

**THIS AND EVERY THING INSIDE IS FREE TO  
USE AND SHARE AND MUST REMAIN FOR  
EVER LIKE THIS**

---

---

**THIS AND EVERY THING INSIDE IS FREE TO  
CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO DE ROBOT DELTA CON  
ARTICULACIONES AMORTIGUADAS  
TESIS DE GRADO  
USE AND SHARE AND MUST REMAIN FOR  
EVER LIKE THIS**

---

---

SANTIAGO RESTREPO RUIZ

**THIS AND EVERY THING INSIDE IS FREE TO  
USE AND SHARE AND MUST REMAIN FOR  
EVER LIKE THIS**

---

---



CONSTRUCCIÓN DE UN PROTOTIPO DE ROBOY DELTA CON ARTICULACIONES  
AMORTIGUADAS

SANTIAGO RESTREPO RUIZ  
UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO  
PROGRAMA DE INGENIERIA ELECTRÓNICA  
ARMENIA, QUINDÍO  
MARZO DE 2019



# Capítulo 1

## Robot Delta

### 1.1. Abstract

Contiene este documento el diseño y el modelo de un robot Delta. Diseñar será encontrar valores para las especificaciones topologicas del mecanismo, circuitos y análisis estructurales. Luego, modelar será encontrar una descripción matemática parametrizada y generalizada, de forma que se tendrá una descripción numérica que permite evaluar gran número de variaciones topologicas, como el número de cadenas cinemáticas, la orientación de las cadenas y la orientación de las bases, las longitudes de las extremidades.

Se encontrarán dos modelos dinámicos y un sólo modelo geométrico, dos modelos dinámicos, por conservación del momentum angular en los ejes articulares que es la aproximación de Newton. Además se construyó el modelo de la superposición geométrico-energética que es la aproximación de Lagrange a la solución. El modelo de Newton se utilizó para fabricar controladores para seguimiento óptimo de trayectorias, y el modelo de Lagrange para animar las simulaciones dinámicas y para permitirle a futuros trabajos conocer la forma del hiperespacio en todos los regímenes de la dinámica del artefacto.

The following contains the design and model of a Delta robot. Design is to specify the values for the topological characteristics in the mechanism, circuits and structural analysis. Then, to model is to find a parametric-n-generalized mathematical depiction of the geometry and the dynamics, in a way that it would be derived a numeric description which would allow for a vast number of topological variations, as the number of cinematic chains, the orientation of the chains and the orientation of the bases, the longitude of the extremities.

It would be found two dynamic models and only one geometric, two dynamic models, one derived from conservation of angular momentum which is the Newtonian approach. Also it was derived a model of geometric and energetic superposition which is the Lagrangian approach to the solution. The Newtonian model was used to derive optimal tracking control strategies, and the Lagrange model was used to animate the simulations and was intended to allow for further development as with it is possible to know the shape of the hyperspatial regime of the dynamics.

### 1.2. Introducción

El documento detalla la construcción de un robot en configuración Delta, adicionalmente, precisa las ecuaciones y algoritmos que intervienen en la operación ordenada de su manipulación geométrica y dinámica.

Un robot Delta es un ingenioso artefacto inventado por Raymond Clavel; La patente [1] menciona como inventores a Justus Laurens Herder y a Volkert Van Der Wijk, para este momento la posesión de la patente está asignada a PENTA ROBOTICS PATENTS BV.

Luego, el autor quiere aclarar, sobre la siguiente versión, que fue hecha para validar el requisito final de su educación como Ingeniero Electrónico, que sobre la base del anterior artefacto supone algunas adiciones de forma, amortiguadores-resortados, a fin de producir un elemento de mayor complejidad dinámica, modelarle y controlarle electrónicamente. Así, existe la intención de diseño, de modelado y de control.

Diseñar el mecanismo es definir los parámetros de las partes mecánicas, los parámetros de las partes eléctricas. Luego, todo el modelo es una descripción geométrica y de interacción de fuerzas.

La labor científica llevada a cabo en el margen de la declaración de Budapest por el autor utilizó como medio una simbología matemática que es equivalente a la tradicional, que supone su forma particular de resolver la necesidad de una descripción numérica del artefacto. Aquí, ante los jurados y demás miembros del comité de trabajo de grado de mi Alma Máter apelo a que la matemática es absoluta y su significado no está condicionado a la nomenclatura. Apelo además (conociendo el numeral 26) al numeral 19 de la declaración de Budapest, luego, al Artículo 18 y 19 de la declaración universal de los Derechos Humanos. De esta manera es mi derecho expresar la nomenclatura matemática como considere conveniente.

**Palabras claves:** *Robot Delta, Robot Paralelo, Cinemática para robot paralelos, Dinámica para robot paralelos, Aislamiento mecánico de acción amortiguada y resortada, Circuitos por realimentación analógica.*

### 1.3. Objetivo General

- Construir un prototipo robótico basado en la topología de un robot Delta.

### 1.4. Objetivos específicos

- Construir un prototipo de robot Delta para el posicionamiento del efecto final que incorpore mecanismos para regular la tensión de la correa articular y disminuir las vibraciones transmitidas desde la estructura, intencionalmente inestable, al efecto final.

Las especificaciones que responden a este objetivo están descritas a lo largo de toda la sección del diseño mecánico ??.

- Construir para el prototipo un circuito eléctrico que delimita las conexiones entre un procesador electrónico embebido y un conjunto de cuatro drivers genéricos para motores paso a paso que permita dos salidas conmutadas de voltaje para cargas inductivas y además lleve sensores de voltaje-corriente instantáneos a fin de evidenciar la potencia consumida por el artefacto en todo momento.

Estas especificaciones aparecen en la figuras 1.10a y ??.

- Modelar de manera generalizada la geometría de un robot Delta para describir las coordenadas de todos los puntos articulares y centrales del mecanismo, además de las relaciones fundamentales Jacobianas de velocidad y de aceleración.

Estas especificaciones las trata el capítulo del modelo 3. Específicamente las relaciones geométricas de los puntos aparecen descritas por el conjunto de ecuaciones axiomáticas de la sección 3.1.1. Las relaciones Jacobianas fundamentales se deducen diferencialmente de las expresiones anteriores y están descritas para la velocidad en la sección 3.2.3.1 y para la aceleración en la sección 3.2.3.2. Adicionalmente a la descripción geométrica, las relaciones cinemáticas se detallan en las secciones 3.2.1 y 3.2.2, cinemática directa y cinemática inversa, respectivamente.

- Diseñar una estrategia de control para el seguimiento óptimo de trayectorias accionando un circuito que responda a las indicaciones de un procesador electrónico y que por realimentación analógica controle la corriente en motores DC. La estrategia de control está descrita para un mecanismo que, a diferencia del prototipo, lleva motores de corriente directa.

El control aparece descrito en la sección 3.4, que utiliza el modelo de la sección 3.3.2. El circuito de realimentación analógica es el de la figura 1.8.

## 1.5. Delta tradicional

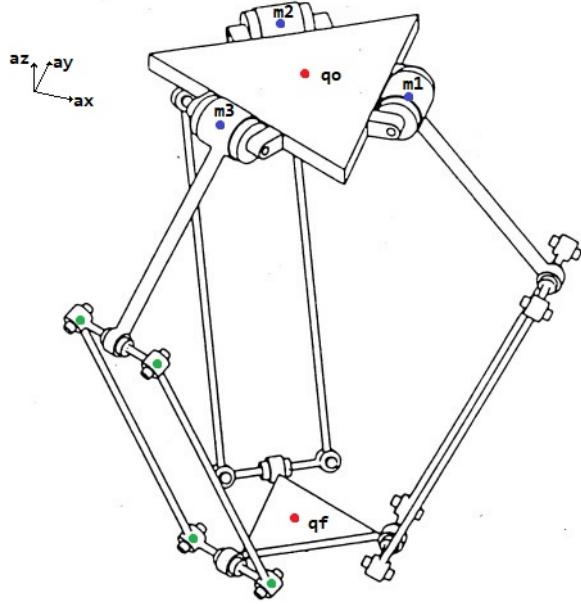


Figura 1.1: Ilustración hipersimplificada del mecanismo. Extraída de [2] y modificada con intenciones ilustrativas. Los puntos rojos marcan el origen de coordenadas sobre la plataforma superior y las coordenadas del efecto final sobre la plataforma. Los puntos azules la ubicación de los motores, los puntos verdes articulaciones omnidireccionales. Finalmente, puede apreciarse el plano cartesiano de la representación isométrica.

Un robot Delta está formado por una base superior estática y una base inferior móvil de menor tamaño. Al centro de la base móvil se le conoce como efecto final y es controlado indirectamente por tres motores que articulan tres extremidades de longitudes constates acopladas desde la base estática a la base móvil. Como la base superior permanece fija es matemáticamente conveniente ubicar el origen de coordenadas en su centro, además el eje x se orienta en la dirección de la primera articulación.

Una descripción más específica de la forma aparece en la Patente [1] del mecanismo.

## 1.6. Modificaciones al Delta

Ver las figuras 1.2 y 1.3.

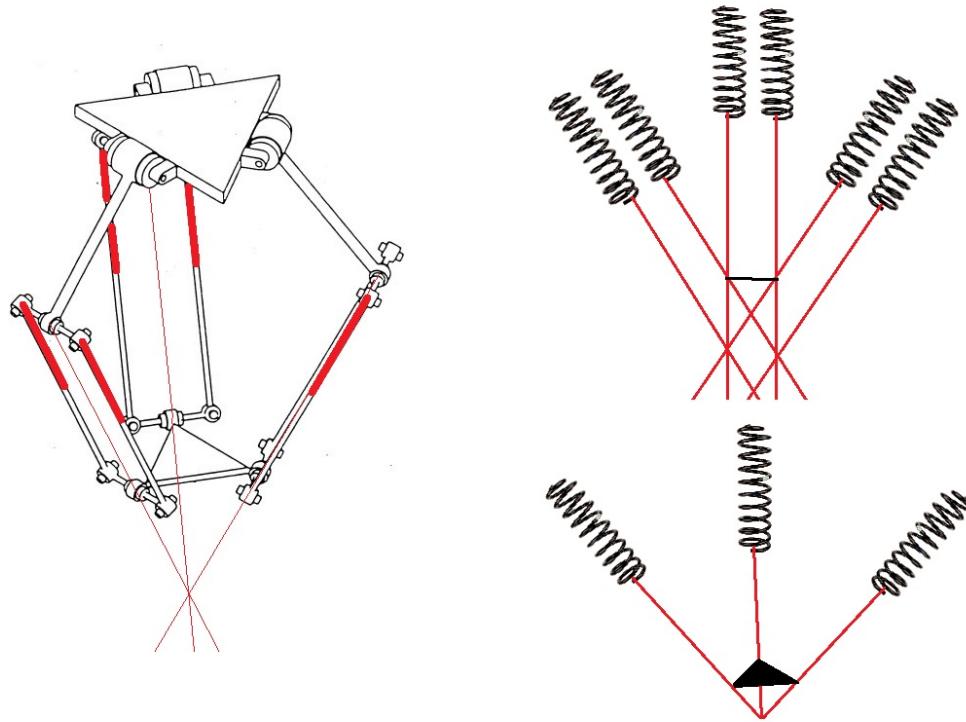


Figura 1.2: Ilustración hipersimplificada del mecanismo. Extraída de [2] y modificada con intenciones de ilustrar las variaciones estructurales implementadas en las extremidades. Esta modificación consigue amortiguar la transmisión de momento lineal del efecto a las articulaciones.

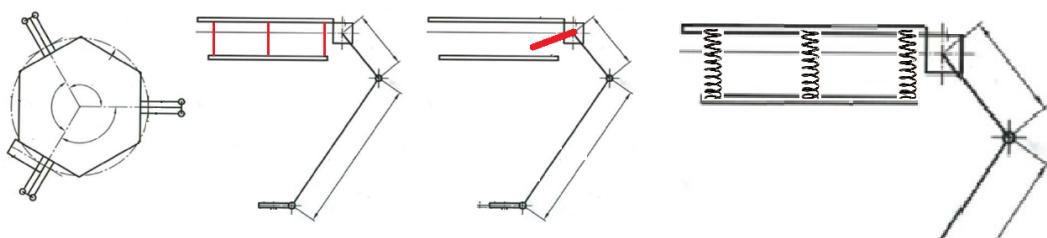


Figura 1.3: Ilustración del mecanismo. Extraída de [3] y modificada con intenciones de ilustrar las variaciones estructurales hechas para tensionar la correa de transmisión articular que transmite el movimiento de los motores a la articulación.

## 1.7. Características de un robot Delta

**El robot Delta tiene las siguientes características:**

1. Capacidad para transmitir al efecto aceleraciones considerables.
2. Un espacio de trabajo grande con una resolución de desplazamiento muy alta, aproximadamente continua.
3. Los motores sólo efectúan trabajo para desplazar la masa de las articulaciones, esto quiere decir que no cargan el peso de la estructura de soporte ni el peso de los motores mismos.
4. Las extremidades son aproximadamente independientes entre ellas lo que facilita el control.
5. Modelo cinemático inverso con solución analítica y sencilla; la locomoción más frecuente requiere de la solución cinemática inversa, lo que supone para el delta una operatividad rápida.
6. La estructura del robot puede construirse con poco dinero.

**El robot Delta tiene las siguientes características negativas:**

1. La forma del volumen del espacio de trabajo es complicada y con puntos singulares, es decir, dentro del espacio de trabajo hay puntos inalcanzables.
2. Modelo cinemático directo sin solución analítica -en cambio tiene solución geométrica. Esto quiere decir que no existe una función para determinar la solución cinemática directa, sino que la solución se encuentra resolviendo un set de ecuaciones.
3. La aceleración transmitida al efecto está condicionada a la posición de este. Esto quiere decir que hay lugares en el espacio de trabajo donde el mecanismo tiene más fuerza.

## 1.8. Especificaciones Técnicas

### 1.8.1. Las dimensiones del Artefacto construido

Ver la tabla 1.1.

Tabla 1.1: Tabla con las especificaciones de la variable  $\mathbb{R}L^{(\cdot)}$ .

Nombre	Especificación	Valor (m)
$\mathbb{R}L^{(1)}$ :	—Cero Cinemático - Plataforma del Piso—	0.4842
$\mathbb{R}L^{(2)}$ :	—Cero Cinemático - Base Motores—	0.0600
$\mathbb{R}L^{(3)}$ :	—Cero Cinemático - 'Articulación uno'—	0.1350
$\mathbb{R}L^{(4)}$ :	—Longitud de 'Extremidad uno'—	0.1550
$\mathbb{R}L^{(5)}$ :	—Media longitud del eje de 'Articulación dos'—	0.0185
$\mathbb{R}L^{(6)}$ :	—Longitud de amortiguadores en 'H'—	0.1250
$\mathbb{R}L^{(7)}$ :	—Longitud de varilla en 'H'—	0.2150
$\mathbb{R}L^{(8)}$ :	—Media longitud del eje de 'Articulación tres'—	0.0185
$\mathbb{R}L^{(9)}$ :	—Efecto Cinemático - Articulación tres (parte media)—	0.0500
$\mathbb{R}L^{(10)}$ :	—Efecto Cinemático - Efecto Final— $L^{(10)} = 0$	0.0500

### 1.8.2. Circuitos y motores

#### 1.8.2.1. Motores de Paso

Los motores utilizados para la locomoción del efecto son de paso, o motores paso a paso. El movimiento de este motor es discreto, de ahí su nombre motor de paso, porque el movimiento se realiza secuencialmente en pasos, cada paso incrementa en un número preciso de grados el eje del motor. Los motores utilizados son Nema17 de 200 pasos por vuelta,

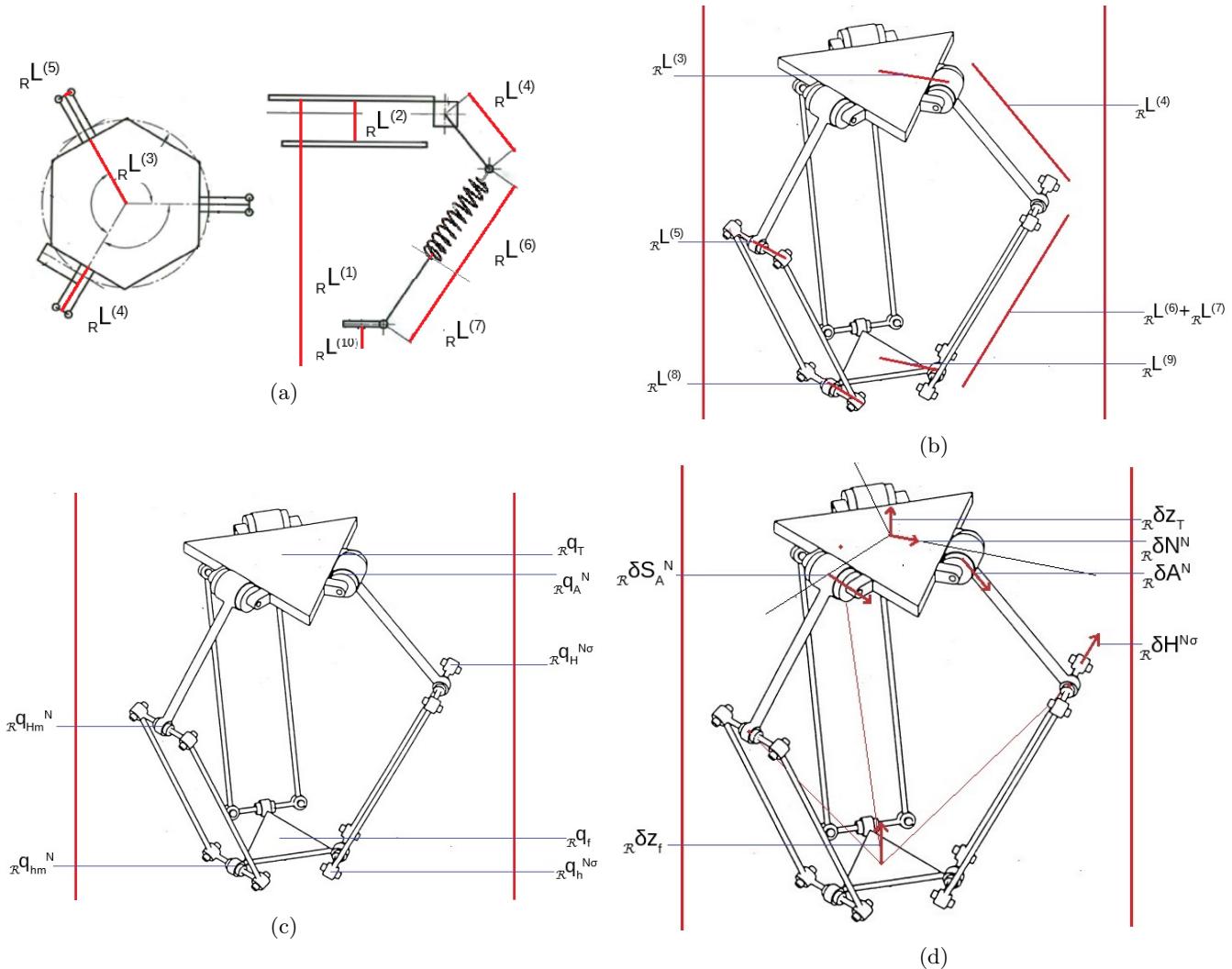


Figura 1.4: Ilustración hipersimplificada del mecanismo. Imagen fue extraída de [2] y modificada con intensiones ilustrativas. Imagen utilizada para entender el significado de la variable de longitudes de la tabla 1.1.

esto quiere decir que el torque es de  $1,7[N \cdot m]$  y que por cada paso dado el eje se desplaza 1.8 grados. Entre el eje del motor y el eje de la articulación actuada hay una relación de piñones de 1:3 y los controladores eléctricos de los motores le permiten aumentar 16 veces los pasos. Lo anterior quiere decir que la articulación sometida a la acción del motor tiene finalmente una resolución angular de  $200 * 3 * 16 = 9600$  pulsos/vuelta que es lo mismo que decir que el motor tiene una resolución angular de  $1,8/3/16 = 0,0375$  grados.

#### Mecanismos electrónicos de excitación para motores de Paso

Aquí la operación es básicamente siempre una máquina de estados. La máquina de estados cambia dependiendo del tipo de motor, pero para todos los motores del estándar Nema aplica que la máquina de estados elemental es una secuencia cíclica de movimiento. La tabla 1.2 contiene la acción ordenada por el controlador en el motor para causar el movimiento. La tabla 1.3 la máquina de estados que permite articular el movimiento desde un procesador electrónico y la tabla 1.4 la forma de configurar la resolución angular de cada paso. Las tres tablas se entienden en adición con el esquemático de la figura 1.6a. Los tres motores han sido conectados al procesador electrónico utilizado según la información en la tabla ??.

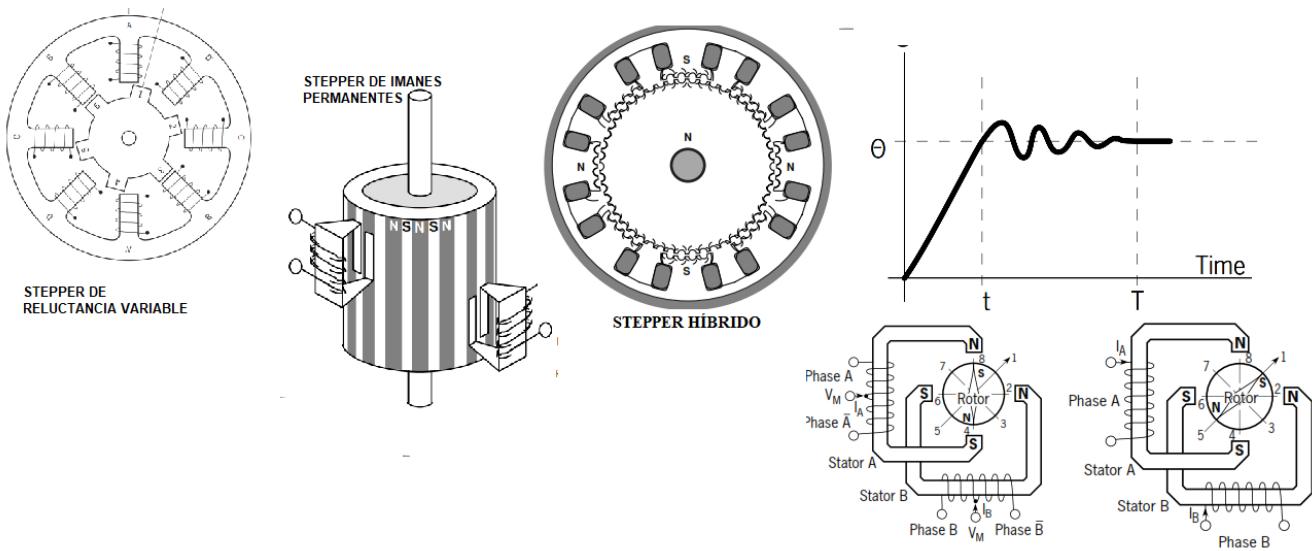
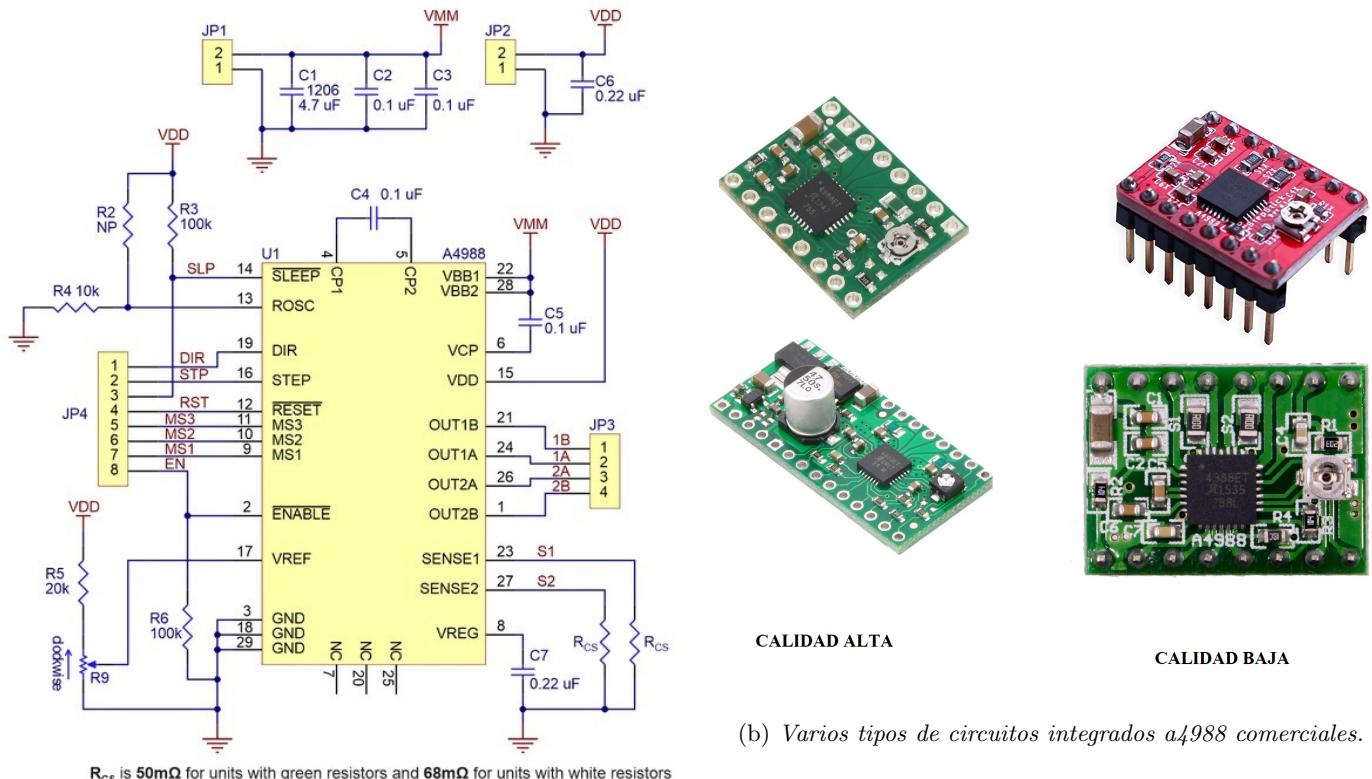


Figura 1.5: Motores de Paso bipolares, de cuatro cables. Todas estas las imágenes fueron extraídas de [4].



(a) Esquema elemental del integrado central del controlador A4988.

Figura 1.6: Imágenes representativas de los tipos de controladores para motores de paso que hay en el mercado, extraídas de varios sitios de Internet, no se mencionan referentes para no indicar parcialidades. La calidad del circuito está condicionada a la patente porque que en el mismo espacio el circuito de alta calidad dispone las resistencias alejadas del chip central, la calidad de los componentes podría variar. La mención a la ubicación de los componentes es porque usualmente el integrado central de los controladores lleva un dissipador de calor cuadrado con un área de contacto mayor a la superficie del integrado. Así, los circuitos de baja calidad son más propensos a entrar en corto por el dissipador. Además, se recomienda utilizar controladores de alta fiabilidad pues el motor podría perder pasos.

### 1.8.2.2. Circuitos para motores DC

Además de los motores de paso se utiliza también un pequeño motor DC para refrigerar los disipadores de los circuitos de potencia.

**Circuito para dirigir un ventilador DC simple** Ver la figura 1.7.

**Circuito para modular la intensidad y el sentido de la corriente en un motor DC** Ver la figura 1.8

Anotaciones importantes del circuito: El circuito está diseñado con componentes para soportar una corriente nominal de 5[A] bastaría con cambiar el banco de capacitores, el transformador y el MOSFET para operar un motor con una corriente marginal mayor. Además, en el circuito debe asegurarse que  $SHUNT = ((SHUNT_{V1})/(SHINT_{V2}))$ . El circuito, según está calibrado en los valores de resistencia, responde al valor de la corriente en Amperes '[A]' pero está modulada por el voltaje en el nodo 'VControl'. Así, 5 Volts en este nodo consiguen 5 Amperes a través de la bobina del motor y el voltaje en DIR controla el sentido. En el circuito el voltaje en 'VControl' se controla filtrando una señal de modulación de ancho de pulso en un filtro pasabajos de segundo orden de una frecuencia de corte de 200 Hz.

Según los compromisos adquiridos en los objetivos, aun cuando el robot haya sido construido con motores de paso, se deben fabricar estrategias de control dinámico para motores de corriente directa, como los motores de paso tienen movimientos discretos y aplican siempre el torque máximo y su locomoción es aproximadamente geométrica por lo que no necesitan de un estudio dinámico; en cambio, los motores DC son continuos y su control es un efecto dinámico y electrodinámico con fines de reducir la complejidad del control se diseñó un circuito que elimina la necesidad de un modelo electrodinámico del artefacto, es decir, el torque es la acción mecánica del motor pero es consecuencia, entre otras cosas, de la corriente en la bobina del eje del motor y de la fuerza magnética del campo constante de la armadura, estos dos factores se modelan en medios lineales por un solo valor real conocido como la constante de transmisión de torque eléctrico. Esto permitiría, si se conoce esta constante, manipular el torque del motor por una medida proporcional a la corriente por lo cual un circuito que module la corriente permite al procesador comunicar al motor las intenciones instantáneas de torque requerido. Implícita en el circuito anterior está la forma de realizar un lazo de realimentación analógico entre los terminales del MOSFET. Los elementos principales del circuito de la figura 4.3 son: 'El Motor', 'El Banco de Capacitores', 'El Amplificador Operacional para realimentación' y 'El Amplificador Operacional para el Filtro Butterworth de segundo orden'. El motor deberá poder soportar 5 amperes porque el circuito modula la corriente desde cero (0) hasta cinco (5) Amperes, el mecanismo electrónico de excitación es una señal 'PWM' generada por un pin lógico de 5 Volts a una frecuencia al menos de 1000 Hz. Una relación lineal traduce el ancho de pulso a su equivalente en corriente, el 100 % equivale a 5 Amperios exactos a través del motor, 50 % del ancho de pulso 2.5 Amperes y 0 % consigue, en simulación, un par de decenas de miliamperes porque los Mosfet suelen tener pérdidas causadas por la carga residual en la compuerta 'gate' y porque las resistencias tienen un margen de exactitud. Para este circuito el banco de capacitores es tres veces más grande que en el circuito usado para controlar el motor del ventilador porque de lo contrario no habrá suficiente carga almacenada para conseguir 5 Amperes. Esto sería: cuando el circuito se estabiliza la carga de los capacitores es el voltaje (30[V] en el nodo '+Vdc') multiplicado por la capacitancia (9900 [uF]), es decir, 0.25[C] Coulombs, que será la carga de estabilidad que suministra el banco. De ahí que el banco de capacitores deba cargarse primero. El sistema no puede operar estable si primero no se carga el banco de capacitores, el tiempo de espera para la carga es  $5 * 0.707 * R * C$ , si se permite al circuito mientras se carga tener 0 % de ancho de pulso en la señal de control, la resistencia que utiliza el cálculo del tiempo de carga es casi cero y el tiempo de carga será de apenas un par de segundos, en cambio, si el ancho de pulso es 100 % la resistencia que usa el cálculo de tiempo es la del motor más el valor de la resistencia de muestreo 'SHUNT' y esto implicaría unos cien segundos.

**Circuito de conexiones del prototipo**

Ver la figura 1.9.

**Fuente de Voltaje del prototipo**

Ver las figuras 1.10a y 1.10b.

**Prototipo construido**

Ver la figura 1.11a y 1.11b.

INSTANTE	CABLE(1)	CABLE(2)	CABLE(3)	CABLE(4)
1	[12V]	[GND]	[12V]	[GND]
2	[GND]	[12V]	[12V]	[GND]
3	[12V]	[GND]	[GND]	[12V]
3	[GND]	[12V]	[GND]	[12V]

Tabla 1.2: Maquina de estados elemental para los motores de Paso Bipolares Híbridos. Aplicar [V] significa energizar ese cable con el voltaje de funcionamiento del motor (12v). [GND] significa conectar el cable a tierra. La tabla asume que los Cables (1,2) son la primera bobina y que los cables (3,4) son la segunda bobina. Devolver el motor es invertir la secuencia.

DIRECCIÓN	DIR	STEP
DERECHA	[5V]	[5V]
IZQUIERDA	[GND]	[5V]
NULL	[5V]	[GND]
NULL	[GND]	[GND]

Tabla 1.3: Maquina de estados elemental para los motores de Paso Bipolares Híbridos controlados por los Drivers A4988 de pololu [5].

MS1	MS2	MS3	RESOLUCIÓN
[GND]	[GND]	[GND]	1 Step
[5V]	[GND]	[GND]	1/2 Step
[GND]	[5V]	[GND]	1/4 Step
[5V]	[5V]	[GND]	1/8 Step
[5V]	[5V]	[5V]	1/16 Step

Tabla 1.4: Maquina de estados de la configuración para motores de Paso Bipolares Híbridos controlados por los Drivers A4988 de pololu [5]. Indica la resolución del movimiento realizado cada vez que se envía un pulso a STEP.

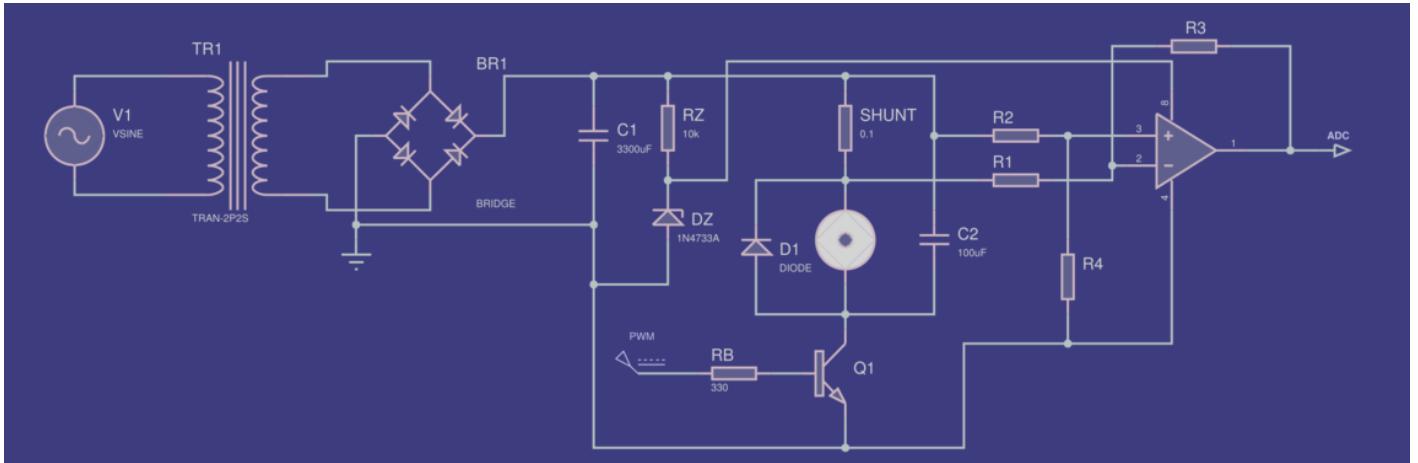


Figura 1.7: Circuito controlador para un Motor DC con sensor de corriente. El sentido de giro es siempre el mismo, la corriente del motor se controla modulando el ancho de pulso en el nodo ‘PWM’. El amplificador operacional está en configuración diferencial de forma que la salida del amplificador ‘ADC’ es una función de voltaje proporcional a la diferencia de potencial en la resistencia ‘SHUNT’, de este voltaje es posible deducir la corriente que fluye a través del motor. El diodo Zener ‘DZ’ de 5 volts es usado para proteger el amplificador operacional saturándolo.

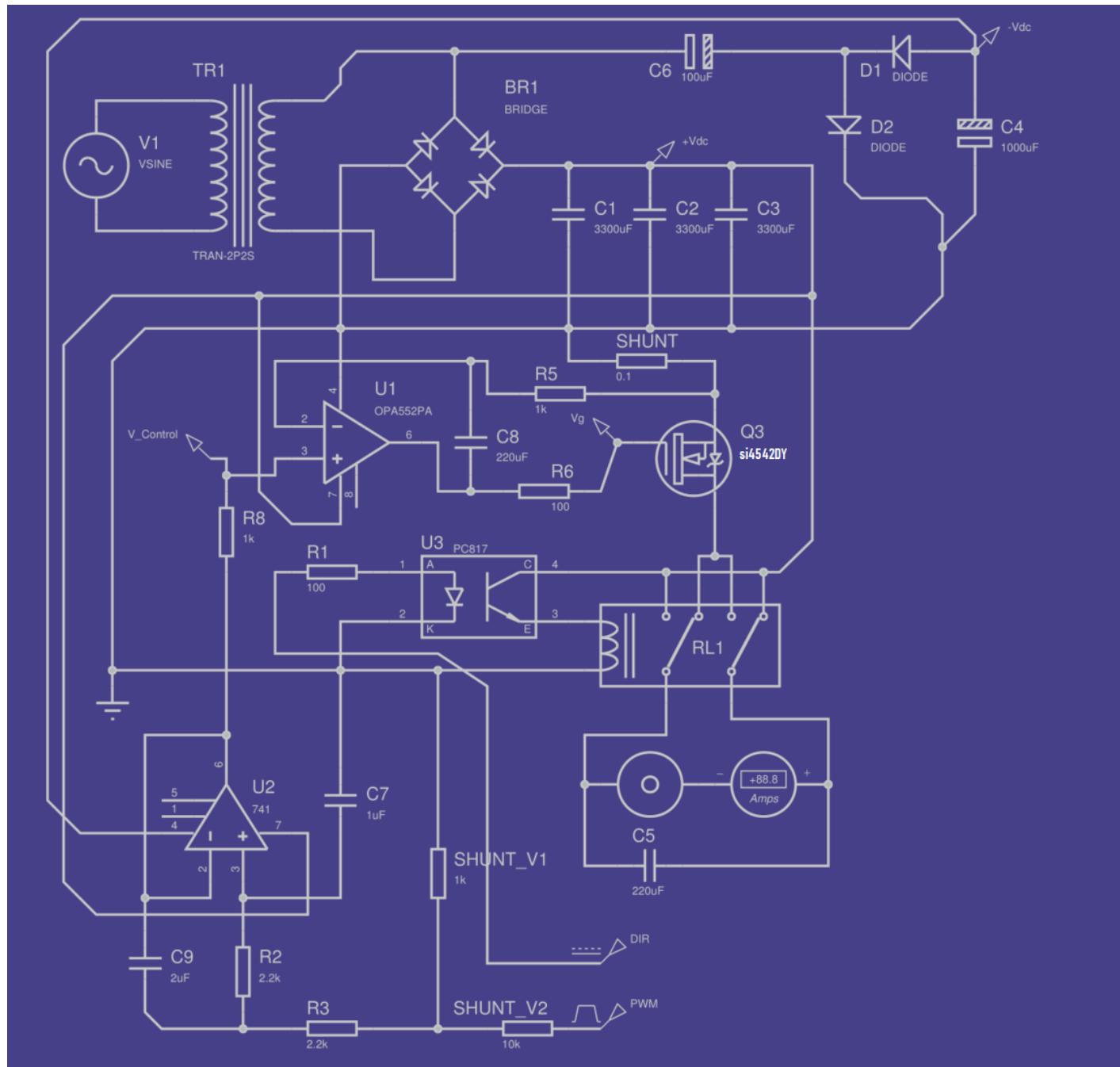


Figura 1.8: Circuito para controlar la corriente que fluye a un motor de corriente directa y su sentido ('DIR= 5[V] inversión de giro', 'DIR=0[V] giro regular'). La porción del circuito que hace la realimentación analógica fue extraída de [6].

