dV \\ &= \frac{1}{T} \int_i^f \frac{nRT dV}{V} = \frac{1}{T} nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} > 0 \end{aligned}$$

Calcolo ciò che succede per l'universo (sistema + ambiente):

$$\Delta S_{sistema} > 0$$

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{ambiente}$$

Ma il sistema è isolato, quindi non ha variazione di entropia, perciò:

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{sistema} > 0$$

3 Fluidi

3.1 Fluidostatica

Legge di Stevino

$$P(h) = P_0 + \rho_F gh$$
$$\Delta P = \rho_F gh$$

Principio di Pascal

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = \Delta P$$

Principio di Archimede

$$F_{arch} = \rho_F gV$$

3.2 Fluidodinamica

Portata

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Equazione di continuità

$$Q = Av$$

3.2.1 Fluidi Ideali

Teorema di Bernoulli

$$\rho gh_1 + P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho gh_2 + P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = k$$

Paradosso di Bernoulli *La pressione è maggiore dove la sezione è maggiore.* Osservando l'equazione di Bernoulli, P è maggiore quando v è minore (a parità di tutti gli altri contributi ed essendo la somma di questi costante). Perciò se v è minore per l'equazione di continuità l'area è maggiore, considerando un fluido stazionario (a portata costante).

Teorema di Torricelli

$$v_{uscita} = \sqrt{2gh}$$

3.2.2 Fluidi Reali

$$\rho gh_1 + P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho gh_2 + P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + R$$

Gradiente di velocità

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v)}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Sforzo tangenziale

$$\frac{F_{att}}{A} = \eta \frac{dv}{dr}$$
$$F_{att} = \eta A \frac{dv}{dr}$$

Legge di Poiseuille (regime laminare)

$$v(r) = \frac{1}{4} \frac{P_1 - P_2}{l \cdot \eta} (R^2 - r^2)$$

$$v_{max} = \frac{1}{4} \frac{\Delta P}{l \cdot \eta} R^2$$

$$v(r) = v_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Calcolo portata, data la velocità in un condotto circolare

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta P}{l \cdot \eta} R^4$$

$$\Delta P = \mathcal{R}Q$$

$$\mathcal{R} = \frac{8 l \cdot \eta}{\pi R^4}$$

Analogia con la resistenza elettrica:

- Per condotti in parallelo:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \dots + \frac{1}{\mathcal{R}_n}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathcal{R}_i}}$$

- Per condotti in serie:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots + \mathcal{R}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i$$

Regime turbolento (Re = 2000) Velocità critica di passaggio da regime laminare a turbolento

$$v_{crit} = \frac{Re \cdot \eta}{R \cdot \rho}$$

Fluidi Newtoniani La viscosità dipende solo dalla temperatura

Fluidi non Newtoniani La viscosità dipende dalla temperatura e dal gradiente di velocità del fluido. Si distinguono in fluidi:

- pseudoplastici, per i quali la viscosità diminuisce all'aumentare del gradiente di velocità (come il sangue)
- dilatanti, per i quali la viscosità aumenta all'aumentare del gradiente di velocità

3.3 Tensione superficiale

L'aumento di superficie di un fluido è possibile agendo *contro* le forze di coesione che uniscono le molecole del liquido. Un fluido infatti tende sempre ad avere una forma che gli consenta di esporsi il meno possibile ad un fluido di diversa natura.

Forza necessaria ad espandere la superficie

$$F = 2\tau l \quad \tau \text{ detta tensione superficiale e dipendente dal fluido}$$

Lavoro per unità di superficie

$$L_c = 2\tau l \Delta x = 2\tau \Delta S$$

In una superficie sferica:

$$\Delta L_c = F \delta s = P_c \delta A \Delta R$$

$$L_{tot} = P_c \Delta R S_{tot} = P_c \Delta R 4\pi R^2$$

possiamo esprimere il lavoro anche come:

$$\Delta S = 4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2$$

$$\Delta S = 4\pi R^2 + 4\pi \Delta R^2 + 8\pi R \Delta R - 4\pi R^2$$

$$4\pi \Delta R^2 \quad \text{trascurabile}$$

Perciò calcolo il lavoro usando il nuovo differenziale di superficie:

$$L = 2\tau \Delta S = 16\tau \pi R \Delta R$$

uguagliando con il lavoro trovato in precedenza

$$16\tau \pi R \Delta R = P_c \Delta R 4\pi R^2$$

trovo la Pressione di Laplace.

