16 Mai 2017 / Durée : 2h

Devoir commun Premières S

SUJET A

(l'utilisation de la calculatrice est autorisée)

Rendre le sujet complété par votre NOM : ………………………………………………… et CLASSE : ………..

Exercice 1 — 5 points

Le 1er janvier 2012, on a placé 5 000 € à un taux annuel de 4% sur un compte à intérêts composés, c'est-à-dire que les intérêts sont calculés sur le capital de l'année précédente.
Chaque année, on place 200 € supplémentaires sur ce compte après le calcul des intérêts.
On note $C_0=5\,000$ le capital disponible au 1er janvier de l'année 2012 et C_n le capital disponible au 1er janvier de l'année $2012+n$ après le dépôt annuel de 200 €.

1) Calculer C_1 et C_2 .
2) Justifier que pour tout entier naturel n , on a $C_{n+1}=1{,}04\,C_n+200$.
3) Démontrer que la suite (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
4) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n=C_n+5\,000$.
  a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et préciser son premier terme.
  b) En déduire l'expression de u_n puis de C_n en fonction de n .
5) Calculer le capital disponible à la fin de l'année 2020, arrondi à l'euro près.

6) Voici un algorithme en langage naturel qui calcule et affiche le nombre minimal d'années pour que le capital disponible dépasse 10 000 €.

  a) Compléter cet algorithme.
  b) Qu'affiche cet algorithme en sortie ?

```
Initialisation
   N prend la valeur 0
   C prend la valeur …………….
Traitement
   Tant que ………………….. Faire
      C prend la valeur ……………….
      N prend la valeur N + 1
   Fin Tant que
Sortie
   Afficher N
```

Exercice 2 — 5 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée. Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ un repère du plan.

1. **Affirmation 1**
   Soit D_1 la droite d'équation $D_1:\frac{3}{2}x-\frac{1}{9}y+\frac{1}{11}=0$. Le point $A(4\,;9)$ n'appartient pas à la droite D_1 alors que $B\left(-\frac{1}{15};-\frac{1}{11}\right)$ oui.

2. **Affirmation 2**
   Les droites $D_2:3x+y-5=0$ et $D_3:9x+4y-15=0$ sont parallèles non confondues.

3. **Affirmation 3**
   La droite $D_4:4x+7=0$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

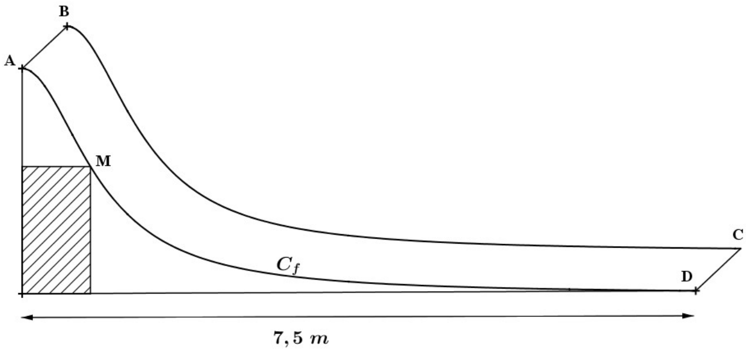
4. **Affirmation 4**
   15 est l'ordonnée à l'origine de la droite $D_5:7x+5y-15=0$.

5. **Affirmation 5**
   La droite D_6 qui passe par le point $C(5\,;2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ a pour équation $D_6:\ -8x+6y+28=0$.

Exercice 3 **6 points**

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :



Les points A, B, C et D sont fixes et correspondent aux extrémités du toboggan.

Le point M est mobile et se déplace le long de la courbe C_f .