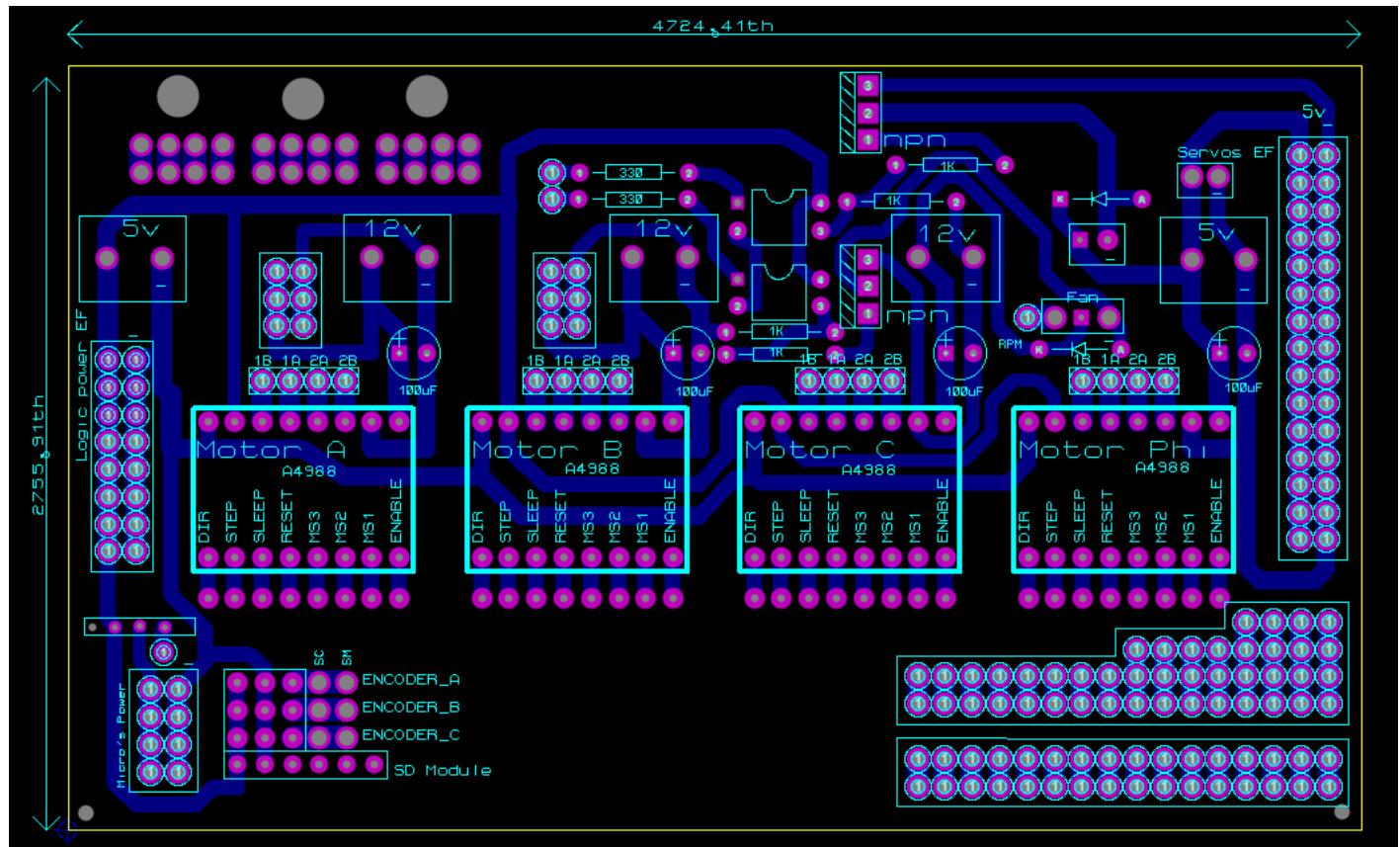
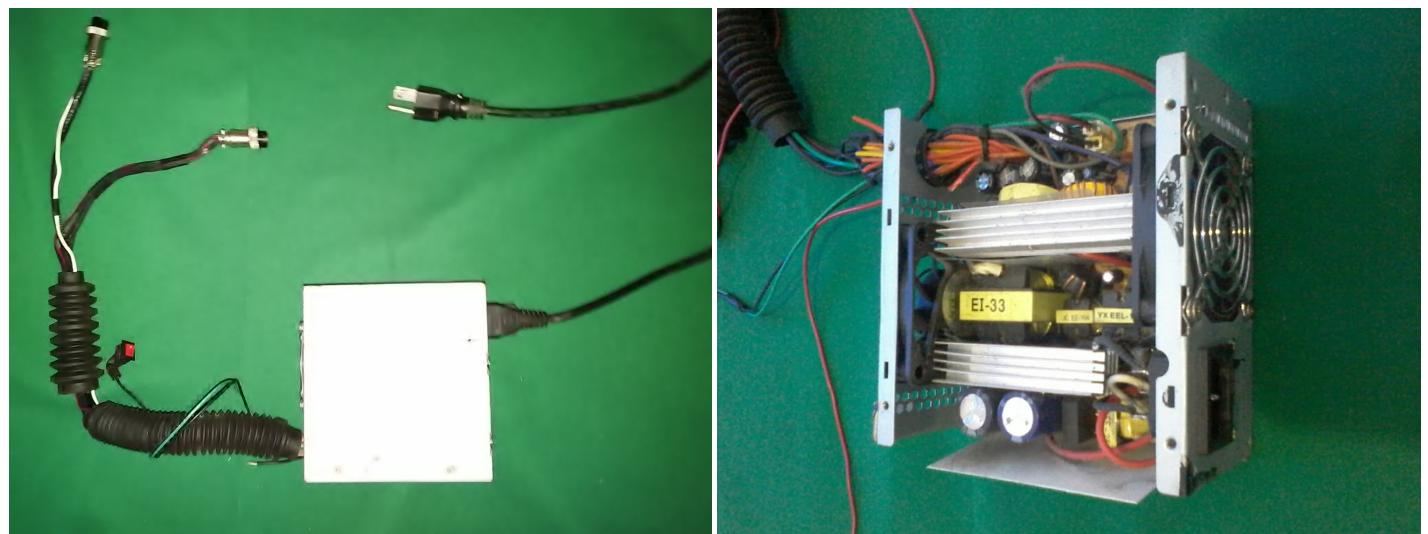


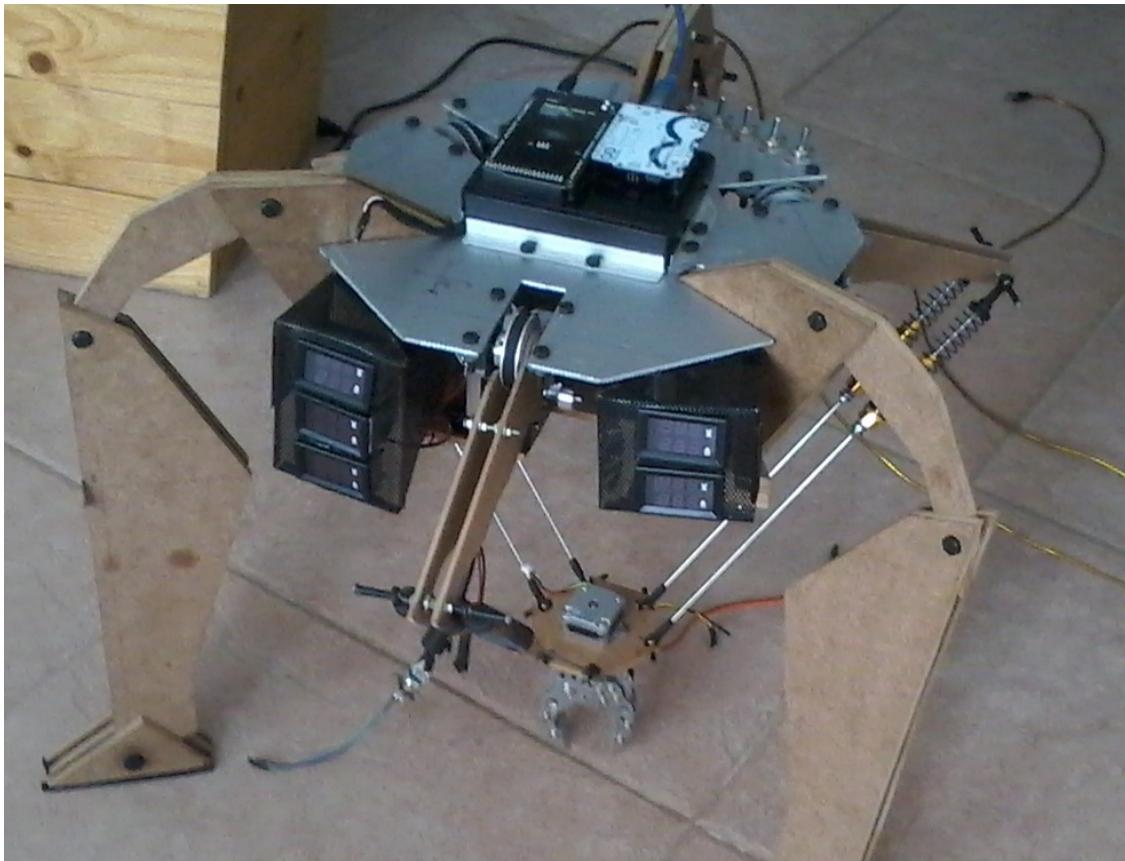
Figura 1.9: Circuito del prototipo, para conectar el procesador a los controladores y éstos a los motores y a la fuente de alimentación. El circuito de estas figuras es un esquema de conexiones. Que unifica al procesador embebido (Atmega2560 - “Arduino mega” [6]) con los drivers de potencia (A4988 de pololu [5]) para controlar motores de paso (Nema17 [7]), y además lleva dos transistores bjt NPN (TIP42 [8]) para conmutar el valor de potencial en las salidas de los recuadros (FAN 12 Volts, y 5Volts) pretendidas para cargas inductivas.



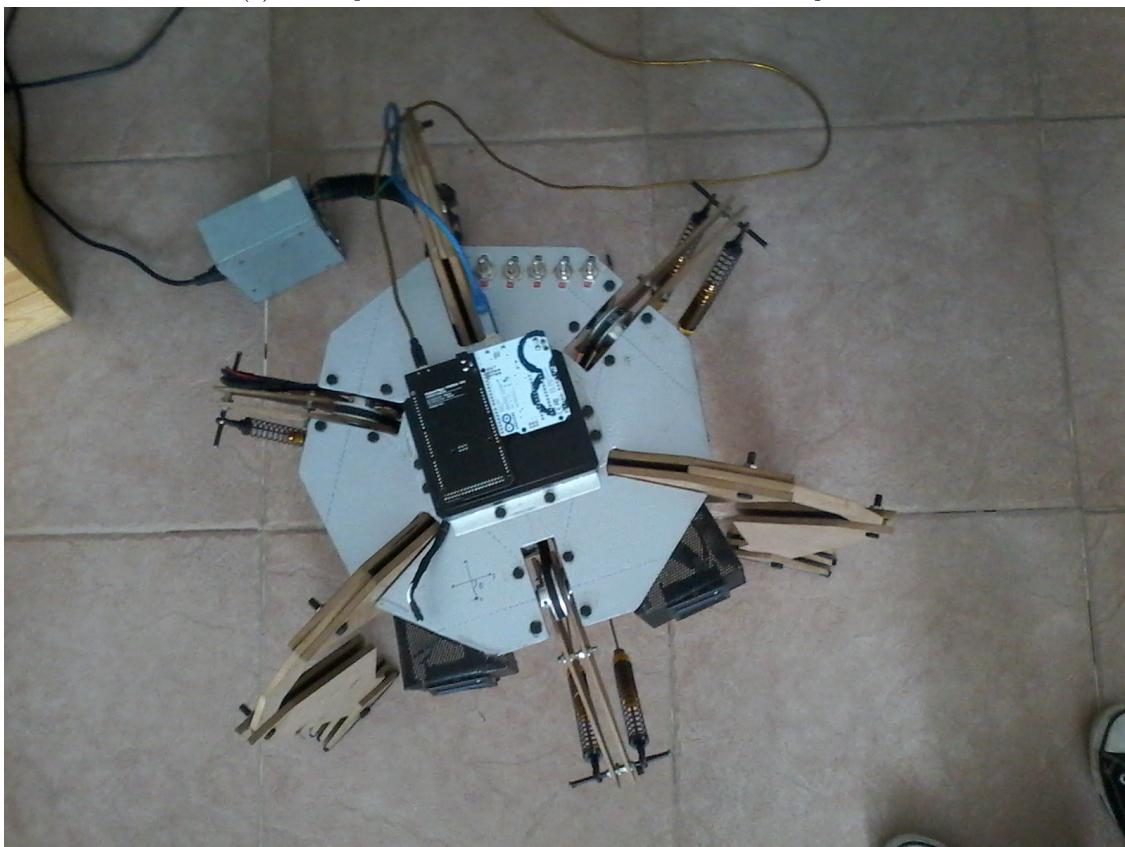
(a) Exterior de la fuente de voltaje del prototipo.

(b) Interior de la fuente de voltaje del prototipo.

Figura 1.10: Fuente de alimentación de voltaje continuo, de 300 Watts. Extraída de un computador viejo.



(a) Prototipo de robot delta con articulaciones amortiguadas.



(b) Prototipo de robot delta con articulaciones amortiguadas.



## Capítulo 2

# Notación matemática

Habiendo notado la necesidad de explicar la notación matemática procedo a escribir un capítulo dedicado al entendimiento de la misma.

Un tensor es un elemento que agrupa información en un sólo símbolo. De la descripción matemática se dice que es generalizada porque ésta es una facilidad de la descripción tensorial.

Sea un símbolo para posición, digamos que por facilidad se lo quiera llamar  $\mathbf{q}$ . El autor sostiene fuertemente que al símbolo anterior le hace falta una especificación explícita de la naturaleza de la variable, dícese de las posiciones en el régimen del universo que son definibles por tres números reales  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}$ . Podría estarse hablando de una posición en un plano  $\mathbb{R}^2\mathbf{q}$  o en una línea  $\mathbb{R}\mathbf{q}$ , de ahí que al concepto de posición  $\mathbf{q}$  falte una especificación explícita de su dimensionalidad.

Ahora supongase que se quiere, con un sólo símbolo, expresar la posición de todos los 'N' planetas del sistema solar. Según la notación del documento esto habría de expresarse como  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}^N$ . Así, si fueran a indexarse en orden de proximidad al sol  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}^{(N=1)}$  sería la posición de Mercurio y  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}^{(N=3)}$ , o simplemente  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}^{(3)}$  sería la posición de la tierra y si existieran más conceptos de posición sería imperativo nombrar la variable como  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}_{planetas}^N$ , así podría crearse una nueva variable de posición  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}_{sol}$  y una variable al origen del universo descrito  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}_0$ .

*La notación podría usarse para especificar la tercera ley de Kepler para todos los planetas al mismo tiempo como:*

*Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.*

$$norm2(\mathbb{R}^3\mathbf{q}_{planeta,maxOrbit}^N - \mathbb{R}^3\mathbf{q}_{sol})^3 \propto (\mathbb{R}T_{planeta}^N)^2 \quad (2.1)$$

Si se acepta que  $\mathbb{R}T_{planeta}^N$  es el período orbital,  $norm2()$  es la norma longitudinal cuadrática (el teorema de pitágoras, o la norma de distancias euclídeas), y si las posiciones de los planetas son evaluados para su separación máxima con el sol. Notando que para elevar al cuadrado o al cubo se utiliza un paréntesis que distingue los índices del tensor de la intención multiplicativa.

Idealmente en un tensor cada especificación (esquina o centro) dicta algo específico de la variable, pero solo hay tanto que puede caber en un símbolo escrito en particular, así la notación se permite especificar propiedades como cuando se habla de matrices de transición de estados Jacobianas variables en el tiempo como  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n A_{jac,t}$ . O si se hablara de un número de  $\eta$ -bits sería  $\mathbb{B}^\eta b$  almacenado en la posición de memoria  $0xffff$  podría, si se quiere, escribirlo así  $0xffff \mathbb{B}^\eta b$ . La notación permite describir cualquier cosa de manera generalizada, es sólo un juego de significados.  $\mathbb{R}^k Sym$  podría significar que el valor real numérico del simbolo es constante y hablar de las unidades del simbolo como  $\mathbb{R}^k Sym_{[Unit]}$ , o invertir el orden  $[Unit] Sym_k^{\mathbb{R}}$ . A game, simply a game of meaning.

Finalmente hace falta notar que sería posible, expresar  $\mathbb{R}^3\mathbf{q}_{planeta}^N$  como una matrix conteniendo todas las posiciones  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \mathbf{q}_{planeta}$ . O conteniendo cada una de las dimensiones por individual  $\mathbb{R}\mathbf{q}_{planetas}^{3,N}$ .

## 2.1. Lista de Símbolos

Por convención interna las multiplicaciones escalares usan  $\cdot$ , las multiplicación entre matrices  $*$ , el producto punto es  $\odot$  y el producto cruz es  $\otimes$ .

La norma de un vector es  $norm()$ , y la diagonal de una matriz la ordena la notación de  $diag()$ .

Saber que  $\mathbb{R}^\psi$  es un vector columna de tamaño  $number(\psi)$ , un vector columna como si se describiera a  $\mathbb{R}^\psi \times \mathbb{R}^1$ .

Sobre los indices es importante notar que cuando, e.g.  $\sigma$  y  $N$  aparecen solos valen como números  $number(\sigma)$  y  $number(N)$ .

En cambio la aparición de estos términos entre parentésis ( $\sigma$ ) y ( $N$ ) significa una instancia específica de indexación.

Por convención interna las longitud lineal específicas son  $\mathbb{R}\Delta L$ , y las longitudes lineales específicas con intensiones radiales son  $\mathbb{R}\Delta r$ .

$N$  significa 3, porque en el Delta tradicional hay tres extremidades, y  $\sigma$  significa 2 porque las extremidades llevan dos líneas paralelas.

### Longitudes

$\mathbb{R}^k L^{(1)}$	—Cero Cinemático - Plataforma del Piso—
$\mathbb{R}^k L^{(2)}$	—Cero Cinemático - Base Motores—
$\mathbb{R}^k L^{(3)}$	—Cero Cinemático - 'Articulación uno'—
$\mathbb{R}^k L^{(4)}$	—Longitud de 'Extremidad uno'—
$\mathbb{R}^k L^{(5)}$	—Media longitud del eje de 'Articulación dos'—
$\mathbb{R}^k L^{(6)}$	—Longitud de amortiguadores en 'H'—
$\mathbb{R}^k L^{(7)}$	—Longitud de varilla en 'H'—
$\mathbb{R}^k L^{(8)}$	—Media longitud del eje de 'Articulación tres'—
$\mathbb{R}^k L^{(9)}$	—Efector Cinemático - Articulación tres (parte media)—
$\mathbb{R}^k L^{(10)}$	—Efector Cinemático - Efector Final— $L^{(10)} = 0$

### Posiciones

$\mathbb{R}^3 q_0$	—Origen del Universo—
$\mathbb{R}^3 q_T$	—Origen cinemático, centro de la base 'T'—
$\mathbb{R}^3 q_A^N$	—Posición de 'Articulación uno'—
$\mathbb{R}^3 q_a^N$	—Posición del eje del motor—
$\mathbb{R}^3 q_{\Pi}^N$	—Punto de soporte superior de los amortiguadores 'T'—
$\mathbb{R}^3 q_t^N$	—Punto de soporte inferior de los amortiguadores 'T'—
$\mathbb{R}^3 q_{Hm}^N$	—Punto medio, 'Articulación dos'—
$\mathbb{R}^3 q_H^{N\sigma}$	—'Articulación dos'—
$\mathbb{R}^3 q_{hm}^N$	—Punto medio, 'Articulación tres'—
$\mathbb{R}^3 q_h^{N\sigma}$	—'Articulación tres'—
$\mathbb{R}^3 q_f$	—Efector cinemático, centro de la base 'f'—
$\mathbb{R}^3 q_{set,f}$	—Set point del controlador para el efector cinemático—
$\mathbb{R}^3 q_{fe}$	—Efector final—
$\mathbb{R}^3 q_{cm}$	—Coordenada del centro de masa móvil—
$\mathbb{R}^3 q_{Tcm}$	—Coordenada del centro de masa del subsistema 'T'—
$\mathbb{R}^3 q_\psi$	—Coordenada del centro de masa de las partes externas—
$\mathbb{R}^3 q_{cm,total}$	—Coordenada del centro de masa total—
$\pi \theta_A^N$	—Posición angular de la 'Articulación uno'—
$\pi \theta_a^N$	—Posición angular del motor—
$\pi^2 \phi_H^{N\sigma}$	—Posición angular de la 'Articulación dos'—
$\pi^2 \phi_h^{N\sigma}$	—Posición angular de la 'Articulación tres'—

### $\mathbb{R}^3 q$

### Velocidades

$\mathbb{R}^3 v_0$	—Velocidad del Universo = 0—
$\mathbb{R}^3 v_T$	—Velocidad del centro de la base 'T'—
$\mathbb{R}^3 v_{Hm}^N$	—Velocidad del punto medio, 'Articulación dos'—
$\mathbb{R}^3 v_H^{N\sigma}$	—Velocidad del punto de 'Articulación dos'—
$\mathbb{R}^3 v_{hm}^N$	—Velocidad del punto medio, 'Articulación tres'—
$\mathbb{R}^3 v_h^{N\sigma}$	—Velocidad del punto de 'Articulación tres'—

$\mathbb{R}^3 v_f$	—Velocidad del efecto cinemático—
$\mathbb{R}^3 v_{set,f}$	—Set point de velocidad para el efecto cinemático—
$\mathbb{R}^3 v_{cm}$	—Velocidad del centro de masa móvil—
$\mathbb{R}^3 v_{Tcm}$	—Velocidad del centro de masa del subsistema 'T'—
$\mathbb{R}^3 v_{cm,total}$	—Velocidad del centro de masa total—
$\mathbb{R}\omega_A^N$	—Velocidad angular de la 'Articulación uno'—
$\mathbb{R}\omega_a^N$	—Velocidad angular del motor—
$\mathbb{R}^3 v$	—
<b>Aceleraciones</b>	
$\mathbb{R}^3 a_T$	—Aceleración del centro de la base 'T'—
$\mathbb{R}^3 a_{Hm}^N$	—Aceleración del punto medio, 'Articulación dos'—
$\mathbb{R}^3 a_H^{N\sigma}$	—Aceleración del punto de 'Articulación dos'—
$\mathbb{R}^3 a_{hm}^N$	—Aceleración del punto medio, 'Articulación tres'—
$\mathbb{R}^3 a_h^{N\sigma}$	—Aceleración del punto de 'Articulación tres'—
$\mathbb{R}^3 a_f$	—Aceleración del efecto cinemático—
$\mathbb{R}^3 a_{set,f}$	—Set point de aceleración para el efecto cinemático—
$\mathbb{R}^3 a_{cm}$	—Aceleración del centro de masa móvil—
$\mathbb{R}^3 a_{Tcm}$	—Aceleración del centro de masa del subsistema 'T'—
$\mathbb{R}^3 a_{cm,total}$	—Aceleración del centro de masa total—
$\mathbb{R}\alpha_A^N$	—Aceleración angular de la 'Articulación uno'—
$\mathbb{R}\alpha_a^N$	—Aceleración angular del motor—
<b>Vectores unitarios</b>	
$\mathbb{R}^3 \delta x_0$	—Oriente del universo—
$\mathbb{R}^3 \delta y_0$	—Norte del universo—
$\mathbb{R}^3 \delta z_0$	—Vertical del universo—
$\mathbb{R}^3 \delta x_T$	—Oriente de la base 'T'—
$\mathbb{R}^3 \delta y_T$	—Norte de la base 'T'—
$\mathbb{R}^3 \delta z_T$	—Vertical de la base 'T'—
$\mathbb{R}^3 \delta x_f$	—Oriente de la base 'f'—
$\mathbb{R}^3 \delta y_f$	—Norte de la base 'f'—
$\mathbb{R}^3 \delta z_f$	—Vertical de la base 'f'—
$\mathbb{R}^3 \delta N_0$	—Ordenador primario de orientación—
$\mathbb{R}^3 \delta N^N$	—Ordenadores parciales de orientación—
$\mathbb{R}^3 \delta S^N$	—Eje de rotación de la 'Articulación uno'—
$\mathbb{R}^3 \delta A^N$	—Vector en la dirección de la 'Extremidad uno'—
$\mathbb{R}^3 \delta \theta_A^N$	—Vector en la dirección de giro de 'Articulación uno'—
$\mathbb{R}^3 \delta \theta_a^N$	—Vector en la dirección de giro del motor—
$\mathbb{R}^3 \delta H^{N\sigma}$	—Vector en la dirección de la 'Extremidad dos'—
$\mathbb{R}^3 \delta$	—
<b>Masas de segundo orden</b>	
$\mathbb{R}m_\psi$	—Masas externas—
$\mathbb{R}m_T$	—Masa de la base 'T'—
$\mathbb{R}m_A^N$	—Masa de la 'Extremidad uno'—
$\mathbb{R}m_H^{N\sigma}$	—Masa de la 'Extremidad dos'—
$\mathbb{R}m_f$	—Masa de la base 'f'—
$\mathbb{R}m_{cm}$	—Masa combinada que produce el centro de masa móvil—
$\mathbb{R}m_{Tcm}$	—Masa combinada que produce el centro de masa del subsistema 'T'—
$\mathbb{R}m_{cm,total}$	—Masa combinada total—
$\mathbb{R}m_c^{N\sigma}$	—Masa de carga en la 'Articulación dos'—
$\mathbb{R}I_A$	—Momento de inercia de la primera Extremidad—
<b>Desplazamientos Absolutos</b>	
$\mathbb{R}\Delta L_T^N$	—Encogimiento de los amortiguadores 'T'—
$\mathbb{R}\Delta L_H^{N\sigma}$	—Encogimiento de los amortiguadores 'H'—

$\mathbb{R}^k \Delta r_A^N$	—Radio de la polea en la 'Articulación uno'—
$\mathbb{R}^k \Delta r_a^N$	—Radio en la polea del eje del motor—
$\mathbb{R}^k \Delta$	—
<b>Constantes</b>	
$\mathbb{R}^k K_T^N$	—Constante elástica resortes 'T'—
$\mathbb{R}^k K_H^N\sigma$	—Constante elástica resortes 'H'—
$\mathbb{R}^k K_c^N$	—Constante elástica correa de transmisión—
$\mathbb{R}^k B_T^N$	—Constante viscosa amortiguadores 'T'—
$\mathbb{R}^k B_H^N\sigma$	—Constante viscosa amortiguadores 'H'—
$\mathbb{R}^k K T_m^N$	—Constante de transmisión de torque eléctrico a torque mecánico—
$\mathbb{R}^k B_A^N$	—Relación de piñones entre el motor y la 'Articulación uno'—
$\mathbb{R}^k B_m^N$	—Constante de fricción viscosa que percibe el motor—
$\mathbb{R}^k G$	—Campo Gravitacional en la superficie de la tierra— $-9,8 \cdot \mathbb{R}^3 \delta z_0$
$\mathbb{R}^k K$	—
<b>Variables varias</b>	
$\mathbb{Z} C_t^N$	—Conteo de Pulsos, Encoder—
$\mathbb{R} \Delta t_{C,t}$	—Periodo de interpretación de Encoders—

Tabla 2.1: Tabla con las especificaciones de todos las variables.

## Capítulo 3

# Modelo de un robot Delta

Modelos El modelo depende del nivel de especificidad en la descripción. A los mecanismos roboticos traslativos los rige la necesidad por describir la geometría y la dinámica. La dinámica es asignar energías y la geometría es asignar restricciones.

Especificamente, el presente mecanismo ha sido descrito en dos niveles de especificidad. Aquella descripción que especifica la dinámica y geometría del artefacto amortiguado, que tiene muchos más grados de libertad que el simple caso del robot Delta regular.

Pero incluso, el mecanismo tiene otras variables porque hay otros procesos como la temperatura de los rodamientos que soportan el eje axial de cada motor, para estas variables (y todas) hay relaciones matemáticas, ecuaciones, todo depende de qué tantos elementos haya necesidad de describir, por ejemplo la temperatura de los rodamientos nunca opera en valores cercanos a los límites, ni es numéricamente relevante a la dinámica y por tanto no se la considera. También un modelo está determinado por la naturaleza de la regresión hecha para la representación: Todos los modelos descritos acá son hechos usando física de medios lineales.

El modelo lo resumen las ecuaciones 3.2 cuando se describe el mecanismo sin amortiguadores.

El fin de la descripción dinámica es la de especificar los cambios temporales en la corriente del motor  $\frac{d}{dt} \mathbb{R}_{m,t}^N$  que producen el movimiento buscado, esta relación es la que busca la descripción de los controladores en la sección 3.4.

La geometría se estudia para entender las relaciones de trayectoria.

### 3.1. Subsistemas mecánicos

La expresión ' ${}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{\delta u}|_\rho$ ' es una matriz, una matriz de rotación del plano ortogonal al vector ' $\delta u$ ' que hace rotar un angulo de ' $\rho$ ' a cualquier vector en  $\mathbb{R}^3$  que multiplique. Para efectos de generalización las matrices de rotación estarán definidas por un angulo y un vector arbitrarios, se calculan según la expresión 3.1,

$${}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{\delta u}|_\rho = \begin{bmatrix} R11 & R21 & R31 \\ R12 & R22 & R32 \\ R13 & R23 & R33 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} R11 &= \cos \rho + (\delta u^x)^2 (1 - \cos \rho), \\ R21 &= \delta u^x \delta u^y (1 - \cos \rho) - \delta u^z \sin \rho, \\ R31 &= \delta u^x \delta u^z (1 - \cos \rho) + \delta u^y \sin \rho, \\ R12 &= \delta u^y u^x (1 - \cos \rho) + u^z \sin \rho, \\ R22 &= \cos \rho + (\delta u^y)^2 (1 - \cos \rho), \\ R32 &= \delta u^y \delta u^z (1 - \cos \rho) - \delta u^x \sin \rho, \\ R13 &= \delta u^z u^x (1 - \cos \rho) - u^y \sin \rho, \\ R23 &= \delta u^z \delta u^y (1 - \cos \rho) + \delta u^x \sin \rho, \\ R33 &= \cos \rho + (\delta u^z)^2 (1 - \cos \rho). \end{aligned}$$

### 3.1.1. Axiomas Estructurales

Axiomas de la estructura sin amortiguadores.

Axiomas de posición relativa en la estructura sin amortiguadores.

$$\mathbb{R}^3 q_0 = [0, 0, 0]^T, \quad (3.2a)$$

$$\mathbb{R}^3 q_T = \mathbb{R}^3 q_0 + \mathbb{R} L^{(1)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta z_0, \quad (3.2b)$$

$$\mathbb{R}^3 q_A^N = \mathbb{R}^3 q_T + \mathbb{R} L^{(3)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N, \quad (3.2c)$$

$$\mathbb{R}^3 q_{Hm}^N = \mathbb{R}^3 q_A^N + \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^N, \quad (3.2d)$$

$$\mathbb{R}^3 q_H^{N\sigma} = \mathbb{R}^3 q_{Hm}^N + \mathbb{R} L^{(5)} \cdot ((-1)^\sigma) \cdot \mathbb{R}^3 \delta S^N, \quad (3.2e)$$

$$\left\| \mathbb{R}^3 q_h^{N\sigma} - \mathbb{R}^3 q_H^{N\sigma} \right\|^2 = (L^{(6)} + L^{(7)})^2, \quad (3.2f)$$

$$\mathbb{R}^3 q_h^{N\sigma} = \mathbb{R}^3 q_{hm} + L^{(8)} ((-1)^\sigma) \mathbb{R}^3 \delta S^N, \quad (3.2g)$$

$$\mathbb{R}^3 q_{hm} = \mathbb{R}^3 q_f + \mathbb{R} L^{(9)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N, \quad (3.2h)$$

$$\mathbb{R}^3 q_f = [\mathbb{R}^{(x)} q_f, \mathbb{R}^{(y)} q_f, \mathbb{R}^{(z)} q_z]^T. \quad (3.2i)$$

Se hace notar que existe un sólo axioma cuadrático, las demás expresiones son mucho menos complicadas. Las axiomas más complejos son los vectoriales porque hay expresiones trigonométricas internas en la matriz de rotación. Igual las restricciones son instantáneamente válidas y por tanto no importa concebir las expresiones de rotación como matrices regulares.

Axiomas vectoriales en la estructura sin amortiguadores.

$$\mathbb{R}^3 \delta N^N = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta z_0}|_{2\pi(N-1)/N}) * \mathbb{R}^3 \delta N_0, \quad (3.2j)$$

$$\mathbb{R}^3 \delta S^N = (\text{hemisferio}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta z_T, \quad (3.2k)$$

$$\mathbb{R}^3 \delta A^N = (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N}|_{\theta_A^N}) * \mathbb{R}^3 \delta N^N, \quad (3.2l)$$

$$\mathbb{R}^3 \delta H^{N\sigma} = \frac{\mathbb{R}^3 q_h^{N\sigma} - \mathbb{R}^3 q_H^{N\sigma}}{L^{(6)} + L^{(7)}}. \quad (3.2m)$$

$$(3.2n)$$

Donde:

*hemisferio* esta explicado un poco más en la cinemática directa 3.2.1, pero supone (-1) cuando las articulaciones descansan hacia abajo, o (+1) si se sostienen apuntando hacia arriba, con respecto a la plataforma 'T'.

$\mathbb{R}^3 \delta N_0$  es el descriptor elemental de la orientación y coincide con la orientación de la primera extremidad, todas las extremidades se distribuyen radialmente uniformes sobre el plano que es ortogonal a  $\mathbb{R}^3 \delta z_T$ , y  $\mathbb{R}^3 \delta N_0$  corresponde a  $\mathbb{R}^3 \delta N^{(1)}$   $\forall \Delta L_T = 0$ .

Para clarificar la expresión:

$(-1)^\sigma$  produce: ' $(-1) \forall \sigma = (1)$ ', y ' $(+1) \forall \sigma = (2)$ '.

Los axiomas producen la forma del artefacto como muestra la figura 3.1:

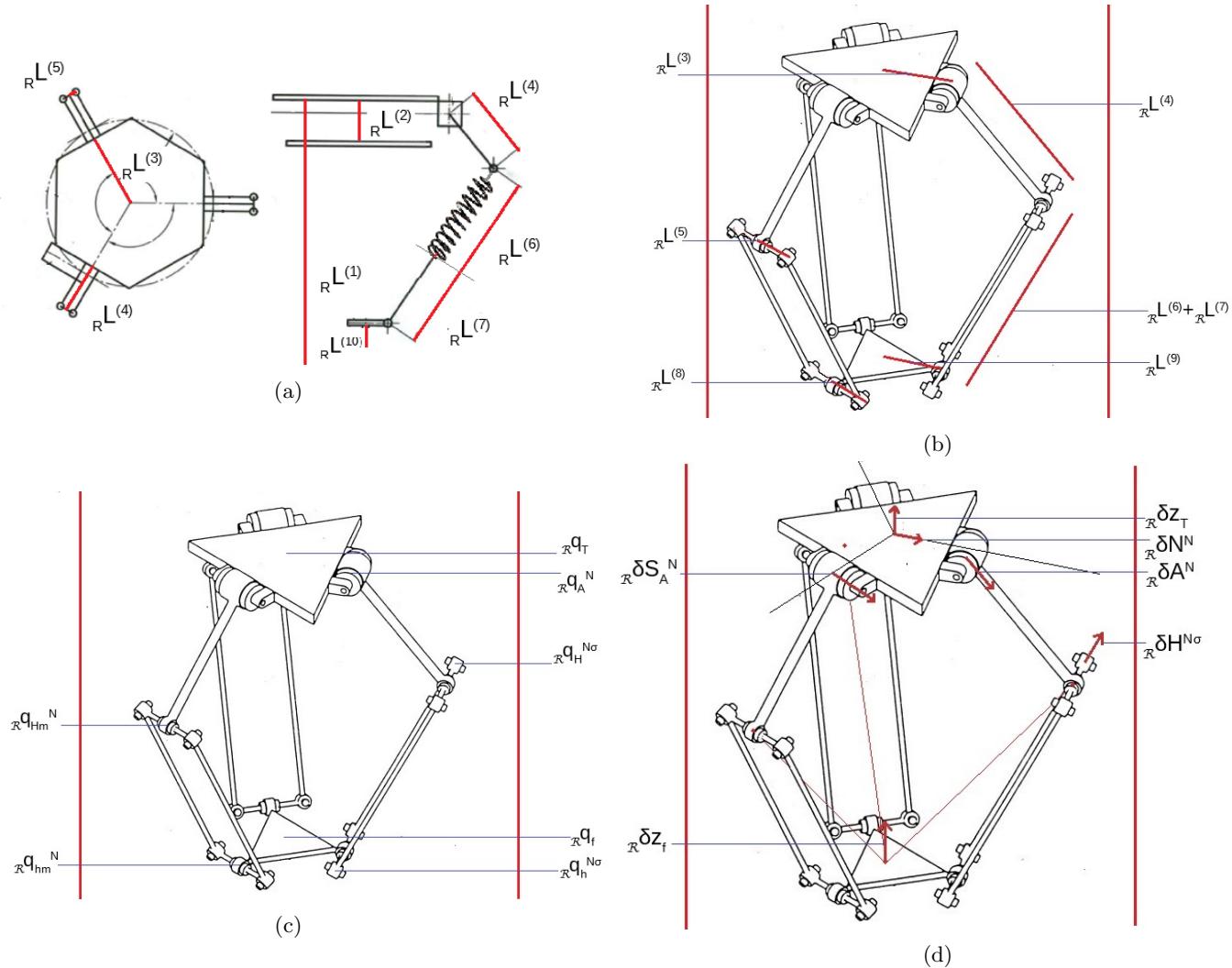


Figura 3.1: Ilustración hipersimplificada del mecanismo. Imagen fue extraída de [2] y modificada con intensiones ilustrativas.

### 3.1.2. Subsistema 'A'

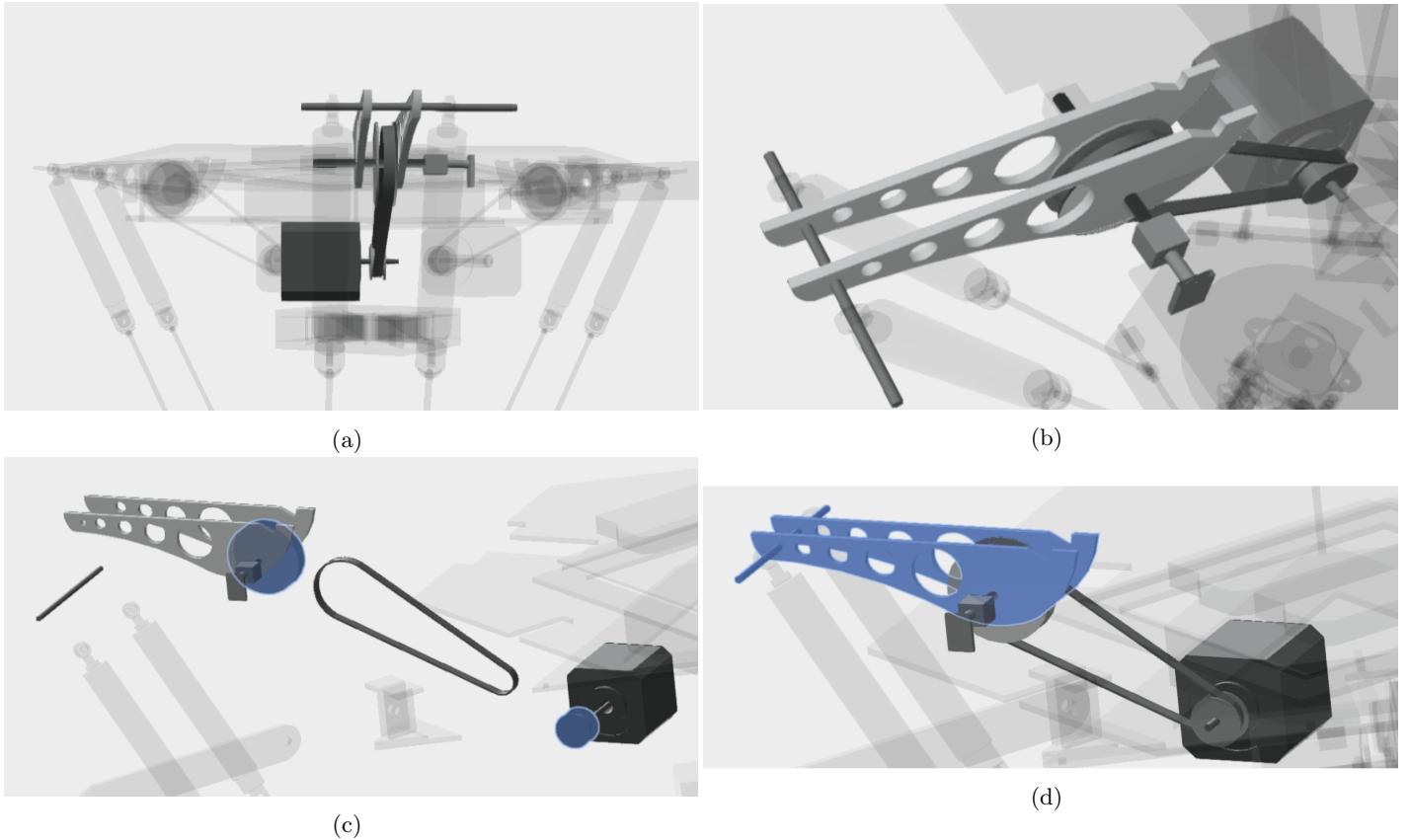


Figura 3.2: Partes del Subsistema 'A'.

El subsistema 'A' estudia los procesos que ocurren a la 'Extremidad Uno'.

#### 3.1.2.1. Momento de Inercia de la primera Extremidad

El momento de inercia de un cuerpo es una medida que comprende la mecánica clásica para representar la imposición ante el movimiento de rotación. Este, el momento de inercia, debe postularse para un cuerpo y para un eje de rotación. Aquí los momentos de inercia son escalares  $\mathbb{R}$  porque no hay torsiones y las rotaciones siempre son perpendiculares a su eje.

El momento de inercia  $\mathbb{R}I_A$  se le calcula a un cuerpo, la 'Extremidad Uno' vista en figura 3.3. Y la rotación que experimenta el cuerpo está definida por el eje de rotación, un eje es un punto y un vector, lo que rota es el plano ortogonal al vector que pasa por el punto, éstas aseguraciones geométricas no son necesarias porque se asumen dadas por la fisionomía de la máquina, pero forman la base de las suposiciones vectoriales.

El vector que define la rotación de la N-ésima 'Primera Extremidad' es  $\mathbb{R}^3\delta S^N$  (figura 3.4a) que comparte el punto  $\mathbb{R}^3q_A^N$ . Las base vectorial de los N planos que rotan por acción de los N actuadores principales es ' $\mathbb{R}^3\sigma N^N \perp (\mathbb{R}^3\sigma N^N \times \mathbb{R}^3\delta S^N)$ '.

Para cuerpos con densidad homogénea el momento de inercia puede obtenerse con asimilaciones geométricas asociando toda la masa del cuerpo al centro geométrico del objeto, y para cuerpos compuestos por distintas partes (todas con densidades homogéneas) el momento de inercia puede obtenerse asumiendo que el cuerpo rotado es finalmente un conjunto de puntos radialmente condicionados a las rotaciones, el momento de inercia de los discos no es un punto, es un círculo de masa distribuida dibujado con centro en  $\mathbb{R}^3q_A^N$  y con la mitad del radio original, ver figura 3.3.

Las partes distinguibles en el subsistema 'A' que se oponen al movimiento angulado de  $\mathbb{R}^3\delta S^N$  son las que aparecen resaltadas en las figuras 3.2d y 3.2c, y además peso instantáneo de carga visto en el punto central de la barra del eje de la 'Articulación Dos'  $\mathbb{R}^3q_{Hm}^N$ .

Para la 'Extremidad Uno' que es rotada por  $\mathbb{R}^3\delta S^N$  el momento de inercia es (aproximadamente) la sumatoria radialmente

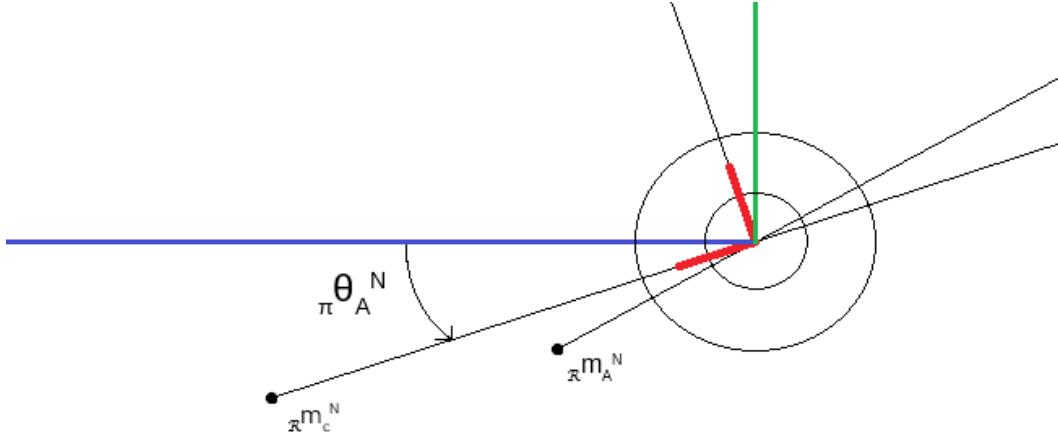


Figura 3.3: Esquema del plano de rotación de la 'Extremidad Uno'. Ésta es la versión del cuerpo que entiende el cálculo del momento de inercia de la sección 3.1.2.1. La linea verde es la normal terrestre, la linea azul es  $\mathbb{R}^3\delta N^N$ , la linea roja al punto de la masa de carga es  $\mathbb{R}^3\delta\theta^N$ , el radio mayor representa la polea sobre la 'Extremidad uno' y el radio menor es la polea en el motor. -El momento de inercia del cilindro que es la polea adherida al eje del motor no se ve afectado por la presencia de la polea, el eje percibe dos cuerpos concéntricos.

alejada del punto  $\mathbb{R}^3q_A^N$ .

$$\mathbb{R}I_A^N = \mathbb{R}I_{A1}^N + \mathbb{R}I_{A2}^N + \mathbb{R}I_{A3}^N + \mathbb{R}I_{A4}^N. \quad (3.3)$$

Donde:

$\mathbb{R}I_{A1}^N$ , es el momento de inercia instantáneo debido a la de Masa de Carga  $\mathbb{R}m_c^N$ , y se calcula asumiendo una masa puntual en el punto  $\mathbb{R}^3q_{Hm}^N$  radialmente alejada del pivote de giro en  $\mathbb{R}^3q_A^N$ .

$$\mathbb{R}I_{A1}^N = \mathbb{R}m_c^N \cdot (\text{norm}(\mathbb{R}^3q_{Hm}^N - \mathbb{R}^3q_A^N))^2. \quad (3.4)$$

$\mathbb{R}I_{A2}^N$ , es el momento de inercia constante debido a la distribución volumétrica de masa de la 'Extremidad Uno' en si misma, que es la que aparece subrayada en la figura 3.2d, que puede entenderse como una masa puntual de valor  $\mathbb{R}m_A^N$  en el punto  $\mathbb{R}^3q_{Acm}^N$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}I_{A2}^N &= (\mathbb{R}m_A^N) \cdot (\text{norm}(\mathbb{R}^3q_{Acm}^N - \mathbb{R}^3q_A^N))^2, \\ \mathbb{R}I_{A2}^N &= 0,5 \cdot (\mathbb{R}m_A^N) \cdot (\text{norm}(\mathbb{R}^3q_{Hm}^N - \mathbb{R}^3q_A^N))^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\mathbb{R}I_{A3}$  y  $\mathbb{R}I_{A4}$ , son respectivamente el momento de inercia constante de las poleas dentadas en la extremidad y en el motor, subrayadas en la figura 3.2c. Para no introducir nuevas variables permitáseme definir los radios de las poleas como desplazamientos absolutos de longitud  $\mathbb{R}\delta L$  y sus masa  $\mathbb{R}m$ .

$$\mathbb{R}I_{A3} = 0,5 \cdot (\mathbb{R}m_{PoleaSuperior}) \cdot (\mathbb{R}\Delta L_{RadioPoleaSuperior})^2, \quad (3.6)$$

$$\mathbb{R}I_{A4} = 0,5 \cdot (\mathbb{R}m_{PoleaMotor}) \cdot (\mathbb{R}\Delta L_{RadioPoleaMotor})^2. \quad (3.7)$$

### 3.1.2.2. Relaciones entre el motor y la Extremidad Articulada

El subsistema 'A' concibe la integración de las fuerzas actuadas de los motores con la primera articulación de cada cadena, si todo el subsistema es coplanar entonces las relaciones de transmisión de esfuerzo del motor a esfuerzo mecánico articular ocurre linealmente a través de la relación de piñones  $\mathbb{R}B_A^N$ . Por lo que las siguientes relaciones entre magnitudes son ciertas:

$$\pi\theta_a^N = \mathbb{R}B_A^N \cdot \pi\theta_A^N, \quad (3.8)$$

$$\mathbb{R}\omega_a^N = \mathbb{R}B_A^N \cdot \mathbb{R}\omega_A^N, \quad (3.9)$$

$$\mathbb{R}\alpha_a^N = \mathbb{R}B_A^N \cdot \mathbb{R}\alpha_A^N, \quad (3.10)$$

$$\mathbb{R}\tau_a^N = (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot \mathbb{R}\tau_A^N. \quad (3.11)$$

En forma de operaciones matriciales el computo toma menos tiempo, y las expresiones anteriores son entonces:

$$\pi^N \theta_a = \text{diag}(\mathbb{R}^N B_A) \cdot \pi^N \theta_A, \quad (3.12)$$

$$\mathbb{R}^N \omega_a = \text{diag}(\mathbb{R}^N B_A) * \mathbb{R}^N \omega_A, \quad (3.13)$$

$$\mathbb{R}^N \alpha_a = \text{diag}(\mathbb{R}^N B_A) * \mathbb{R}^N \alpha_A, \quad (3.14)$$

$$\mathbb{R}^N \tau_a = (\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A))^{-1} * \mathbb{R}^N \tau_A. \quad (3.15)$$

Las expresiones anteriores asumen que la relación de piñones no invierte el sentido de giro, mas específicamente la relación dada por  $\mathbb{R}B_A^N$  se presume es causada por una polea dentada, los modelos sirven aún si la relación invierte el sentido de giro, para esto el valor de  $\mathbb{R}B_A^N$  debería ser negativo.