- per una superficie sferica:

$$P_c = \frac{4\tau}{R}$$

- con una sola interfaccia:

$$L_c = 2\tau \Delta S$$

$$P_c = \frac{2\tau}{R}$$

- per una superficie ellissoidale:

$$P_c = \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

- per una superficie cilindrica:

$$P_c = \tau \frac{1}{R}$$

4 Elettromagnetismo

4.1 Elettrostatica

Campo elettrico

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}, \quad \epsilon = \epsilon_0\epsilon_r, \quad \hat{r} \text{ versore raggio di modulo } 1$$

Forza elettrostatica

$$\vec{F}_{el} = k \frac{Qq}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}$$

Lavoro forza elettrostatica

$$L = -k \frac{Qq}{r}$$

Energia potenziale elettrostatica

$$W(r) = -L = k \frac{Qq}{r}$$

Potenziale elettrostatico

$$\Delta V = V_b - V_a = -\frac{L_{a,b}}{q} = k \frac{Q}{r}$$

$$V(r) = \frac{W(r)}{q} = -\frac{L_{\infty,r}}{q}$$

Momento dipolo elettrico

$$P = qd$$

4.2 Campo elettromagnetico

Corrente elettrica

$$I(t) = \frac{dq}{dt}$$

Prima legge di Ohm

$$V = \mathcal{R}I$$

Seconda legge di Ohm

$$\mathcal{R} = \rho \frac{L}{S}$$
$$\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha T)$$

Forza elettromotrice Lavoro che il campo elettromotore compie per far percorrere ad una carica unitaria positiva l'intero giro del circuito. Rappresenta la ddp quando il generatore non eroga corrente (ma solo tensione).

Leggi di Kirchhoff

- Legge dei nodi

$$\sum_j I_{j,entranti} = \sum_k I_{k,uscenti}$$

- Legge delle maglie

$$\sum_i \Delta V_{i,maglia} = 0$$

Resistenze

- Resistenze in parallelo:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \dots + \frac{1}{\mathcal{R}_n}$$
$$\mathcal{R}_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathcal{R}_i}}$$

- Resistenze in serie:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \dots + \mathcal{R}_n = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}_i$$

Potenza elettrica

$$\begin{aligned}L &= \Delta Q \\ P &= \frac{L}{\Delta t} = \frac{VQ}{\Delta t} = VI \\ P &= \frac{V^2}{\mathcal{R}} = \mathcal{R}I^2\end{aligned}$$

Capacità

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Capacità conduttore sferico

$$C = 4\pi\epsilon_0 r$$

4.2.1 Condensatori

Campo elettrico

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{Q}{A} \\ \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon}\end{aligned}$$

Potenziale condensatore piano

$$\Delta V = \frac{L}{Q} = \vec{E}d$$

Capacità condensatore piano

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Lavoro necessario a spostare una carica

$$L_{tot} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} V^2 C = \frac{1}{2} QV$$

- Condensatori in serie:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \\ \mathcal{R}_{eq} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}\end{aligned}$$

- Condensatori in parallelo:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

Legge di carica del condensatore (in circuiti RC)

$$I_c(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_c(t) = \frac{dI_c(t)}{dt} = V_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

5 Onde

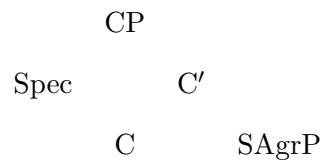
Don't forget to include examples of topicalization. They look like this:

- (1) Topicalization from sentential subject:
a John_i [a kltukl [el l-oltoir er ngii_i a Mary]]
R-clear COMP **IR**.3S-love P him
John, (it's) clear that Mary loves (him).

How to handle topicalization

I'll just assume a tree structure like (2).

- (2) Structure of A' Projections:



5.1 Mood

Mood changes when there is a topic, as well as when there is WH-movement.
Irrealis is the mood when there is a non-subject topic or WH-phrase in Comp.
Realis is the mood when there is a subject topic or WH-phrase.