Plusieurs contraintes devront être respectées pour la construction:

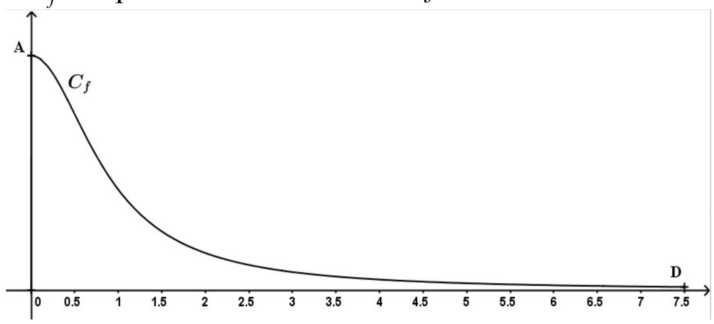
- Deux contraintes de sécurité : la hauteur du toboggan ne doit pas dépasser 2,8 m et, la tangente à C_f au point A doit être horizontale.
- Une contrainte esthétique : réaliser la plus grande fresque possible (de forme rectangulaire) sur le côté latéral du toboggan. (Partie hachurée)

***Les parties* A *et* B *sont indépendantes*.**

Partie A : Vérification du respect des contraintes de sécurité.

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe C_f représentant la fonction f définie sur l'intervalle [0; 7,5] par : $f(x)=\dfrac{8}{4x^2+3}$.

La courbe C_f est tracée ci-contre dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



On admet, pour cette partie, que $\forall x\in[0;7{,}5],\ f'(x)=\dfrac{-64x}{(4x^2+3)^2}$.

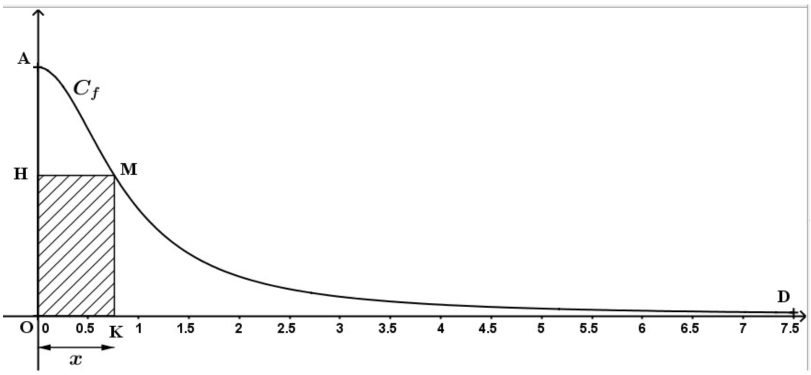
1) Calculer $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Que représente ce nombre pour la tangente à C_f au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$?

2) **a)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

   b) D'après vos précédents calculs, les contraintes de sécurité sont-elles respectées ? Justifier votre réponse.

Partie B : Vérification du respect de la contrainte esthétique.

Afin de respecter la contrainte esthétique, on chercher à déterminer la surface maximale du rectangle $OKMH$ (Voir graphique ci-dessous). On note x la longueur du segment $[OK]$ et on note A la fonction définie sur [0 ; 7,5] égale à l'aire du rectangle $OKMH$ en fonction de la longueur x.



1) Justifier que $\forall x \in [0;7{,}5],\ A(x) = \dfrac{8x}{4x^2+3}$.

2) **a)** Montrer que $\forall x \in [0;7{,}5],\ A'(x) = \dfrac{-32x^2+24}{(4x^2+3)^2}$.

b) Étudier les variations de la fonction A.

c) Comment doit-être placé le point M sur la courbe C_f pour que la contrainte esthétique soit respectée ?

Exercice 4 — 4 points

Dans une kermesse un organisateur de jeu dispose de deux roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur paye 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soit E et F les événements :

E : « à l'issue de la partie les 2 cases obtenues sont rouges »
F : « à l'issue de la partie une seule des deux cases obtenues est rouge »

Montrer que $P(E)=0{,}02$ et $P(F)=0{,}17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (on rappelle que le joueur doit payer 1 € pour jouer).

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
c. Calculer et interpréter l'espérance mathématique de X.