$\mathbb{R}B_A^N$  el término instantáneo que modula la transmisión de esfuerzo entre el motor y la articulación, y es internamente una función de la separación de los ejes, el término de transmisión depende del (no está modelado,  $\mathbb{R}B_A^N$  aparece en el documento como valor constante igual a la relación de radios en los ejes) encogimiento instantáneo de los amortiguadores 'T'.

Las expresiones 3.8 hasta 3.15 pueden ser expandidas aún mas si se consideran las magnitudes angulares por sus componentes vectoriales, para todo  $\theta_{A/a}$ ,  $\omega_{A/a}$  y  $\alpha_{A/a}$ , existe un  $\mathbb{R}^3 \delta \theta^N$  que es un vector unitario variable y que apunta en la dirección de rotación positiva que sufren todos los puntos de la primera extremidad en cada cadena,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \delta \theta_A^N &= (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N} |_{\theta_A^N} * \mathbb{R}^3 \delta N^N) \otimes \mathbb{R}^3 \delta S^N, \\ \mathbb{R}^3 \delta \theta_A^N &= \mathbb{R}^3 \delta A^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta S^N, \\ \mathbb{R}^3 \delta \theta_a^N &= (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N} |_{\theta_a^N} * \mathbb{R}^3 \delta N^N) \otimes \mathbb{R}^3 \delta S^N. \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $\mathbb{R}^3 \delta N^N$  y  $\mathbb{R}^3 \delta S^N$  son constantes (siempre que la base superior 'T' no rote) y representan respectivamente vectores unitarios que apuntan desde el centro de la base superior a la n-ésima primera articulación,  $\mathbb{R}^3 \delta A^N$  acaba de ser creado y es un vector que apunta en la dirección de la 'Extremidad uno'. El vector unitario en la dirección del eje de rotación de la primera articulación como muestra la figura 3.4a.

La matriz de rotación  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N} |_{\theta^N}$  sigue la convención propuesta en la ecuación 3.1.

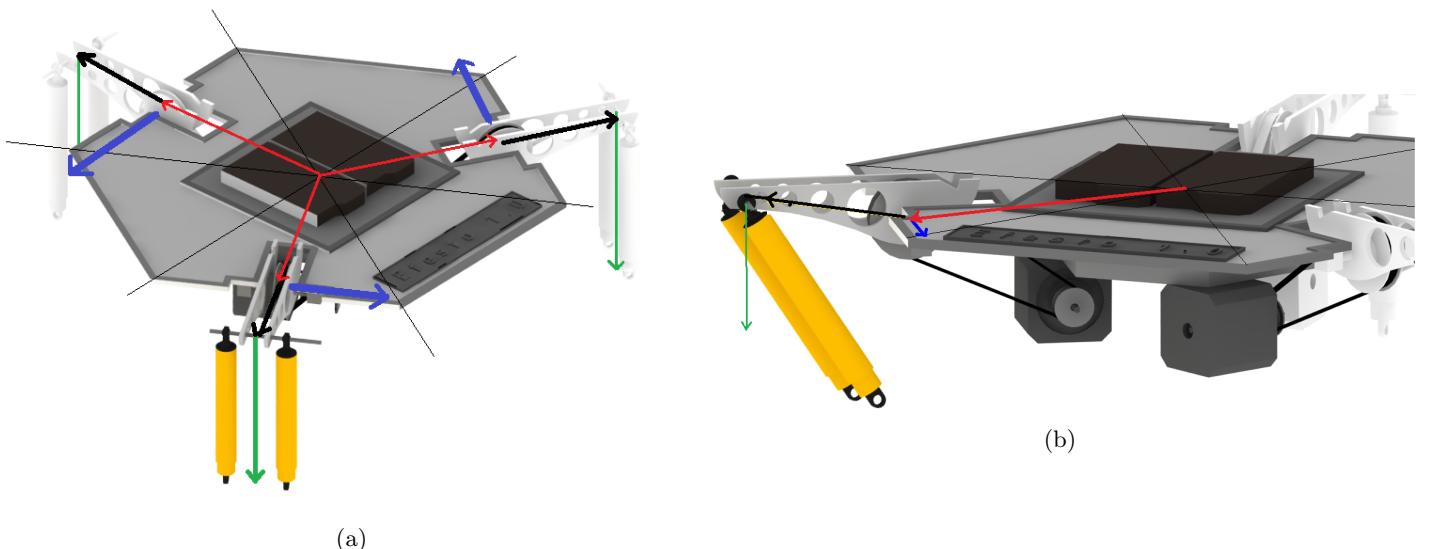


Figura 3.4: Plataforma Superior, ilustración de los vectores unitarios.  $\mathbb{R}^3 \delta N^N$  en color rojo.  $\mathbb{R}^3 \delta S^N$  en color azul.  $\mathbb{R}^3 \delta \theta^N$  en color verde.  $\mathbb{R}^3 \delta A^N$  en negro. Hago notar la invarianza del vector  $\mathbb{R}^3 \delta \theta^N$  en ambas escenas, esto es porque en ambos casos  $\theta_A^N$  tiene el mismo valor y la configuración vectorial del N-ésimo subsistema 'A' es la misma, lo que cambia en ambas fotos es  $\mathbb{R}^3 \delta H^N$ .

Las aclaraciones anteriores permiten escribir el set de ecuaciones que define por completo las interacciones mecánicas del subsistema 'A',

$$\pi^3 \times \mathbb{R}^N \theta_a = \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A) * \pi^N \theta_A) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_a, \quad (3.17)$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \omega_a = \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A) * \mathbb{R}^N \omega_A) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_a, \quad (3.18)$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \alpha_a = \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A) * \mathbb{R}^N \alpha_A) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_a, \quad (3.19)$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \tau_a = \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A)^{-1} * \mathbb{R}^N \tau_A) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_a. \quad (3.20)$$

O en su forma inversa:

$$\pi^3 \times \mathbb{R}^N \theta_A = \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A)^{-1} * \pi^N \theta_a) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_A, \quad (3.21)$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \omega_A = \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A)^{-1} * \mathbb{R}^N \omega_a) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_A, \quad (3.22)$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \alpha_A = \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A)^{-1} * \mathbb{R}^N \alpha_a) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_A, \quad (3.23)$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \tau_A = \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A) * \mathbb{R}^N \tau_a) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_A. \quad (3.24)$$

Pensad además que  $\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A)$  no tiene por que ser sólo una diagonal, podrían existir esfuerzos interactivos entre los motores. La segunda diagonal  $\text{diag}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N B_A * \mathbb{R}^N \xi_a)$  está condicionada al hecho de que las cadenas cinemáticas son independientes y cada articulación genera un vector distinto. Falta un fragmento más que podría considerarse del subsistema 'A', pero que no es de naturaleza mecánica, véase la sección 3.3.1 para estudiar las relaciones entre el torque mecánico actuado por el motor  $\mathbb{R}\tau_a^N$  y el torque electromotriz  $\mathbb{R}\tau_m^N$ .

### 3.1.2.3. Vectores en la primera Extremidad

Definible una vez que se conoce el ángulo de inclinación de la 'Articulación Uno'  $\mathbb{R}\theta_{A/a}^N$ , y los vectores estructurales  $\mathbb{R}^3 \delta N^N$  y  $\mathbb{R}^3 \delta S^N$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \delta A^N &= (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N}|_{\theta_a^N}) * \mathbb{R}^3 \delta N^N, \\ \mathbb{R}^3 \delta \theta_A^N &= \mathbb{R}^3 \delta A^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta S^N, \\ \mathbb{R}^3 \delta \theta_a^N &= (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N}|_{\theta_a^N} * \mathbb{R}^3 \delta N^N) \otimes \mathbb{R}^3 \delta S^N. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La expresión  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N}|_{\theta^N}$  es una matriz de rotación del plano ortogonal al vector  $\delta S^N$  que hace rotar un angulo de  $\theta^N$ , ver la ecuación 3.1.

## 3.2. Sistema cinemático

Todas las relaciones Cinemáticas son válidas para el mecanismo con amortiguadores.

La sección comienza con las simplificaciones hechas en la descripción cinemática. La solución cinemática describe las coordenadas del efecto final  $\mathbb{R}^3 q_f$  relativas a las coordenadas de la base superior  $\mathbb{R}^3 q_T$  que por conveniencia matemática se presume coincide con el origen del universo  $\mathbb{R}^3 q_T = \mathbb{R}^3 q_0 = [0, 0, 0]^T$ .

La solución cinemática describe las coordenadas del efecto final  $\mathbb{R}^3 q_f$  asumiendo que el encogimiento de todos los amortiguadores es igual a cero  $\mathbb{R}\Delta L_H^{N\sigma} = \mathbb{R}\Delta L_T^N = 0 \quad \forall \quad N, \sigma$ , que es lo mismo que suponer que las longitudes de las extremidades son constantes.

La solución cinemática presume que las N cadenas cinemáticas son simétricas y están simétricamente distribuidas en la base superior.

### 3.2.1. Cinemática Directa

El problema de la cinemática Directa es el de transformar  $\pi^N \theta_A$  en  $\mathbb{R}^3 q_f$ . La solución exacta y funcional en todo el espacio que cumple la verificación de contingencia que unifica el eje coordenado del efecto final con el eje de la base superior.

$$\begin{aligned} \text{norm}(\mathbb{R}^3 q_{Hm}^N - \mathbb{R}^3 q_{hm}^N) &= \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(6)} + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(7)}, \\ \text{norm}(\mathbb{R}^3 q_T + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(3)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^N - \mathbb{R}^3 q_f - \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(9)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N) &= \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(6)} + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(7)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O expresado para todas las  $N \cdot \sigma$  partes de la extremidad 'H'.

$$\begin{aligned} \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(6)} + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(7)} &= \text{norm}(\mathbb{R}^3 q_H^{N\sigma} - \mathbb{R}^3 q_h^{N\sigma}), \\ \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(6)} + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(7)} &= \text{norm}(\mathbb{R}^3 q_T + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(3)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^N + (-1)^\sigma \cdot \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(5)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta S^N \\ &\quad - \mathbb{R}^3 q_f - \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(9)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N - (-1)^\sigma \cdot \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(8)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta S^N). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Estas restricciones están contenidas en las relaciones de las coordenadas redundantes y generalizadas del formalismo de Lagrange que es la solución cinemática más completa; Esta otra que se presenta en cambio aquí es rápida, extensa, geométrica y útil.

Se trata de proponer al punto  $\mathbb{R}^3 q_f$  como una función de la intersección de 'N' esferas de centro en el punto ' $(\mathbb{R}^3 q_{Hm}^N - \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(9)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N)$ ' y radio ' $(\frac{k}{\mathbb{R}} L^{(6)} + \frac{k}{\mathbb{R}} L^{(7)})$ '. La descripción de esta forma de solución directa aparece también en este documento [9], y también en esta página web [10], que es una interpretación de la geometría implícita de la ecuación 3.26. El espacio de la solución tiene múltiples lugares convexos, y eso hace a la solución cinemática directa para robots paralelos bastante difícil, aproximarse al problema usando las esferas es útil pero implica una solución en términos de varias ecuaciones estacionariamente válidas, además nada en la solución que sigue restringe al mecanismo de colisionar consigo mismo por tanto se restringe arbitrariamente el espacio de la solución a:

$$\pi \theta_A^N \in \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}. \quad (3.28)$$

Pero la solución cinemática funciona para un margen un poco más amplio.

Siguiendo la convención de rotación en la figura 3.3.

Ninguna forma de la solución cinemática directa puede resolverse para el Delta sin que se especifique el hemisferio que ocupa el efecto, los hemisferios los divide la base 'T', el hemisferio positivo  $\forall_{\mathbb{R}^{(z)}} q_f > \mathbb{R}^{(z)} q_T$ , y el hemisferio negativo  $\forall_{\mathbb{R}^{(z)}} q_f < \mathbb{R}^{(z)} q_T$ . Para imaginar la paradoja cinemática que produce no definir el hemisferio vease cualquier figura del artefacto e imagínese que las articulaciones apuntan hacia el hemisferio superior en vez del inferior como aparece en la figura. En ambos casos  $\pi \theta_A^N$  tendrían el mismo valor pero las coordenadas del efecto serían distintas.

$$\begin{aligned} \forall_{\mathbb{R}^{(z)}} q_f > \mathbb{R}^{(z)} q_T &\quad \text{hemisferio} = (+1), \\ \forall_{\mathbb{R}^{(z)}} q_f < \mathbb{R}^{(z)} q_T &\quad \text{hemisferio} = (-1). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Habiendo definido la orientación de las cadenas cinemáticas  $\mathbb{R}^3 \delta N^N$ , el Hemisferio, y todas las longitudes  $\mathbb{R} L^{(\cdot)}$ . La matriz de rotación  $\mathcal{R}$  está formulada para rotar cualquier plano y cualquier angulo como muestra la ecuación 3.1.

Con lo anterior en mente, sigue la solución cinemática. Toda variable con la infraindicación derecha 'g' supone una variable auxiliar que tiene relevancia sólo para la solución cinemática directa.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \delta A^N &= (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N} |_{\theta_N}) * \mathbb{R}^3 \delta N^N, \\ \mathbb{R}^3 q_g^N &= \mathbb{R} L^{(3)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N + \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^N - \mathbb{R} L^{(9)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N, \\ w_g^N &= \left( \text{norm}(\mathbb{R}^3 q_g^N) \right)^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} w11_g &= +(\mathbb{R}^{(z)} q_g^{(2)} - \mathbb{R}^{(z)} q_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(y)} q_g^{(3)} - \mathbb{R}^{(y)} q_g^{(1)}) - (\mathbb{R}^{(z)} q_g^{(3)} - \mathbb{R}^{(z)} q_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(y)} q_g^{(2)} - \mathbb{R}^{(y)} q_g^{(1)}), \\ \mathbb{R} w12_g &= -(\mathbb{R}^{(z)} q_g^{(2)} - \mathbb{R}^{(z)} q_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(x)} q_g^{(3)} - \mathbb{R}^{(x)} q_g^{(1)}) + (\mathbb{R}^{(z)} q_g^{(3)} - \mathbb{R}^{(z)} q_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(x)} q_g^{(2)} - \mathbb{R}^{(x)} q_g^{(1)}), \\ \mathbb{R} w21_g &= -0,5 \cdot \left( (w_g^{(2)} - w_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(y)} q_g^{(3)} - \mathbb{R}^{(y)} q_g^{(1)}) - (w_g^{(3)} - w_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(y)} q_g^{(2)} - \mathbb{R}^{(y)} q_g^{(1)}) \right), \\ \mathbb{R} w22_g &= +0,5 \cdot \left( (w_g^{(2)} - w_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(x)} q_g^{(3)} - \mathbb{R}^{(x)} q_g^{(1)}) - (w_g^{(3)} - w_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(x)} q_g^{(2)} - \mathbb{R}^{(x)} q_g^{(1)}) \right), \\ \mathbb{R} w3_g &= (\mathbb{R}^{(y)} q_g^{(2)} - \mathbb{R}^{(y)} q_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(x)} q_g^{(3)} - \mathbb{R}^{(x)} q_g^{(1)}) - (\mathbb{R}^{(y)} q_g^{(3)} - \mathbb{R}^{(y)} q_g^{(1)}) \cdot (\mathbb{R}^{(x)} q_g^{(2)} - \mathbb{R}^{(x)} q_g^{(1)}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{R}}a_g &= (w11_g)^2 + (w12_g)^2 + (w3_g)^2, \\
{}_{\mathbb{R}}b_g &= 2 \cdot \left( w11_g \cdot w21_g + w12_g \cdot (w22_g - {}_{\mathbb{R}^{(y)}}q_g^{(1)} \cdot w3_g) - {}_{\mathbb{R}^{(z)}}q_g^{(1)} \cdot (w3_g)^2 \right), \\
{}_{\mathbb{R}}c_g &= \left( w22_g - {}_{\mathbb{R}^{(y)}}q_g^{(1)} \cdot w3_g \right) \cdot \left( w22_g - {}_{\mathbb{R}^{(y)}}q_g^{(1)} \cdot w3_g \right), \\
&\quad + (w21_g)^2 + (w3_g)^2 \cdot \left( ({}_{\mathbb{R}^{(z)}}q_g^{(1)})^2 - ({}_{\mathbb{R}}L^{(6)} + {}_{\mathbb{R}}L^{(7)})^2 \right), \\
{}_{\mathbb{R}}d_g &= (b_g)^2 - 4 \cdot a_g \cdot c_g.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Mientras se cumpla la condición de contingencia real  ${}_{\mathbb{R}}d_g > 0$  existirá una solución a la cinemática directa y está dada por:

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{R}^{(z)}}q_f &= \frac{(-b_g + (\text{hemisferio}) \cdot \sqrt{d_g})}{2 \cdot a_g}, \\
{}_{\mathbb{R}^{(x)}}q_f &= \frac{w11_g \cdot {}_{\mathbb{R}^{(z)}}q_f + w21_g}{w3_g}, \\
{}_{\mathbb{R}^{(y)}}q_f &= \frac{w12_g \cdot {}_{\mathbb{R}^{(z)}}q_f + w22_g}{w3_g}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

En la Dinámica de Lagrange el hemisferio está definido por el sentido de  ${}_{\mathbb{R}^3}\delta S^N$ .

### 3.2.2. Cinemática Inversa

El problema de la cinemática Inversa es el de transformar  ${}_{\mathbb{R}^3}q_f$  en  ${}_{\pi^N}\theta_A$ . Y hay que aclararlo ahora, hay varias formas de llegar a la solución inversa y hay configuraciones redundantes, distintas configuraciones de  ${}_{\pi}\theta_A^N$  consiguen el mismo punto  ${}_{\mathbb{R}^3}q_f$ , específicamente existen  $2^N = 8$  diferentes soluciones para un mismo punto, y las soluciones son cíclicas porque las coordenadas en radianes  $\pi$  son también cíclicas.

Dadas las coordenadas:  ${}_{\mathbb{R}^3}q_f$ .

Formular la siguiente ecuación vectorial que es la contingencia de cada cadena cinemática:

$${}_{\mathbb{R}^3}q_T + {}_{\mathbb{R}}L^{(3)} \cdot {}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N + {}_{\mathbb{R}}L^{(4)} \cdot {}_{\mathbb{R}^3}\delta A^N = {}_{\mathbb{R}^3}q_f + {}_{\mathbb{R}}L^{(9)} \cdot {}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N + ({}_{\mathbb{R}}L^{(6)} + {}_{\mathbb{R}}L^{(7)}) \cdot {}_{\mathbb{R}^3}\delta H^N. \tag{3.34}$$

Dos variables desconocidas en la ecuación anterior,  ${}_{\mathbb{R}^3}\delta H^N$ , y  ${}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N$ .

Deben existir varias formas para solucionar estos dos ( $2 \cdot N$ ) vectores unitarios. Hallando los ángulos de orientación de los vectores  $({}_{\pi^2}\phi_H^{N\sigma}, {}_{\pi}\theta_A^N)$  como en [11], o hallando sólo el ángulo de la articulación actuada  ${}_{\pi^N}\theta_A$  como en [9] y [10]. Yo describiré aquí la forma que consigue sólo a  ${}_{\pi}\theta_A^N$  y usando la ecuación 3.34 encontrar los dos vectores como:

$${}_{\mathbb{R}^3}\delta A^N = ({}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{\delta S^N}|_{\theta^N}) * {}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N, \tag{3.35}$$

$${}_{\mathbb{R}^3}\delta H^N = \frac{{}_{\mathbb{R}^3}q_T + {}_{\mathbb{R}}L^{(3)} \cdot {}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N + {}_{\mathbb{R}}L^{(4)} \cdot {}_{\mathbb{R}^3}\delta A^N - {}_{\mathbb{R}^3}q_f - {}_{\mathbb{R}}L^{(9)} \cdot {}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N}{{}_{\mathbb{R}}L^{(6)} + {}_{\mathbb{R}}L^{(7)}}. \tag{3.36}$$

Prestar atención a las ecuaciones 3.35 y 3.36 devela que sólo es necesario encontrar a  ${}_{\pi}\theta_A^N$  para describir los dos vectores que describen completamente la configuración vectorial de la máquina, porque  ${}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N$ ,  ${}_{\mathbb{R}^3}\delta S^N$ , y  ${}_{\mathbb{R}^3}\delta H^N$  deben estar previamente definidas para poder encontrar la solución cinemática Inversa.

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_q^N &= ({}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{\delta z_T}|_{2/3\pi(N-1)}), \\
{}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{q,inv}^N &= ({}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{\delta z_T}|_{2/3\pi(N-1)})^{-1} = ({}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{\delta z_T}|_{2/3\pi(N-1)})^T.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

El significado del símbolo para la matriz de rotación  $\mathbb{R}$  aparece arriba de la ecuación 3.1. Todas las variables con infraindicación derecha 'q' son auxiliares, tienen sólo relevancia a la solución cinemática inversa. En el cálculo de la cinemática inversa no existe dependencia cruzada entre las cadenas cinemáticas, los  $N$  ángulos pueden calcularse independientemente siguiendo este algoritmo.

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{R}^3}w1_q^N &= {}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{q,inv}^N * \left( {}_{\mathbb{R}^3}q_T + {}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N \right), \\
{}_{\mathbb{R}^3}w2_q^N &= {}_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \mathcal{R}_{q,inv}^N * \left( {}_{\mathbb{R}^3}q_f + {}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N \right), \\
{}_{\mathbb{R}}wa_q^N &= \frac{\left( \text{norm}({}_{\mathbb{R}^3}w2_q^N) \right)^2 - \left( \text{norm}({}_{\mathbb{R}^3}w1_q^N) \right)^2 + \left( {}_{\mathbb{R}}L^{(3)} \right)^2 + \left( {}_{\mathbb{R}}L^{(6)} + {}_{\mathbb{R}}L^{(7)} \right)^2}{2 \cdot {}_{\mathbb{R}^{(z)}}w2_q^N}, \\
{}_{\mathbb{R}}wb_q^N &= \frac{{}_{\mathbb{R}^{(y)}}w1_q^N - {}_{\mathbb{R}^{(y)}}w2_q^N}{{}_{\mathbb{R}^{(z)}}w2_q^N}, \\
{}_{\mathbb{R}}wd_q^N &= - \left( {}_{\mathbb{R}}wa_q^N + {}_{\mathbb{R}}wb_q^N \cdot {}_{\mathbb{R}^{(y)}}w2_q^N \right)^2 + \left( {}_{\mathbb{R}}L^{(4)} \right)^2 \cdot \left( \left( {}_{\mathbb{R}}wb_q^N \right)^2 + 1 \right).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Existirá una solución  $\forall {}_{\mathbb{R}}wd_q^N \geq 0$ .

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbb{R}}wy_q^N &= \frac{{}_{\mathbb{R}^{(y)}}w1_q^N - {}_{\mathbb{R}}wa_q^N \cdot {}_{\mathbb{R}}wb_q^N - \sqrt{{}_{\mathbb{R}}wd_q^N}}{{}_{\mathbb{R}}wb_q^N)^2 + 1}, \\
{}_{\mathbb{R}}wz_q^N &= {}_{\mathbb{R}}wa_q^N + {}_{\mathbb{R}}wb_q^N \cdot {}_{\mathbb{R}}wy_q^N.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Generando finalmente la ecuación que relaciona el ángulo de la  $N$ -ésima 'articulación uno' con la posición carteciana del efecto en el mecanismo sin amortiguadores, donde atan2 es la tangente inversa de cuatro cuadrantes:

$$\pi\theta_A^N = \text{atan2} \left( \frac{-{}_{\mathbb{R}}wz_q^N}{{}_{\mathbb{R}^3}w1_q^N - {}_{\mathbb{R}}wy_q^N} \right). \tag{3.40}$$

Invertir el signo del radical del determinante consigue la otra solución sensata, de aquí que existan  $2^N = 8$  soluciones. Para ser claro, esta solución debería generar sólo un valor para cada ángulo, el signo que ha sido elegido en el determinante consigue siempre la solución del angulo mas cercano a cero, que es la solución más estable o con menos colisiones.

### 3.2.3. Relaciones Jacobianas

Todas las relaciones Jacobianas son estacionariamente válidas, todas las expresiones de las matrices de relación Jacobiana dependen de la configuración instantánea del mecanismo, el mecanismo está enteramente configurado por las orientaciones de las cadenas  ${}_{\mathbb{R}^3}\delta N^N$ , y por los ángulos en las cadenas  $\pi\theta_A^N$ .

Cada restricción del documento tiene dentro de sí una restricción (varias) Jacobiana implícita, que se explota si se deriva la expresión parcialmente con respecto a los dos (o más) términos que relaciona. Los Jacobianos extraen información sobre las interacciones de velocidad de las variables en el hiperespacio.

Pero las restricciones son en sí mismas un hiperespacio, que puede ser indexado al hiperespacio regular de la dinámica. Calcular las relaciones de velocidades Jacobianas puede hacerse sobre las afirmaciones de las restricciones sin depender de la dinámica, al menos si no hay interacciones energéticas, como le ocurre a las relaciones meramente geométricas.

Formular un jacobiano es asumir que para la restricción se cumple que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial(q)} \frac{d}{dt} q &= -\frac{\partial \Pi}{\partial(q')} \frac{d}{dt} q', \\
\frac{d}{dt} q &= J * \frac{d}{dt} q' = -\frac{\frac{\partial \Pi}{\partial(q')}}{\frac{\partial \Pi}{\partial(q)}} * \frac{d}{dt} q', \\
J &= -\frac{\frac{\partial \Pi}{\partial(q')}}{\frac{\partial \Pi}{\partial(q)}}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

La expresión 3.41 asume que la restricción  $\Pi$  no depende de mas variables que cambien con el tiempo, por eso la importancia de encontrar usando los axiomas estructurales la relación directa entre las dos variables relacionadas  $q$  y  $q'$ .

Las relaciones Jacobianas se construyen de restricciones cinemáticas, y estas relaciones que alcanzo a describir en esta sección aplican sólo para el mecanismo sin amortiguadores, las relaciones para este son otro poco menos simples pero les

aplica el mismo principio que narra la expresión 3.41.

Una relación Jacobiana en este contexto representa la relación de velocidad entre dos coordenadas generalizadas cualquiera. El autor encuentra importante varias relaciones, en especial pa que es entre la velocidad del motor  $\mathbb{R}^N \theta_A$  y la posición del efecto final  $\mathbb{R}^3 q_f$ , ésta se presenta descompuesta en partes más simples.

### 3.2.3.1. Relaciones Jacobianas de Velocidad

#### Relación Jacobiana entre $\mathbb{R}\omega_A^N$ y $\mathbb{R}\omega_a^N$ .

De las propiedades generales de sistemas acopados con proporciones lineales (poleas, engranes) se conoce como muestra la sección 3.1.2.2, que la relación Jacobiana de velocidades angulares en la 'articulación uno'  $\mathbb{R}\omega_A^N$ , o en el eje del motor  $\mathbb{R}\omega_a^N$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N \omega_A &= (\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A))^{-1} * \mathbb{R}^N \omega_a, \\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R}^N \omega_a \rightarrow \mathbb{R}^N \omega_A} &= (\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A))^{-1}, \\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R}^N \omega_A \rightarrow \mathbb{R}^N \omega_a} &= \text{diag}(\mathbb{R}^N B_A). \end{aligned} \quad (3.42)$$

#### Relación Jacobiana entre $\mathbb{R}^N \omega_A$ y $\mathbb{R}^3 v_{Hm}^N$

Usando los axiomas de 3.2.

Todas las siguientes relaciones son ciertas:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 v_{Hm}^N &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R} \omega_A^N * \mathbb{R}^3 \delta \theta_A^N, \\ \mathbb{R}^3 v_{Hm}^N &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R} \omega_A^N \cdot (\mathbb{R}^3 \delta S^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^N), \\ \mathbb{R}^3 v_{Hm}^N &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R} \omega_A^N * (\mathbb{R}^3 \delta S^N \otimes (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N} |_{\theta_A^N}) * \mathbb{R}^3 \delta N^N), \\ \mathbb{R}^3 v_{Hm}^N &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R} \omega_A^N \cdot [\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 W^N] * \mathbb{R}^3 \delta N^N. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Todas las relaciones expresan lo mismo, de distintas maneras, la utilización de una o la otra depende de las variables rastreadas, la última expresión es la mas general y la explica la expresión 3.51.

#### Relación Jacobiana entre $\mathbb{R}^3 \omega_A^N$ y $\mathbb{R}^3 v_f$

Usando los axiomas de 3.2.

Usando además los razonamientos que muestra [11], podría entenderse en la relaciones de posición como:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 q_f &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^N + (\mathbb{R} L^{(6)} + \mathbb{R} L^{(7)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta H^N + (\mathbb{R} L^{(3)} - \mathbb{R} L^{(9)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N, \\ \mathbb{R}^3 v_f &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \left( \frac{d}{dt} \mathbb{R}^3 \delta A^N \right) + (\mathbb{R} L^{(6)} + \mathbb{R} L^{(7)}) \cdot \left( \frac{d}{dt} \mathbb{R}^3 \delta H^N \right), \\ \mathbb{R}^3 v_f &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R} \omega_A^N \cdot (\mathbb{R}^3 \delta S^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^N) + (\mathbb{R} L^{(6)} + \mathbb{R} L^{(7)}) \cdot \left( \frac{d}{dt} \mathbb{R}^3 \delta H^N \right), \\ 0 &= \left( \frac{d}{dt} \mathbb{R}^3 \delta H^N \right) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N, \\ \mathbb{R}^3 v_f \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N &= \mathbb{R} \omega_A^N \cdot \mathbb{R} L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3 \delta S^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^N) \odot (\mathbb{R}^3 \delta H^N). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Que es, la primera ecuación, el axioma de relación absoluta (para el mecanismo sin amortiguadores) entre  $\mathbb{R}^3 q_f$  y  $\mathbb{R} \omega_A^N$ . —La segunda expresión es la derivada temporal del axioma, multiplicado (producto punto) por el vector de la segunda extremidad  $(\mathbb{R} L^{(6)} + \mathbb{R} L^{(7)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta H^N$ . — Un sistema de N ecuaciones, la relación Jacobiana entera se aprecia mejor cuando se expresa así:

$$\mathbb{R} L^{(4)} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbb{R}^3 \delta S^{(1)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(1)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(1)} & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta H^T * \mathbb{R}^3 v_f = \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\mathbb{R}^3 \delta S^{(2)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(2)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(2)} & 0 \\ 0 & (\mathbb{R}^3 \delta S^{(3)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(3)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(3)} \end{bmatrix} * \mathbb{R}^N \omega_A. \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Por tanto los Jacobianos de velocidad más relevantes al mecanismo son:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R}^N \omega_A \rightarrow \mathbb{R}^3 v_f} &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \left( (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta H)^T \right)^{-1} * \text{diag} \left( \begin{bmatrix} (\mathbb{R}^3 \delta S^{(1)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(1)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(1)} \\ (\mathbb{R}^3 \delta S^{(2)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(2)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(2)} \\ (\mathbb{R}^3 \delta S^{(3)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(3)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(3)} \end{bmatrix} \right), \\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R}^3 v_f \rightarrow \mathbb{R}^N \omega_A} &= (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R}^N \omega_A \rightarrow \mathbb{R}^3 v_f})^{-1}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

A modo de nota, éste Jacobiano ( $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R}^N \omega_A \rightarrow \mathbb{R}^3 v_f}$ ) funciona excepcionalmente bien.

**Expansión sobre la relación Jacobiana entre  $\mathbb{R}^N \omega_A$  y  $\mathbb{R}^3 v_{Hm}^N$** 

Usando los axiomas de 3.2 se construye una expresión general de velocidad, una de la relación directa en términos de la configuración angular del mecanismo. —Insisto en ésta forma por ser una expresión que a diferencia de las otras relaciones en 3.43, no utiliza vectores auxiliares (como  $\mathbb{R}^3 \delta A^N$  ó  $\mathbb{R}^3 \delta \theta_A^N$ ) para hacer las suposiciones.

Construir la expresión que relaciona de manera directa a  $\pi^N \theta_A$  y a  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N q_{Hm}$ .

$$\Pi_{AH} =$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N q_{Hm} - (\mathbb{R} L^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta N - \begin{bmatrix} \mathbb{R}^3 q_T \\ \mathbb{R}^3 q_T \\ \mathbb{R}^3 q_T \end{bmatrix}^T - \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^{(1)}}|_{\theta_A^{(1)}}) * \mathbb{R}^3 \delta N^{(1)} \\ (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^{(2)}}|_{\theta_A^{(2)}}) * \mathbb{R}^3 \delta N^{(2)} \\ (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^{(3)}}|_{\theta_A^{(3)}}) * \mathbb{R}^3 \delta N^{(3)} \end{bmatrix}^T = 0. \quad (3.47)$$

Menos generalmente, entre  $\pi^N \theta_A$  y a  $\mathbb{R}^3 q_{Hm}^N$ :

$$\Pi_{AH} = \mathbb{R}^3 q_{Hm}^N - (\mathbb{R} L^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N - \mathbb{R}^3 q_T - \mathbb{R} L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N}|_{\theta_A^N}) * \mathbb{R}^3 \delta N^N = 0. \quad (3.48)$$

Expresando de manera correcta la restricción para formular los Jacobianos:

$$\Pi_{AH} => \mathbb{R}^3 q_{Hm}^N = (\mathbb{R} L^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N + \mathbb{R}^3 q_T + \mathbb{R} L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N}|_{\theta_A^N}) * \mathbb{R}^3 \delta N^N. \quad (3.49)$$

Derivando parcialmente la expresión con respecto a cada coordenada (x,y,z) de las posiciones interactivas 3.47,  $\frac{\partial}{\partial(q)} \frac{\partial(q)}{\partial t}$ : Produce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbb{R}^{(x)} q_{Hm}^N)} &= 1, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbb{R}^{(y)} q_{Hm}^N)} &= 1, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbb{R}^{(z)} q_{Hm}^N)} &= 1, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial(\pi \theta_A^N)} &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \begin{bmatrix} W_{11}^N & W_{12}^N & W_{13}^N \\ W_{21}^N & W_{22}^N & W_{23}^N \\ W_{31}^N & W_{32}^N & W_{33}^N \end{bmatrix} * \mathbb{R}^3 \delta N^N. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} W_{11}^N &= \sin(\pi \theta_A^N) \cdot (\mathbb{R}^{(x)} \delta S^N)^2 - \sin(\pi \theta_A^N), \\ \mathbb{R} W_{12}^N &= \mathbb{R}^{(x)} \delta S^N \cdot \mathbb{R}^{(y)} \delta S^N \cdot \sin(\pi \theta_A^N) - \mathbb{R}^{(z)} \delta S^N \cdot \cos(\pi \theta_A^N), \\ \mathbb{R} W_{13}^N &= \mathbb{R}^{(y)} \delta S^N \cdot \cos(\pi \theta_A^N) + \mathbb{R}^{(x)} \delta S^N \cdot \mathbb{R}^{(z)} \delta S^N \cdot \sin(\pi \theta_A^N), \\ \mathbb{R} W_{21}^N &= \mathbb{R}^{(z)} \delta S^N \cdot \cos(\pi \theta_A^N) + \mathbb{R}^{(x)} \delta S^N \cdot \mathbb{R}^{(y)} \delta S^N \cdot \sin(\pi \theta_A^N), \\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 W^N \Rightarrow \mathbb{R} W_{22}^N &= \sin(\mathbb{R} \theta_A^N) \cdot (\mathbb{R}^{(y)} \delta S^N)^2 - \sin(\pi \theta_A^N), \\ \mathbb{R} W_{23}^N &= \mathbb{R}^{(y)} \delta S^N \cdot \mathbb{R}^{(z)} \delta S^N \cdot \sin(\pi \theta_A^N) - \mathbb{R}^{(x)} \delta S^N \cdot \cos(\pi \theta_A^N), \\ \mathbb{R} W_{31}^N &= \mathbb{R}^{(x)} \delta S^N \cdot \mathbb{R}^{(z)} \delta S^N \cdot \sin(\pi \theta_A^N) - \mathbb{R}^{(y)} \delta S^N \cdot \cos(\pi \theta_A^N), \\ \mathbb{R} W_{32}^N &= \mathbb{R}^{(x)} \delta S^N \cdot \cos(\pi \theta_A^N) + \mathbb{R}^{(y)} \delta S^N \cdot \mathbb{R}^{(z)} \delta S^N \cdot \sin(\pi \theta_A^N), \\ \mathbb{R} W_{33}^N &= \sin(\mathbb{R} \theta_A^N) \cdot (\mathbb{R}^{(z)} \delta S^N)^2 - \sin(\pi \theta_A^N). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Usando la expresión 3.41:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbb{R}^{(x)} q_{Hm}^N)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbb{R}^{(y)} q_{Hm}^N)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Pi}{\partial(\mathbb{R}^{(z)} q_{Hm}^N)} \end{bmatrix} * \mathbb{R}^3 v_{Hm}^N = \mathbb{R}^3 v_{Hm}^N = \mathbb{R} \omega_A^N \cdot \mathbb{R} L^{(4)} \cdot [\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 W^N] * \mathbb{R}^3 \delta N^N. \quad (3.52)$$

Finalmente la relación jacobiana:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R} \omega_A^N \rightarrow \mathbb{R}^3 v_{Hm}^N}^N &= \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 W^N * \mathbb{R}^3 \delta N^N, \\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R}^N \omega_A \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N v_{Hm}} &= \left[ \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R} \omega_A^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}^3 v_{Hm}^{(1)}}^{(1)}, \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R} \omega_A^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^3 v_{Hm}^{(2)}}^{(2)}, \mathbb{R}^3 J_{\mathbb{R} \omega_A^{(3)} \rightarrow \mathbb{R}^3 v_{Hm}^{(3)}}^{(3)} \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Alternativamente las expresiones en 3.43.

**Relación Jacobiana entre  $\mathbb{R}^3 v_{Hm}^N$  y  $\mathbb{R}^3 v_f$** 

Los robot "Delta" son un caso particular de Robots Paralelos. —Todo robot paralelo cumple la siguiente relación causal de accionamiento al efecto (véase —linear parallel robot—). Esta relación Jacobiana la cumplen todos los robot paralelos. Se construye usando los axiomas de 3.2, y la obtuve de analizar los razonamientos que muestra [11]. El caso general de nuevo como en las expresiones 3.44:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 q_f &= \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^N + (\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta H^N + (\mathbb{R}L^{(3)} - \mathbb{R}L^{(9)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N, \\ \mathbb{R}^3 v_f \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N &= \mathbb{R}\omega_A^N \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3 \delta S^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^N) \odot (\mathbb{R}^3 \delta H^N).\end{aligned}\quad (3.54)$$

Remplazando con cualquiera de las expresiones en 3.43.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 v_f \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N &= (\mathbb{R}^3 v_{Hm}^N \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N), \\ \mathbb{R}^3 v_f &= ((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta H)^T)^{-1} * \begin{bmatrix} \mathbb{R}^3 v_{Hm}^{(1)} \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(1)} \\ \mathbb{R}^3 v_{Hm}^{(2)} \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(2)} \\ \mathbb{R}^3 v_{Hm}^{(3)} \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(3)} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.55)$$

No se nota una representación matricial Jacobiana clásica, pero la expresión consigue el mismo resultado. Esto finaliza las relaciones Jacobianas de Velocidad cinemática.

**3.2.3.2. Relaciones Jacobianas de Aceleración**

El principio es el mismo, pero ahora es la relación entre las segundas derivadas temporales. Dos relación de Aceleración, sin equivalencia matricial, estas dos expresiones no son matrices, no tendrán por tanto un símbolo  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N J$  asociado.

**Relación Jacobiana entre  $\mathbb{R}^3 a_f$  y  $\mathbb{R}^N \alpha_A$** 

A partir del axioma que describe la relación entre  $\mathbb{R}^3 q_f$  y  $\mathbb{R}^3 \theta_A^N$

$$\mathbb{R}^3 q_f = \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^N + (\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta H^N + (\mathbb{R}L^{(3)} - \mathbb{R}L^{(9)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N. \quad (3.56)$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo y re arreglando los términos como muestra [11] se consigue la expresión Jacobiana de Aceleración Jacobiana Inversa.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 W_{w1}^N &= \mathbb{R}\omega_A^N \cdot \mathbb{R}^3 \delta S^N, \\ \mathbb{R}^3 A_{w1}^N &= \mathbb{R}L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3 W_{w1}^N \otimes (\mathbb{R}^3 W_{w1}^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^N)), \\ \mathbb{R}^3 W_{w2}^N &= \frac{\mathbb{R}^3 \delta H^N \otimes (\mathbb{R}^3 v_f - \mathbb{R}L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3 W_{w1}^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^N))}{\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)}}, \\ \mathbb{R}^3 A_{w2}^N &= (\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)}) \cdot (\mathbb{R}^3 W_{w2}^N \otimes (\mathbb{R}^3 W_{w2}^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta H^N)).\end{aligned}\quad (3.57)$$

Las variables  $\mathbb{R}^3 W_{w1/w2}$ , y  $\mathbb{R}^3 A_{w1/w2}$  son auxiliares, válidos sólo para el cálculo de la relación Jacobiana de Aceleración que describe la siguiente expresión:

$$\mathbb{R}^N \alpha_A^N = \frac{(\mathbb{R}^3 a_f - \mathbb{R}^3 A_{w1}^N - \mathbb{R}^3 A_{w2}^N) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N}{\mathbb{R}L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3 \delta S^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^N) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N}. \quad (3.58)$$

Ésta expresión es sumamente útil, con ésta pueden conocerse los torques articulares que producen alguna fuerza en el efecto final. Las relaciones inversas son las mas importantes.

La relación inversa de esta expresión es:

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^3 a_f) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N &= \mathbb{R}L^{(4)} \cdot ((\mathbb{R}^3 \delta S^N \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^N) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N) \cdot \mathbb{R}^N \alpha_A^N + (\mathbb{R}^3 A_{w1}^N + \mathbb{R}^3 A_{w2}^N) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^N, \\ \mathbb{R}^3 a_f &= ((\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta H)^T)^{-1} * \begin{bmatrix} \mathbb{R}L^{(4)} \cdot ((\mathbb{R}^3 \delta S^{(1)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(1)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(1)}) \cdot \mathbb{R}^N \alpha_A^{(1)} + (\mathbb{R}^3 A_{w1}^{(1)} + \mathbb{R}^3 A_{w2}^{(1)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(1)} \\ \mathbb{R}L^{(4)} \cdot ((\mathbb{R}^3 \delta S^{(2)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(2)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(2)}) \cdot \mathbb{R}^N \alpha_A^{(2)} + (\mathbb{R}^3 A_{w1}^{(2)} + \mathbb{R}^3 A_{w2}^{(2)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(2)} \\ \mathbb{R}L^{(4)} \cdot ((\mathbb{R}^3 \delta S^{(3)} \otimes \mathbb{R}^3 \delta A^{(3)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^N \alpha_A^{(3)} + (\mathbb{R}^3 A_{w1}^{(3)} + \mathbb{R}^3 A_{w2}^{(3)}) \odot \mathbb{R}^3 \delta H^{(3)} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.59)$$

### 3.3. Sistema dinámico

La dinámica estudia al movimiento incremental de los cuerpos acelerados, a diferencia de la cinemática que es la relación absoluta, la dinámica predice un instante de tiempo en el futuro conociendo las propiedades del presente, y la presente descripción presume que las propiedades de un punto en el mecanismo son su posición y su velocidad, un modelo de segundo orden.

Esta dinámica supone que el mecanismo utiliza motores de corriente directa que se controlan con el circuito de la figura 1.8.

#### 3.3.1. Sobre lo innecesario del modelo electrodinámico del motor

Primero, se recomienda usar motores con alto torque, aún cuando sea en exceso, sólo así se pueden alcanzar curvas de aceleración pronunciadas, les sorprendería lo livianas que pueden ser las extremidades y el efecto. El motor lo es todo, es la vida del mecanismo. Por como está configurado el artefacto, las extremidades se mueven independientes al peso del motor, los motores sólo cargan el peso de las extremidades y el efecto. Los motores pueden ser tan grandes y pesados como sea necesario (Para efectos descriptivos la masa de los motores está incluida en el término  $\mathbb{R}m_\psi$ , que es la masa que no tiene implicaciones dinámicas para el modelo del mecanismo estudiado).

Esta sección es del estudio al término  $\mathbb{R}\tau_m^N$ , que es el torque electromotriz, la fuerza eléctrica del eje por el radio del eje del motor.

El modelo electromecánico supone dos procesos interactivos, un proceso eléctrico que modela un torque electromotriz que es un torque más en la sumatoria de fuerzas en cada extremidad. El espacio de estados de la representación de sucesos lineales asumiendo que son motores DC, es:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\tau_{m,t}^N &= \mathbb{R}B_A^N \cdot \mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N, \\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \tau_{m,t}^N &= \text{diag}(\text{diag}(\mathbb{R}^N B_A) * \text{diag}(\mathbb{R}^N KT_m) * \mathbb{R}^N \mathbb{I}_{m,t}) * \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta\theta_A. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Siguiendo el diseño del artefacto que se narra en la sección 1.8.2.2 los motores son, por la naturaleza del circuito (figura 1.8), son controlados modulando directamente la corriente de la bobina. Según lo anterior, la señal de control es proporcional al torque requerido -proporcionalmente dictado por el valor  $\mathbb{R}KT_m^N$ , si se utilizan los circuitos de la sección 1.8 entonces se puede omitir el modelar el proceso electrodinámico y en ésto se hace énfasis, un circuito puede reducir muchísimo el cálculo de controladores en tanto que reduce todo el modelo eléctrico a la calibración de la constante  $\mathbb{R}KT_m^N$ . Este valor es propio a cada motor, no es compleja la obtención de este valor llamado en inglés como 'Motor Torque Constant'.

El valor de la corriente en el instante siguiente  $\mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t+1}^N$  va dada en términos del ancho del pulso en la señal que indica el pin 'PWM' del circuito 1.8. Esta señal está ligada al procesador y es por tanto siempre un valor binario. Esta relación es ([A] de Amperes):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{I}_m, \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^{(\eta)} &= \frac{\mathbb{R}\mathbb{I}_{m,max} - \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,min}}{2^{(\eta)}} = \frac{5 - 0}{2^{(\eta)}} [A], \\ \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N &= (-1)^{(\mathbb{B}DIR_{m,t}^N)} \cdot (\mathbb{R}^k \Gamma_{\mathbb{I}_m, \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}) \odot (\mathbb{B}^\eta PWM_{m,t}^N). \end{aligned} \quad (3.61)$$

La ecuación 3.60 es el modelo de la interacción entre la corriente y el torque electromotriz que percibe el eje de la primera articulación. El torque que realiza el motor en la sumatoria de torques que estudia la dinámica angular de las primeras extremidades. Pero la electrodinámica no ha sido modelada aún, aunque no es necesaria porque el lazo de realimentación interno del circuito de la figura 1.8 se encarga del proceso subyacente, otras intenciones modulan el valor de voltaje que se induce en la bobina del motor y por tanto la relación al torque requiere de modelar la corriente en términos del voltaje controlado.

Imperativo además es conocer el valor de la resistencia en la bobina del motor  $R_m$  por tanto que los controladores llevan ecuaciones que presumen conocer este valor.

### 3.3.2. Dinámica Newtoniana

Mientras la separación entre instantes de tiempo no sea muy grande ( $\Delta t_{accion} \approx 0,05[s]$ ), entonces la dinámica puede ser modelada en un proceso iterativo como en:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t+1}^N \\ \pi\theta_{a,t+1}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t+1}^N \\ \pi\theta_{A,t+1}^N \\ \mathbb{R}\omega_{A,t+1}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N \\ \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \pi\theta_{A,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{A,t}^N \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N \\ \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \pi\theta_{A,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{A,t}^N \end{bmatrix}, \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N \\ \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \pi\theta_{A,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{A,t}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-1)^{(\mathbb{B}DIR_{m,t}^N)} \cdot (k_{\mathbb{R}\eta} \Gamma_{\mathbb{I}_m, \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}) \odot (\mathbb{R}^{n_{\eta}} PWM_{m,t}^N) \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N = \mathbb{R}B_A^N \cdot \mathbb{R}\omega_{A,t}^N \\ (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}\tau_{m,t}^N + \mathbb{R}\tau_{B_m,t}^N + (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}\tau_{ext,t}^N + \mathbb{R}\tau_{c,t}^N + \mathbb{R}\tau_{e1,t}^N)) \\ \mathbb{R}\omega_{A,t}^N = (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot \mathbb{R}\omega_{A,t}^N \\ (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot ((\mathbb{R}B_A^N) \cdot (\mathbb{R}\tau_{m,t}^N + \mathbb{R}\tau_{B_m,t}^N) + \mathbb{R}\tau_{ext,t}^N + \mathbb{R}\tau_{c,t}^N + \mathbb{R}\tau_{e1,t}^N) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Donde:

$\mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N$  es la corriente que fluye en la bobina del N-ésimo motor, y  $\mathbb{R}I_A^N$  es el momento de inercia de la primera articulación.

$\mathbb{B}DIR_{m,t}^N$  es el valor binario que selecciona la dirección de la corriente,  $1 \rightarrow -, 0 \rightarrow +$ .

$k_{\mathbb{R}\eta} \Gamma_{\mathbb{I}_m, \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}$  es el vector de traducción binaria para los valores de corriente, definido en la ecuación 3.61.

$\mathbb{R}^{n_{\eta}} PWM_{m,t}^N$  es la señal de control, el valor binario que representa la señal de ancho de pulso en un procesador de ' $n_{\eta}$ ' bits.

$\pi\theta_{a,t}^N$  es el valor instantáneo del ángulo del eje del N-ésimo motor.

$\mathbb{R}\omega_{a,t}^N$  es el valor instantáneo de la velocidad angular del eje del N-ésimo motor.

$\pi\theta_{A,t}^N$  es el valor instantáneo del ángulo del eje de la N-ésima articulación uno.

$\mathbb{R}\omega_{A,t}^N$  es el valor instantáneo de la velocidad angular del eje de la N-ésima articulación uno.

$\mathbb{R}B_A^N$  es la relación de piñones entre el motor y la articulación uno, sección 3.1.2.2.

$\mathbb{R}\tau_{m,t}^N$  es el torque eléctrico instantáneo que realiza el N-ésimo motor.

$\mathbb{R}\tau_{B_m,t}^N$  es el torque de oposición al movimiento, el torque de fricción que experimenta el N-ésimo motor, que se hace cero para poder formular el Hamiltoniano que está limitado a producirse sólo para sistemas conservativos.

$\mathbb{R}\tau_{ext,t}^N$  es el torque externo que experimenta la articulación uno, este torque es cero para efectos prácticos, la fuerza que causa este torque es estudiada parcialmente en la sección ??.

$\mathbb{R}\tau_{c,t}^N$  es el torque debido al peso de carga que experimenta la articulación uno.

$\mathbb{R}\tau_{e1,t}^N$  es el torque debido al peso de la extremidad uno, que experimenta la articulación uno.

$\mathbb{R}I_A^N$  es el momento de inercia de la primera extremidad, sección 3.1.2.1.

Véase como no está siendo modelada la dinámica del efecto, las relaciones al efecto utilizan la dinámica angular para relacionar cinemáticamente la posición del efecto. En cambio la ecuación 3.62 modela dinámicas redundantes, la dinámica que percibe la articulación y la dinámica que percibe el motor. Para ambos casos los torques son:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\tau_{m,t}^N &= \mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N, \\ \mathbb{R}\tau_{B_m,t}^N &= -\mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N = 0, \\ \mathbb{R}\tau_{ext,t}^N &= \mathbb{R}L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3\delta A^N \otimes (\mathbb{R}^3F_{ext,t}^{N(1)} + \mathbb{R}^3F_{ext,t}^{N(2)})) = 0, \\ \mathbb{R}\tau_{c,t}^N &= \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N \cdot (\mathbb{R}^3\delta A^N \otimes \mathbb{R}^3G), \\ \mathbb{R}\tau_{e1,t}^N &= 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N \cdot (\mathbb{R}^3\delta A^N \otimes \mathbb{R}^3G). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Donde:  $\mathbb{R}KT_m^N$  es la constante de trasmisión de corriente a torque eléctrico.

$\mathbb{R}\tau_{B_m,t}^N$  es la constante de fricción viciosa que percibe el motor.

$\mathbb{R}L^{(4)}$  es la longitud de la extremidad uno.

$\mathbb{R}^3\delta A^N$  es un vector unitario que apunta en la dirección de la N-ésima primera extremidad, sección 3.1.2.3.

$\mathbb{R}^3F_{ext,t}^{N\sigma}$  son las fuerzas externas que apuntan en dirección de las segundas extremidades, igualadas a cero para simplificar el modelo, con controladores de desempeño optimo en trayectorias no muy aceleradas estas fuerzas son pequeñas, despreciables.

$\mathbb{R}m_{c,t}^N$  es la masa de carga que percibe la N-ésima extremidad uno.

$\mathbb{R}m_A^N$  es la masa de la extremidad uno.

$\mathbb{R}^3G = -9,8 \cdot \mathbb{R}^3\delta z$ , es el campo gravitacional terrestre.

De la expresión del torque que produce el peso de la extremidad uno está multiplicada por 0.5 por significar que el centro de masa está a la mitad de la longitud de la extremidad uno.

La masa de carga  $\mathbb{R}m_{c,t}^N$  es calculado presumiendo que la sumatoria de todas las cargas percibidas debe ser igual a la masa total de las extremidades inferiores.

$$\mathbb{R}m_{c,t}^N = \frac{\text{abs}(\mathbb{R}^3\delta H^N \odot \mathbb{R}^3G/\mathbb{R}g) \cdot ((6) \cdot \mathbb{R}m_H + \mathbb{R}m_f)}{\sum_{(N)=1}^{(N)=N} \text{abs}(\mathbb{R}^3\delta H^{(N)} \odot \mathbb{R}^3G/\mathbb{R}g)}. \quad (3.64)$$

Donde:  $\mathbb{R}^3\delta H_t^N$  es el vector de la segunda extremidad, sección ??.

$\mathbb{R}m_H$  es la masa de una sola de las barras paralelas que conforma la extremidad dos.

$\mathbb{R}m_f$  es la masa del efecto final.

$\mathbb{R}g = 9,8[Nm/s^2]$  es la gravedad sobre la superficie terrestre.

Con esto es posible definir una expresión mas precisa de los dos sistemas redundantes que modela esta estrategia, el modelo de la dinámica del mecanismo articulado, el modelo de torques de la primera articulación.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N \\ \pi\theta_{A,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{A,t}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-1)^{(\mathbb{B}DIR_{m,t}^N)} \cdot (\mathbb{k}_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{\mathbb{I}_m, \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}) \odot (\mathbb{B}^n PWM_{m,t}^N) \\ \mathbb{R}\omega_{A,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{A,t}^N \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}\alpha_{A,t}^N &= \begin{aligned} (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot & \left( (\mathbb{R}B_A^N) \cdot (\mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N - \mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N) \dots \right. \\ & \left. + (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot (\mathbb{R}^3\delta A^N \otimes \mathbb{R}^3G) \right), \\ \mathbb{R}\alpha_{A,t}^N &= \begin{aligned} (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot & \left( (\mathbb{R}B_A^N) \cdot (\mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N - \mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N) \dots \right. \\ & \left. + (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot \mathbb{R}g \cdot \cos(\pi\theta_{A,t}^N) \right). \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ahora el modelo percibido desde el marco de referencia del motor, el modelo necesario para fabricar los controladores:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N \\ \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{(\mathbb{B}DIR_{m,t}^N)} \cdot (\mathbb{k}_{\mathbb{R}^n} \Gamma_{\mathbb{I}_m, \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}) \odot (\mathbb{B}^n PWM_{m,t}^N) \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N &= \begin{aligned} (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot & \left( \mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N - \mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \dots \right. \\ & \left. + (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot (\mathbb{R}^3\delta A^N \otimes \mathbb{R}^3G) \right), \end{aligned} \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N &= \begin{aligned} (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot & \left( \mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N - \mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \dots \right. \\ & \left. + (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot \mathbb{R}g \cdot \cos(\pi\theta_{A,t}^N) \right). \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.67)$$

A la relación de estados 3.66 le ocurre que cuando el producto cruz de la expresión general 3.67 es cambiado por el equivalente  $\cos(\pi\theta_{A,t}^N)$  de la expresión particular 3.68. Deja de ser una expresión general y aplica sólo para los delta cuya base superior sea perpendicular al campo gravitacional, como le ocurre a la configuración común donde  $\mathbb{R}^3\delta z_T = \mathbb{R}^3\delta z_0$ . En toda instancia los escalares de los estados expresan las magnitudes de los vectores que describen más específicamente la dinámica, las posiciones angulares  $\pi\theta_{A/a,t}^N$  y las corrientes  $\mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N$  no las modela como vectores, el angulo habría de asociarse al vector  $\mathbb{R}^3\delta S_A^N$  y la corriente a un vector ortogonal a éste. Las convenciones generales del mecanismo en cambio asocian vectores de aceleración y posición angular, pueden obtenerse de los valores escalares de los estados escalares con las expresiones:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{R}^3\omega_{A/a,t}^N \\ \mathbb{R}^3\alpha_{A/a,t}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}\omega_{A/a,t}^N \cdot \mathbb{R}^3\delta\theta_{A/a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{A/a,t}^N \cdot \mathbb{R}^3\delta\theta_{A/a,t}^N \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Donde:  $\mathbb{R}^3\delta\theta_{A/a,t}^N$  es el vector unitario que apunta en la dirección de rotación de la articulación uno, definido para 'A' en la ecuación 3.16.

### 3.3.3. Dinámica Newtoniana lineal continua o expresiones Jacobianas de la dinámica

Reescribiendo aquí nuevamente la expresión 3.68:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N \\ \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-1)^{(\mathbb{B}DIR_{m,t}^N)} \cdot (\mathbb{R}^k \Gamma_{\mathbb{I}_m, \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}) \odot (\mathbb{B}^\eta PWM_{m,t}^N) \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N &= (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot \left( \mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N - \mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \dots \right. \\ &\quad \left. + (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot \mathbb{R}g \cdot \cos(\pi\theta_{A,t}^N) \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

La dinámica anterior asume que la señal de control es el ancho del pulso  $\mathbb{B}^\eta PWM_m^N$  que controla la corriente según muestra la expresión anterior, por simplicidad al cálculo del controlador la interacción entre la corriente y el ancho de pulso se asumirá implícita y dada por las expresiones en 3.61, y el algoritmo se encargará de esta transformación posterior, con esta reducción se crea para el modelo la opción de interpretar como señal de control directamente el valor de la corriente  $\mathbb{R}\mathbb{I}_m^N$ . Lo que transformaría la expresión anterior en:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N &= (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot \left( \mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N - \mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \dots \right. \\ &\quad \left. + (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot \mathbb{R}g \cdot \cos(\pi\theta_{A,t}^N) \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Que es una expresión no lineal para la dinámica de cada extremidad uno para los deltas que reposan ortogonales al campo gravitacional terrestre, específicamente la dinámica interactiva de los sub-mecanismos 'A' y 'm', articulación uno y motor. El ejercicio de seguir una trayectoria es complejo, en el libro [12] se muestra un mecanismo para resolver el problema de 'tracking' a una trayectoria arbitraria para un sistema lineal variante en el tiempo. La expresión que es localmente exacta a 3.71 pero que es lineal, es la que se conoce como expresión Jacobiana del modelo dinámico, y es deducida con fines a calcular los controladores lineales para sistemas no-lineales:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{R}^{(1)}f^N \\ \mathbb{R}^{(2)}f^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^{(1)}g^N \\ \mathbb{R}^{(2)}g^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N - (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot \mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot \mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N \end{bmatrix}, \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,c}^N * \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} + \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,c}^N \cdot (\mathbb{I}_{m,t}^N), \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbb{R}^{(1)}f^N}{\partial \theta_a^N} & \frac{\partial \mathbb{R}^{(1)}f^N}{\partial \omega_a^N} \\ \frac{\partial \mathbb{R}^{(2)}f^N}{\partial \theta_a^N} & \frac{\partial \mathbb{R}^{(2)}f^N}{\partial \omega_a^N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbb{R}^{(1)}g^N}{\partial \mathbb{I}_m^N} \\ \frac{\partial \mathbb{R}^{(2)}g^N}{\partial \mathbb{I}_m^N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{R}KT_m^N \end{bmatrix} \cdot (\mathbb{I}_{m,t}^N), \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial \mathbb{R}^{(2)}f^N}{\partial \theta_a^N} & \frac{\partial \mathbb{R}^{(2)}f^N}{\partial \omega_a^N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot \mathbb{R}KT_m^N \end{bmatrix} \cdot (\mathbb{I}_{m,t}^N). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{R}^{(1)}f^N}{\partial \theta_a^N} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbb{R}^{(1)}f^N}{\partial \omega_a^N} &= 1, \\ \frac{\partial \mathbb{R}^{(2)}f^N}{\partial \theta_a^N} &= -(\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot \left( (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot \mathbb{R}g \cdot \sin(\pi\theta_{A,t}^N) \right), \\ \frac{\partial \mathbb{R}^{(2)}f^N}{\partial \omega_a^N} &= -(\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}B_m^N). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Las funciones cuando se las escribe como  $\mathbb{R}^2 f^N$  y  $\mathbb{R}^2 g^N$  se las asume bidimensionales, expresar el término entreparentésis informa la distinción de alguna de las dos dimensiones en específico. La función ‘ $f$ ’ es para describir la interacción del sistema (visto en el eje del motor) con sus estados internos, y la función ‘ $g$ ’ es para describir la interacción del sistema (visto en el eje del motor) con las señales de control.

$$\begin{aligned}\frac{\partial_{\mathbb{R}^{(1)}} g^N}{\partial \mathbb{I}_m^N} &= 0, \\ \frac{\partial_{\mathbb{R}^{(2)}} g^N}{\partial \mathbb{I}_m^N} &= (\mathbb{R} I_A^N)^{-1} \cdot \mathbb{R} K T_m^N.\end{aligned}\quad (3.74)$$

La descomposición por partes parciales de los procesos multivariados anteriores produce, puesto que son dos estados y una sola señal de control, matrices como  $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} f^N$  y  $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} g^N$ . Que por componentes son lo que se conoce como las matrices ‘A’ y ‘B’:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,c}^N &= \begin{bmatrix} \frac{\partial_{\mathbb{R}_{(1)}} f^N}{\partial \theta_a^N} & \frac{\partial_{\mathbb{R}_{(1)}} f^N}{\partial \omega_a^N} \\ \frac{\partial_{\mathbb{R}_{(2)}} f^N}{\partial \theta_a^N} & \frac{\partial_{\mathbb{R}_{(2)}} f^N}{\partial \omega_a^N} \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,c}^N &= \begin{bmatrix} \frac{\partial_{\mathbb{R}_{(1)}} g^N}{\partial \mathbb{I}_m^N} \\ \frac{\partial_{\mathbb{R}_{(2)}} g^N}{\partial \mathbb{I}_m^N} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.75)$$

Agregando que:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,c}^N &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{jac,c}^N &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.76)$$

Lo que completa las expresiones Jacobianas de la dinámica del sistema.

Lo que sigue compensa lo que la sección de los controladores (sección 3.4 en el algoritmo para linealizar el modelo en el dominio de los estados) llama ‘ $T_r$ ’ es la resolución de aproximación Jacobiana.

### 3.3.4. Dinámica Newtoniana Lineal Discreta

Discretizar el modelo en el tiempo puede hacerse usando múltiples técnicas aplicables a los sistemas que no dependen explícitamente del tiempo, las expresiones fueron obtenidas de [13].

Partiendo del modelo lineal continuo de la expresión 3.72, se obtienen las equivalentes discretas para el espacio discreto partido en intervalos de tiempo  $\mathbb{R} \Delta t_{accion}$  que es un término asociado a la latencia del procesador en leer e inferir decisiones de control, más información sobre éste parámetro en ???. Aquí las ecuaciones de transformación de continuo a discreto, con *Ident* como una matriz identidad:

Por el método de Rectángulo en adelanto (“forward rectangle rule”).

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} \text{Ident} + \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,c}^N \cdot \mathbb{R} \Delta t_{accion}, \\ \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,c}^N \cdot \mathbb{R} \Delta t_{accion}, \\ \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,c}^N, \\ \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{jac,c}^N.\end{aligned}\quad (3.77)$$

Por el método de Rectángulo en atraso (“backward rectangle rule”).

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N &= (\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} \text{Ident} - \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,c}^N \cdot \mathbb{R} \Delta t_{accion})^{-1}, \\ \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N * \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,c}^N \cdot \mathbb{R} \Delta t_{accion}, \\ \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,c}^N * \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N, \\ \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{jac,c}^N + \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} C_{jac,d}^N * \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,c}^N \cdot \mathbb{R} \Delta t_{accion}.\end{aligned}\quad (3.78)$$

Transformación Bilinear a discreto ("Bilinear Discrete Transform"). Con 'M' como matrix auxiliar.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 M^N &= (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \text{Ident} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,c}^N \cdot \mathbb{R} \Delta t_{accion}/2)^{-1}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,d}^N &= (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \text{Ident} + \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,c}^N \cdot \mathbb{R} \Delta t_{accion}/2) * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 M^N, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 M^N * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{jac,c}^N \cdot \sqrt{\mathbb{R} \Delta t_{accion}}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,c}^N * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 M^N \cdot \sqrt{\mathbb{R} \Delta t_{accion}}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{jac,c}^N + \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^N * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{jac,c}^N \cdot \sqrt{\mathbb{R} \Delta t_{accion}}/2.\end{aligned}\quad (3.79)$$

Retenedor de orden Cero ("zero-order hold").

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,d}^N &= e^{(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,c}^N \cdot \mathbb{R} \Delta t_{accion})}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{jac,d}^N &= (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,c}^N)^{-1} * (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,d}^N - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \text{Ident}) * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{jac,c}^N, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,c}^N, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{jac,d}^N &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{jac,c}^N.\end{aligned}\quad (3.80)$$

Retenedor de primer orden o retenedor de triangulo no causal ("first-order hold or non-causal triangle-hold"), recortando en éste caso la infraindicación izquierda para reducir la longitud de las expresiones escritas:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,d}^N &= e^{(A_{jac,c}^N \cdot \Delta t_{accion})}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{jac,d}^N &= \left( (A_{jac,c}^N)^T * A_{jac,c}^N \right)^{-1} * (\Delta t_{accion})^{-1} * \dots, \\ &\quad (A_{jac,d}^N - \text{Ident})^T * (A_{jac,d}^N - \text{Ident}) * B_{jac,c}^N \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^N &= C_{jac,c}^N, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{jac,d}^N &= D_{jac,c}^N + C_{jac,c}^N * \left( \left( (A_{jac,c}^N)^T * A_{jac,c}^N \right)^{-1} / \Delta t_{accion} * \dots \right. \\ &\quad \left. (A_{jac,d}^N - \text{Ident}) - (A_{jac,c}^N)^{-1} \right) * B_{jac,c}^N.\end{aligned}\quad (3.81)$$

Esto finaliza los métodos para hacer discretos en el tiempo los sistemas lineales.

### 3.4. Diseño de controladores

Sobre la determinación de los incrementos en la señal de control  $\frac{d}{dt} \mathbb{R} \mathbb{I}_{m,t}^N$ , que consiguen los cambios  $\frac{d}{dt} \pi \theta_a^N$ , y  $\frac{d}{dt} \mathbb{R} \omega_a^N$  deseados.

Por control el problema de controlar los estados, por simplicidad dígase controlar el estado de posición del efecto final  $\mathbb{R}^3 q_f$  a través de la corriente de bobina en los motores  $\mathbb{R} \mathbb{I}_m^N$ . Pero esta relación es muy complicada por las interacciones geométricas. Existe una estrategia que consigue un resultado equivalente, una simplificación del problema ésta en transformar con cinemática inversa las posiciones del efecto deseadas a posiciones angulares equivalentes en los motores, lo que facilita las realizaciones, porque las expresiones del modelo no tendrían la complicada relación cinemática ' $\mathbb{R}^N \theta_A \rightarrow \mathbb{R}^3 q_f$ '. El control se hace al angulo de los motores  $\pi \theta_a^N$ , éste se relaciona a lo que puede ser controlado, i.e. la corriente  $\mathbb{R} \mathbb{I}_m^N$  según muestra la expresión 3.65, que por conveniencia matemática podría reducirse a términos exclusivamente relacionados a los dos ordenes del movimiento angular de las articulaciones uno. Sin la relación al ancho de pulso del mecanismo que hace el control en la ecuación 3.65 para el circuito de la figura 1.8.

La siguiente expresión comprende la señal de control como la corriente, y no la señal 'PWM' que controla en el circuito éste valor, la transformación del valor de corriente por términos de ancho de pulso en el circuito se hace por medio de la expresión 3.61.

Escribiendo las ecuaciones dinámicas de las primeras articulaciones en el marco de referencia del eje del motor se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N &= (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}KT_m^N \cdot \mathbb{R}\mathbb{I}_{m,t}^N - \mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \dots \\ &\quad + (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot \mathbb{R}g \cdot \cos(\pi\theta_{A,t}^N)). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Que es una expresión continua.-Los controladores habrían de suscitar cambios cada instante  $\mathbb{R}\Delta t_{accion}$ , por aquello que narra la sección ??.

Habría que transformar a 3.82 a su versión discreta, ó primero diseñar los controladores en base al modelo dinámico continuo y transformar a su versión discreta las expresiones de control.

### 3.4.1. Realimentación optima de Estados lineales para seguimiento de trayectorias

#### 3.4.1.1. Principio de las aclaraciones sobre el controlador

Lo primero es aclarar que aquí se asume que el mecanismo es uno que usa motores de corriente directa. Lo siguiente que es importante aclarar es que el concepto de estado es un escalar, -aun cuando existen expresiones vectoriales para los estados que definen las relaciones 3.17 y 3.18, estos en la fabricación del controlador no se usan.

Usando las versiones escalares de los estados, partiendo de los razonamientos de la sección 3.3.3, se encontrará que existe una versión para el modelo que tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,c}^N \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} + \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,c}^N \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} \cdot (\mathbb{R}\mathbb{I}_m^N) \\ Output &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,c}^N \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} + \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{jac,c}^N \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} \cdot (\mathbb{R}\mathbb{I}_m^N) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Siguiendo luego los razonamientos de la sección 3.3.4 se tiene un equivalente discretizado cada  $\mathbb{R}\Delta t_{accion}$ . Y es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} + \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,d}^N \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} \cdot (\mathbb{R}\mathbb{I}_m^N) \\ Output &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,d}^N \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} + \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{jac,d}^N \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} \cdot (\mathbb{R}\mathbb{I}_m^N) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Aquí queda supuesto que existen matrices donde cada posición puede ser una expresión algebraica en términos de los estados, las matrices deberían contener un valor numérico en cada posición en vez de las expresiones algebraicas, en un sistema computacional las matrices con expresiones habrían de entenderse como matrices simbólicas  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$ , que son lo mismo que las matrices anteriores pero sin ser evaluadas para  $\theta_{a,t}^N$  y  $\omega_{a,t}^N$ .

Lo primero al control de trayectorias es definir la trayectoria, que por conveniencia se define para los valores angulares y no para los valores cartesianos del efecto.

**Algorithm 1:** Algoritmo para transformar la trayectoria. Transformación inicial para controladores, con fines a describir la trayectoria en términos angulares de las extremidades y no por las coordenadas cartesianas del efecto final que definen la trayectoria como es definida inicialmente.

```

Result: Transformar el dominio de la trayectoria.
—Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
—Definir los tiempos de trayectoria cada  $\mathbb{R}\Delta t_{accion}$ , entenderlos en el concepto de  $T_z$  para todos los tiempos discretos  $t_i \leq t \geq t_f$ , bajo la norma de
 $(T_z) = \frac{\mathbb{R}t_f - \mathbb{R}t_i}{\mathbb{R}\Delta t_{accion}}$ . Por ser una notación tensorial debe garantizarse que  $t_f - t_i$  sea exactamente divisible por  $\mathbb{R}\Delta t_{accion}$  para que permita la forma
 $T_z = 1, 2, 3, \dots, (T_z)$ ;
—Declarar la trayectoria deseada para el efecto final  $q_z$  para cada coordenada cartesiana  $\mathbb{R}^3 q_z$  en todo tiempo discreto ' $T_z$ ' como  $\mathbb{R}^3 q_z^{T_z}$ , en forma de matriz
 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} T_z q_z$ ;
while  $t_k \in T_z$  do
    —Tranformar cada elemento  $\mathbb{R}^3 q_z^{(t_k)}$  por cinemática inversa 3.2.2 para obtener el instante de la trayectoria en su representación angular de la extremidad uno
     $\pi^N \theta_{A,z}^{(t_k)}$ ;
    —Expresar la trayectoria que verían los motores  $\pi^N \theta_{a,z}^{(t_k)}$  usando la expresión 3.12;
end
—Entender la trayectoria angular de los motores por su forma matricial  $\pi^N \times \mathbb{R} T_z \theta_{a,z}$ ;

```

Por tratarse de un sistema de segundo orden dinámico existe una relación diferencial entre el primer estado (estado de trayectoria)  $\pi\theta_{a,z}^{N,T_z}$  y el segundo estado, la velocidad angular  $\mathbb{R}\omega_{a,z}^{N,T_z}$ . Cómo  $\frac{d}{dt}\pi\theta_a^N = \mathbb{R}\omega_a^N$ , entonces:

**Algorithm 2:** Algoritmo para derivar las trayectorias de posición angular y obtener así las trayectorias esperadas de velocidad angular de las extremidades. \*En los controladores óptimos de trayectoria estas trayectorias no son importantes porque  $C = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2[1, 0; 0, 0])$ , que inhibe la relevancia del valor de la posición angular. Después del observador, la matriz  $C$  se modifica -aproximada a ser equivalente a  $C = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2[1, 0; 0, 1])$ , de ahí la necesidad de la trayectoria de velocidad. Para conocer el comportamiento del controlador ante trayectorias discontinuas ver el ejemplo en la figura 3.5b.

```

Result: Calcular la trayectoria implícita de velocidad angular.
—Iniciar una matriz vacía para almacenar la trayectoria angular  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z \omega_{a,z}$ ;
for  $n \in N$  do
    while  $t_k \in (T_z - 1)$  do
        —Diferenciar temporalmente la trayectoria de posición angular,  $\mathbb{R}\omega_{a,z}^{(n)(t_k)} = \frac{\pi\theta_{a,z}^{(n)(t_k+1)} - \pi\theta_{a,z}^{(n)(t_k)}}{\mathbb{R}\Delta t_{accion}}$ ;
    end
    if  $t_k == T_z$  then
         $\mathbb{R}\omega_{a,z}^{(n)(t_k)} = 0$ 
    end
end
—Entender la trayectoria de velocidad angular por su forma matricial  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z \omega_{a,z}$ ;

```

Ahora, queda definir el modelo para todas las posiciones en la trayectoria. -Empero, las expresiones Jacobianas de los estados 3.83 y 3.84 son aproximaciones lineales del modelo, expresiones instantáneamente válidas, válidas para el valor en que son evaluadas  $\theta_{a,t}^N, \omega_{a,t}^N$ . Por tanto un segundo algoritmo, para obtener las matrices discretas para cada instante de la trayectoria:

**Algorithm 3:** Algoritmo para encontrar la versión lineal del modelo en el dominio de la trayectoria. Esto es, para todos los instantes de la trayectoria encontrar una representación matricial que describa instantáneamente el modelo. A fin de calcular luego los valores óptimos de realimentación de estados -para el control 3.4.1.2 y para el observador 3.128.

**Result:** Encontrar la versión lineal del modelo para cada punto de las trayectoria.  
 —Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;  
 —Construir una representación simbólica de las matrices jacobianas del modelo dinámico discreto  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$ ;  
 —Construir una matriz vacía para almacenar los valores instantáneos de las matrices jacobianas  $A_{d,z}, B_{d,z}, C_{d,z}, D_{d,z}$  de cada extremidad  $A_{d,z}^N, B_{d,z}^N, C_{d,z}^N, D_{d,z}^N$ , en cada instante de tiempo de la trayectoria  $A_{d,z}^{N,Tz}, B_{d,z}^{N,Tz}, C_{d,z}^{N,Tz}, D_{d,z}^{N,Tz}$  en su forma matricial serían  $\mathbb{R}^{2 \times 2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} A_{d,z}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} B_{d,z}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} C_{d,z}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} D_{d,z};$   
 $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} C_{d,z}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} D_{d,z};$   
**for**  $n \in N$  **do**  
 |     **while**  $t_k \in T_z$  **do**  
 |     |     —Evaluar las expresiones simbólicas  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  para los valores de  $\pi\theta_{a,z}^{(n)(t_k)}$  y  $\pi\omega_{a,z}^{(n)(t_k)}$ , almacenar los valores  
 |     |     números de las matrices en  $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{d,z}^{(n)(t_k)}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{d,z}^{(n)(t_k)}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{d,z}^{(n)(t_k)}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{d,z}^{(n)(t_k)};$   
 |     |     **end**  
 |     **end**  
 |     —Entender las matrices Jacobianas por su versión matricial completa,  $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} A_{d,z}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} B_{d,z}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} C_{d,z},$   
 |      $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tz} D_{d,z};$

**Algorithm 4:** Algoritmo para linealizar el modelo en el dominio de los estados, para rastrear la versión lineal del modelo en función del valor de los estados instantáneos. Créase el caso de un modelo no lineal con una versión Jacobiana muy extensa, por tanto compleja de computar, aquí, sería más rápido mantener almacenadas las cuantías marginales de las matrices del modelo. El resultado de éste modelo está estrechamente relacionado al algoritmo 9.

**Result:** Encontrar la versión lineal del modelo para cada punto de las trayectoria.  
 —Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;  
 —Definir los rangos de los estados  $\pi\theta_{a,max}^N, \pi\theta_{a,min}^N, \pi\omega_{a,max}^N, \pi\omega_{a,min}^N$ ;  
 —Construir una representación simbólica de las matrices jacobianas del modelo dinámico discreto  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$ ;  
 —Definir la resolución  $T_r$  con la que serán mapeados los estados;  
 —Construir una matriz vacía para almacenar los valores locamente válidos de las matrices jacobinos  $A_{d,r}, B_{d,r}, C_{d,r}, D_{d,r}$  de cada extremidad  $A_{d,r}^N, B_{d,r}^N, C_{d,r}^N, D_{d,r}^N$ , en cada instante de resolución para  $\theta, A_{d,r}^{N,T_r}, B_{d,r}^{N,T_r}, C_{d,r}^{N,T_r}, D_{d,r}^{N,T_r}$ , y en cada instante de resolución para  $\omega, A_{d,r}^{N,T_r \cdot Tr}, B_{d,r}^{N,T_r \cdot Tr}, C_{d,r}^{N,T_r \cdot Tr}, D_{d,r}^{N,T_r \cdot Tr}$ , que en su forma matricial serían  $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tr} A_{d,r}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tr} B_{d,r}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tr} C_{d,r}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tr} D_{d,r}$ , el caso específico del Delta no lleva en las expresiones Jacobianas una dependencia con  $\omega$ , por tanto las matrices podrían reducirse una dimensión, pero aquí el caso general;  
**for**  $n \in N$  **do**  
 |     **while**  $t_{k,1} \in Tr$  **do**  
 |     |     —Asignar  $\pi\theta_{a,r}^{(n)(t_{k,1})} = \frac{t_{k,1} \cdot (\pi\theta_{a,max}^N - \pi\theta_{a,min}^N)}{Tr} + \pi\theta_{a,min}^N$ ;  
 |     |     **while**  $t_{k,2} \in Tr$  **do**  
 |     |     |     —Asignar  $\pi\omega_{a,r}^{(n)(t_{k,2})} = \frac{t_{k,2} \cdot (\pi\omega_{a,max}^N - \pi\omega_{a,min}^N)}{Tr} + \pi\omega_{a,min}^N$ ;  
 |     |     |     —Evaluar las expresiones simbólicas  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  para los valores de  $\pi\theta_{a,r}^{(n)(t_{k,1})}$  y  $\pi\omega_{a,z}^{(n)(t_{k,2})}$ , almacenar  
 |     |     |     los valores reales de las matrices en  $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{d,r}^{(n)(t_{k,1})(t_{k,2})}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{d,r}^{(n)(t_{k,1})(t_{k,2})}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{d,r}^{(n)(t_{k,1})(t_{k,2})}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} D_{d,r}^{(n)(t_{k,1})(t_{k,2})};$   
 |     |     **end**  
 |     **end**  
 |     —Entender las matrices Jacobianas por su versión matricial completa,  $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tr \times \mathbb{R}Tr} A_{d,r}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tr \times \mathbb{R}Tr} B_{d,r}, \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tr \times \mathbb{R}Tr} C_{d,r},$   
 |      $\mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}Tr \times \mathbb{R}Tr} D_{d,r};$   
 |     —Entender los estados asociados por sus valores en matrices,  $\pi N \times \pi Tr \theta_{a,r}, \pi N \times \pi Tr \omega_{a,r};$

Aquí terminan las concepciones iniciales del modelo, lo que sigue es fabricar el controlador, que empieza por una descripción general, sigue a una específica y luego una determinación algorítmica.

### 3.4.1.2. Estudio general de un controlador optimo para trayectoria

Lo anterior definió los estados y el modelo lineal a lo largo de la trayectoria. Los pasos que siguen los define más extensamente el libro de control optimo de D.S. Naidu [12] en la sección que trata el tema "Linear Quadratic Tracking System (Capítulo 4)". Ahora empieza a definirse el proceso para fabricar un controlador para el seguimiento optimo de trayectorias en un sistema lineal variante en el tiempo. Que por simplicidad defino en ecuaciones por términos en la nomenclatura del libro y en algoritmo por términos en la nomenclatura del presente documento.

Sea dado el sistema lineal observable:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t) * x(t) + B(t) * u(t), \\ y(t) &= C(t) * x(t).\end{aligned}\tag{3.85}$$

La salida deseada 'z(t)', se asocia al error de referencia como 'e(t) = z(t) - y(t)'. Sea el indice de desempeño:

$$J = \frac{1}{2}(e(t_f))^T * F * e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [(e(t))^T * Q * e(t) + (u(t))^T * R * u(t)] dt. \quad (3.86)$$

Cuya definición asume supuesta la determinación de las matrices de costo ‘F’ para el costo final, ‘Q’ para el costo de “tracking”, y ‘R’ para el costo de usar la señal de control.

Creando además, por simplicidad éstas otras matrices auxiliares ‘E’, ‘V’ y ‘W’ como:

$$\begin{aligned} E(t) &= B(t) * (R)^{-1} * (B(t))^T, \\ V(t) &= (C(t))^T * Q * C(t), \\ W(t) &= (C(T))^T * Q. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Siguiendo los razonamientos que muestra [12] el control óptimo  $u^{opt}(t)$  está dado por:

$$\begin{aligned} u^{opt}(t) &= -R^{-1} * (B(t))^T * (P(t) * x^{opt}(t) - g(t)), \\ &= -K(t) * x^{opt}(t) + R^{-1}(t) * B^T(t) * g(t). \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$K(t) = -R^{-1} * (B(t))^T * P(t). \quad (3.89)$$

Donde ‘P(t)’ es una matriz simétrica, definida positiva, que es solución a la ecuación diferencial no-lineal de Riccati (‘Riccati differential equation DRE’).

$$\dot{P}(t) = -P(t) * A(t) - (A(t))^T * P(t) + P(t) * E(t) * P(t) - V(t). \quad (3.90)$$

Con condición final:

$$P(t_f) = (C(t_f))^T * F * C(t_f). \quad (3.91)$$

Y el vector ‘g(t)’ es la solución a la ecuación diferencial vectorial lineal no-homogénea:

$$\dot{g}(t) = -(A(t) - E(t) * P(t))^T * g(t) - W(t) * z(t). \quad (3.92)$$

Con condición final:

$$g(t_f) = (C(t_f))^T * F * z(t_f). \quad (3.93)$$

Notese como para hallar ‘g’ es necesario definir previamente a ‘P’, y tanto ‘g’ como ‘P’ están condicionados a un valor en el último instante de tiempo, en contraste con las condiciones iniciales, ésto hace que la ecuación diferencial de ‘g’ y ‘P’, ambas, deban resolverse integrando inversamente en el tiempo, que es el mismo concepto de integrar solo que el tiempo fluye en sentido opuesto.

Luego, en tiempo regular la trayectoria óptima estaría dada por la solución a la ecuación diferencial lineal de estados:

$$\dot{x}^{opt}(t) = (A(t) - (E(t))^T * P(t)) * x^{opt}(t) + E(t) * g(t). \quad (3.94)$$

Como es evidente en la ecuación 3.88, el proceso de fabricar los controladores termina cuando se conoce a ‘P’ y a ‘g’ en todo instante de tiempo, la expresión de los estados óptimos es enunciada sólo por facilidad de simulación.

Diseñar optimamente seguimientos dinámicos de trayectoria es complejo, pero tiene una solución sencilla cuando los sistemas son lineales. La solución al controlador la narran las ecuaciones anteriores 3.85 hasta 3.93. Lo único que aparece extraño es el criterio de integrar inversamente en el tiempo para obtener las soluciones a las ecuaciones diferenciales que dan las trayectorias de ‘P(∀t)’ y ‘g(∀t)’. Empero es lo mismo, mucho más cuando se tiene la forma discreta del sistema, se reduce a evaluar los cambios inversamente, es como si en la descripción de la integral  $\int_{t_i}^{t_f} dt$ , ocurriera que  $-\int_{t_f}^{t_i} dt$ , en discreto es más sencillo, (La analogía con un sistema continuo sería usando una técnica de ‘ode2-ode45’).