16 Mai 2017 / Durée : 2h

Devoir commun Premières S

SUJET B

(l'utilisation de la calculatrice est autorisée)

Rendre le sujet complété par votre NOM : ……………………………………………………… et CLASSE : ………..

Exercice 1 — 5 points

Le 1er janvier 2012, on a placé 4 000 € à un taux annuel de 3% sur un compte à intérêts composés, c'est-à-dire que les intérêts sont calculés sur le capital de l'année précédente.
Chaque année, on place 120 € supplémentaires sur ce compte après le calcul des intérêts.
On note $C_0 = 4\,000$ le capital disponible au 1er janvier de l'année 2014 et C_n le capital disponible au 1er janvier de l'année $2014+n$ après le dépôt annuel de 120 €.

1) Calculer C_1 et C_2 .
2) Justifier que pour tout entier naturel n , on a $C_{n+1} = 1{,}03\, C_n + 120$.
3) Démontrer que la suite (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
4) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = C_n + 4\,000$.
 a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et préciser son premier terme.
 b) En déduire l'expression de u_n puis de C_n en fonction de n .
5) Calculer le capital disponible à la fin de l'année 2020, arrondi à l'euro près.

6) Voici un algorithme en langage naturel qui calcule et affiche le nombre minimal d'années pour que le capital disponible dépasse 8 000 €.

 a) Compléter cet algorithme.
 b) Qu'affiche cet algorithme en sortie ?

```
Initialisation
   N prend la valeur 0
   C prend la valeur …………….
Traitement
   Tant que ………………..…. Faire
      C prend la valeur ……..……….
      N prend la valeur N + 1
   Fin Tant que
Sortie
   Afficher N
```

Exercice 2 — 5 points

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée. Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ un repère du plan.

1. **Affirmation 1**
 12 est l'ordonnée à l'origine de la droite $D_1 :\ -3x+5y-12=0$.

2. **Affirmation 2**
 La droite D_2 qui passe par le point $A(2\,;5)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ a pour équation
 $D_2 :\ -6x+14y-58=0$.

3. **Affirmation 3**
 Les droites $D_3 : 3x+4y-2=0$ et $D_4 : 15x+19y-10=0$ sont parallèles non confondues.

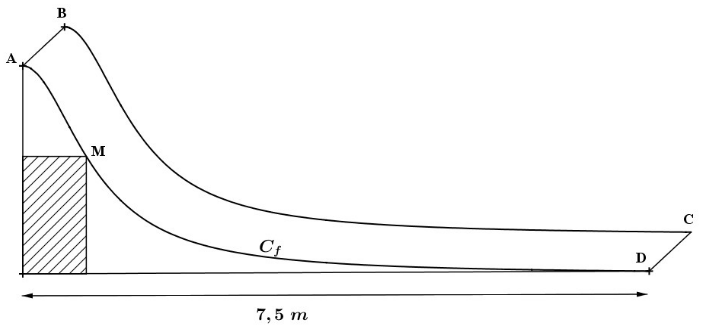
4. **Affirmation 4**
 Soit D_5 la droite d'équation $D_5 : \frac{1}{9}x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{11} = 0$. Le point $B(18\,;2)$ n'appartient pas à la droite D_5 alors que $C\left(\frac{1}{11}\,;\frac{1}{25}\right)$ oui.

5. **Affirmation 5**
 La droite $D_6 : 5x+8=0$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercice 3 **6 points**

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :



Les points A, B, C et D sont fixes et correspondent aux extrémités du toboggan.

Le point M est mobile et se déplace le long de la courbe C_f .