### 3.4.1.3. Controlador óptimo de trayectoria para un Delta

El proceso anterior es diferente, concibe a A, B, y C (D=0) como matrices de un sistema continuo, o eso parece, en cualquier caso es irrelevante, el procedimiento del controlador puede hacerse además con matrices discretas. Especificando al caso del mecanismo que trata éste documento las ecuaciones anteriores serían formuladas cada tiempo discreto  $t_k$ , a intervalos constantes  $\Delta t_{accion}$ , según:

$$\begin{bmatrix} \pi\theta_a^{N(t_k+1)} \\ \mathbb{R}\omega_a^{N(t_k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi\theta_a^{N(t_k)} \\ \mathbb{R}\omega_a^{N(t_k)} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_a^{N(t_k)} \\ \mathbb{R}\omega_a^{N(t_k)} \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

\*no hay explícitamente una expresión diferencial (i.e. escribir  $\frac{d}{dt}$ ), pero así es más claro, en mi mente el límite al infinito de los cambios infinitesimales tiende a  $\Delta t_{accion}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_a^{N(t_k)} \\ \mathbb{R}\omega_a^{N(t_k)} \end{bmatrix} &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,d}^{N(t_k)} * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^{N(t_k)} \\ \mathbb{R}\omega_a^{N(t_k)} \end{bmatrix} + \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 B_{jac,d}^{N(t_k)} \cdot (\mathbb{R}\mathbb{I}_m^{N(t_k)}), \\ Output &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^{N(t_k)} * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^{N(t_k)} \\ \mathbb{R}\omega_a^{N(t_k)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Con la clarificación de que  $u(t_k) \rightarrow u(t_k)^N = \mathbb{R}\mathbb{I}_m^{N(t_k)}$ , y que  $x(t_k) \rightarrow x(t_k)^N = [\pi\theta_a^{N(t_k)}, \mathbb{R}\omega_a^{N(t_k)}]^T$ .

Sea el caso que la trayectoria sea a uno de los estados. Eso hace que la matriz C sea una identidad y que el error de trayectoria sea:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^{N \cdot T_z} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{jac,d}^{N \cdot T_z} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 e_z^{N \cdot T_z} &= \begin{bmatrix} \pi\theta_a^{N \cdot T_z} - \pi\theta_{a,z}^{N \cdot T_z} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Que lleva un índice de desempeño que evalúa:

$$\begin{aligned} J_z^N &= \frac{1}{2} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 e_z^{N(T_z)})^T * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 e_z^{N(T_z)}, \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{t_k=0}^{t_k=T_z-1} [(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 e_z^{N(t_k)})^T * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 e_z^{N(t_k)} + \mathbb{R} R_z \cdot (\mathbb{R}\mathbb{I}_m^{N(t_k)})^2]. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Sigue definir las matrices que proporcionan el costo cuadrático. -'F' le corresponde indicar el costo de referencia a la trayectoria en el último instante de tiempo, dígase el mismo costo que tendría el resto de la trayectoria. -El error de trayectoria en el resto de los instantes de tiempo lo penaliza el valor asignado a la diagonal de 'Q'. -'R' penaliza la utilización de la señal de control, que para darle sentido físico al costo sería bueno que ' $R_z = 1/R_m$ ' ( $R_m$ , resistencia de la bobina del motor), así el término del costo que evalúa la señal de control es dada en términos de Watts, de potencia eléctrica.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z &= \begin{bmatrix} Q q_z \gg R_z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z &= 10 \cdot \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z, \\ \mathbb{R} R_z &= \frac{1}{\mathbb{R} R_m}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Las matrices auxiliares ' $E_z$ ', ' $V_z$ ', y ' $W_z$ ' siguen la convención de la ecuación 3.87. -La señal de control, que es el fin del del modelo está dado por la expresión:

$$\mathbb{R}\mathbb{I}_{m,opt}^{N \cdot T_z} = -(\mathbb{R} R_z)^{-1} * (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{jac,d}^{N \cdot T_z})^T * (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot T_z} * \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,opt}^{N \cdot T_z} \\ \mathbb{R}\omega_{a,opt}^{N \cdot T_z} \end{bmatrix} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{N \cdot T_z}). \quad (3.100)$$

Noten como la corriente es una función de los estados, ambos.

Las constantes instantáneas de realimentación de estados, o ganancia de Kalman, es:

$$\mathbb{R}^2 K_z^{N \cdot T_z} = -(\mathbb{R} R_z)^{-1} * (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{jac,d}^{N \cdot T_z})^T * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 P_z^{N \cdot T_z}. \quad (3.101)$$

Una vez calculadas en todas las instancias ' $T_z$ ' los valores de 'P' y 'g' es posible deducir la corriente del motor en cada instancia ' $T_z$ ', lo que resuelve el problema de controlar el mecanismo para que siga la trayectoria  $\pi\theta_{a,z}^{N \cdot T_z}$ .

**Valor Final para las variables 'P' y 'g':**

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N(T_z)} &= (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^{N(T_z)})^T * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^{N(T_z)}, \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{N(T_z)} &= (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{jac,d}^{N(T_z)})^T * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z * \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,z}^{N(T_z)} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Incremental de primer orden para las variables ‘P’ y ‘g’:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot (t_k)}) &= \frac{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot (t_k+1)} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot (t_k)}}{\mathbb{R} \Delta t_{accion}}, \\
 \frac{d}{dt} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot (t_k)}) &= -\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot (t_k)} * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,d}^{N(t_k)} - (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,d}^{N(t_k)})^T * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot (t_k)} \dots, \\
 \frac{d}{dt} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{N \cdot (t_k)}) &= \frac{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{N \cdot (t_k+1)} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{N \cdot (t_k)}}{\mathbb{R} \Delta t_{accion}}, \\
 \frac{d}{dt} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{N \cdot (t_k)}) &= -(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{jac,d}^{N(t_k)} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 E_z^{N(t_k)} * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N(t_k)})^T * \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{N(t_k)} \dots \\
 \frac{d}{dt} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{N \cdot (t_k)}) &= -\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 W_z^{N(t_k)} * \begin{bmatrix} \pi \theta_{a,z}^{N(T_z)} \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

Que son las expresiones de derivada, la derivada está definida cuando el flujo de tiempo es progresivo, el tiempo inverso tendría una expresión de derivada igual a la convencional pero negativa como especifican los algoritmos 5 y 6.

#### 3.4.1.4. Algoritmos previos al Control

Por ser un sistema discreto y enteramente definidas las matrices en el trayecto de la solución, el controlador puede obtenerse en dos pasos, primero calcular ‘P’, segundo calcular ‘g’. Luego el controlador queda completamente especificado, ahora el primer paso:

**Algorithm 5:** Algoritmo para calcular ‘P’. Algoritmo que muestra el calculo en integral de tiempo inverso aplicado para encontrar solución específica a la matriz de Ricatti ‘P’.

```

Result: Calcular ‘ $P_z$ ’
—Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
—Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;
—Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;
—Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z A_{d,z}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z B_{d,z}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z C_{d,z}$ ,
 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z D_{d,z}$  usando el algoritmo 3;
—Especificar un valor para  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ , y  $\mathbb{R}^2 R_z$ ;
for  $n \in N$  do
    —Incializar en el valor final a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{(n)(T_z)}$  con la expresión 3.102;
    for  $t_k = T_z; t_k = -; t_k = 1$  do
        —Dar valor a las matrices auxiliares ‘E’, y ‘V’ según las expresiones en 3.87;
        —Calcular el diferencial de P, usando la expresión para P en 3.103, asignarlo a ‘aux’;
        —Integrar inversamente, i.e.  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{(n)(t_k-1)} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{(n)(t_k)} - aux$ ;
    end
end
—Entender a ‘P’ por sus forma matricial  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z P_z$ ;

```

**Algorithm 6:** Algoritmo para el calculo en integral de tiempo inverso del vector de detección de cambios acelerados ‘g’.

```

Result: Calcular ‘ $g_z$ ’
—Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
—Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;
—Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;
—Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z A_{d,z}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z B_{d,z}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z C_{d,z}$ ,
 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z D_{d,z}$  usando el algoritmo 3;
—Especificar un valor para  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ , y para  $\mathbb{R}^2 R_z$ ;
—Calcular  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z P_z$  con el algoritmo 5;
for  $n \in N$  do
    —Incializar en el valor final a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{(n)(T_z)}$  con la expresión 3.102;
    for  $t_k = T_z; t_k = -; t_k = 1$  do
        —Dar valor a las matrices auxiliares ‘E’, y ‘W’ según las expresiones en 3.87;
        —Calcular el diferencial de ‘P’, usando la expresión para ‘g’ en 3.103, asignarlo a ‘aux’;
        —Integrar inversamente, i.e.  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{(n)(t_k-1)} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 g_z^{(n)(t_k)} - aux$ ;
    end
end
—Entender a ‘g’ por sus forma matricial ‘ $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z g_z$ ’;

```

Noten como ‘P’ es una función sólo de las matrices del sistema (A,B,C) y de las matrices de costo (F,Q,R). ‘g’ en cambio depende de ‘P’ y de la trayectoria ‘z’. Reflexionando en estas dependencias se puede construir un entendimiento de ‘P’ y ‘g’.

Luego sigue especificar las ganancias de realimentación de estados:

**Algorithm 7:** Algoritmo para calcular las ganancias de realimentación de estados  $K$ , conocida como la ganancia de Kalman que son las proporcionalidades instantáneas para regir los instantes transitorios y semi-estables del sistema que está siendo controlado. El caso específico del Delta crea (como muestra la gráfica 3.5b) un hiperespacio que produce ganancias de realimentación que no varían significativamente, en principio el sistema es tan simple que basta con asignar un sólo valor del vector ' $K$ '. Aquí se calculan todos los valores, los óptimos en cada instante.

```

Result: Calcular ' $K_z$ '  

—Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;  

—Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;  

—Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;  

—Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} A_{d,z}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} B_{d,z}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} C_{d,z}$ ,  

 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} D_{d,z}$  usando el algoritmo 3;  

—Especificar un valor para  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ , y  $\mathbb{R} R_z$ ;  

—Calcular  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} P_z$  usando el algoritmo 5;  

for  $n \in N$  do  

    for  $t_k = 1; t_k + +; t_k \leq T_z$  do  

        —Calcular  $\mathbb{R}^2 K_z^{(n)(t_k)}$  usando la ecuación 3.101;  

    end  

end  

—Entender a ' $K_z$ ' por sus forma matricial  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} K_z$ ;
```

Aquí surge un dilema implemental, y es que de usarse un 'Encoder' como sensor se tendría en todo momento el valor del angulo presente, y si se quiere de los angulos pasados, pero la derivada es el cambio infinitesimal hacia adelante, con el Encoder es imposible directamente predecir el estado de la velocidad  $\mathbb{R}\omega_a^{N(t_k)}$ .

Para conocer una variable de estado sin sensor es necesario construir una figura matemática para obtenerlo en función del estado que se tiene, que es medido y la señal de control, esto se conoce como un observador de Luenberger.

**Algorithm 8:** Algoritmo para calcular las ganancias de observación de estados  $L_z$ . Observar un mecanismo es similar a controlarlo, y las ganancias de observación son también dinámicas pero con una varianza baja -igual que con ' $K$ ' las ganancias ' $L$ ' podrían asumirse estáticas y semi-óptimas. Aquí el proceso de calcular la matriz ' $L$ ' optima en cada instante.

```

Result: Calcular la matriz de observación ' $L_z$ '  

—Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;  

—Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} A_{d,z}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} B_{d,z}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} C_{d,z}$ ,  

 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} D_{d,z}$  usando el algoritmo 3;  

—Calcular las ganancias de re alimentación del controlador, obtener  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} K_z$ ;  

—Especificar los valores compuestos por parte real y parte imaginaria  $\mathbb{R}^N \beta_1$  y  $\mathbb{R}^N \beta_1$  tal que se cumpla que  $\text{abs}(\mathbb{R}^N \beta_{1/2}) \leq 1$ ;  

for  $n \in N$  do  

    for  $t_k = 1; t_k + +; t_k \leq T_r$  do  

        —Calcular  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 L_z^{(n)(t_k)}$  usando las expresiones en 3.128;  

    end  

end  

—Entender a ' $L_z$ ' por sus forma matricial ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{Tz} L_z$ ';
```

En este momento deben tenerse 16 matrices (las que aparecen en la tabla 3.1) con toda la información del trayecto, todas las matrices están sujetas a ser función únicamente del estado de posición angular  $\mathbb{R}^3 \theta_A^N$ , que es una condición fundamental para aplicar el algoritmo de interpolación lineal de matrices.

Tantas matrices parece demasiado, y lo es para el caso específico del Delta, porque es un mecanismo sencillo con un modelo igualmente sencillo. La estrategia de descomposición matricial es un método para realizar el control detallado de mecanismos observados con modelos muy extensos -altamente no lineales. Este método es el que narra el algoritmo 9.

Tabla 3.1: Tabla con las especificaciones de las matrices para hacer el controlador de realimentación de estados para el seguimiento de trayectoria. Donde se muestra la matriz, el significado, el algoritmo para fabricarla y la cantidad de memoria en bits que utiliza suponiendo que el sistema operativo es de  $\eta$  bits.

Variable	Significado	ref	Costo en Memoria (Bits)
$\pi^N \times \pi^{T_z} \theta_{a,z}$	Trayectoria de posición angular	Algoritmo 1	$\eta \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} \omega_{a,z}$	Trayectoria de velocidad angular	Algoritmo 2	$\eta \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} A_{d,z}$	Matriz incremental de estados	Algoritmo 3	$\eta \cdot 2 \cdot 2 \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} B_{d,z}$	Matriz incremental de entradas	Algoritmo 3	$\eta \cdot 2 \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} C_{d,z}$	Matriz de salida de estados	Algoritmo 3	$\eta \cdot 2 \cdot 2 \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} D_{d,z}$	Matriz de salida de entradas	Algoritmo 3	$\eta \cdot 2 \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} P_z$	Valores de P	Algoritmo 5	$\eta \cdot 2 \cdot 2 \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} g_z$	Valores de g	Algoritmo 6	$\eta \cdot 2 \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} K_z$	Valores de K	Algoritmo 7	$\eta \cdot 2 \cdot N \cdot T_z$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_z} L_z$	Valores de L	Algoritmo 8	$\eta \cdot 2 \cdot 2 \cdot N \cdot T_z$
$\pi^N \times \pi^{T_r} \times \pi^{T_r} \theta_{a,r}$	Mapeo a la posición angular	Algoritmo 4	$\eta \cdot N \cdot T_r \cdot T_r$
$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} \omega_{a,r}$	Mapeo a la velocidad angular	Algoritmo 4	$\eta \cdot N \cdot T_r \cdot T_r$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} A_{d,r}$	Matriz incremental de estados	Algoritmo 4	$\eta \cdot 2 \cdot 2 \cdot N \cdot T_r \cdot T_r$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} B_{d,r}$	Matriz incremental de entradas	Algoritmo 4	$\eta \cdot 2 \cdot N \cdot T_r \cdot T_r$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} C_{d,r}$	Matriz de salida de estados	Algoritmo 4	$\eta \cdot 2 \cdot 2 \cdot N \cdot T_r \cdot T_r$
$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} D_{d,r}$	Matriz de salida de entradas	Algoritmo 4	$\eta \cdot 2 \cdot N \cdot T_r \cdot T_r$

**Algorithm 9:** Interpolación lineal de matrices múltiples con dependencia única. La interpolación lineal es una estrategia para encontrar valores entre dos medidas, así, si se tienen dos puntos y se desea especificar valores para los puntos en la mitad, la interpolación lineal crea una linea recta entre los primeros dos y sobre esta linea especifica el valor de los instantes intermedios. La interpolación aquí es a matrices, y se asumen de dependencia única porque sino el algoritmo es demasiado extenso.

**Result:** Interpretar el valor de las matrices lineales para cualquier valor arbitrario de los estados.  
—Ejecutar el algoritmo 4 para obtener la base de la interpolación  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} A_{d,r}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} B_{d,r}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} C_{d,r}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \times \mathbb{R}^{T_r} D_{d,r}$ ,  $\pi^N \times \pi^{T_r} \theta_{a,r}$ ,  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{T_r} \omega_{a,r}$ ;  
—Definir los estados del instante de interpolación  $\pi \theta_{a,i}$  y  $\mathbb{R} \omega_{a,i}$  para cada cadena  $\pi \theta_{a,i}^N$  y  $\mathbb{R} \omega_{a,i}^N$ ;  
—Definir en cero las matrices de salida de interpolación  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N A_{d,i}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N B_{d,i}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N C_{d,i}$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N D_{d,i}$ ;  
—Definir en cero los auxiliares de interpolación  $i_{\theta,near1}$ ,  $i_{\theta,near2}$ ,  $i_{\omega,near1}$ ,  $i_{\omega,near2}$ ,  $nearcert_{\theta}$ ,  $nearcert_{\omega}$ ;

```

for  $n \in N$  do
    —Buscar ' $\forall T_r$ ' en  $\pi \theta_{a,r}^{(n)} \cdot T_r$  por el valor más cercano al estado de interpolación  $\pi \theta_{a,i}^{(n)}$  y registrar la posición de ' $T_r$ ' encontrada en la variable  $i_{\theta,near1}$ ;
    —Buscar ' $\forall T_r$ ' en  $\mathbb{R} \omega_{a,r}^{(n)} \cdot T_r$  por el valor más cercano al estado de interpolación  $\mathbb{R} \omega_{a,i}^{(n)}$  y registrar la posición de ' $T_r$ ' encontrada en la variable  $i_{\omega,near1}$ ;
    if  $\pi \theta_{a,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} \neq \pi \theta_{a,r}^{(n)}$  then
        —Encontrar el valor más cercanos a la variable  $\pi \theta_{a,i}^{(n)}$ , buscando ' $\forall T_z \neq i_{\theta,near1}$ ' en  $\pi \theta_{a,r}^{(n) \cdot T_r}$  y registrar la posición de ' $T_r$ ' encontrada en la variable  $i_{\theta,near2}$ ;
         $nearcert_{\theta} = \frac{abs(\pi \theta_{a,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})}) - abs(\pi \theta_{a,r}^{(n)})}{abs(\pi \theta_{a,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})}) - abs(\pi \theta_{a,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near2})})}$ ;
    end
    else
        | — $nearcert_{\theta} = 1$ ;
    end
    if  $\mathbb{R} \omega_{a,r}^{(n) \cdot (i_{\omega,near1})} \neq \mathbb{R} \omega_{a,r}^{(n)}$  then
        —Encontrar el valor más cercanos a la variable  $\mathbb{R} \omega_{a,i}^{(n)}$ , buscando ' $\forall T_z \neq i_{\omega,near1}$ ' en  $\mathbb{R} \omega_{a,r}^{(n) \cdot T_r}$  y registrar la posición de ' $T_r$ ' encontrada en la variable  $i_{\omega,near2}$ ;
         $nearcert_{\omega} = \frac{abs(\mathbb{R} \omega_{a,r}^{(n) \cdot (i_{\omega,near1})}) - abs(\mathbb{R} \omega_{a,r}^{(n)})}{abs(\mathbb{R} \omega_{a,r}^{(n) \cdot (i_{\omega,near1})}) - abs(\mathbb{R} \omega_{a,r}^{(n) \cdot (i_{\omega,near2})})}$ ;
    end
    else
        | — $nearcert_{\omega} = 1$ ;
    end
    —Definir si la interpolación es de dependencia única, y definir si la dependencia es al estado de posición angular ' $\mathbb{R} \theta$ ' o de velocidad angular ' $\mathbb{R} \omega$ '. Aquí se asume que es dependencia única al estado de posición angular, por tanto causa las matrices de salida interpoladas como:
    — $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{d,i}^{(n)} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} + nearcert_{\theta} * (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near2})})$ ;
    — $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{d,i}^{(n)} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} + nearcert_{\theta} * (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near2})})$ ;
    — $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{d,i}^{(n)} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} + nearcert_{\theta} * (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near2})})$ ;
    — $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{d,i}^{(n)} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} + nearcert_{\theta} * (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near1})} - \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 D_{d,r}^{(n) \cdot (i_{\theta,near2})})$ ;
end

```

### 3.4.1.5. Algoritmos para realizar el Control por estrategia regular

#### Algorithm 10: Algoritmo clásico para el seguimiento óptimo de trayectorias, de mínima especificación.

**Result:** Realizar el control

- Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
- Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;
- Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;
- Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  usando el algoritmo 3;
- Especificar un valor para ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ', ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ ', y ' $\mathbb{R}^2 R_z$ ';
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z P_z$ ' usando el algoritmo 5;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z g_z$ ' usando el algoritmo 6;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z K_z$ ' usando el algoritmo 7;
- Calcular el valor promedio de 'K' sobre todos los ' $T_z$ ', como  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N K_z, prom = \frac{\sum(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N K_z^{T_z}, \forall T_z)}{T_z}$ ;

**InParallel**  $\forall N$

for  $t_k = 1; t_k + +; t_k = T_z$  do

- Definir el valor instantáneo de la corriente según la expresión 3.100, usando como constantes de realimentación los valores de  $\mathbb{R}^2 K_z^{N,prom}$ , con  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot t_k}$ , y  $\mathbb{R}^2 g_z^{N \cdot t_k}$ ;
- Detener el procesamiento  $\mathbb{R} \Delta t_{accion} - \mathbb{R} \Delta t_{procesamiento}$ ;

end

#### Algorithm 11: Algoritmo clásico para el seguimiento óptimo de trayectorias, de mínima especificación, observado.

**Result:** Realizar el control

- Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
- Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;
- Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;
- Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  usando el algoritmo 3;
- Especificar un valor para ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ', ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ ', y ' $\mathbb{R}^2 R_z$ ';
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z P_z$ ' usando el algoritmo 5;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z g_z$ ' usando el algoritmo 6;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z K_z$ ' usando el algoritmo 7;
- Calcular el valor promedio de 'K' sobre todos los ' $T_z$ ', como  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N K_z, prom = \frac{\sum(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N K_z^{T_z}, \forall T_z)}{T_z}$ ;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z L_z$ ' usando el algoritmo 8;
- Calcular el valor promedio de 'K' sobre todos los instantes ' $T_z$ ', como  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N K_z, prom = \frac{\sum(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N K_z^{T_z}, \forall T_z)}{T_z}$ ;
- Calcular el valor promedio de 'L' sobre todos los instantes ' $T_z$ ', como  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N L_z, prom = \frac{\sum(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N L_z^{T_z}, \forall T_z)}{T_z}$ ;

**InParallel**  $\forall N$

for  $t_k = 1; t_k + +; t_k = T_z$  do

- Observar los estados usando la expresión 3.109 suponiendo que las ganancias de observación son  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N L_z, prom$ , con ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A^{N \cdot t_k}$ ', y ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B^{N \cdot t_k}$ ';
- Definir el valor instantáneo de la corriente según la expresión 3.100, usando como constantes de realimentación los valores de  $\mathbb{R}^2 K_z^{N,prom}$ , realimentando los estados observados, con  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot t_k}$ , y  $\mathbb{R}^2 g_z^{N \cdot t_k}$ ;
- Detener el procesamiento  $\mathbb{R} \Delta t_{accion} - \mathbb{R} \Delta t_{procesamiento}$ ;

end

#### Algorithm 12: Algoritmo clásico para el seguimiento óptimo de trayectorias, de especificación completa.

**Result:** Realizar el control

- Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
- Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;
- Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;
- Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  usando el algoritmo 3;
- Especificar un valor para ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ', ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ ', y ' $\mathbb{R}^2 R_z$ ';
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z P_z$ ' usando el algoritmo 5;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z g_z$ ' usando el algoritmo 6;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z K_z$ ' usando el algoritmo 7;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z L_z$ ' usando el algoritmo 8;

**InParallel**  $\forall N$

for  $t_k = 1; t_k + +; t_k = T_z$  do

- Definir el valor instantáneo de la corriente según la expresión 3.100, usando como constantes de realimentación los valores de  $\mathbb{R}^2 K_z^{N \cdot (t_k)}$ , con  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot t_k}$ , y  $\mathbb{R}^2 g_z^{N \cdot t_k}$ ;
- Detener el procesamiento  $\mathbb{R} \Delta t_{accion} - \mathbb{R} \Delta t_{procesamiento}$ ;

end

#### Algorithm 13: Algoritmo clásico para el seguimiento óptimo de trayectorias, de especificación completa, observado.

**Result:** Realizar el control

- Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
- Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;
- Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;
- Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  usando el algoritmo 3;
- Especificar un valor para ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ', ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ ', y ' $\mathbb{R}^2 R_z$ ';
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z P_z$ ' usando el algoritmo 5;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z g_z$ ' usando el algoritmo 6;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z K_z$ ' usando el algoritmo 7;
- Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z L_z$ ' usando el algoritmo 8;

**InParallel**  $\forall N$

for  $t_k = 1; t_k + +; t_k = T_z$  do

- Observar los estados usando la expresión 3.109 suponiendo que las ganancias de observación son  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N L_z^{(t_k)}$ , con ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{d,k}^{N \cdot t_k}$ ', y ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{d,k}^{N \cdot t_k}$ ';
- Definir el valor instantáneo de la corriente según la expresión 3.100, usando como constantes de realimentación los valores de  $\mathbb{R}^2 K_z^{N \cdot (t_k)}$ , realimentando los estados observados, con  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N \cdot t_k}$ , y  $\mathbb{R}^2 g_z^{N \cdot t_k}$ ;
- Detener el procesamiento  $\mathbb{R} \Delta t_{accion} - \mathbb{R} \Delta t_{procesamiento}$ ;

end

### 3.4.1.6. Algoritmos para realizar el Control por estrategia de interpolación

**Algorithm 14:** Algoritmo por interpolación de matrices para el seguimiento óptimo de trayectorias, de especificación completa.

```

Result: Realizar el control
—Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
—Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;
—Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;
—Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  asignados a lo largo de la trayectoria usando el algoritmo 3;
—Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  asignados a lo largo del dominio de la trayectoria usando el algoritmo 4;
—Especificar un valor para ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ', ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ ', y ' $\mathbb{R}^2 R_z$ ';
—Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z P_z$ ' usando el algoritmo 5;
—Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z g_z$ ' usando el algoritmo 6;
—Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z K_z$ ' usando el algoritmo 7;
for  $t_k = 1; t_k + +; t_k = T_z$  do
    —Usar el valor presente de la posición angular  $\pi \theta_A$  en el algoritmo 9 para obtener  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{d,i}^N, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 B_{d,i}^N$  Y  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{d,i}^N$ ;
    —Definir el valor instantáneo de la corriente según la expresión 3.100, usando como constantes de realimentación los valores de  $\mathbb{R}^2 K_z^{N,(tr)}$ , con  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N,tz}$ ,  $\mathbb{R}^2 g_z^{N,tz}$  y  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 B_{d,i}^N$ ;
    —Detener el procesamiento  $\mathbb{R} \Delta t_{accion} - \mathbb{R} \Delta t_{procesamiento}$ ;
end
```

**Algorithm 15:** Algoritmo por interpolación de matrices para control de seguimiento óptimo de trayectorias, de especificación completa, observado.

```

Result: Realizar el control
—Iniciar todas las variables descriptivas del mecanismo y su entorno;
—Declarar la trayectoria para la posición cartesiana del efecto;
—Transformar el dominio de la trayectoria usando el algoritmo 1;
—Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  usando el algoritmo 3;
—Declarar para toda la trayectoria los valores instantáneos de las matrices  $A_{jac,sym,d}, B_{jac,sym,d}, C_{jac,sym,d}, D_{jac,sym,d}$  asignados a lo largo del dominio de la trayectoria usando el algoritmo 4;
—Especificar un valor para ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 F_z$ ', ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 Q_z$ ', y ' $\mathbb{R}^2 R_z$ ';
—Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z P_z$ ' usando el algoritmo 5;
—Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z g_z$ ' usando el algoritmo 6;
—Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z K_z$ ' usando el algoritmo 7;
—Calcular ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} T_z L_z$ ' usando el algoritmo 8;
InParallel  $\forall N$ 
for  $t_k = 1; t_k + +; t_k = T_z$  do
    —Usar el valor presente de la posición angular  $\pi \theta_A$  en el algoritmo 9 para obtener  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{d,i}^N, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 B_{d,i}^N$  Y  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 C_{d,i}^N$ ;
    —Observar los estados usando la expresión 3.109 suponiendo que las ganancias de observación son  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N L_z^{(t_k)}$ , con ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 A_{d,i}^N$ ', y ' $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 B_{d,i}^N$ ';
    —Definir el valor instantáneo de la corriente según la expresión 3.100, usando como constantes de realimentación los valores de  $\mathbb{R}^2 K_z^{N,(t_k)}$ , realimentando los estados observados, con  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 P_z^{N,tz}$ , y  $\mathbb{R}^2 g_z^{N,tz}$ ;
    —Detener el procesamiento  $\mathbb{R} \Delta t_{accion} - \mathbb{R} \Delta t_{procesamiento}$ ;
end
```

### 3.4.1.7. Un último truco para implementar los controladores

Los controladores fueron fabricados con estrategias que funcional y que se comportan idealmente como en las figuras 3.5a, que se construyen definiendo matrices de definición de estados lineales. Asimismo existe una forma de asegurar que el error de seguimiento a trayectorias estables tienda a cero. De crear un estado adicional, esto significa hacer los mismos procedimientos algorítmicos, empero, el proceso no cambia lo único es expandir el espacio de estados en uno, agregar un estado, uno que integre el error de referencia con la trayectoria, de ésta manera si el sensor informa que hace falta la décima parte de un grado en la N-ésima articulación después de éste truco ésta décima parte restante se integra en el tiempo para conseguir un estado que va tendiendo a infinito y que necesita ser regulado.

El truco consiste agregar un estado que siga el error, hasta ahora los estados considerados en el control son  $\pi \theta_A^N$  y  $\mathbb{R} \omega_A^N$ . Queda agregar un nuevo estado, uno que rastree el error como:

$$\begin{array}{ll} Estado.de.posicion.angular & \pi \theta_A^N, \\ Estado.de.velocidad.angular & \mathbb{R} \omega_A^N, \\ Estado.de.integracion.al.error & \pi \theta_z^N - \pi \theta_A^N. \end{array} \quad (3.104)$$

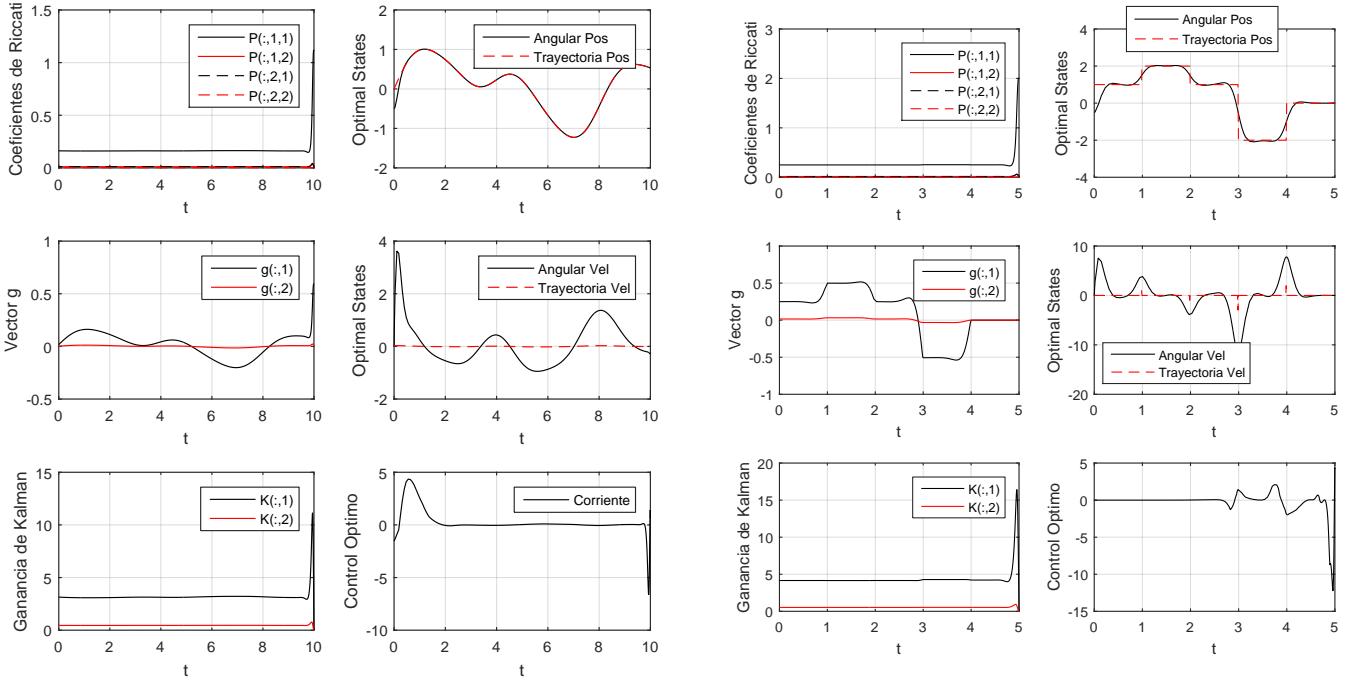
Esto modifica las matrices incrementares de estado A, B, C y D de manera muy simple, así:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi \theta_A^N \mathbb{R} \omega_A^N \\ \pi \theta_z^N - \pi \theta_A^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi \theta_A^N \mathbb{R} \omega_A^N \\ \pi \theta_z^N - \pi \theta_A^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} * \mathbb{R} \mathbb{I}_m^N, \\ Output &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi \theta_A^N \mathbb{R} \omega_A^N \\ \pi \theta_z^N - \pi \theta_A^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} * \mathbb{R} \mathbb{I}_m^N. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Este truco no es fundamental, sino más bien se aplica para reforzar la certeza de decaimiento del error de seguimiento de trayectoria estable.

### 3.4.1.8. Resultados del Controlador

Los resultados los exhiben las figuras 3.5a y 3.5b, que exhiben situaciones de control y el comportamiento óptimo del sistema que es controlado.



(a) *Resultados del controlador (sin observador) en el experimento de trayectorias continuas.*

### 3.4.2. Observador de Luenberger

Algunos sistemas tienen estados con una interpretación física que hace imposible la construcción de un sensor asociado al estado, o a veces el sensor es muy costoso. El espacio de estados, por tratarse de un set de ecuaciones diferenciales interactivas, se cree que existe una forma de conocer los valores de los estados de primer orden quiere decir que produce una forma de cambios de primer orden, y un segundo orden se hace el asemejar a ordenes consecutivos. -Es como si en un sistema de tres estados se conocieran dos y se quisiera tener certeza de uno faltante, como el caso del Delta que en cada motor.

Lo anterior está sujeto a condiciones de convergencia, de observabilidad y de reconstructibilidad, que tiene 1) la posición angular, 2) la velocidad angular y 3) la corriente del motor en cada instante, el Encoder dicta (1), el procesador dicta (3), pero es imposible medir (2) porque es un cambio incremental hacia adelante, para los sistemas complejos los observadores son tan importantes como los controladores.

Matemáticamente hay que demostrar que el estado es observable, así variables desconectadas no pueden obtenerse la una por causa de la otra. El estado debe estar en el sistema de una manera que sea reconstruible (a veces hace falta un filtro de kalman), y debe asumirse que el estado observado converge a una curva que no tiende infinito, -para dar pie a lo siguiente que puede verse más extensamente en el libro [14],-se dice "El observador de estado no es más que una emulación, con capacidad autocorrectora, de la dinámica del sistema cuyo estado se desea reconstruir."

La descripción original del observador puede verse en el famoso artículo de Luenberger [15].

### 3.4.2.1. Estudio general de un observador de estado dinámico

Por simplicidad se realiza el cálculo del observador se presume que las matrices son de un sistema discreto. Igual que en la sección de diseño del controlador, primero se utilizan ecuaciones en una nomenclatura tradicional, y luego en algoritmo por términos de la nomenclatura del presente documento aplicado al Delta. En la nomenclatura tradicional podría decirse que  $\hat{x}(t)$  son los estados observados, y  $x(t)$  son los estados medidos, y que lo que se sabe de los estados está indexado en un vector  $[(x(t))^T, (\hat{x}(t))^T]^T$ .  $u(t)$  la señal de control real aplicada, y  $y(t)$  la salida real del sistema.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t) * x(t) + B(t) * u(t), \\ y(t) &= C(t) * x(t), \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(t) * \hat{x}(t) + B(t) * u(t) + L * (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y} &= C(t) * x(t).\end{aligned}\tag{3.106}$$

La expresión anterior no contempla toda la información que existe del proceso, además se tiene la certeza que:

$$\begin{aligned}u(t) &= (K(t))^T * x(t), \\ \hat{u}(t) &= (K(t))^T * \hat{x}(t), \\ u_{total} &= \begin{bmatrix} u(t) \\ \hat{u}(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.107}$$

Por lo cual:

$$\dot{x}(t) = (A(t) - B(t) * (K(t))^T) * x(t),\tag{3.108}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A(t) - B(t) * (K(t))^T) * \hat{x}(t) + L * (y(t) - \hat{y}(t)).\tag{3.109}$$

Que es lo que se conoce como observador dinámico del vector de estado ó observador de Luenberger, el vector de parámetros 'L' suscita la realimentación del error de estimación, lo que se conoce como inyección de la salida real con la observada. Sólo es posible crear observadores de estado para los sistemas denominados observables, o para las partes observables de los sistemas. La condición de observabilidad se evalúa por el rango de la matriz compuesta por:

$$rango(O) = rango((C(t))^T) = rango\left(\begin{bmatrix} C(t) \\ C(t) * A(t) \\ \vdots \\ C(t) * A(t)^{n-2} \\ C(t) * A(t)^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n.\tag{3.110}$$

Si las condiciones anteriores se cumplen, entonces se procede a diseñar 'L' por medio de alguna técnica, aquí la técnica de ubicación de polos de la dinámica del error de estimación de estados, generalizaciones hechas por [14] muestran que la dinámica del error 'e' esta dada por:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)\dot{e}(t) = [A(t) - B(t) * (K(t))^T - L(t) * C(t)] * e(t).\tag{3.111}$$

Obtener una representación laplaciana de la dinámica del error de un sistema lineal, se hace reduciendo el espacio del estado a dos términos de comportamiento transitorio ' $\zeta$ ' y ' $\omega_n$ '. La dinámica estudiada es la dinámica del error 3.111, y la transformación polinomial ' $p_{sis}$ ' laplaciana 's', o transformada 'z', que estudia los modos que rigen la dinámica del error, sería:

$$p_{sys} = \det([z * I - A(t) + B(t) * (K(t))^T - L(t) * C(t)]).\tag{3.112}$$

Donde, 'I' es una matriz identidad.

Aquellos serían, en general un polinomio, dígase de segundo orden, que tiene una forma general como:

$$p_{des} = z^2 + 2\zeta\omega_n z + (\omega_n)^2 = (z + \beta_1) \cdot (z + \beta_2) = z^2 + (\beta_1 + \beta_2)z + (\beta_1 \cdot \beta_2)^2.\tag{3.113}$$

Igualando la expresión del polinomio del sistema  $p_{sys}$  a la ecuación del polinomio deseado  $p_{des}$ , despejando 'L' se obtienen expresiones para las ganancias de observación que hacen que el error de observación de estados siga la dinámica especificada por los parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ , que pueden ser cualquier valor. La estrategia para fabricar el observador es despejar de la siguiente ecuación los valores de 'L':

$$\det([z * I - A(t) + B(t) * (K(t))^T - L(t) * C(t)]) = z^2 + 2\zeta\omega_n z + (\omega_n)^2.\tag{3.114}$$

Expandiendo para encontrar el determinante, sin hacer explicitamente la dependencia temporal ‘(t)’ y asumiendo un sistema con dos estados:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \\ & \left[ \begin{array}{cc|c} s - A_{11} + B_{11} \cdot K_{11} - C_{11} \cdot L_{11} - C_{12} \cdot L_{21} & -A_{21} + B_{11} \cdot K_{21} - C_{21} \cdot L_{11} - C_{22} \cdot L_{21} \\ -A_{21} + B_{21} \cdot K_{12} - C_{11} \cdot L_{21} - C_{12} \cdot L_{22} & s - A_{22} + B_{12} \cdot K_{21} - C_{21} \cdot L_{12} - C_{22} \cdot L_{22} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.115)$$

Calculando el determinante:

$$\begin{aligned} & z^2 \\ & + (-A_{22} - A_{11} + B_{11} \cdot K_{11} + B_{21} \cdot K_{21} - C_{11} \cdot L_{11} - C_{12} \cdot L_{21} - C_{21} \cdot L_{12} - C_{22} \cdot L_{22}) \cdot z \\ & -(A_{21})^2 + A_{11} \cdot A_{22} - A_{22} \cdot B_{11} \cdot K_{11} - A_{11} \cdot B_{21} \cdot K_{21} + A_{21} \cdot B_{11} \cdot K_{21} \\ & + A_{21} \cdot B_{21} \cdot K_{11} + A_{11} \cdot C_{21} \cdot L_{12} + A_{22} \cdot C_{11} \cdot L_{11} - A_{21} \cdot C_{11} \cdot L_{21} \\ & - A_{21} \cdot C_{21} \cdot L_{11} + A_{11} \cdot C_{22} \cdot L_{22} - A_{21} \cdot C_{12} \cdot L_{22} + A_{22} \cdot C_{12} \cdot L_{21} \\ & - A_{21} \cdot C_{22} \cdot L_{21} - C_{11} \cdot C_{22} \cdot (L_{21})^2 - B_{11} \cdot C_{21} \cdot K_{11} \cdot L_{12} + B_{11} \cdot C_{11} \cdot K_{21} \cdot L_{21} \\ & - B_{21} \cdot C_{11} \cdot K_{21} \cdot L_{11} + B_{21} \cdot C_{21} \cdot K_{11} \cdot L_{11} + B_{11} \cdot C_{12} \cdot K_{21} \cdot L_{22} - B_{11} \cdot C_{22} \cdot K_{11} \cdot L_{22} \\ & - B_{21} \cdot C_{12} \cdot K_{21} \cdot L_{21} + B_{21} \cdot C_{22} \cdot K_{11} \cdot L_{21} + C_{11} \cdot C_{21} \cdot L_{11} \cdot L_{12} - C_{11} \cdot C_{21} \cdot L_{11} \cdot L_{21} \\ & + C_{11} \cdot C_{22} \cdot L_{11} \cdot L_{22} - C_{12} \cdot C_{21} \cdot L_{11} \cdot L_{22} + C_{12} \cdot C_{21} \cdot L_{12} \cdot L_{21} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Reduciendo lo que es cero, según las expresiones de la sección 3.3.4, asumiendo que se ha usado ‘Zero Order Hold’ para hacer la discretización, y conociendo que  $C = [1, 0; 0, 0]$ .

$$\begin{aligned} & z^2 \\ & + (-A_{22} + B_{11} \cdot K_{11} + B_{21} \cdot K_{21} - C_{11} \cdot L_{11}) \cdot z \\ & -(A_{21})^2 - A_{22} \cdot B_{11} \cdot K_{11} + A_{21} \cdot B_{11} \cdot K_{21} + A_{21} \cdot B_{21} \cdot K_{11} + A_{22} \cdot C_{11} \cdot L_{11} - A_{21} \cdot C_{11} \cdot L_{21} \\ & + B_{11} \cdot C_{11} \cdot K_{21} \cdot L_{21} - B_{21} \cdot C_{11} \cdot K_{21} \cdot L_{11} \end{aligned} \quad (3.117)$$

Que según la expresión 3.113 hay una igualdad que es equivalente a decir:

$$\begin{aligned} & -A_{22} + B_{11} \cdot K_{11} + B_{21} \cdot K_{21} - C_{11} \cdot L_{11} = \beta_1 + \beta_2 \\ & -(A_{21})^2 - A_{22} \cdot B_{11} \cdot K_{11} + A_{21} \cdot B_{11} \cdot K_{21} \dots \\ & + A_{21} \cdot B_{21} \cdot K_{11} + A_{22} \cdot C_{11} \cdot L_{11} - A_{21} \cdot C_{11} \cdot L_{21} \dots = \beta_1 \cdot \beta_2 \\ & + B_{11} \cdot C_{11} \cdot K_{21} \cdot L_{21} - B_{21} \cdot C_{11} \cdot K_{21} \cdot L_{11} \end{aligned} \quad (3.118)$$

Que equivale a decir:

$$L_{11} = (C_{11})^{-1} \cdot (-\beta_1 - \beta_2 - A_{22} + B_{11} \cdot K_{11} + B_{21} \cdot K_{21}) \quad (3.119)$$

$$L_{21} = (-B_{11} \cdot C_{11} \cdot K_{21} + A_{21} \cdot C_{11})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\beta_1 \cdot \beta_2 - (A_{21})^2 - A_{22} \cdot B_{11} \cdot K_{11} \dots \\ + A_{21} \cdot B_{11} \cdot K_{21} + A_{21} \cdot B_{21} \cdot K_{11} \dots \\ + (-B_{21} \cdot C_{11} \cdot K_{21} + A_{22} \cdot C_{11}) \cdot L_{11} \end{pmatrix} \quad (3.120)$$

Queda por tanto seleccionar la ubicación de los dos polos  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Para los sistemas discretos el criterio de estabilidad está en que  $\text{abs}(\beta_{1/2}) \leq 1$ .

### 3.4.2.2. Fabricación específica de un observador de estado para un Delta

Cambiando la nomenclatura a la generalizada para el Delta se buscan las expresiones para ‘ $L_z$ ’ con la explicita distinción de ‘ $L_z \neq L$ ’ en función de los estados medidos, y la señal de control. Partiendo del principio de que el sistema es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi \theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R} \omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R} \alpha_{a,t}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{R} \omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R} \alpha_{a,t}^N \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R} \alpha_{a,t}^N &= (\mathbb{R} I_A^N)^{-1} \cdot \left( \mathbb{R} K T_m^N \cdot \mathbb{R} \mathbb{I}_{m,t}^N - \mathbb{R} B_m^N \cdot \mathbb{R} \omega_{a,t}^N \dots \right. \\ & \quad \left. + (\mathbb{R} B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R} m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R} m_A^N) \cdot \mathbb{R} g \cdot \cos(\pi \theta_{a,t}^N) \right). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Una vez especificadas las constantes de realimentación  $\mathbb{R}^2 K_z^N$ . El espacio de estados queda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N &= (\mathbb{R}I_A^N)^{-1} \cdot \left( -\mathbb{R}KT_m^N \cdot (\mathbb{R}^2 K_z^N)^T * \begin{bmatrix} \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \\ \mathbb{R}\alpha_{a,t}^N \end{bmatrix} - \mathbb{R}B_m^N \cdot \mathbb{R}\omega_{a,t}^N \dots \right. \\ &\quad \left. + (\mathbb{R}B_A^N)^{-1} \cdot (\mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_{c,t}^N + 0,5 \cdot \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}m_A^N) \cdot \mathbb{R}g \cdot \cos(\pi\theta_{A,t}^N) \right). \end{aligned} \quad (3.122)$$

En ambos casos ocurre que la salida es solo el primero de los estados:

$$Output = \pi\theta_{a,t}^N. \quad (3.123)$$

Que tiene una expresión lineal dada según las expresiones en la sección 3.3.4. Por lo que la sección anterior estudio, se deben realizar los cálculos para la versión discreta del modelo dinámico. Retenedor de orden ‘zero’ (las operaciones matriciales descritas por la ecuación 3.80).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} - \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} * (\mathbb{R}^2 K_z^N)^T * \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,medido}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,observado}^N \end{bmatrix}, \\ Output &= \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Si el estado observado, y el estado medido se asumen precisos, ocurre que:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} = \left( \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} - \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} * (\mathbb{R}^2 K_z^N)^T \right) * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Con estados observados equivalentes como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \pi\theta_{a,observado}^N \\ \mathbb{R}\omega_{a,observado}^N \end{bmatrix} &= \left( \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} - \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} * (\mathbb{R}^2 K_z^N)^T \right) * \begin{bmatrix} \pi\theta_a^N \\ \mathbb{R}\omega_a^N \end{bmatrix} \\ &\quad + \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} L_z^N * (\pi\theta_{a,medido}^N - \pi\theta_{a,observado}^N). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Después de comprobaciones se demuestra que este sistema es completamente observable. Luego el error y la dinamica del error de observación están dado por la expresión en 3.111, que adaptada a la nomenclatura es:

$$\begin{aligned} e(t) &= \pi\theta_{a,medido}^N - \pi\theta_{a,observado}^N \\ \dot{e}(t) &= \left( \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} A_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} - \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^1} B_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} * (\mathbb{R}^2 K_z^N)^T - \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} L_z^N * \mathbb{R}^{2 \times \mathbb{R}^2} C_{jac,d}^N \Big|_{\theta_{a,t}^N} \right) * e(t). \end{aligned} \quad (3.127)$$

Los modos de la dinámica de observación 3.127, tiene una interpretación laplaciana dada por 3.112, y se desea una dinámica como en 3.113, igualando estos dos términos se forma la expresión que finalmente da como resultado las expresiones para las ganancias de observador ‘ $L_z$ ’, según el par de ecuaciones 3.119 y 3.120, como:

Haciendo además la anotación que  $\mathbb{R}^{(1)} \times \mathbb{R}^{(2)} = SYM^{(1)} \cdot (2)$  que es lo mismo que decir que se accede al elemento en la primera fila y en la segunda columna.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(1)} \times \mathbb{R}^{(2)} L_z^N &= 0, \\ \mathbb{R}^{(2)} \times \mathbb{R}^{(2)} L_z^N &= 0, \\ \mathbb{R}^{(1)} \times \mathbb{R}^{(1)} L_z^N &= (C_{jac,d}^{(1)(1)N})^{-1} \cdot (-\beta_1^N - \beta_2^N - A_{jac,d}^{(2)(2)N} + B_{jac,d}^{(1)(1)N} \cdot K_z^{(1)N} + B_{jac,d}^{(2)(1)N} \cdot K_z^{(2)N}), \\ &\quad (-B_{jac,d}^{(1)(1)N} \cdot C_{jac,d}^{(1)(1)N} \cdot K_z^{(2)N} + A_{jac,d}^{(2)(1)N} \cdot C_{jac,d}^{(1)(1)N})^{-1} * \dots \\ &\quad \left( -\beta_1^N \cdot \beta_2^N - (A_{jac,d}^{(2)(1)N})^2 - A_{jac,d}^{(2)(2)N} \cdot B_{jac,d}^{(1)(1)N} \cdot K_z^{(1)N} \dots \right. \\ \mathbb{R}^{(2)} \times \mathbb{R}^{(1)} L_z^N &= +A_{jac,d}^{(2)(1)N} \cdot B_{jac,d}^{(1)(1)N} \cdot K_z^{(2)N} + A_{jac,d}^{(2)(1)N} \cdot B_{jac,d}^{(2)(1)N} \cdot K_z^{(1)N} \dots \\ &\quad \left. (-B_{jac,d}^{(2)(1)N} \cdot C_{jac,d}^{(1)(1)N} \cdot K_z^{(2)N} + A_{jac,d}^{(2)(2)N} \cdot C_{jac,d}^{(1)(1)N}) \cdot L_z^{(1)(1)} \right). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Con la aclaración de que todas las matrices jacobianas deben ser evaluadas en los estados  $\mathbb{R}\theta_A^N$ ,  $\mathbb{R}\omega_A^N$ . Lo anterior asume que la discretización del modelo ha sido hecha utilizando un retenedor de orden zero (ecuación 3.80). —Con esto termina la fabricación del controlador, una vez determinados los valores compuestos (parte real y parte imaginaria,  $\mathbb{R}\mathbb{I}$ ) cumpliendo la norma de  $\text{abs}(\mathbb{R}\mathbb{I}\beta_{1/2}^N) \leq 1$ .

Luego, antes de finalizar volver a la ecuación 3.106.

### 3.4.3. Controlador para un motor de Paso

Aquí el escenario es menos imaginario, no existe modelo dinámico -sino sólo geométrico. Y se cree el caso en que el efecto final deba rastrear la posición cartesiana del efecto que es una trama de valores de posición  $\mathbb{R}^3 q_{f,z}$  en binario  $\mathbb{B}^{\eta \times 3} q_{f,z}$  que se envía cada tiempo '( $Tz$ )' como una cadena sucesiva de tres valores de  $\eta$  bits de resolución de coordenadas -Osea un tren binario de tres veces  $\eta$  bits  $\mathbb{B}^{\eta \times 3} q_{f,z}^{Tz}$ , concatenados enviados por un puerto serial (USB, dos cables Tx y Rx, sujetos al mecanismo de codificación serial de entrando), de manera que el receptor del procesador de la máquina recibe  $\mathbb{B}^{\eta \times 3 + \gamma} Rx_{\text{delta}}^{Tz}$  lo que fue enviado por el computador  $\mathbb{B}^{\eta \times 3 + \gamma} Tx_{\text{Computer}}^{Tz}$ . Existen  $\gamma$  términos del protocolo serial.



Figura 3.6: Esquema de la trama de envío de datos del protocolo de comunicación serial. Mostrando que  $\gamma = 40$ . Para el caso particular del controlador de posición SERIAL en los 24 bits de tamaño debe escribirse siempre el valor numérico descompuesto en binario del valor de la multiplicación  $\mathbb{R}\eta * 3 \leftarrow \mathbb{B}^{24} \eta * 3$ . STX da inicio a la trama con 8 bits en alto, SOH es un espacio para la identificación de errores en el dato enviado. El valor en 'DATO' sería entonces  $\mathbb{B}^{\eta \times 3} q_{f,z}$ .

La trama serial tendría internamente el valor de la trayectoria  $\mathbb{R}^3 q_{f,z}$ , sólo habría que decodificarlo del elemento enviando. Esta parte es automáticamente realizada por librerías en un procesador convencional y tiene una serie lógica de decodificación cuando es en FPGA. Aquí se asume que se conoce el valor real de la trayectoria  $\mathbb{R}^3 q_{f,z}^{Tz}$  que se la descompone por cinemática inversa a ser  $\mathbb{R}^N \theta_{A,z}^{Tz}$  y que luego se intenta hacer a los motores de paso perseguir el '( $Tz$ )-ésimo valor recibido por el puerto serial del procesador que hay en el Delta. -Que es distinto a pensar que el mecanismo vá a todas las posiciones enviadas por el serial- Porque podría haber el caso que se envíen posiciones más rápido de lo que puede desplazarse el artefacto.

Lo primero es decodificar la trama del  $Tz$ -ésimo instante:

$$\mathbb{B}^{\eta \times 3 + \gamma} Rx_{\text{delta}}^{(Tz)} \rightarrow \mathbb{R}^3 q_{f,z}^{(Tz)}. \quad (3.129)$$

Luego transformarle por cinemática inversa:

$$\mathbb{R}^3 q_{f,z}^{(Tz)} \rightarrow \mathbb{R}^N \theta_{A,z}^{Tz}. \quad (3.130)$$

Transformarle a valores de cantidad de pasos por los términos:

$$\mathbb{R}^N \theta_{A,z}^{Tz} \rightarrow \mathbb{Z}^N \theta_{A,z}^{Tz}. \quad (3.131)$$

Restarle la posición del angulo presente:

$$\mathbb{Z}^N \Delta \theta = \mathbb{Z}^N \theta_{A,z}^{Tz} - \mathbb{Z}^N \theta_A. \quad (3.132)$$

Desplazarse hacia la coordenada deseada: (Aquí podría usarse una librería de acceso público para lenguaje c: "AccelStepper.h", "MultiStepper.h" que pueden encontrarse en [16], sujeta a una licencia Open Source GPL Version 2).

La idea general del desplazamiento está dado por una relación de movimiento o por una relación de velocidad. Porque usualmente las librerías para manejar motores de paso codifican los accionamientos a los motores en términos de posición absoluta o de velocidad de giro.

**Desplazamiento codificado por posición:** Accionar la cantidad de pasos en  $\text{abs}(\mathbb{Z}^N \Delta\theta)$  en la dirección  $\text{sgn}(\mathbb{Z}^N \Delta\theta)$ .

**Desplazamiento codificado por velocidad** Accionar los motores a una velocidad proporcional a  $\propto \text{abs}(\mathbb{Z}^N \Delta\theta)$  en la dirección  $\text{sgn}(\mathbb{Z}^N \Delta\theta)$ .



# Capítulo 4

## 4.1. Conclusiones

1. Se describieron ejemplos de descripción geométrica y dinámica utilizando un lenguaje de especificación matemática aumentada.
2. Se desarrolló un modelo geométrico generalizado para un robot Delta, generalizando el número de extremidades, las longitudes y orientaciones de las dos bases.
3. Se desarrolló un modelo dinámico generalizado para un robot Delta, tanto en espacio continuo como en espacio discreto.
4. Se desarrolló una estrategia de control óptimo para el seguimiento de trayectorias arbitrarias, implementando un observador de estado dinámico.
5. Se construyó un prototipo de robot Delta, que ilustra un par de modificaciones estructurales al robot original. Por utilizar resortes-amortiguados para tensar la correa de transmisión articular y otro set de resortes-amortiguados para aislar parcialmente el efecto final a la estructura superior. El robot se construyó enteramente sin la utilización de una impresora 3D, además, se derivaron expresiones para optimizar los valores de elasticidad y viscosidad en los mecanismos de modificación estructural.
6. Se diseñó un circuito para modular corriente [A] continua, para cualquier tipo de carga, pretendido para modular analógicamente el torque de motores DC.
7. Se realizaron animaciones dinámicas y dibujos tridimensionales de la estructura en cuestión.
8. Se redactó un documento conteniendo la información.

## 4.2. Trabajos futuros

A continuación se enlista esfuerzos que contribuyen a lo que hay creado ya:

1. Resolver el modelo dinámico del artefacto con amortiguadores.
2. Construir un Robot Delta que lleve motores de corriente directa y utilice el circuito de la figura 1.8.
3. Construir un Robot Delta que utilice en los amortiguadores constantes elásticas y viscosas que sigan las ecuaciones de diseño, secciones ?? y ??.
4. Realizar un estudio completo de las ecuaciones de simulación dinámica del apéndice F.
5. Construir un Robot Delta que lleve un mayor número de articulaciones, múltiplo de tres y simétricas entre ellas.
6. Implementar la dinámica y la cinemática en lenguaje de programación de Hardware.



## Anexo A

# Ecuación de movilidad espacial Chebychev–Grübler–Kutzbach

A todo sistema de uniones articuladas se le puede conocer estudiando la capacidad de las cadenas cinemáticas para inducir movimientos no redundantes, en un sentido filosófico se estudian trayectorias continuas sobre un espacio M-dimensional, el caso en cuestión M se espera que sea igual a tres (3) cuando sólo actúan los N-torques que accionan las N cadenas cinemáticas independientes.

Para este y para cualquier otro sistema cinemático la forma de comprobar Los grados de libertad que posee el movimiento de un sistema que está definido por sus articulaciones y actuadores está dado por la ecuación de movilidad espacial Chebychev–Grübler–Kutzbach:

$$5 \quad (\text{A.1})$$

“M” como en número de grados de libertad alcanzables por un sistema con “n” líneas de unión y con j articulaciones, donde  $f_i = [1, \dots, j]$  es un vector compuesto por la cantidad de grados de libertad de cada punto de unión “i”.

Este método, hasta donde lo resume la ecuación A.1 es suficiente para evaluar, digamos, en un entorno de máquinas con algoritmos adaptativos la disociación de una mutación con un entorno euclíadiano, pero los movimientos son más complejos, no siempre es trivial definir el número de articulaciones, y múltiples líneas de unión interactuantes-. Tómese ahora el caso de evaluar Kutzbach para el Delta completo, y considerase que los amortiguadores ‘H’ son libres de encogerse por lo que inducen un grado de libertad nuevo, cada uno y son  $N * \sigma = (3) * (2) = 6$ , y los N motores que articulan las cadenas por si solos estimulan tres grados, un mal análisis de los grados de libertad de un cuerpo como un efecto final nunca debe dar más de 6 grados de libertad ortogonales porque el efecto final es un punto y los puntos en el espacio cartesiano solo pueden sufrir tres desplazamientos y tres angulaciones. Pero los  $N * \sigma$  amortiguadores más los N motores superiores no pueden estimular los 6 grados, el encogimiento de los amortiguadores sólo puede inclinar el plano del horizonte del punto. El motor que hay en la base del efecto que consigue accionar el grado faltante, la rotación del plano horizontal que percibe el punto del efecto.

El autor no cree que sea conveniente poner más aquí por tratarse de un anexo, por favor considere ver este documento, al tiempo de consulta el documento está libremente publicado en la red en: [17]



## **Anexo B**

# **Circuitos para Actuadores**



## Anexo C

# Sobre las simplificaciones al concepto de masa

Lo que sigue no es fundamental al modelo o al diseño, pero es algo que estudiando noté y que vale la pena proponerlo aquí porque a mis ojos explica el oscuro concepto de 'masa'.

La masa es una propiedad de los cuerpos que relaciona las fuerzas a las aceleraciones, la masa es una abstracción, las interacciones en la materia son energéticas, la masa tan sólo facilita los cálculos en el régimen de los cuerpos que a nuestros ojos no son muy grandes ni muy pequeños. Al caso de los mecanismos robóticos articulados los comprometen aceleraciones medianas, tanto mayor sea la aceleración que experimenta un cuerpo, tanto más preciso debe ser el concepto de masa, o de momento de inercia.

El estudio del movimiento lineal define la imposición al cambio de posición por un valor constante remanente en la derivada de segundo orden, la masa, pero ésto es una ley en el régimen de la complejidad de las aceleraciones de los cuerpos que se mueven en las proporciones de nuestros sentidos, la energía de un fotón es muy baja para nosotros y la de un hoyo negro muy alta, pero todo en la mitad es sencillo, muy preciso por su segundo orden. Pero si un sistema al mismo tiempo se desplaza y pierde masa, entonces experimenta aceleraciones más complejas, aceleraciones a las que no le basta el segundo orden parcial temporal para ser descritas. La segunda ley de Newton es la solución de segundo orden a la ecuación de Euler-Lagrange de dinámica, soluciones de mayor orden consiguen para movimientos más complejos, mejores aproximaciones al gráfico que describe cómo se mueve el cuerpo. Es una cuestión no de cálculo, sino de cálculo de variaciones, la diferencia es sutil pero poderosa. Lo anterior es para hablar sobre la cuestión de la masa, los controladores usan el cálculo de variaciones otro poco más a fondo, pero el modelo aquí es Newtoniano de segundo orden de medios lineales.

Es de la siguiente manera, -La geometría describe formas, el cálculo describe cambios de las formas, y el cálculo de variaciones describe cambios en las formas de cambio de las formas geométricas.

Cuando el cálculo estudia la dinámica vé la variación temporal de coordenadas que sufren los puntos geométricos, en otro sentido vé la imposición de los medios físicos al cambio de posición de los cuerpos con propiedades lo que resulta en describir una trayectoria, el cálculo de variaciones estudia los cambios en las funciones que representan los parámetros de los términos de imposición y propiedades de los cuerpos. Son grados crecientes de conocimiento, en un sentido la forma homologa cómo las sumas crecen a ser multiplicaciones y las multiplicaciones crecen a ser exponentes, así mismo ocurre en la matemática que las derivadas evolucionan al ser integradas, así mismo también fija la matemática que la geometría evoluciona a ser cálculo, y luego evoluciona a ser cálculo de variaciones. La geometría crea formas, el cálculo crea trayectorias y el cálculo de variaciones crea Hiperespacios.

Crear un Hiperespacio de segundo orden para las traslaciones lineales de base cartesiana es decir que la ecuación para la energía cinética es:

$$\mathbb{R}^3 E_{K_R} = \frac{m}{12} \cdot \left( \frac{d^2(\mathbb{R}^3 q)}{dt^2} \right)^2 \quad (C.1)$$

Pero, los cuerpos además de trasladarse parecen a nuestros sentidos que también rotan, hay energía de rotación también:

$$\pi^3 E_{K_\phi} = \frac{I}{12} \cdot \left( \frac{d^2(\mathbb{R}^3 \phi)}{dt^2} \right)^2 \quad (C.2)$$

Las expresiones tienen ésta forma porque cuando se hace el experimento con los planetas, con robots de baja velocidad,

la regresión de segundo orden es enormemente precisa, las expresiones de energía tienen ésta forma porque cuando son derivadas dos veces queda un valor constante, el de la masa ' $m$ ', el de momento de inercia ' $I$ '. Este es el principio de la mecánica clásica.

El Hiperespacio se construye con axiomas, un axioma en el hiperespacio es una ecuación, una expresión de igualdad. El de la dinámica es el conservación de la energía, y el principio válido que toda energía es cinética o es potencial  $\mathbb{R}^3 E_{P_R}$ ,  $\mathbb{R}^3 E_{P_\phi}$ , y que la suma de las energías en un sistema cerrado es constante.

$$\mathcal{L} = \sum_{\forall K} \mathbb{R} E_K - \sum_{\forall P} \mathbb{R} E_P \quad (C.3)$$

' $\mathcal{L}$ ' es un Hiperespacio. Extraer la dinámica del hiperespacio es resolver la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dq}{dt}} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) = 0 \quad (C.4)$$

Es hasta ahí porque el Hiperespacio es de segundo orden, lo que dice la Ley de Newton es esto, la energía es con expresiones cuadráticas, una expresión más general sería:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{d^i}{dt^i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d^iq}{dt^i}} \right) = 0 \quad (C.5)$$

Pero las derivadas de mayor orden son cero para las expresiones cuadráticas de energía.

Lo anterior es sólo para mostrar el procedimiento de modelar los mecanismos, cualquiera, modelarlos no por fuerzas, sino por energías, no por trayectorias sino por Hiperespacios es un procedimiento más elegante, más completo, robusto. De nada sirve describir el mecanismo por su energía y proyectar la trayectoria a partir del Hiperespacio si las expresiones de energía no son precisas, si los términos de masa, momento de inercia, aceleración gravitacional, constante elástica y viscosa no describen exactamente al cuerpo y al medio. Los modelos aquí en este documento son de medios lineales, ésto es, valores constantes de masa (momento de inercia), de constantes elásticas y viscosas. Ahí las simplificaciones, pero el método le basta con expresiones de energía cuadrática para dar aproximar los sucesos, el segundo orden es una ley, la segunda de Newton es que la energía cinemática  $\mathbb{R}^3 E_{K_{R/\phi}}$  sea una función cuadrática, y así se hace y el modelo se aproxima al límite de las variaciones del evento real, lo que sucede a éste modelo es que los términos de masa y momento de inercia están aproximados al concepto de distribuciones uniformes de masa, lo que es equivocado y hace que el modelo no sea exacto. Pero fabricar controladores por realimentación de Estados, que es el fin del modelo, no necesita de una representación exacta del movimiento porque hay una realimentación constante de los estados reales, los ángulos instantáneos de las extremidades, y la naturaleza opera, digamos, usando los infinitos ordenes de la ecuación C.5.

Ahora los conceptos de masa por su valor y ubicación geométrica puntual.

## Anexo D

# Dinámica Lagrangiana

Hablar de las colisiones internas.

Las formulaciones de contingencia, lo que anteriormente se llamó axiomas estructurales, se utilizan para calcular todos los parámetros, los valores de los procesos que ocurren y cualquier proceso nuevo puede crearse si se introduce una ecuación que le represente en términos de lo que ya está representado en función del axioma fundamental, el origen. Lagrange o alguien antes de él encontró la forma de sumar todas estas contingencias en una sola sola expresión, el espacio vectorial en bruto del proceso, una sola ecuación multivariada que lo representa todo en términos espacio temporales de segundo orden. Las ecuaciones de contingencia son vectoriales, espaciales, de primer orden, cuando son derivadas dos veces pierden toda la información, a diferencia de la energía que es de segundo orden en el tiempo, segundo orden en el espacio cuando es Potencial  $\mathbb{P}$ , o de segundo orden en el tiempo y en la velocidad cuando es Cinética  $\mathbb{K}$ .

La energía unidimensional está formulada como la expresión algebráica más sencilla que sobrevive dos veces a ser derivada parcialmente, con respecto al espacio ' $1/2 \cdot k \cdot q^2$ ', con respecto a la velocidad ' $1/2 \cdot m \cdot v^2$ ', y ambas dos veces con respecto al tiempo. Especificar valores constantes después de ser derivados i.e. la masa y la elasticidad.

Cómo someter los procesos a ser según los axiomas de contingencia. Otro poco más de la idea muestra se deben expresar los axiomas como procesos de segundo orden ortogonales que conectan sistemas destinados a comportarse según las normas en los axiomas. El efecto sería independiente de no ser porque existe una cadena de axiomas que lo relaciona a las coordenadas de las articulaciones, al centro de la base 'T', y al origen. Presumir axiomas en segundo orden temporal se hace por que el proceso del movimiento ha sido dispuesto para entenderse por su segundo orden en el tiempo, conocer el movimiento es obtener una expresión para la aceleración.

Una expresión validada en la presunción de fuerzas conservativas, la segunda ley de Newton, pero las restricciones de este tipo son de posición casi todas, y un par de restricciones a las velocidades, restricciones sin ser fuerzas, hacer sobrevivir cualquier axioma al efecto de ser derivado se consigue multiplicando por un escalar ( $\lambda$ ) que mantiene viva la influencia de la expresión que es derivada con respecto al tiempo. consigue introducir la expresión al espacio vectorial en una dimensión propia, ortogonal a las demás, los multiplicadores de Lagrange permiten indexar axiomas estructurales en formas de fuerzas a la expresión de la segunda ley de Newton, calcularlos es sólo invertir una matriz.

En esta dinámica el origen está separado de pertenecer a la estructura  $\mathbb{R}^3 q_T$  está ubicado en  $\mathbb{R}^3 q_T - \mathbb{R} L^{(1)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta z_0$  calculado cuando  $\forall N, \mathbb{R} \Delta L_T^N = 0$ . Esta dinámica asume además que la base superior 'T' no rota kjig Newton es genial porque inventó el cálculo, y sus mecanismo bastan para describir los sistemas correctamente, pero sobre la estrategia se construyó otro poco más que expande infinitamente las posibilidades, el Formalismo de Lagrange para modelar sistemas dinámicos es una estrategia mucho más sofisticada, que modela la energía en vez de fuerzas, en principio. Superpone dos axiomas, la ecuación D.1 y D.6, la segunda ley de Newton y la equivalente en la termodinámica del postulado de Newton, fuerzas conservativas y energía conservativa.

Lagrange es tan sofisticado que le permite al mecanismo de modelado representar el concepto de restricción. En la estructura, ésta de Lagrange cabe todo. Al autor le cuesta ver un sistema que sea suficientemente complejo como para que no pueda representarse por éste mecanismo, el de Lagrange o sus extensiones de orden superior. De Lagrange, de Newton y el maestro de Newton, de Galileo y de aquel que tomó la medida de las coordenadas de los planetas, del que primero haya tenido la idea de la matemática. Es sencillamente tan ingenioso pensar los sistemas en términos de energía y no de fuerza, usar el cálculo después para representar fuerzas en términos de energía, y agregar la forma de introducir restricciones. Ecuaciones de energía y restricciones arbitrarias que equivalen a fuerzas cuando se las multiplica por un valor instantánea-

mente constate. El multiplicador de Lagrange  $\lambda$  de las expresiones con Energía  $\mathbb{E}$  vale uno, ya son en si mismo fuerzas, los multiplicadores de Lagrange configuran el espacio vectorial para librarles de redundancias.

De movimientos lineales.

$$\sum^{\forall F} \mathbb{R}F = 0 \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}F_{Eq} &= \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial q} & [Kg.m/s^2] \\ \mathbb{R}F_{\lambda q} &= \mathbb{R}\lambda \cdot \Pi_{(q,v)} & [Kg.m/s^2] \\ \mathbb{R}F_{Ev} &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial v} & [Kg.m/s^2] \\ \mathbb{R}F_{\lambda v} &= -\lambda' \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \Pi_{(q,v)} & [Kg.m/s^2] \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$\mathbb{E} = \sum^{\forall P} \mathbb{P} - \sum^{\forall K} \mathbb{K} = 0 \quad [Kg.m^2/s^2] \quad (D.3)$$

Donde:

$\mathbb{R}F_q$  son las fuerzas causadas por los estados.

$\mathbb{R}F_{\lambda q}$  son las fuerzas por restricciones a los valores en los estados.

$\mathbb{R}F_{\dot{q}}$  son las fuerzas causadas por las velocidades de los estados, la tasa de cambio de primer orden.

$\mathbb{R}F_{\lambda \dot{q}}$  son las fuerzas por restricciones a las velocidades de los estados, cero para el caso.

$\mathbb{P}$  es la energía potencial de cualquier masa.

$\mathbb{K}$  es la energía cinética de cualquier masa.

De movimientos angulados.

$$\sum^{\forall \tau} \mathbb{R}\tau = 0 \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\tau_{U\varphi} &= \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \varphi} & [Kg.m^2/s^2] \\ \mathbb{R}\tau_{\lambda\varphi} &= \mathbb{R}\lambda \cdot \Pi_{(\varphi,\omega)} & [Kg.m^2/s^2] \\ \mathbb{R}\tau_{U\omega} &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \omega} & [Kg.m^2/s^2] \\ \mathbb{R}\tau_{\lambda\omega} &= -\lambda' \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} \Pi_{(\varphi,\omega)} & [Kg.m^2/s^2] \end{aligned} \quad (D.5)$$

$$\mathbb{U} = \sum^{\forall P} \mathbb{P} - \sum^{\forall K} \mathbb{K} = 0 \quad [Kg.m^3/s^2] \quad (D.6)$$

Donde:

$\mathbb{R}\tau_\varphi$  son las fuerzas causadas por los estados.

$\mathbb{R}\tau_{\lambda\varphi}$  son las fuerzas por restricciones a los valores en los estados.

$\mathbb{R}\tau_\omega$  son las fuerzas causadas por las velocidades de los estados, la tasa de cambio de primer orden.

$\mathbb{R}\tau_{\lambda\omega}$  son las fuerzas por restricciones a las velocidades de los estados, cero para el caso.

$\mathbb{P}$  es la energía potencial de rotación.

$\mathbb{K}$  es la energía de rotación cinética.

Un poco más de reflexión a método que describen las ecuaciones anteriores debela que lo que construye el hiperespacio es tan sólo restricciones, sólo que la conservación de la energía modela la restricción que impera la dinámica.

Aquí el modelo puede hacerse tan extenso como se quiera ingresando tantas restricciones variables. Y yo he puesto tantas restricciones como creo que existen entre los puntos y vectores que consideré importantes.

Primero, en el modelo de mínima expresión para el mecanismo sin amortiguadores existen sólo tres restricciones:

$$\Pi^N = \left\| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 q_f + (\mathbb{R}L^{(9)} - \mathbb{R}L^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^N \dots \\ - \mathbb{R}^3 q_T - \mathbb{R}L^{(4)} \cdot (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N} |_{\theta^N}) * \mathbb{R}^3 \delta N^N \end{array} \right\| - \mathbb{R}L^{(6)} - \mathbb{R}L^{(7)} = 0 \quad (D.7)$$

las constantes del proceso son:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}L^{(1-10)} &= [1 \ 0,25 \ 0,21 \ 0,62 \ 0,0866 \ 0,44 \ 0,44 \ 0,0866 \ 0,05 \ 0,0] & [m] \\
 hemisferio &= & [-1] \\
 \mathbb{R}^3G &= [0,0,-9,8]^T & [m/s^2] \\
 \mathbb{R}^3q_0 &= [0,0,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3q_T &= [0,0,\mathbb{R}L^{(1)}]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta x_0 = \mathbb{R}^3\delta x_T = \mathbb{R}^3\delta x_f &= [1,0,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta y_0 = \mathbb{R}^3\delta y_T = \mathbb{R}^3\delta y_f &= [0,1,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta z_0 = \mathbb{R}^3\delta x_T = \mathbb{R}^3\delta z_f &= [0,0,1]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta N &= \begin{bmatrix} 0 & 0,8660 & -0,8660 \\ -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [m] \\
 \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta S &= (hemisferio) \cdot \begin{bmatrix} -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0 & -0,8660 & 0,8660 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [.] 
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Las variables, estados, o coordenadas generalizadas del proceso son:

$$\begin{aligned}
 \pi\theta^N, \quad \mathbb{R}\omega^N \\
 \mathbb{R}^3q_f, \quad \mathbb{R}^3v_f
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

Las energías son:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} &= \\
 \mathbb{K} &=
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

En el mecanismo sin amortiguadores de descripción completa las restricciones son:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(7,8,9)} &= \|\mathbb{R}^3\delta A^N - (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N}|_{\theta^N}) * \mathbb{R}^3\delta N^N\| = 0 \\
 \Pi^{(7,8,9)} &= \|\mathbb{R}^3q_H^N - \mathbb{R}^3q_A^N - \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3\delta A^N\| = 0 \\
 \Pi^{(10,11,12,13,14,15)} &= \|\mathbb{R}^3q_H^{N\sigma} - \mathbb{R}^3q_{Hm}^N + (-1)^\sigma \cdot \mathbb{R}L^{(5)} \cdot \mathbb{R}^3\delta S^N\| = 0 \\
 \Pi^{(16,17,18,19,20,21)} &= \|\mathbb{R}^3q_H^{N\sigma} - \mathbb{R}^3q_H^{N\sigma}\| - (\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)}) = 0 \\
 \Pi^{(22,23,24,25,26,27)} &= \|\mathbb{R}^3q_{hm}^N - \mathbb{R}^3q_h^{N\sigma} + (-1)^\sigma \cdot \mathbb{R}L^{(8)} \cdot \mathbb{R}^3\delta S^N\| = 0 \\
 \Pi^{(1,2,3)} &= \|(\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)})^{-1} \cdot (\mathbb{R}^3q_{Hm}^N - \mathbb{R}^3q_{hm}^N) - \mathbb{R}^3\delta H^N\| = 0 \\
 \Pi^{(28,29,30)} &= \|\mathbb{R}^3q_f - \mathbb{R}^3q_{Hm}^N - \mathbb{R}L^{(9)} \cdot \mathbb{R}^3\delta N^N\| = 0 \\
 \Pi^{(31,32,33)} &= \|\mathbb{R}^3q_{fe} - \mathbb{R}^3q_f^N + \mathbb{R}L^{(10)} \cdot \mathbb{R}^3\delta z_f\| = 0
 \end{aligned} \tag{D.11}$$

las constantes del proceso son:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}L^{(1-10)} &= [1 \ 0,25 \ 0,21 \ 0,62 \ 0,0866 \ 0,44 \ 0,44 \ 0,0866 \ 0,05 \ 0,0] & [m] \\
 hemisferio &= & [-1] \\
 \mathbb{R}^3G &= [0,0,-9,8]^T & [m/s^2] \\
 \mathbb{R}^3q_0 &= [0,0,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3q_T &= [0,0,\mathbb{R}L^{(1)}]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta x_0 = \mathbb{R}^3\delta x_T = \mathbb{R}^3\delta x_f &= [1,0,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta y_0 = \mathbb{R}^3\delta y_T = \mathbb{R}^3\delta y_f &= [0,1,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta z_0 = \mathbb{R}^3\delta x_T = \mathbb{R}^3\delta z_f &= [0,0,1]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta N &= \begin{bmatrix} 0 & 0,8660 & -0,8660 \\ -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [m] \\
 \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta S &= (hemisferio) \cdot \begin{bmatrix} -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0 & -0,8660 & 0,8660 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [.] \\
 \mathbb{R}^3q_A^N &= \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{N=3} [\mathbb{R}^3q_T, \mathbb{R}^3q_T, \mathbb{R}^3q_T] + \mathbb{R}L^{(3)} \cdot \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta N & [m]
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

Las variables escalares, estados, o coordenadas generalizadas del proceso son:

$$\begin{aligned}
 \pi\theta^N & , \quad \mathbb{R}\omega^N \\
 \mathbb{R}^3q_f & , \quad \mathbb{R}^3v_f \\
 \mathbb{R}^3q_{Hm}^N & , \quad \mathbb{R}^3v_{Hm}^N \\
 \mathbb{R}^3q_{H\sigma}^{N\sigma} & , \quad \mathbb{R}^3v_{H\sigma}^{N\sigma} \\
 \mathbb{R}^3q_{hm}^N & , \quad \mathbb{R}^3v_{hm}^N \\
 \mathbb{R}^3q_h^{N\sigma} & , \quad \mathbb{R}^3v_h^{N\sigma} \\
 \mathbb{R}^3q_{fe} & , \quad \mathbb{R}^3v_{fe}
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

Los variables vectoriales, estados vectoriales o bases generalizadas en el proceso son:

$$\frac{\mathbb{R}^3\delta A^N}{\mathbb{R}^3\delta H^N} \tag{D.14}$$

Las energías del mecanismo son:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} & = \\
 \mathbb{K} & =
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

Los comentarios de la descripción del modelo anterior son:

En mecanismo con amortiguadores la estrategia está restringida a ser con N=3. El mecanismo de expresión completa tiene estas restricciones:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{(4)} & = \left\| \mathbb{R}^3q_T - \mathbb{R}^3q_0 - 1/N \cdot \sum^{\forall N} \left( \frac{k}{\mathbb{R}^3q_t^N} + (\mathbb{R}L^{(2)} - \mathbb{R}\Delta L_T^N) \cdot \mathbb{R}^3\delta z_0 \right) \right\| = 0 \\
 \Pi^{(4)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta z_T - 1/3 \cdot (\mathbb{R}L^{(3)})^{-2} \dots \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left( \frac{k}{\mathbb{R}^3q_t^{(2)}} - \frac{k}{\mathbb{R}^3q_t^{(1)}} + (\mathbb{R}\Delta L_T^{(1)} - \mathbb{R}\Delta L_T^{(2)}) \cdot \mathbb{R}^3\delta z_0 \right) \dots \right. \\
 & \quad \left. \otimes \left( \frac{k}{\mathbb{R}^3q_t^{(3)}} - \frac{k}{\mathbb{R}^3q_t^{(1)}} + (\mathbb{R}\Delta L_T^{(1)} - \mathbb{R}\Delta L_T^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^3\delta z_0 \right) \right\| = 0 \\
 \Pi^{(4)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta y_T - (\mathbb{R}L^{(3)})^{-1} \cdot \left( \frac{k}{\mathbb{R}^3q_t^{(1)}} + (\mathbb{R}L^{(2)} - \mathbb{R}\Delta L_T^{(1)}) \cdot \mathbb{R}^3\delta z_0 - \mathbb{R}^3q_T \right) \right\| = 0 \\
 \Pi^{(4)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta x_T - \mathbb{R}^3\delta y_T \otimes \mathbb{R}^3\delta z_T \right\| = 0 \\
 \Pi^{(4)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta N^N + (\mathbb{R}L^{(3)})^{-1} \cdot \left( \frac{k}{\mathbb{R}^3q_t^N} + (\mathbb{R}L^{(2)} - \mathbb{R}\Delta L_T^N) \cdot \mathbb{R}^3\delta z_0 - \mathbb{R}^3q_T \right) \right\| = 0 \\
 \Pi^{(1,2,3)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta S^N - (hemisferio) \cdot \mathbb{R}^3\delta N^N \otimes \mathbb{R}^3\delta z_T \right\| = 0 \\
 \Pi^{(4,5,6)} & = \left\| \mathbb{R}^3q_A^N - \mathbb{R}^3q_T - \mathbb{R}L^{(3)} \cdot \mathbb{R}^3\delta N^N \right\| = 0 \\
 \Pi^{(7,8,9)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta A^N - (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^N} |_{\theta^N}) * \mathbb{R}^3\delta N^N \right\| = 0 \\
 \Pi^{(7,8,9)} & = \left\| \mathbb{R}^3q_{Hm}^N - \mathbb{R}^3q_A^N - \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3\delta A^N \right\| = 0 \\
 \Pi^{(10,11,12,13,14,15)} & = \left\| \mathbb{R}^3q_H^{N\sigma} - \mathbb{R}^3q_{Hm}^N + (-1)^{\sigma} \cdot \mathbb{R}L^{(5)} \cdot \mathbb{R}^3\delta S^N \right\| = 0 \\
 \Pi^{(16,17,18,19,20,21)} & = \left\| \mathbb{R}^3q_h^{N\sigma} - \mathbb{R}^3q_H^{N\sigma} \right\| - (\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)} - \mathbb{R}\Delta L_H^{N\sigma}) = 0 \\
 \Pi^{(1,2,3)} & = \left\| (\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)} - \mathbb{R}^3\Delta L^{N\sigma})^{-1} \cdot \left( \mathbb{R}^3q_{Hm}^N - \mathbb{R}^3q_{hm}^N \right) - \mathbb{R}^3\delta H^{N\sigma} \right\| = 0 \\
 \Pi^{(16,17,18,19,20,21)} & = \left\| \mathbb{R}^3q_{hm}^N - \mathbb{R}^3q_h^{N\sigma} \right\| - \mathbb{R}L^{(8)} = 0 \\
 \Pi^{(1)} & = \left\| \mathbb{R}^3q_f - \mathbb{R}^3q_0 - 1/N \cdot \sum^{\forall N} \left( \mathbb{R}^3q_{hm}^N \right) \right\| = 0 \\
 \Pi^{(1)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta z_f - 1/3 \cdot (\mathbb{R}L^{(9)})^{-2} \cdot \left( \mathbb{R}^3q_{hm}^{(2)} - \mathbb{R}^3q_{hm}^{(1)} \right) \otimes \left( \mathbb{R}^3q_{hm}^{(3)} - \mathbb{R}^3q_{hm}^{(1)} \right) \right\| = 0 \\
 \Pi^{(4)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta y_f + (\mathbb{R}L^{(9)})^{-1} \cdot \left( \frac{k}{\mathbb{R}^3q_{hm}^{(1)}} - \mathbb{R}^3q_f \right) \right\| = 0 \\
 \Pi^{(4)} & = \left\| \mathbb{R}^3\delta x_f - \mathbb{R}^3\delta y_f \otimes \mathbb{R}^3\delta z_f \right\| = 0 \\
 \Pi^{(1)} & = \left\| \mathbb{R}^3q_{fe} - \mathbb{R}^3q_f - \mathbb{R}L^{(10)} \cdot \mathbb{R}^3\delta z_f \right\| = 0
 \end{aligned} \tag{D.16}$$

Las constantes del proceso son:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}L^{(1-10)} &= [1 \ 0,25 \ 0,21 \ 0,62 \ 0,0866 \ 0,44 \ 0,44 \ 0,0866 \ 0,05 \ 0] & [m] \\
 \text{hemisferio} &= & [-1] & [.] \\
 \mathbb{R}^3G &= [0,0,-9,8]^T & [m/s^2] \\
 \mathbb{R}^3q_0 &= [0,0,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta x_0 &= [1,0,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta y_0 &= [0,1,0]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3\delta z_0 &= [0,0,1]^T & [m] \\
 \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta N_{\forall \Delta L_T=0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0,8660 & -0,8660 \\ -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [m] \\
 \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta S_{\forall \Delta L_T=0} &= (\text{hemisferio}) \cdot \begin{bmatrix} -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0 & -0,8660 & 0,8660 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [.] \\
 \mathbb{R}^3 q_t^N &= \mathbb{R}^3 q_0 - \mathbb{R}L^{(3)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta N_{\forall \Delta L_T=0}^N + (\mathbb{R}L^{(1)} - \mathbb{R}L^{(2)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta z_0 & [m]
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

Las variables escalares, estados, o coordenadas generalizadas del proceso son:

$$\begin{aligned}
 \pi \theta^N &, \quad \mathbb{R} \omega^N \\
 \mathbb{R}^3 q_T & \\
 \mathbb{R}^3 q_A^N & \\
 \mathbb{R}^3 q_H^N & \\
 \mathbb{R}^3 q_{Hm}^N & \\
 \mathbb{R}^3 q_H^N & \\
 \mathbb{R}^3 q_{hm}^N & \\
 \mathbb{R}^3 q_h^N & \\
 \mathbb{R}^3 q_f &, \quad \mathbb{R}^3 v_f \\
 \mathbb{R}^3 q_{fe} & \\
 \mathbb{R} \Delta L_T^N &, \quad \frac{d}{dt} (\mathbb{R} \Delta L_T^N) \\
 \mathbb{R} \Delta L_H^{N\sigma} &, \quad \frac{d}{dt} (\mathbb{R} \Delta L_H^{N\sigma})
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

Los variables vectoriales, estados vectoriales o bases generalizadas variables en el proceso son:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}^3 \delta N^N & \\
 \mathbb{R}^3 \delta S^N & \\
 \mathbb{R}^3 \delta A^N & \\
 \mathbb{R}^3 \delta H^{N\sigma} & \\
 \mathbb{R}^3 \delta x^T, \mathbb{R}^3 \delta y^T, \mathbb{R}^3 \delta z^T & \\
 \mathbb{R}^3 \delta x^f, \mathbb{R}^3 \delta y^f, \mathbb{R}^3 \delta z^f &
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

Las energías del mecanismo son:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} &= \\
 \mathbb{K} &=
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

Las fuerzas y torques son vectores tridimensionales, las asimilaciones anteriores asumen fuerzas y torques unidimensionados, describen dos procesos aparte el de los torques y el de las fuerzas. Y presumirlas unidimensionadas es correcto porque el espacio cartesiano es ortogonal, pero una expresión general más detallada se construye si se realizan dos asimilaciones, la primera es la de comprender a  $\mathbb{E}$  y a  $\mathbb{U}$  como una restricción más, la de la conservación de la energía. La otra asimilación es expresar las ecuaciones anteriores en forma vectorial del espacio cartesiano:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}^3 F_q &= \text{diag}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_q}, \frac{\partial}{\partial y_q}, \frac{\partial}{\partial z_q}\right]\right) * \mathbb{R}^3 \mathbb{E} & [N.m/s^2]^3 \\
 \mathbb{R}^3 F_{\lambda q} &= \text{diag}(\mathbb{R}^3 \lambda) * \text{diag}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_q}, \frac{\partial}{\partial y_q}, \frac{\partial}{\partial z_q}\right]\right) * \mathbb{R}^3 \Pi_{(q,q)} & [N.m/s^2]^3 \\
 \mathbb{R}^3 F_{\dot{q}} &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \dot{q}} & [N.m/s^2]^3 \\
 \mathbb{R}^3 F_{\lambda \dot{q}} &= -\lambda' \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \Pi_{(q,\dot{q})} & [N.m/s^2]^3
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

Algunas de las restricciones presumen que las N cadenas cinemáticas están uniformemente distribuidas (ref). Las restricciones son expresiones algebraicas de las que se extrae la propiedad de comportarse como fuerza al multiplicarlas por el número cualquiera que sea necesario, también fuerzas, y las restricciones pueden asumirse también de expresiones de segundo orden (o de tercer orden, o cuarto, las ciencias iterativas son infinitamente capaces para los planteamientos de la

ingeniería de nuestros tiempos). Lagrange vio además como transformar cualquier ecuación (que sea en términos de los estados) en una fuerza. Ahí está el genio, el todo, nada ocurre que no pueda ser modelado así, el mecanismo concibe todo en la naturaleza de las cosas que percibimos, lo que sentimos es siempre un efecto de la energía.