Plusieurs contraintes devront être respectées pour la construction:

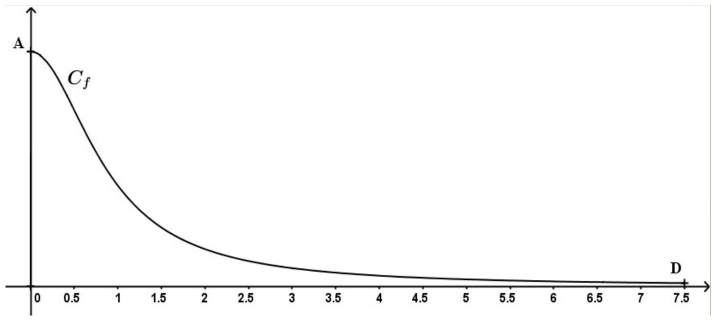
- Deux contraintes de sécurité : la hauteur du toboggan ne doit pas dépasser 1,9 m et, la tangente à C_f au point A doit être horizontale.
- Une contrainte esthétique : réaliser la plus grande fresque possible (de forme rectangulaire) sur le côté latéral du toboggan. (Partie hachurée)

***Les parties* A *et* B *sont indépendantes*.**

Partie A : Vérification du respect des contraintes de sécurité.

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe C_f représentant la fonction f définie sur l'intervalle [0; 7,5] par : $f(x)=\dfrac{9}{2x^2+5}$.

La courbe C_f est tracée ci-contre dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.

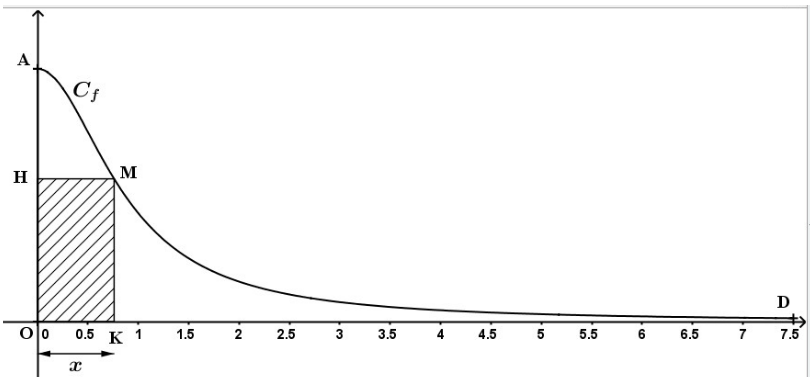


On admet, pour cette partie, que $\forall x\in[0;7,5],\ f'(x)=\dfrac{-36x}{(2x^2+5)^2}$.

1) Calculer $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Que représente ce nombre pour la tangente à C_f au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$?
2) a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
   b) D'après vos précédents calculs, les contraintes de sécurité sont-elles respectées ? Justifier votre réponse.

Partie B : Vérification du respect de la contrainte esthétique.

Afin de respecter la contrainte esthétique, on chercher à déterminer la surface maximale du rectangle $OKMH$ (Voir graphique ci-dessous). On note x la longueur du segment $[OK]$ et on note A la fonction définie sur [0 ; 7,5] égale à l'aire du rectangle $OKMH$ en fonction de la longueur x .



1) Justifier que $\forall x \in [0 ; 7{,}5],\ A(x)=\dfrac{9x}{2x^2+5}$.

2) **a)** Montrer que $\forall x \in [0 ; 7{,}5],\ A'(x)=\dfrac{-18x^2+45}{(2x^2+5)^2}$.

b) Étudier les variations de la fonction A .

c) Comment doit-être placé le point M sur la courbe C_f pour que la contrainte esthétique soit respectée ?

Exercice 4 — 4 points

Dans une kermesse un organisateur de jeu dispose de deux roues de 25 cases chacune.
La roue A comporte 5 cases noires et 20 cases rouges.
La roue B comporte 10 cases noires et 15 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur paye 2 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soit E et F les événements :

E : « à l'issue de la partie les 2 cases obtenues sont noires »

F : « à l'issue de la partie une seule des deux cases obtenues est noire »

Montrer que $P(E)=0{,}04$ et $P(F)=0{,}48$.

3. Si les 2 cases obtenues sont noires le joueur reçoit 12 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 4 € ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (on rappelle que le joueur doit payer 2 € pour jouer).

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer et interpréter l'espérance mathématique de X.