Y al Delta le ocurre que se mueve, y moverse es el efecto de la energía, la potencial o del impulso que trae de antes. La Energía Potencial o Energía Cinética, que al final son las fuerzas de primer tipo.

## Anexo E

# Modelo dinámico por Máquinas de Vectores de Relevancia

El experimento aquí es diferente, sucede a los casos particulares que a veces no tienen asociado un modelo que les describa. Sin modelo el control es especulativo. Para hacer control por probabilidad se debe especular la forma elemental de lo que va a ser modelado y tener sensores que reporten la actividad del sistema y las variables que activan el sistema. Este experimento, requiere de conocer la posición  $\mathbb{R}^3 q_f$  y velocidad  $\mathbb{R}^3 v_f$  de el efector,

El caso del delta tiene por estados las posiciones cartesianas del efector como  $\mathbb{R}^3 q_f$ , y velocidad del efector  $\mathbb{R}^3 v_f$ , entendidas en conjunto como  $[\mathbb{R}^3 q_f, \mathbb{R}^3 v_f]^T$  que es un vector de estados que en conjunto es  $\mathbb{R}^6$ ; Por variables para activar el sistema tiene a  $\mathbb{R}^N \mathbb{I}_m$  que es la corriente de cada motor, entre todas éstas cuestiones de la naturaleza se especula existe una interacción. -La estructura interna de la interacción es desconocida, precisamente ese es el problema. Para poder resolver cualquier interacción lo más sensato es empezar por la más extensa de las representaciones causales, pero que sea lineal, sencilla pero extensa.

Que las matrices especulativas de un sistema ' $A_{esp}$ ', ' $B_{esp}$ ' sean completamente interactivas  $\mathbb{R}^{6 \times \mathbb{R}^6} A_{esp}$ ,  $\mathbb{R}^{6 \times \mathbb{R}^N} B_{esp}$ . Y cambiantes en el tiempo si fuera el caso. -Pero y qué de los sistemas no-lineales, aquí el truco, es hacer de ésta una representación una muy, muy extensa, -Los espacios de Hilbert son augmentaciones de los estados, lo que antes era un estado, las transformaciones de Hilbert crean ' $\varrho_1 \cdot \varrho_2$ ' distintos estados, es como en la transformada de Fourier que un sólo estado temporal es decompuesto en infinitos distintos estados de frecuencias. -En Hilbert no habrían frecuencias, sino otras muchas distintas formas del estado transformado. Lo correcto sería crear espacios de toda clase y muchos de cada clase (en general el número  $\varrho$  de transformaciones, para este caso  $\varrho = \varrho_1 \cdot \varrho_2$ ).

El caso de transformaciones a espacios exponenciales convergentes es secretamente lo mismo que hacer ' $\varrho$ ' distintas funciones de distribución gausianas no simétricas, con distintas medias  $\mathbb{R}^b^{\varrho_1}$  y distintas varianzas  $\mathbb{R}^s^{\varrho_2}$  se crean  $\varrho$  distintas combinaciones de estados nuevos por cada 'N' estados de entrada, y  $\varrho$  distintas combinaciones de estados nuevos por cada '6' estados.

Los nuevos estados también son números reales  $\mathbb{R}\Phi$ , si fuera el sentido de funciones de distribución se tendería la transformación de Hilbert como hecha para todas las combinaciones de varianzas y de medias,  $\mathbb{R}\Phi^{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$ .

$$\begin{aligned} aux &= \mathbb{R}^s^{(\varrho_1)} \cdot (\mathbb{R}^{\text{input}} - \mathbb{R}^b^{(\varrho_2)}), & \forall \varrho_1 \cdot \varrho_2 \\ \mathbb{R}\Phi_{\text{sig}}^{\varrho_1 \cdot \varrho_2} &= \text{sigmoidal}(aux) & = & \frac{1}{1+e^{-aux}} \\ \mathbb{R}\Phi_{\tanh}^{\varrho_1 \cdot \varrho_2} &= \tanh(aux) & = & \frac{e^{aux} + e^{-aux}}{e^{aux} + e^{-aux}} \\ \mathbb{R}\Phi_{\tanh c}^{\varrho_1 \cdot \varrho_2} &= 1,7159 \cdot \tanh(\frac{2}{3} \cdot aux) & = & 1,7159 \cdot \frac{e^{\frac{2}{3} \cdot aux} + e^{-\frac{2}{3} \cdot aux}}{e^{\frac{2}{3} \cdot aux} + e^{-\frac{2}{3} \cdot aux}} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Según enfatiza [18], es una excelente idea usar en vez de la sigmoidal usar como función de activación una tangente hiperbólica, y así supone el método a continuación. -Las constantes 1,7159 y 2/3 son enfatizadas también en [18] porque cuando lleva estos valores la regresión polinomial de la tangente hiperbólica tiene menor error, la función de activación del método sería ' $\tanh c$ ' entonces:

$$\begin{aligned} aux &= \mathbb{R}^s^{(\varrho_1)} \cdot (\mathbb{R}^{\text{input}} - \mathbb{R}^b^{(\varrho_2)}), & \forall \varrho_1 \cdot \varrho_2 \\ \mathbb{R}\Phi_{\tanh c}^{\varrho_1 \cdot \varrho_2} &= 1,7159 \cdot \tanh(\frac{2}{3} \cdot aux) & = & 1,7159 \cdot \frac{e^{\frac{2}{3} \cdot aux} + e^{-\frac{2}{3} \cdot aux}}{e^{\frac{2}{3} \cdot aux} + e^{-\frac{2}{3} \cdot aux}} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Las expansiones con espacio de Hilbert se hacen a las 'N' señales de control (por ser las señales de control  $\mathbb{R}^N \mathbb{I}_m$ ) por tanto  $\mathbb{R}\Phi_{\mathbb{I}_m}^{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot N}$ , -que debería ser expresado como  $\mathbb{R}^{\varrho_1 \times \mathbb{R}^{\varrho_2} \times \mathbb{R}^N} \Phi_{\mathbb{I}_m}$  pero que por convención a la asociación del término

como estados de entrada es mejor entenderlo así  $\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N} \Phi_{\mathbb{I}_m}$  que es la operación de indexar en un vector lo que era antes una matriz.

Similarmente, las expansiones con espacios de Hilbert se hacen a los '6' estados (por ser los estados  $[\mathbb{R}^3 q_f, \mathbb{R}^3 v_f]^T$ ) por tanto  $\mathbb{R} \Phi_{q_f}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3}$  y  $\mathbb{R} \Phi_{v_f}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3}$ , - que debería ser expresado como  $\mathbb{R}^{e_1 \times \mathbb{R}^{e_2}} \Phi_{q_f}^3$  pero que por convención a la asociación del término como estados internos es mejor entenderlo así  $[\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \Phi_{q_f}, \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \Phi_{v_f}]^T$  que es un vector en  $\mathbb{R}^6$ .

Lo que resta es calcular las dependencias diferenciales, que son las matrices ' $A_{esp}$ ', ' $B_{esp}$ ' por sus valores internos instantáneos. Que predicen los cambios de estado del sistema en su forma incremental discreta o continua:

Lo que era el problema de encontrar las matrices  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 A_{esp}$ ,  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N B_{esp}$ , se convierte después de las transformaciones a espacios de Hilbert se convierte en  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 6} A_{esp}$ ,  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N} B_{esp}$ . El sistema incremental, especulativo, expandido sería:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbb{R}^3 q_f \\ \mathbb{R}^3 v_f \end{bmatrix} = \mathbb{R}^{6 \times \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 6}} A_{esp} * \begin{bmatrix} \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \Phi_{tanhc, q_f} \\ \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \Phi_{tanhc, v_f} \end{bmatrix} + \dots \\ \mathbb{R}^{6 \times \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N}} B_{esp} * \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N} \Phi_{tanhc, \mathbb{I}_m} \quad (E.3)$$

Y calcular los valores de las matrices pueden encontrarse haciendo regresiones, digamos el caso de hacer regresiones de máxima verosimilitud o de usar Maquinas de Vectores de Relevancia, éstos métodos están descritos extensamente en el libro de Christopher Bishop, Machine Learning and Pattern Recognition [19]. Aquí se propone el caso particular de las máquinas de vectores de relevancia para encontrar la interacción, para realizar la regresión.

## E.1. Maquinas de Vectores de Relevancia ('RVM')

## E.2. Modelo por 'RVM' en espacios de Hilbert

Ahora se narra el experimento, que requiere información de muchos instantes, que requiere tener un acelerómetro en la plataforma 'f' y la corriente en los motores para todo momento de las mediciones del acelerómetro. Integrar la aceleración da la velocidad, que es el cambio de posición  $\frac{d}{dt} \mathbb{R}^3 q_f$ . La aceleración por si misma es el cambio del estado de velocidad  $\frac{d}{dt} \mathbb{R}^3 v_f$ .

La regresión que habría de hacerse por 'RVM' es la que hay entre los estados instantáneos ( $\mathbb{R}^3 q_f, \mathbb{R}^3 v_f, \mathbb{R}^N \mathbb{I}_m$ ) y los cambios de los estados del sistema de segundo orden del movimiento de una partícula ( $\frac{d}{dt} \mathbb{R}^3 q_f, \frac{d}{dt} \mathbb{R}^3 v_f$ ).

Retomando lo que en la ecuación E.3:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbb{R}^3 q_f \\ \mathbb{R}^3 v_f \end{bmatrix} = \mathbb{R}^{6 \times \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 6}} A_{esp} * \begin{bmatrix} \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \Phi_{tanhc, q_f} \\ \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \Phi_{tanhc, v_f} \end{bmatrix} + \dots \\ \mathbb{R}^{6 \times \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N}} B_{esp} * \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N} \Phi_{tanhc, \mathbb{I}_m} \quad (E.4)$$

Por la idea de los criterios de la sub-sección anterior. En el experimento de las corrientes y el acelerómetro, describir la dinámica lineal de las variables en espacios de Hilbert. -Donde '*linearspace*( $\mathbb{R}i, \mathbb{R}f, \mathbb{Z}num$ )' es la operación de equiespaciar ' $\mathbb{Z}num$ ' cantidad de valores entre el valor de inicio  $\mathbb{R}i$ , y valor final  $\mathbb{R}f$ . Además '*diag*( $\cdot$ )' es crear una matriz cuadrada diagonal con los elementos del argumento ( $\cdot$ ).

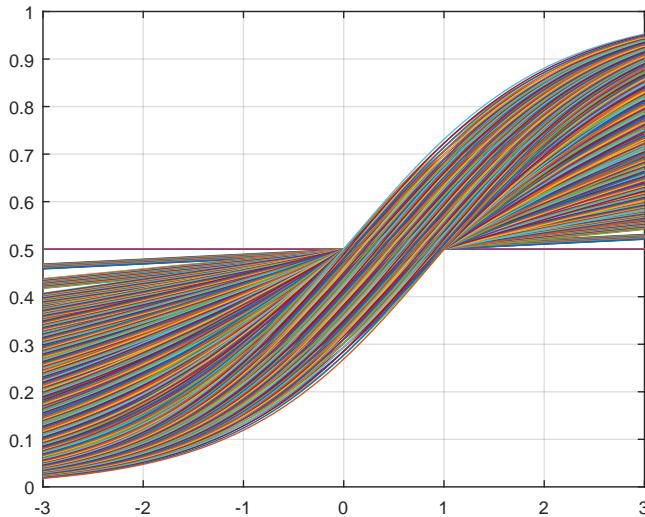
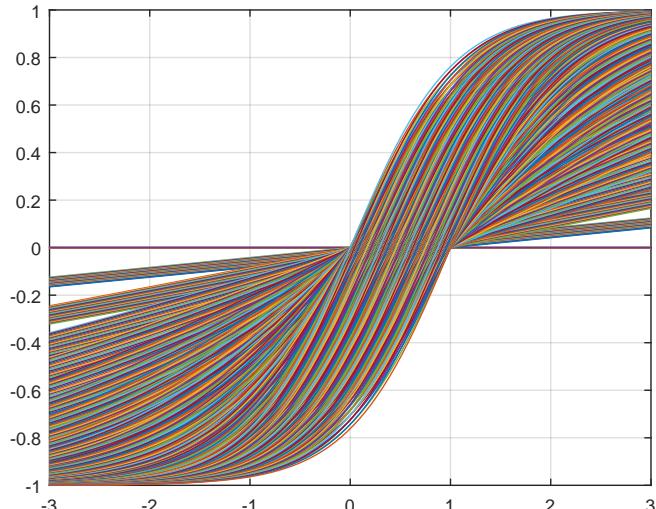
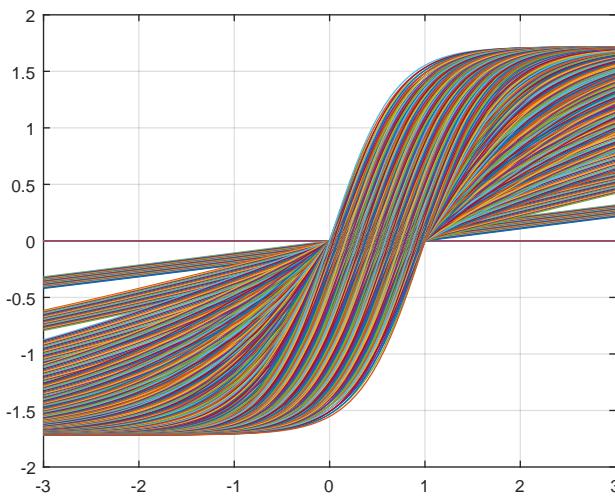
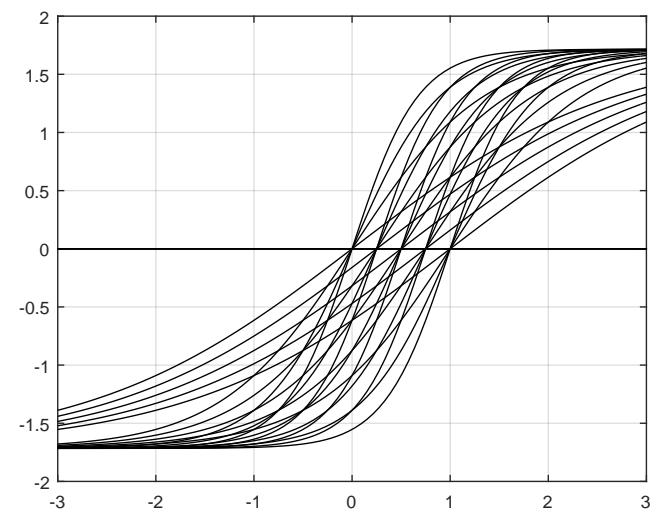
(a)  $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ , y la forma del espacio es una Sigmoidal.(b)  $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ , y la forma del espacio es una Tangente Hiperbólica (sin constantes).(c)  $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ , y la forma del espacio es una Tangente Hiperbólica (con constantes 1.7159 y 2/3).(d)  $\varrho_1 = \varrho_2 = 5$ , y la forma del espacio es una Tangente Hiperbólica (con constantes 1.7159 y 2/3).

Figura E.1: En estas gráficas el eje 'x' (absciso) es estado escalar por su valor, específicamente es el valor de la corriente  $\mathbb{R}^N$ . El eje ordenado ('y') sería el valor correspondiente en el espacio de Hilbert. Y lo que hay dibujado en cada caso son las  $\varrho_1 \cdot \varrho_2$  distintas funciones de transformación, pero en todos los casos el escalar de entrada es sólo uno  $\mathbb{R}^N$  que hay ' $N$ ' estados es otra cosa pero cada estado es pasado a través de  $\varrho_1 \cdot \varrho_2$  funciones distintas. Que tienen una forma como de nudo, de músculo o de neurona; -pero esto es sólo la imaginación, lo mismo el sentido probabilista de las funciones normalizadas convergentes. Lo que hay realmente son transiciones exponenciales. Lo que no alcanza a verse dibujado en éstos gráficos son las ganancias de cada linea. En todos los casos la linea que aparece en 'Cero' es inútil, según muestra el algoritmo [] la transformación que es siempre cero (la linea constante de las gráficas) se cambia para que sea siempre uno con esto es posible modelar valores modelos con valores constantes, como la gravedad que es una aceleración que no depende de la corriente de los motores ni de las posiciones del efector.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\varrho_1} s &= \text{linear spaced}(0, 1, \varrho_1); \\ \mathbb{R}^{\varrho_2} b &= \text{linear spaced}(-1, 1, \varrho_2); \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Los valores de los estados tienen que estar previamente normalizados:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 q_{f,norm} &= \mathbb{R}^{3 \times \mathbb{R}^3} diag \left( \begin{bmatrix} (\mathbb{R}^{(x)} q_{f,max} - \mathbb{R}^{(x)} q_{f,min})/2 \\ (\mathbb{R}^{(y)} q_{f,max} - \mathbb{R}^{(y)} q_{f,min})/2 \\ (\mathbb{R}^{(z)} q_{f,max} - \mathbb{R}^{(z)} q_{f,min})/2 \end{bmatrix} \right)^{-1} * \mathbb{R}^3 q_f \\
\mathbb{R}^3 v_{f,norm} &= \mathbb{R}^{3 \times \mathbb{R}^3} diag \left( \begin{bmatrix} \mathbb{R}^{(x)} v_{f,promedio} \\ \mathbb{R}^{(y)} v_{f,promedio} \\ \mathbb{R}^{(z)} v_{f,promedio} \end{bmatrix} \right)^{-1} * \mathbb{R}^3 v_f \\
\mathbb{R}^3 a_{f,norm} &= \mathbb{R}^{3 \times \mathbb{R}^3} diag \left( \begin{bmatrix} \mathbb{R}^{(x)} a_{f,promedio} \\ \mathbb{R}^{(y)} a_{f,promedio} \\ \mathbb{R}^{(z)} a_{f,promedio} \end{bmatrix} \right)^{-1} * \mathbb{R}^3 a_f \\
\mathbb{R}^N \mathbb{I}_{m,norm} &= \mathbb{R}^{N \times \mathbb{R}^N} diag \left( \mathbb{R}^N \mathbb{I}_{m,promedio} \right)^{-1} * \mathbb{R}^N \mathbb{I}_m
\end{aligned} \tag{E.6}$$

Donde la expresión dentro de los diagonales expresa la media de los estados, los valores se normalizan al valor de la media. -Los valores máximos para la corriente los dan los rangos de operación de los motores usados. Las coordenadas máximas y mínimas en los estudios cinemáticos de posición 3.2 (\*no tengo una expresión para estos máximos, yo aproximaría el valor), las mínimas y máximas velocidades se consiguen evaluando las relaciones Jabocianas 3.2.3.1.

Como base elemental del espacio la función tangente hiperbólica (c) de la expresión E.2, esta es  $\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2} \Phi_{tanhc}$ , que puede ser  $\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N} \Phi_{tanhc, \mathbb{I}_m}$  cuando es la transformación a las entradas y  $[\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \Phi_{tanhc, q_f}, \mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \Phi_{tanhc, v_f}]^T$  cuando es la transformación a los estados.

Lo que se necesita ahora son datos. Diferentes combinaciones de entradas en diferentes combinaciones de estados producen aceleraciones distintas, se necesitan suficientes datos como para explorar todas las dependencias. Dígase que se tienen ' $\gamma$ ' diferentes datos y cada dato comprende el valor instantáneo de las señales de control y de los estados. Ésto equivale a que se tengan cinco grandes matrices de datos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^\gamma q_{f,data} \\
&\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^\gamma v_{f,data} \\
&\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^\gamma a_{f,data} \\
&\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\gamma \mathbb{I}_{m,data}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Para las expresiones en E.6 es necesario obtener una forma de promedio en los datos.

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 v_{f,promedio} &= \frac{1}{\gamma} \sum_{\forall \gamma} \mathbb{R}^3 v_{f,data}^{(\gamma)} \\
\mathbb{R}^3 a_{f,promedio} &= \frac{1}{\gamma} \sum_{\forall \gamma} \mathbb{R}^3 a_{f,data}^{(\gamma)} \\
\mathbb{R}^N \mathbb{I}_{m,promedio} &= \frac{1}{\gamma} \sum_{\forall \gamma} \mathbb{R}^N \mathbb{I}_{m,data}^{(\gamma)}
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Que luego de normalizar (E.6) serían los datos como:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^\gamma q_{f,data,norm} \\
&\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^\gamma v_{f,data,norm} \\
&\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^\gamma a_{f,data,norm} \\
&\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^\gamma \mathbb{I}_{m,data,norm}
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Y luego de la transformación a espacio de Hilbert ' $\Phi$ ', serían las matrices de los datos:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \times \mathbb{R}^\gamma \Phi_{tanhc, q_{f,data,norm}} \\
&\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \times \mathbb{R}^\gamma \Phi_{tanhc, v_{f,data,norm}} \\
&\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \times \mathbb{R}^\gamma \Phi_{tanhc, a_{f,data,norm}} \\
&\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N} \times \mathbb{R}^\gamma \Phi_{tanhc, \mathbb{I}_{m,data,norm}}
\end{aligned} \tag{E.10}$$

O simplemente:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \times \mathbb{R}^\gamma \Phi_{q_f} \\
&\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \times \mathbb{R}^\gamma \Phi_{v_f} \\
&\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot 3} \times \mathbb{R}^\gamma \Phi_{a_f} \\
&\mathbb{R}^{e_1 \cdot e_2 \cdot N} \times \mathbb{R}^\gamma \Phi_{\mathbb{I}_m}
\end{aligned} \tag{E.11}$$

## Anexo F

# Ecuaciones de Simulación Dinámica

### F.1. Modelo de mínima Expresión

#### F.1.1. Inicialización de variables

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}L^{(1-10)} &= [1 \ 0,25 \ 0,21 \ 0,62 \ 0,0866 \ 0,44 \ 0,44 \ 0,0866 \ 0,05 \ 0,0] & [m] \\
hemisferio &= -1 & [:] \\
\mathbb{R}g &= 9,8 & [m/s^2] \\
\mathbb{R}^3G &= [0, 0, -g]^T & [m/s^2] \\
\mathbb{R}^3q_0 &= [0, 0, 0]^T & [m] \\
\mathbb{R}^3q_T &= [0, 0, \mathbb{R}L^{(1)}]^T & [m] \\
\mathbb{R}^3\delta x_0 = \mathbb{R}^3\delta x_T = \mathbb{R}^3\delta x_f &= [1, 0, 0]^T & [m] \\
\mathbb{R}^3\delta y_0 = \mathbb{R}^3\delta y_T = \mathbb{R}^3\delta y_f &= [0, 1, 0]^T & [m] \\
\mathbb{R}^3\delta z_0 = \mathbb{R}^3\delta x_T = \mathbb{R}^3\delta z_f &= [0, 0, 1]^T & [m] \\
\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta N &= \begin{bmatrix} 0 & 0,8660 & -0,8660 \\ -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [m] \\
\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^N \delta S &= (hemisferio) \cdot \begin{bmatrix} -1,0000 & 0,5000 & 0,5000 \\ 0 & -0,8660 & 0,8660 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [:] \\
\mathbb{R}I_A^N &= [1, 1, 1] & [kg \cdot m] \\
\mathbb{R}m_f &= 1 & [kg]
\end{aligned} \tag{F.1}$$

#### F.1.2. Energías

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\mathbb{K}_{rot}^{(1)} &= 0,5 \cdot \mathbb{R}I_A^{(1)} \cdot (\mathbb{R}\omega_A^{(1)})^2 \\
\mathbb{R}\mathbb{K}_{rot}^{(2)} &= 0,5 \cdot \mathbb{R}I_A^{(2)} \cdot (\mathbb{R}\omega_A^{(2)})^2 \\
\mathbb{R}\mathbb{K}_{rot}^{(3)} &= 0,5 \cdot \mathbb{R}I_A^{(3)} \cdot (\mathbb{R}\omega_A^{(3)})^2 \\
\mathbb{R}\mathbb{P}_{rot}^{(1)} &= \mathbb{R}L^{(4)} \cdot g \cdot (\mathbb{R}m_c^{(1)}) \cdot \left(1 - \sin(\mathbb{R}\theta_A^{(1)})\right) \\
\mathbb{R}\mathbb{P}_{rot}^{(2)} &= \mathbb{R}L^{(4)} \cdot g \cdot (\mathbb{R}m_c^{(2)}) \cdot \left(1 - \sin(\mathbb{R}\theta_A^{(2)})\right) \\
\mathbb{R}\mathbb{P}_{rot}^{(3)} &= \mathbb{R}L^{(4)} \cdot g \cdot (\mathbb{R}m_c^{(3)}) \cdot \left(1 - \sin(\mathbb{R}\theta_A^{(3)})\right) \\
\mathbb{R}\mathbb{K}_{tras}^{(x)} &= 0,5 \cdot \mathbb{R}m_f \cdot (\mathbb{R}v_f^{(x)})^2 \\
\mathbb{R}\mathbb{K}_{tras}^{(y)} &= 0,5 \cdot \mathbb{R}m_f \cdot (\mathbb{R}v_f^{(y)})^2 \\
\mathbb{R}\mathbb{K}_{tras}^{(z)} &= 0,5 \cdot \mathbb{R}m_f \cdot (\mathbb{R}v_f^{(z)})^2 \\
\mathbb{R}\mathbb{P}_{tras} &= \mathbb{R}m_f \cdot g \cdot \mathbb{R}q_f^{(z)}
\end{aligned} \tag{F.2}$$

### F.1.3. Restricciones

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)} &= \left\| \mathbb{R}^3 q_f + (\mathbb{R} L^{(9)} - \mathbb{R} L^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^{(1)} - \mathbb{R}^3 q_T - \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^{(1)} \right\| - \mathbb{R} L^{(6)} - \mathbb{R} L^{(7)} = 0 \\ \Pi^{(2)} &= \left\| \mathbb{R}^3 q_f + (\mathbb{R} L^{(9)} - \mathbb{R} L^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^{(2)} - \mathbb{R}^3 q_T - \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^{(2)} \right\| - \mathbb{R} L^{(6)} - \mathbb{R} L^{(7)} = 0 \\ \Pi^{(3)} &= \left\| \mathbb{R}^3 q_f + (\mathbb{R} L^{(9)} - \mathbb{R} L^{(3)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^{(3)} - \mathbb{R}^3 q_T - \mathbb{R} L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^{(3)} \right\| - \mathbb{R} L^{(6)} - \mathbb{R} L^{(7)} = 0\end{aligned}\quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{(31)} &= \mathbb{R}m_c^{(1)} - \frac{\text{abs}(\mathbb{R}^3 \delta H^{(1)} \odot_{\mathbb{R}^3} G / \mathbb{R}g) \cdot (\mathbb{R}m_f)}{\sum_{(N)=1}^{(N)=N} \text{abs}(\mathbb{R}^3 \delta H^{(N)} \odot_{\mathbb{R}^3} G / \mathbb{R}g)} = 0 \\
\Pi^{(32)} &= \mathbb{R}m_c^{(2)} - \frac{\text{abs}(\mathbb{R}^3 \delta H^{(2)} \odot_{\mathbb{R}^3} G / \mathbb{R}g) \cdot (\mathbb{R}m_f)}{\sum_{(N)=1}^{(N)=N} \text{abs}(\mathbb{R}^3 \delta H^{(N)} \odot_{\mathbb{R}^3} G / \mathbb{R}g)} = 0 \\
\Pi^{(33)} &= \mathbb{R}m_c^{(3)} - \frac{\text{abs}(\mathbb{R}^3 \delta H^{(3)} \odot_{\mathbb{R}^3} G / \mathbb{R}g) \cdot (\mathbb{R}m_f)}{\sum_{(N)=1}^{(N)=N} \text{abs}(\mathbb{R}^3 \delta H^{(N)} \odot_{\mathbb{R}^3} G / \mathbb{R}g)} = 0 \\
\Pi^{(34)} &= \left\| \mathbb{R}^3 \delta A^{(1)} - (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^{(1)}} |_{\theta^{(1)}}) * \mathbb{R}^3 \delta N^{(1)} \right\| = 0 \\
\Pi^{(35)} &= \left\| \mathbb{R}^3 \delta A^{(2)} - (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^{(2)}} |_{\theta^{(2)}}) * \mathbb{R}^3 \delta N^{(2)} \right\| = 0 \\
\Pi^{(36)} &= \left\| \mathbb{R}^3 \delta A^{(3)} - (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mathcal{R}_{\delta S^{(3)}} |_{\theta^{(3)}}) * \mathbb{R}^3 \delta N^{(3)} \right\| = 0 \\
\Pi^{(37)} &= \left\| \left( \mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)} \right)^{-1} \cdot \left( -\mathbb{R}^3 q_f + (\mathbb{R}L^{(3)} - \mathbb{R}L^{(9)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^{(1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbb{R}^3 q_T + \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^{(1)} \right) - \mathbb{R}^3 \delta H^{(1)} \right\| = 0 \\
\Pi^{(38)} &= \left\| \left( \mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)} \right)^{-1} \cdot \left( -\mathbb{R}^3 q_f + (\mathbb{R}L^{(3)} - \mathbb{R}L^{(9)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^{(2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbb{R}^3 q_T + \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^{(2)} \right) - \mathbb{R}^3 \delta H^{(2)} \right\| = 0 \\
\Pi^{(39)} &= \left\| \left( \mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)} \right)^{-1} \cdot \left( -\mathbb{R}^3 q_f + (\mathbb{R}L^{(3)} - \mathbb{R}L^{(9)}) \cdot \mathbb{R}^3 \delta N^{(3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbb{R}^3 q_T + \mathbb{R}L^{(4)} \cdot \mathbb{R}^3 \delta A^{(3)} \right) - \mathbb{R}^3 \delta H^{(3)} \right\| = 0
\end{aligned} \tag{F.5}$$

## F.2. Modelo completo sin amortiguadores

## F.3. Modelo completo con amortiguadores



## Anexo G

# Solución Iterativa al Problema de la Optimidad Local de Forma

Utilizando una técnica iterativa, genética de apareamiento múltiple con combinación semi-caótica en codificación binaria.

Tabla G.1: Tabla con las especificaciones de todos los parámetros de cada individuo en la solución iterativa de optimidad de forma.

$\mathbb{R}^{\nu^m} \equiv \mathbb{B}^n \xi^{(\mu \leftarrow \nu)m}$	—Variabilidad genética—
$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \partial^m$	—Valor de la media, influencia geométrica de antepasados—
$\mathbb{R}^{11} L^m \equiv \mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^{\forall \mu \neq \nu} \xi^m$	—El gen codificado de longitudes—
$\mathbb{R} J_\xi^m$	—Desempeño—

La forma correcta de hacer aprendizaje de máquinas es codificando la información del proceso en una base binaria, específicamente el caso de algoritmos genéticos, los genes son cualidades binarias en los sistemas discretos, los rasgos de un proceso pueden reducirse a sus bits si se limita la resolución de los valores de los rasgos.

Digamos que  $\mathbb{R} L^{(\mu)}$  es un valor de un gen, ' $(\mu)$ ', el gen que codifica la  $\mu$ -ésima longitud. Ahora suponed que este gen está condicionado a  $0 \geq \mathbb{R} L^{(\mu)} \geq 1$ , y que existen  $2^n$ , e.g.,  $2^{10} = 1024$  valores distintos entre el cero y el uno, de manera que  $\mathbb{B}^n L^\mu$  es la expresión general de la longitud de una parte del mecanismo (donde  $\mathbb{B}$  es una base binaria). Lo anterior determina que existan soluciones discretas al problema de la codificación genética, además por ser operaciones binarias resultan especialmente sencilla su interpretación en lenguaje de máquina, la forma correcta de hacer aprendizaje de máquinas es codificando la información del proceso en una base binaria porque la totalidad de los genes puede indexarse en una matriz binaria  $\mathbb{B}^n L^\mu \uparrow \mathbb{B} L^{\eta\mu} \downarrow \mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu L$ .

Si las condiciones que provee el entorno favorecen al organismo con valores altos del  $\mu$ -ésimo gen ( $\mathbb{R} L^{(\mu)} \approx 1$ ), debido a la codificación anterior los organismos que posean activos los bits mas significativos del vector  $\mathbb{B}^n L^{(\mu)}$  tendrán una mejor condición genética para desempeñarse en el entorno y es mucho mas sencillo codificar características binarias a características continuas, la codificación binaria también es la forma natural de las redes neuronales con activaciones sigmoídale.

Los valores continuos en ' $\mathbb{R}$ ' que codifican los genes nunca deben ser mayor a uno y menores a cero.

$$\begin{aligned} \forall \mu, \quad & (\mathbb{R}^n \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^\mu)^T \odot \mathbb{B}^n L_{max}^\mu - 1 = 0, \\ & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}})^T \odot \mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu L_{max} = 0. \end{aligned} \tag{G.1}$$

$$\begin{aligned} \forall \mu, \quad & (\mathbb{R}^n \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^\mu)^T \odot \mathbb{B}^n L_{min}^\mu = 0, \\ & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}})^T \odot \mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu L_{min} = 0. \end{aligned} \tag{G.2}$$

Donde  $\mathbb{R}^n \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^\mu$  es una matriz de decodificación binaria que traduce a valores en los que están formuladas las expresiones. Los elementos particulares de la matriz de decodificación de tipo binario-longitud son:

$$\mathbb{R}^n \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^{(\eta)\mu} = \frac{\mathbb{R} L_{max}^\mu - \mathbb{R} L_{min}^\mu}{2(\eta)}. \quad (\text{G.3})$$

Para ser claro en la ecuación G.3, el denominador ' $2^\eta$ ' vale '2', cuando ' $(\eta) == 1$ ', vale '4, 8, 16.' cuando ' $(\eta) = 2, 3, 4...$ ' ( $\eta) = 1$ ' es el bit mas significativo del  $\mu$ -ésimo término, además, y esto es importante la expresión ' $(\eta) = \eta$ ' es el bit menos significativo.

La solución a las ecuaciones G.1 y G.2 revela en base binaria el máximo y mínimo valor que puede tomar la  $\mu$ -ésima longitud (o valor del gen)  $\mathbb{B}^\eta L^\mu$ .

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu L_{max} = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu 1) * (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}})^{-1}, \quad (\text{G.4})$$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu L_{min} = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu 0) * (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}})^{-1}. \quad (\text{G.5})$$

Donde: ' $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu 1$ ' es una matriz de unos en todas las posiciones, y ' $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu 0$ ' una con ceros. Las ecuaciones G.4 y G.5 rectifican el estado de contingencia de la representación binaria, cuando la matriz es de unos, todas las longitudes alcanzan el máximo valor permitido al gen, cuando la matriz es cero alcanzan la longitud mínima.

Siguientes esfuerzos requieren expandir más allá el número de genes utilizados, la matriz  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu L$  codifica las longitudes de las extremidades, al menos una otra característica es necesaria, una medida que codifique la variabilidad genética ' $\mathbb{R}^\nu$ '. Permitiendo a  $\mu$  indexar además el gen ' $\nu$ '. La matriz final de genes binarios sería:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \xi = \begin{bmatrix} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\mu*} L \\ \mathbb{R}^n \nu \end{bmatrix}. \quad (\text{G.6})$$

Lo mismo que dicta la ecuación G.3, ocurre también a ' $\nu$ ', pero la varianza está originalmente normalizada a uno.

$$\mathbb{R} \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^{\eta(\mu \rightarrow \nu)} = \frac{\mathbb{R} \nu_{max} - \mathbb{R} \nu_{min}}{2(\eta)} = \frac{1 - 0}{2(\eta)}. \quad (\text{G.7})$$

## G.1. Mecanismo de Reproducción

El mecanismo de reproducción causa siempre un mismo número ( $m$ ) de individuos cada generación ( $k$ ).

La reproducción ocurre con la intención de crear nuevos individuos, o lo que es lo mismo crear nuevas matrices de genes que codifican distintos individuos, un individuo es un set de longitudes para una máquina. La matriz de genes del  $m$ -ésimo individuo en la generación que nace ' $k$ ' es  $\mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu \xi_{(k)}^{(m)}$ . Y todo individuo de la  $k$ -ésima generación debe ser una función de los individuos de la generación pasada definidos por su matriz de medias ' $\mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu \partial_{(k-1)}^m$ ' y el desempeño de estos ' $\mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^m$ ' (sección G.3), como:

$$\mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu \xi_{(k)}^m = f(\mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu \partial_{(k-1)}^m, \mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^m). \quad (\text{G.8})$$

La reproducción en este esquema no está limitada a producirse entre dos individuos, una nueva matriz de genes puede obtenerse de la combinación de cualquier número de padres, pero las ecuaciones aquí están descritas para ser expresamente entre dos.

### Reproducción de máxima Optimidad.

Donde los individuos con mejor índice de desempeño procrean la camada élite.

Que tiene por discriminante la norma del índice de desempeño  $\mathbb{R} J_\xi$ .

### Reproducción de máxima Variabilidad.

Donde los individuos más distintos procrean la camada con mayor gradiente.

Que tiene por discriminante una norma al desempeño y a la diferencia entre dos genes. Dos matrices de genes son tanto más diferentes cuánto más 'unos' hay después de hacer la operación lógica AND entre las dos matrices:

$$\mathbb{R} J_\xi^{(m \rightarrow x)} \cdot \mathbb{R} J_\xi^{(m \rightarrow y)} \cdot (\mu \cdot \eta)^{-1} \cdot \sum_{\forall} ((\mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu \xi^{(m \rightarrow x)}) AND (\mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^\mu \xi^{(m \rightarrow y)})). \quad (\text{G.9})$$

### Reproducción de Contingencia Estable.

Donde los genes de los individuos con mejor desempeño se eligen para sobrevivir el cambio de generación. Esta reproducción disminuye un poco el valor de la variabilidad genética de los organismos que sobreviven  $\mathbb{R} \nu_{(k)}^{(m)} < \mathbb{R} \nu_{(k-1)}^{(m)}$ . Para hacer

las soluciones más estables.

Que tiene por discriminante la norma del indice de desempeño  $\mathbb{R}J_\xi$ .

A fin de mantener las matrices del proceso de tamaños constantes el mecanismo de reproducción siempre genera ' $m$ ' individuos cada generación. No parece haber una norma lógica que determine qué tantos individuos deberían quedar de cada tipo de reproducción. Este parámetro ( $m$ ) es arbitrario pero constante e igual a la suma de los individuos que crean los tres tipos de reproducción. Nada restringe a este parámetro de cambiar con las generaciones, se deja constante porque es mas sencillo describir la matemática así.

## G.2. Mecanismo de Combinación

El mecanismo anterior, de reproducción, selecciona los individuos que habrán de combinarse para producir uno nuevo. El siguiente mecanismo, de combinación, selecciona cuáles de las características de los genes pasan del padre al hijo, puede ser hecho de manera probabilista, que no niegue la posibilidad de caos sin inducir desorden, el hijo dependerá de los padres, pero no compartirá exactamente los genes, sino que el padre hereda al hijo la tendencia a un gen.

La combinación es como sigue, las características de los padres producen el punto medio de una función de probabilidad simétrica figura G.1, y una de las características genéticas codifica la varianza de la distribución  $\mathbb{R}\nu$ . Las distribuciones simétricas univariadas sólo necesitan dos valores para ser descritas, como la normal y la uniforme.

Para cada individuo ' $m$ ' cada uno de los ' $\mu$ ' distintos genes, de cada uno de los ' $\eta$ ' Bits,  $\mathbb{B}^n\xi^{\mu\cdot m}$ , es tratado como un proceso estocástico distinto. Esto quiere decir que por cada ' $m$ ' hay ' $\eta \cdot \mu$ ' distintas medias  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \partial^m$ , en cambio todas las distribuciones comparten la misma varianza  $\mathbb{R}\nu^m$ .

Noten lo explicito, lo que sobrevive entre generaciones es la media y el desempeño, los genes se pierden con las generaciones, los padres transmiten el valor de la media a sus hijos y no el valor directo de sus genes. Excepto el caso de reproducción por contingencia estable que guarda exactos los genes de longitudes y disminuye un poco el valor de la varianza.

**Combinación del gen de la Varianza ' $\nu$ '** En la combinación el caso específico del gen ' $\mu$ ' que codifica el valor de la varianza ' $\nu$ ' es distinto a los demás, la varianza no se modela como un proceso estocástico ' $\mathcal{F}, \mathcal{N}$ ' porque no habría varianza implícita. La varianza del hijo ' $s$ ' es exactamente la media promedio ponderada por el desempeño de la interacción de los padres ' $x$ ' y ' $y$ '.

$$\mathbb{R}^n \partial_{(k)}^{(\mu \rightarrow \nu)(m \rightarrow s)} = 2^{-1} \cdot \frac{\mathbb{R}^n J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow y)} \cdot \mathbb{R}^n \partial_{(k-1)}^{(\mu \rightarrow \nu)(m \rightarrow x)} + \mathbb{R}^n J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow x)} \cdot \mathbb{R}^n \partial_{(k-1)}^{(\mu \rightarrow \nu)(m \rightarrow y)}}{\mathbb{R}^n J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow x)} + \mathbb{R}^n J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow y)}}. \quad (\text{G.10})$$

Los genes son cualidades binarias, la realización lógica de binarizar el valor real ' $\mathbb{R}$ ' del gen de la varianza es según la norma de si aquél es mayor a 0.5.

$$\mathbb{B}^n \xi_{(k)}^{(\mu \rightarrow \nu)} = (\mathbb{R}^n \partial_{(k)}^{(\mu \rightarrow \nu)} \geq 0.5). \quad (\text{G.11})$$

Donde  $\mathbb{B}^n \xi_{(k)}^{(\mu \rightarrow \nu)}$  es el valor en binario ' $\mathbb{B}$ ' del gen de la variabilidad genética ( $\mu \rightarrow \nu$ ). Obtener el valor decimal de este parámetro se hace a través del término de transformación de la expresión G.7, ésto es:

$$\mathbb{R}^n \nu_{(k)}^{(m \rightarrow s)} = (\mathbb{R}^n \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^{(\mu \rightarrow \nu)})^T * \mathbb{B}^n \xi_{(k)}^{(\mu \rightarrow \nu)(m \rightarrow s)}. \quad (\text{G.12})$$

**Combinación de los demás genes.** La sutil diferencia con los demás genes es que el valor que es binarizado no es exactamente la media, sino que antes con la media y la varianza se forma una, alguna, distribución de probabilidad según la cual se calcula aleatoriamente un número que dicta la norma de lo que habrían de ser los genes del organismo que nace ' $s$ ', la diferencia es que en la varianza este valor aleatorio es inmediatamente la media, aquí es dado por una distribución. Primero, se calcula la media igual que en el caso pasado, usando las medias y desempeños de los padres en la generación pasada ' $(k-1)$ ':

$$\mathbb{R}^n \partial_{(k)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow s)} = 2^{-1} \cdot \frac{\mathbb{R}^n J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow y)} \cdot \mathbb{R}^n \partial_{(k-1)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow x)} + \mathbb{R}^n J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow x)} \cdot \mathbb{R}^n \partial_{(k-1)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow y)}}{\mathbb{R}^n J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow x)} + \mathbb{R}^n J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow y)}}. \quad (\text{G.13})$$

Lo anterior es expresado para las medias de los genes que son longitudes '( $\mu \rightarrow L$ )', que en este caso son todos los demás que no son varianza. Si el término '( $\mu \rightarrow L$ )' son numeros '1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11' por ser 11 longitudes, entonces existe una representación vectorial para la noción anterior que es como ' $\mathbb{R}^{11}$ '.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{11} \partial_{(k)}^{(m \rightarrow s)} &= 2^{-1} \cdot (\mathbb{R} J_{\xi,(k-1)}^{(m \rightarrow x)} + \mathbb{R} J_{\xi,(k-1)}^{(m \rightarrow y)})^{-1} \cdot \dots \\ &\quad (\mathbb{R} J_{\xi,(k-1)}^{(m \rightarrow y)} \cdot \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{11} \partial_{(k-1)}^{(m \rightarrow x)} + \mathbb{R} J_{\xi,(k-1)}^{(m \rightarrow x)} \cdot \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{11} \partial_{(k-1)}^{(m \rightarrow y)}). \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

—Los valores antes de binarizar que aparecen por  $\mathcal{N}, \mathcal{F}$  siguen estas distribuciones pero necesitan ser activadas por una semilla, el número (semi)aleatorio que evalúa internamente la distribución es ' $n_\xi$ ', usualmente los computadores utilizan alguna medida de la Hora del reloj y la transforman usando funciones que aproximarían tener infinitas frecuencias. Lo mas aleatorio que parece haber que puede medirse en la naturaleza son los detectores de radiación.

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^n \xi_{(k)}^{(\mu \rightarrow L)} &= (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \partial_{(k)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow s)}, \mathbb{R} \nu_{(k)}^{(m \rightarrow s)})) \Big|_{n_\xi} \geq 0,5, \quad \text{or} \\ \mathbb{B}^n \xi_{(k)}^{(\mu \rightarrow L)} &= (\mathcal{N}(\mathbb{R}^n \partial_{(k)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow s)}, \mathbb{R} \nu_{(k)}^{(m \rightarrow s)})) \Big|_{n_\xi} \geq 0,5. \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

El resultado de cualquier función de distribución está confinado a ser un valor entre cero y uno, éste valor aleatorio con tendencia uniforme (' $\mathcal{F}$ ') ó tendencia normal (' $\mathcal{N}$ ').

Por no ser del todo claro la interpretación del término de varianza en una tendencia uniforme ' $\mathcal{F}$ ', habría que verla como en la figura G.1 interpretarla como restringiendo el dominio de la distribución, así cuando se usa esta distribución, sólo ocurren valores dentro del intervalo continuo  $[(\mathbb{R} \partial^\mu - \mathbb{R} \nu), ..., (\mathbb{R} \partial^\mu + \mathbb{R} \nu)]$  y cada punto tiene la misma probabilidad de ocurrir, hasta donde es posible la aproximación computacional.

La función de distribución normal  $\mathcal{N}(\mathbb{R} \partial^\mu, \mathbb{R} \nu)$  se comporta como una función con tendencia de certeza exponencial con prioridad a la media y incertidumbre proporcional a la varianza, tal cual como describe la distribución de Gauss. No hay que elegir ambas distribuciones, sino sólo una.

Aquellos genes (ecuación G.15) son en el organismo las longitudes, según la expresión G.3 se construye la transformación de los valores de genes ( $\mathbb{B}$ ) a valores de longitudes que entienden las expresiones cinemáticas.

$$\mathbb{R} L_{(k)}^{(L)(m \rightarrow s)} = (\mathbb{R}^n \Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow s)})^T * \mathbb{B}^n \xi_{(k)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow s)}. \quad (\text{G.16})$$

**Sobre la selección de la media, y la serie geométrica infinita:** Lo que sigue es redundante a lo que fue antes, —trata de explicar un concepto importante. En la combinación, el organismo que nace es elementalmente su valor de medias  $\mathbb{R}^n \partial_{(k)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow s)}$ . Por las expresiones anteriores este valor de medias se encuentra explícitamente dado por la influencia de dos padres ( $m \rightarrow x$  y  $m \rightarrow y$ ), más explícitamente de la media de los padres y de sus desempeños. El organismo que nace comparte (según la expresión G.13) de sus padres el valor de la media, —pero no el valor de la media del gen, sino el valor de la media de cada elemento binario del número que representa el gen.

Aquí la discusión sigue siendo sobre la combinación, ésta puede hacerse de muchas maneras, al autor le agrada la idea de pensarla en términos que le permitan a un nuevo organismo ser influenciado por todos los ancestros en la cadena de sus padres siguiendo una serie geométrica de bifurcación par.

$$\begin{aligned} \lim_{(k \rightarrow \infty)}, \quad & \sum_{i=1}^k (2)^{-i} = 1, \\ & 2^{-1} + \sum_{i=2}^k (2)^{-i} = 1, \\ & \sum_{i=2}^k (2)^{-i} = 0,5. \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

*Alternativamente*

$$\sum_{(i=k-1, i--)}^{i \geq 1} (2)^{-i} = 0,5.$$

Una serie geométrica como ésa (G.17) ligaría al organismo que nace la contribución de todos los ancestros de las 'k' generaciones pasadas sin la necesidad de almacenar la matriz de genes o medias de los organismos de las generaciones anteriores. Para resolver el problema habría que explorar en la forma de la serie para extraer una propiedad hace equivalente almacenar la información con sólo las medias de los organismos en la generación inmediatamente anterior  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\forall \mu \neq \nu} \partial_{(k-1)}^m$ , ésta propiedad hace de la serie.

Esta es la parte que modela la progresión de las contribuciones pasadas, es como decir que en equivalente genético nosotros somos iguales a un hermano o a dos padres, a cuatro abuelos, la serie de descomposición de un individuo crece de a dos y por lo tanto en nosotros vive la influencia de los 8 padres de nuestros 4 abuelos. El proceso resulta ser un poco más

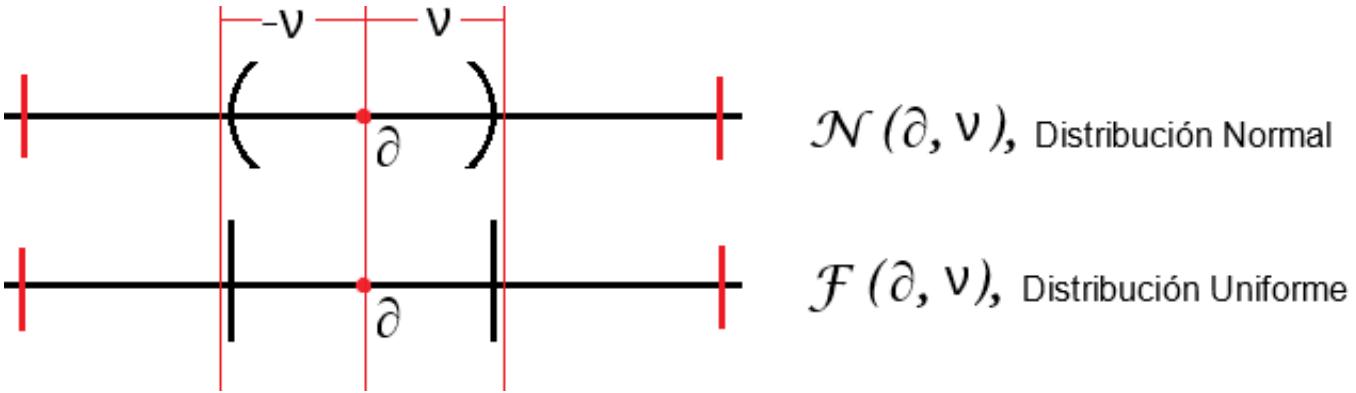


Figura G.1: Esquemas para explicar las bases funcionales del Mecanismo de Combinación. Ambas funciones de densidad de probabilidad están definidas por un valor de media  $\mathbb{R}\partial^{\mu m}$  (en el punto rojo), y un valor de desviación de la media,  $\mathbb{R}\nu^m$  marcado como las líneas negras. Cada uno de los bits de los valores de los genes tiene un valor continuo entre 0 y 1 que describe la media de distribución asociada, todos los bits de todos los genes del  $m$ -ésimo individuo tienen una función de distribución con la misma varianza, de ahí que  $\mathbb{R}\nu^m$  se llame la variabilidad genética del individuo.

complejo en la naturaleza y en éste algoritmo que se describe porque las contribuciones a los hijos dependen además del desempeño de los padres. —Se explica la serie porque esa es la progresión lo demás que no es la serie son constantes impredecibles que se manifiestan cada que hay una nueva generación, no deja de ser el caso de que lo que es cierto para la progresión es parcialmente debido a la serie y parcialmente debido a las constantes, qué constantes, las de normalizan el desempeño y el valor de la media.

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \partial_{\text{promedio}}^{(m)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^k 2^{-i} \cdot \frac{\mathbb{R} J_{\xi, (k-i)}^{(m \rightarrow y)} \cdot \mathbb{R} \eta \partial_{(k-i)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow x)} + \mathbb{R} J_{\xi, (k-i)}^{(m \rightarrow x)} \cdot \mathbb{R} \eta \partial_{(k-i)}^{(\mu \rightarrow L)(m \rightarrow y)}}{\mathbb{R} J_{\xi, (k-i)}^{(m \rightarrow x)} + \mathbb{R} J_{\xi, (k-i)}^{(m \rightarrow y)}}. \quad (\text{G.18})$$

Pero ésta estrategia ocupa una cantidad gigantesca de información. Según la simplificación aparentemente sin importancia de G.17 y la combinatoria de la ecuación G.18 es posible argumentar que se necesita solamente información de la generación pasada para generar la generación siguiente, con la presunción de que antes de cada generación hay infinitas otras atrás. —por tanto:  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}^m \partial$ .

Así se reduce el componente infinito del mecanismo de combinación ( $k$ ) lo que permite escribir la forma particular o matricial de las media de la generación siguiente por términos de la generación inmediatamente pasada, como:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \partial_{(k)}^{\mu \cdot (m \rightarrow s)} &= 2^{-1} \cdot (\mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow x)} + \mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow y)})^{-1} \cdot \dots \\ &\quad (\mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow y)} \cdot \mathbb{R}^n \partial_{(k-1)}^{\mu \cdot (m \rightarrow x)} + \mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow x)} \cdot \mathbb{R}^n \partial_{(k-1)}^{\mu \cdot (m \rightarrow y)}), \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \partial_{(k)}^{(m \rightarrow s)} &= 2^{-1} \cdot (\mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow x)} + \mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow y)})^{-1} \cdot \dots \\ &\quad (\mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow y)} \cdot \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \partial_{(k-1)}^{(m \rightarrow x)} + \mathbb{R} J_{\xi, (k-1)}^{(m \rightarrow x)} \cdot \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \partial_{(k-1)}^{(m \rightarrow y)}). \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

Por ésto sólo es necesario almacenar en memoria, para los ( $m$ ) individuos de la generación presente, y los ( $m$ ) individuos de la generación pasada, los valores de la tabla G.1.

La combinación, que finalmente es el proceso de generar la nueva ( $k$ ) matriz de medias  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \partial_{(k)}^{(m \rightarrow s)}$  es una suma sencilla, las explicaciones en éste capítulo buscan mostrar que un nuevo individuo nace y que contiene influencia genética de todos las generaciones pasadas de los individuos que están en la cadena de sus padres.

## G.3. Mecanismo de Desempeño

Por tratarse de genes que codifican longitudes tendría sentido decir que se optima sólo cosas asociadas al volumen del espacio de trabajo que alcanza el mecanismo. Pero a las medidas les toca otra parte de interacción a relaciones de fuerza. Por ejemplo el caso de la longitud de la primera extremidad  $\mathbb{R}L^{(4)}$ , que se asocia inversamente la fuerza del cargo del mecanismo, pero si se optimiza para conseguir mucha fuerza se penaliza demasiado el volumen del espacio de trabajo, ésta clase de desempeños se los puede entender como desempeños mixtos. —Hay otros más sencillos, que cumplen especificaciones precisas, como el de optimizar el volumen del espacio de trabajo. Tiene sentido optimizar las longitudes sólo

por una medida de volumen porque los materiales de mis tiempos ya son muy livianos y hay motores muy fuertes. Sólo con buenos motores se consiguen buenas aceleraciones pero sin un gran espacio no se consiguen buenas velocidades; si ya se van a usar buenos motores queda torque de sobra para permitirse al desempeño evaluar sólo el volumen de trabajo. En síntesis se va a usar una medida de desempeño que evalúe únicamente el volumen del espacio que alcanza el efecto final. El volumen de trabajo yace en una compleja forma como muestra la figura G.2a, G.2b. Por tratarse el volumen de una figura simétrica, sin presunciones de exactitud al cálculo propongo una estrategia de cálculo aproximado por regresión cuadrática que asume el caso en que las N cadenas son simétricas, ésta aproximación al volumen de trabajo usa cuatro puntos en el plano transversal del '(N)'-ésimo corte (figura G.3a), el plano es:

$$\mathbb{R}^3 \delta N^{(N)} \perp \mathbb{R}^3 \delta z_T. \quad (\text{G.20})$$

En cada plano queda captada la información de los radios de máxima ( $\mathbb{R}^{(1)} q_{i,1}$ ) y mínima realización ( $\mathbb{R}^{(1)} q_{i,3}$ ), también el desplazamiento en  $\mathbb{R}^3 \delta z_T$  máximo ( $\mathbb{R}^{(2)} q_{i,2}$ ) y mínimo ( $\mathbb{R}^{(2)} q_{i,4}$ ). Usando los cuatro puntos de periferia es posible reconstruir una función que aproxime el volumen, con éstos puntos se construyen tres paráolas, tres regresiones cuadráticas, dos superiores y una inferior, restar las integrales de estas funciones es aproximar la forma de la figura G.3a.

Los puntos de periferia son en dos dimensiones  $\mathbb{R}^2$  por estar en un plano, G.20, pero las coordenadas de los puntos que resuelve la solución cinemática directa son en tres ' $\mathbb{R}^3$ ', al calcular los puntos del plano que dan la forma a la ecuación de volumen hay que realizar la transformación ' $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ '. La idea es que después de la transformación  $\mathbb{R}^{(1)}$  coincida con la dirección del eje  $\mathbb{R}^3 \delta N^{(N)}$ , y  $\mathbb{R}^{(2)}$  en la dirección de  $\mathbb{R}^3 \delta z_T$ .

La transformación  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una singularidad, existe sólo para algunos puntos de la solución cinemática.

$$\mathbb{R}^2 q_{i,\{1,2,3,4\}} = [\mathbb{R}^3 \delta N^{(N)}, \mathbb{R}^3 \delta z_T]^T * \mathbb{R}^3 q_{i,\{1,2,3,4\}}. \quad (\text{G.21})$$

Para éstos cálculos el origen de las coordenadas coincide en ambos regímenes con el origen Cinemático  $\mathbb{R}^3 q_T$  por presumir que los puntos han sido calculados por las expresiones de cinemática de la sección 3.2.1 se hizo necesario la transformación, de otra forma se necesitarían ' $4 \cdot N$ ' distintos puntos para realizar la relación del volumen. La presunción de cadenas cinemáticas simétricas y de la transformación de los puntos al plano el volumen es lo mismo que hacer del objeto del plano un sólido por revolución (multiplicarlo por  $\pi$ ). Después de reducciones la expresión que aproxima el volumen ' $V$ ' que además es la medida de desempeño ' $\mathbb{R} J_\xi^m$ ', siendo ' $\langle \rangle$ ' una regresión cuadrática en un plano hecha con dos puntos:

$$V = \mathbb{R} J_\xi^m = \begin{aligned} & (\text{hemisferio}) \cdot \pi \cdot \int_0^{\mathbb{R}^{(1)} q_{i,1}} \left( \left( \frac{\mathbb{R}^{(2)} q_{i,4} - \mathbb{R}^{(2)} q_{i,2}}{\mathbb{R}^{(1)} q_{i,1}} \right) \cdot x^2 + \mathbb{R}^{(2)} q_{i,2} - \mathbb{R}^{(2)} q_{i,4} \right) dx \\ & + (\text{hemisferio}) \cdot \pi \cdot \int_{\mathbb{R}^{(1)} q_{i,3}}^0 \left( \left( \frac{\mathbb{R}^{(2)} q_{i,4} - \mathbb{R}^{(2)} q_{i,2}}{\mathbb{R}^{(1)} q_{i,3}} \right) \cdot x^2 + \mathbb{R}^{(2)} q_{i,2} - \mathbb{R}^{(2)} q_{i,4} \right) dx, \end{aligned} \quad (\text{G.22})$$

$$\mathbb{R} J_\xi^m = \begin{aligned} & (-1) \cdot (\text{hemisferio}) \cdot \pi \cdot \dots \\ & \left( \left( \frac{\mathbb{R}^{(2)} q_{i,4} - \mathbb{R}^{(2)} q_{i,2}}{3} \right) \cdot (\mathbb{R}^{(1)} q_{i,1}^2 + \mathbb{R}^{(1)} q_{i,3}^2) \dots \right. \\ & \left. + (\mathbb{R}^{(2)} q_{i,2} - \mathbb{R}^{(2)} q_{i,4}) \cdot (\mathbb{R}^{(1)} q_{i,1} + \mathbb{R}^{(1)} q_{i,3}) \right). \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

El problema del desempeño está resuelto cuando se encuentran las coordenadas de los cuatro puntos  $\mathbb{R}^2 q_{i,\{1,2,3,4\}}$ , la lógica detrás del modelo permite asumir que estos puntos tienen una relación causal exclusiva con cuatro valores de configuraciones de ángulos, tres puntos angulares corresponden a tres puntos cardinales, pero los angulares son independientes de las longitudes, los puntos extremos los producen casi siempre los mismos ángulos, ésta es otra aproximación, los valores largos de la relación ' $\frac{\mathbb{R} L^{(9)}}{\mathbb{R} L^{(3)}} \approx 1'$ . Y el espacio de trabajo reconstruido puede entenderse cómo en las figuras G.4a y G.4b. Usando los puntos del primero de los planos, digamos ' $N=1$ ' es posible obtener los puntos como:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 q_{i,1} & \approx \text{directkinematics}([2,3147, -0,7364, -0,7364]), \\ \mathbb{R}^2 q_{i,2} & \approx \text{directkinematics}([\pi/2, \pi/2, \pi/2]), \\ \mathbb{R}^2 q_{i,3} & \approx \text{directkinematics}([-0,8137, 2,2756, 2,2756]), \\ \mathbb{R}^2 q_{i,4} & \approx \text{directkinematics}([\pi/4, \pi/4, \pi/4]). \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

La expresión cinemática entrega una coordenada en ' $\mathbb{R}^3$ ' que será siempre cero en una coordenada, si el ' $\mathbb{R}^3 \delta N^{(N=1)} = [1, 0, 0]^T$ ' entonces para los puntos  $\mathbb{R}^2 q_{i,\{1,2,3,4\}}$  pasados la coordenada que da la solución cinemática es siempre cero para la coordenada 'y'.

Los angulos de evaluación para los puntos de la periferia son constantes entre los mecanismos de distintas longitudes. Estos angulos serían los mismos para evaluar cualquier configuración de ' $\mathbb{R} L^{11}$ '.

Las configuraciones que optimizan la aceleración del efecto usan proporciones de longitudes que asignan grandes tamaños a la longitud de la primera extremidad  $\mathbb{R}L^{(4)}$ . Esto es porque la velocidad que trasmitten los motores al efecto es proporcional a ésta medida y nada más, como muestran los estudios Jacobianos de la sección 3.2.3. Aumentar demasiado el valor de  $\mathbb{R}L^{(4)}$  reduce proporcionalmente el peso de carga nominal que puede cargar el mecanismo, nominal porque es calculado usando el valor nominal de acción de torque en los motores.

## G.4. Algoritmos para hallar las proporciones optimas de manera iterativa

### —Inicio de un Algoritmo—

**Algorithm 16:** *Algoritmo de inicialización.*

```

Result: Iniciar el algoritmo de genes
—Dictar el número de individuos que habrá cada generación 'm';
—Dictar la cantidad de genes de cada individuo 'μ';
—Dictar el número de bits de la descomposición binaria 'η';
for  $m_{aux} = 1; m_{aux}++; m_{aux} \leq m$  do
    for  $\mu_{aux} = 1; \mu_{aux}++; \mu_{aux} \leq \mu$  do
        —Dictar el valor mínimo del  $\mu_{aux}$ -ésimo gen y asignarlo a 'aux_min';
        —Dictar el valor máximo del  $\mu_{aux}$ -ésimo gen y asignarlo a 'aux_max';
        for  $\eta_{aux} = 1; \eta_{aux}++; \eta_{aux} \leq \eta$  do
            —Combinar los valores aux_min y aux_max como sucede en la expresión G.3 y asignar este valor a 'aux';
            —Iniciar los componentes de la matriz de transformación ' $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ' como  $\mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}}^{(\eta_{aux})(\mu_{aux})}$ ;
            —Iniciar los componentes de la matriz de medias para la primera generación ' $\mathbb{R}\theta_{(k=1)}^{(\eta_{aux})(\mu_{aux})(m_{aux})}$ ', con valores aleatorios tipo ' $\mathcal{F}$ ' en el intervalo continuo '[0, 1]';
        end
    end
end
for  $m_{aux} = 1; m_{aux}++; m_{aux} \leq m$  do
    —Conocer el valor numérico ' $\mathbb{R}$ ' del gen de la variabilidad genética ' $\mathbb{R}\nu_{(k=1)}^{(m_{aux})}$ ', con la expresión G.12;
    for  $\mu_{aux} = 1; \mu_{aux}++; \mu_{aux} \leq \mu \& \mu \neq \nu$  do
        for  $\eta_{aux} = 1; \eta_{aux}++; \eta_{aux} \leq \eta$  do
            —Con valores aleatorios tipo ' $\mathcal{N}$ ' de media ' $\mathbb{R}\theta_{(k=1)}^{(\eta_{aux})(\mu_{aux})(m_{aux})}$ ', y varianza ' $\mathbb{R}\nu_{(k=1)}^{(m_{aux})}$ ', producir valores aleatorios y asignarlos a la variable 'aux';
            —Asignar valores lógicos a los elementos de los genes por la operación  $\mathbb{B}\xi_{(k=1)}^{(\eta_{aux})(\mu_{aux})} = (aux \geq 0,5)$ ;
        end
        —Conocer el valor numérico de la longitud que codifica el gen ' $\mathbb{R}L_{(k=1)}^{(\mu_{aux})}$ ', con la expresión G.16;
    end
end

```

### —Inicio de un Algoritmo—

**Algorithm 17:** *Algoritmo para calcular el desempeño de todos los individuos en una generación.*

```

Result: Calcular el desempeño de un individuo
—Conocer las longitudes de la generación presente ' $\mathbb{R}L_{(k)}^{(\mu, m)}$ ';
—Presumiendo que ' $\mathbb{R}3SN(N=1) = [1, 0, 0]$ ';
for  $m_{aux} = 1; m_{aux}++; m_{aux} \leq m$  do
    —Evaluar la solución cinemática directa para los ángulos en radianes ' $\mathbb{R}3q_f = directkinematics[2,3147, -0,7364, -0,7364]$ ' y asignar el valor de la coordenada 'x' y de la coordenada 'z' a la variable auxiliar ' $\mathbb{R}2q_{i,1} = [\mathbb{R}(x)q_f, \mathbb{R}(z)q_f]^T$ ';
    —Evaluar la solución cinemática directa para los ángulos en radianes ' $\mathbb{R}3q_f = directkinematics[\pi/2, \pi/2, \pi/2]$ ' y asignar el valor de la coordenada 'x' y de la coordenada 'z' a la variable auxiliar ' $\mathbb{R}2q_{i,2} = [\mathbb{R}(x)q_f, \mathbb{R}(z)q_f]^T$ ';
    —Evaluar la solución cinemática directa para los ángulos en radianes ' $\mathbb{R}3q_f = directkinematics[-0,8137, 2,2756, 2,2756]$ ' y asignar el valor de la coordenada 'x' y de la coordenada 'z' a la variable auxiliar ' $\mathbb{R}2q_{i,3} = [\mathbb{R}(x)q_f, \mathbb{R}(z)q_f]^T$ ';
    —Evaluar la solución cinemática directa para los ángulos en radianes ' $\mathbb{R}3q_f = directkinematics[\pi/4, \pi/4, \pi/4]$ ' y asignar el valor de la coordenada 'x' y de la coordenada 'z' a la variable auxiliar ' $\mathbb{R}2q_{i,4} = [\mathbb{R}(x)q_f, \mathbb{R}(z)q_f]^T$ ';
    —Calcular el valor del desempeño del ' $m_{aux}$ -ésimo individuo  $\mathbb{R}J_{\xi,(k)}^{(m_{aux})}$ ' usando la expresión G.23;
end

```

### —Inicio de un Algoritmo—

**Algorithm 18:** *Algoritmo de la reproducción.*

```

Result: Seleccionar los individuos que habrían de reproducirse
—Conocer el desempeño de la generación presente usando el algoritmo 17;
—Ordenar de mayor a menor por el índice de desempeño;
—Dictar el número de padres (2, i.e. padre 'x' madres 'y');
—Dictar la cantidad de hijos por reproducción de 'Maxima optimidad'  $m_{maxopt}$ ;
—Dictar la cantidad de hijos por reproducción de 'Maxima variabilidad'  $m_{maxvar}$ ;
—Dictar la cantidad de hijos por reproducción de 'Contingencia estable'  $m_{est}$ ;
—Asegurarse que ' $m = m_{maxopt} + m_{maxvar} + m_{est}$ ';
—En la reproducción de máxima optimidad seleccionar el organismo con mayor índice de desempeño para ser el padre 'x', y seleccionar a los  $m_{maxopt}$  siguientes para ser madres 'y';
—En la reproducción de máxima variabilidad habría que evaluar todas las combinaciones de padres, ordenar las combinaciones de mayor a menor por términos del valor obtenido según la expresión G.9, luego seleccionar a los ' $m_{maxvar}$ ' más variables;
—En la reproducción de contingencia estable seleccionar a los ' $m_{est}$ ' de mayor índice de desempeño para sobrevivir el cambio de generación;
—Entender los pares seleccionados para combinarse en una matriz que indexa el número de individuo '(m)' en la forma  $\mathbb{R}m \times \mathbb{R}2^{auxreproduccion}$  por ser dos padres para cada 'm' individuos que siguen la siguiente generación;

```

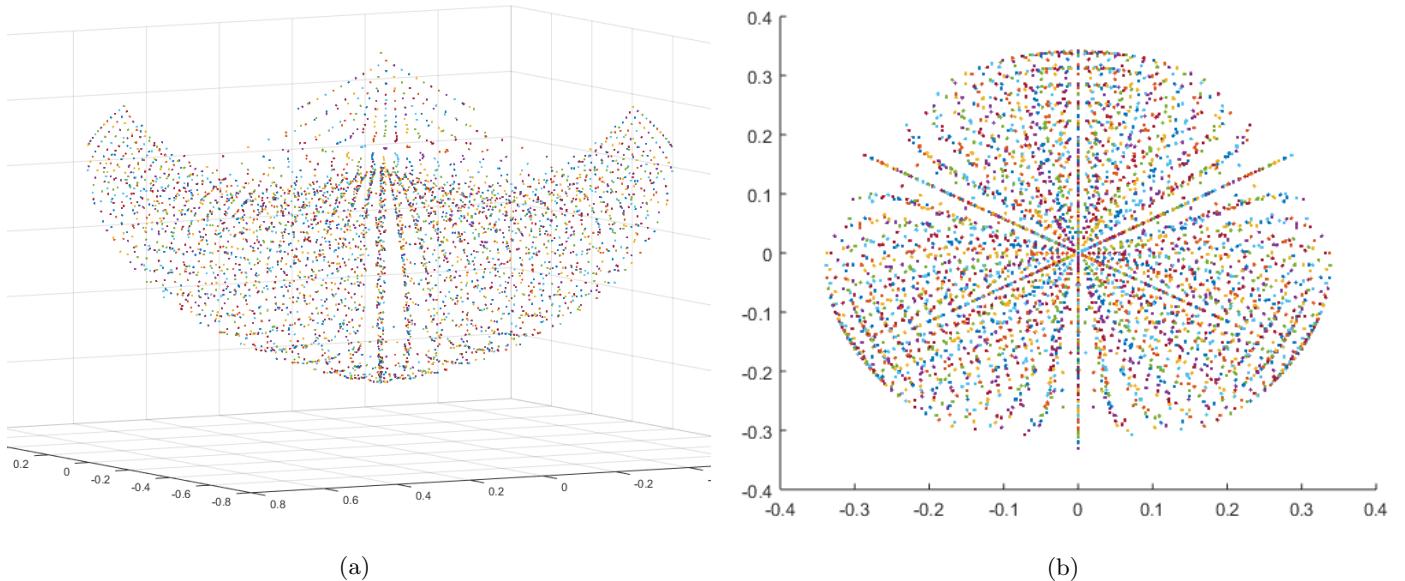


Figura G.2: Visualización del espacio de trabajo, vista tridimensional en G.2a, vista superior en G.2b.

### —Inicio de un Algoritmo—

#### Algorithm 19: Algoritmo de la combinación.

```

Result: Combinar los individuos que han sido seleccionados para reproducirse.
—Conocer del algoritmo 18 la matriz  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2 \text{ aux }}_{reproducción}$ ;
for  $m_{aux} = 1; m_{aux} + +; m_{aux} \leq m$  do
    —Combinar a  $m_x = \mathbb{R}^{aux}_{reproducción}(m_{aux})(1)$  y  $m_y = \mathbb{R}^{aux}_{reproducción}(m_{aux})(2)$  usando los valores de sus medias  $\mathbb{R}\eta \times \mathbb{R}\mu \partial^{(m_x)}$ ,  $\mathbb{R}\eta \times \mathbb{R}\mu \partial^{(m_y)}$  y desepeños  $\mathbb{R}J_{\xi}^{(m_x)}$ ,  $\mathbb{R}J_{\xi}^{(m_y)}$  para producir la media del individuo que nace por la expresión G.19 por tanto asignarla al concepto de  $\mathbb{R}\eta \times \mathbb{R}\mu \partial^{(ms)}$ ;
    —Calcular el valor binario del gen de la varianza de la usando la expresión G.11;
    —Transformar el valor binario del gen de la varianza a su valor real usando la expresión G.12;
    —Con las varianza y las medias construir una función de probabilidad de tipo ' $\mathcal{N}$ ' para obtener los genes de longitudes según la expresión G.15;
    —Transformar los genes de su valor binario a su valor real que representa longitudes según la expresión G.16;
end

```

### —Inicio de un Algoritmo—

#### Algorithm 20: Algoritmo de las $k$ generaciones.

```

Result: Evaluar todas las generaciones
—Dictar el número de generaciones que habrá 'k';
—Iniciar la población con el algoritmo 16;
for  $k_{aux} = 1; k_{aux} + +; k_{aux} \leq k$  do
    —Evaluar el desempeño de la población presente usando el algoritmo 17;
    —Seleccionar los individuos que habrían de reproducirse usando el algoritmo 18;
    —Combinar los individuos usando el algoritmo 19;
end

```

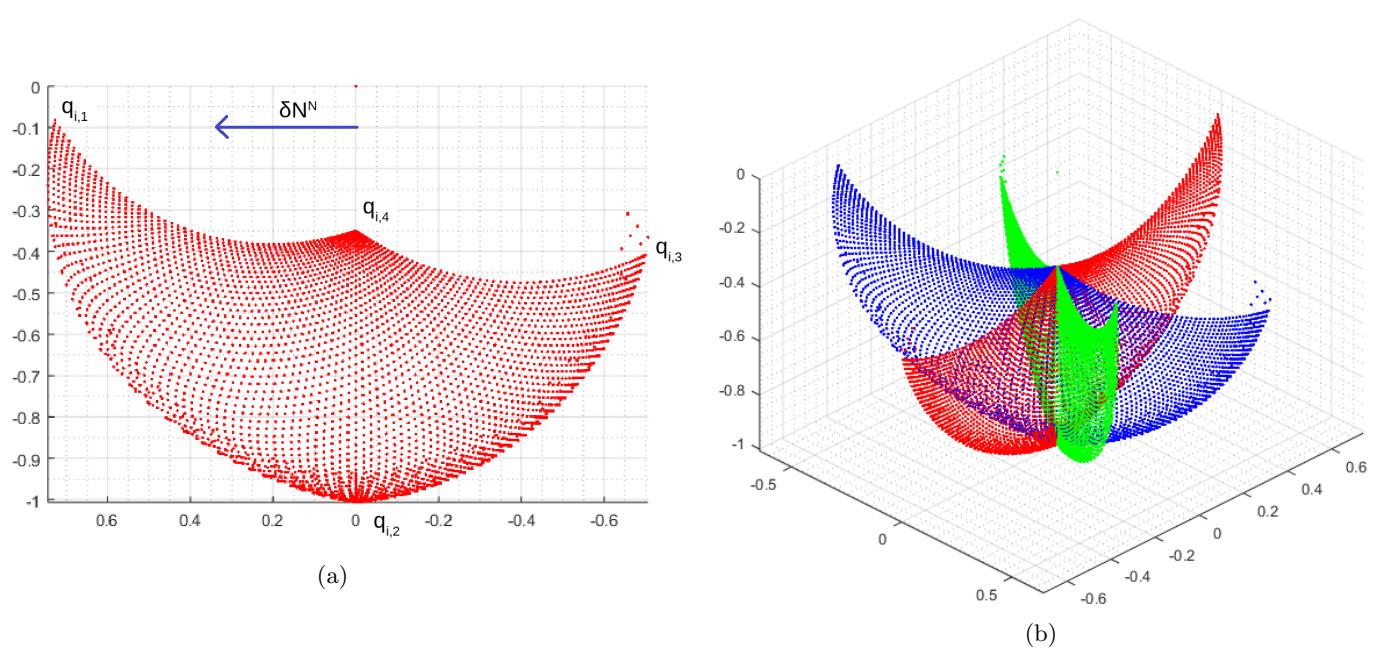


Figura G.3: Visualización del espacio de trabajo, vistas de cortes a lo largo de los ejes principales  $\mathbb{R}^3\delta N^N$ .

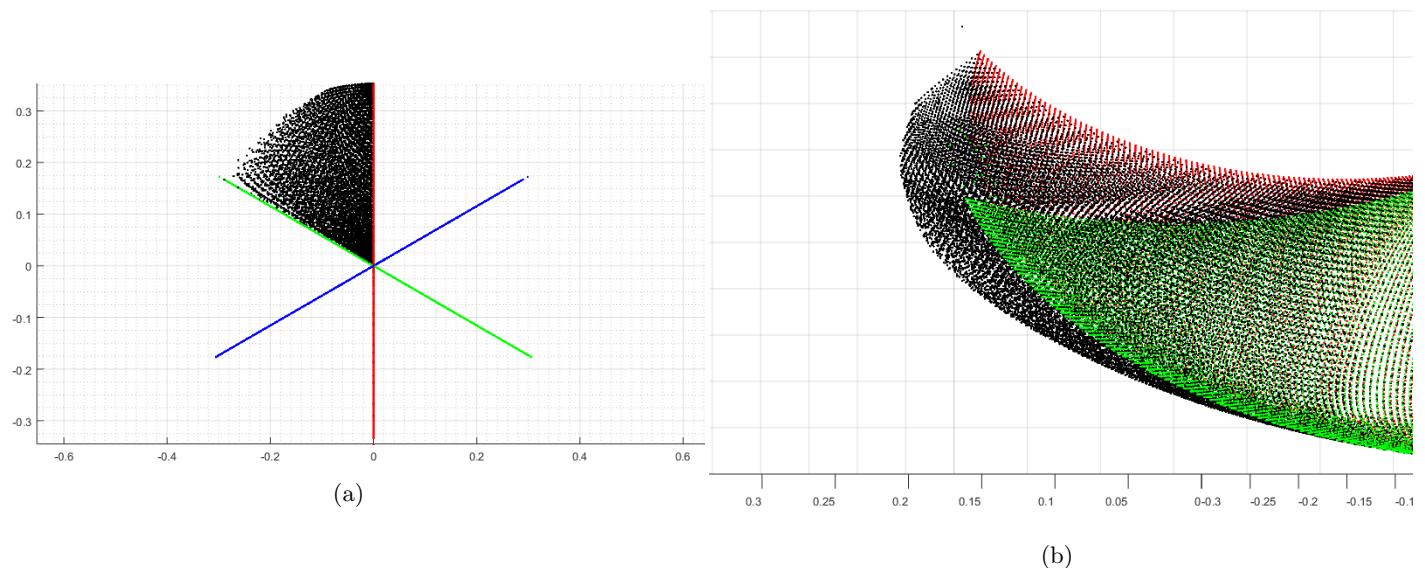
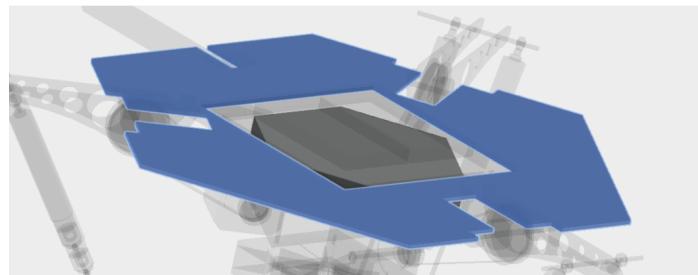
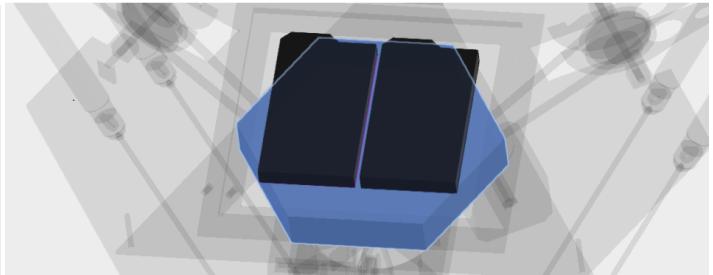


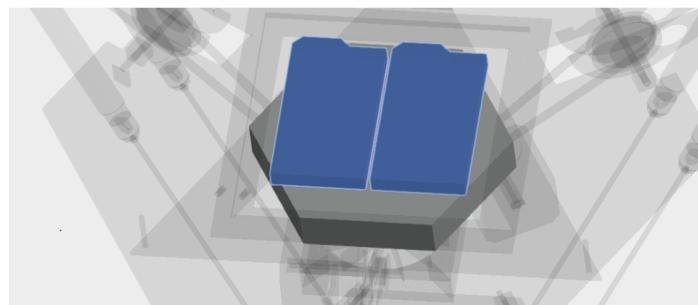
Figura G.4: Esquemas del área de trabajo que explican el mecanismo para aproximar el espacio de trabajo que supone la ecuación G.23.



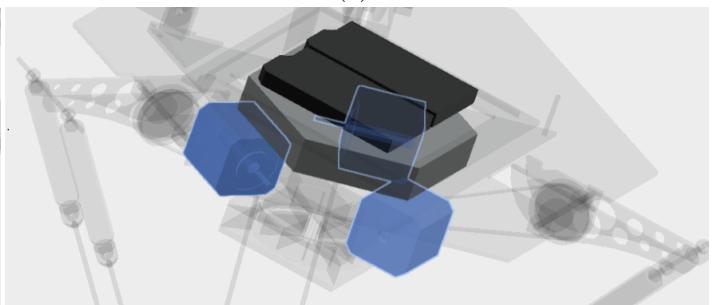
(a)



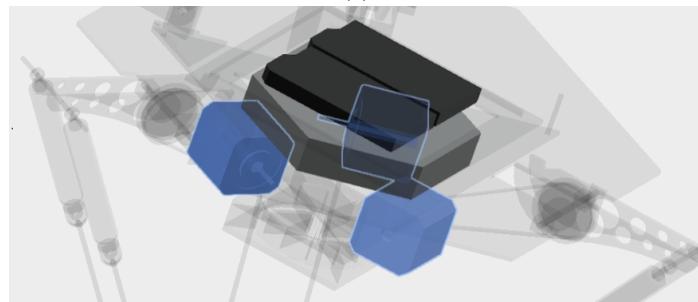
(b)



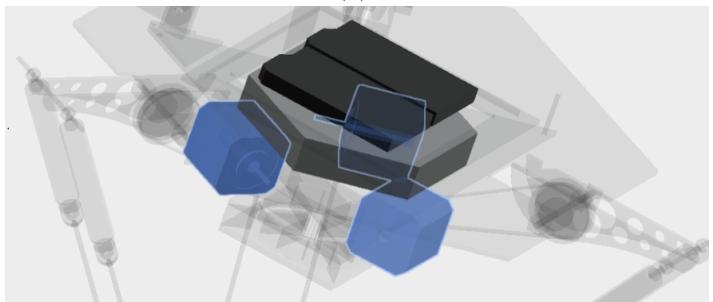
(c)



(d)



(e)



(f)

## Anexo H

# Un Delta particular

Un caso excepcional del mecanismo ocurre cuando:

$$\mathbb{R}L^{(6)} + \mathbb{R}L^{(7)} + \mathbb{R}L^{(9)} = \mathbb{R}L^{(3)} + \mathbb{R}L^{(4)} \quad (\text{H.1})$$

porque el mecanismo podría construirse de manera tal que el efecto alcance ambos *hemisferios*, ( $-1/+1$ )



## **Anexo I**

## **Anexo**



## Declaración de Budapest

### DECLARACION SOBRE LA CIENCIA Y EL USO DEL SABER CIENTIFICO

Unesco - ICSU

Adoptada por la Conferencia mundial sobre la ciencia  
el 1º de julio 1999 - Texto final

#### Preámbulo

1. La ciencia al servicio del conocimiento; el conocimiento al servicio del progreso
2. La ciencia al servicio de la paz
3. La ciencia al servicio del desarrollo
4. La ciencia en la sociedad y la ciencia para la sociedad

#### Preámbulo

1. Todos vivimos en el mismo planeta y formamos parte de la biosfera. Reconocemos ahora que nos encontramos en una situación de interdependencia creciente y que nuestro futuro es indisociable de la preservación de los sistemas de sustentación de la vida en el planeta y de la supervivencia de todas las formas de vida. Los países y los científicos del mundo deben tener conciencia de la necesidad apremiante de utilizar responsablemente el saber de todos los campos de la ciencia para satisfacer las necesidades y aspiraciones del ser humano sin emplearlo de manera incorrecta. Tratamos de recabar la colaboración activa de todos los campos del quehacer científico, a saber, las ciencias naturales, como las ciencias físicas, biológicas y de la tierra, las ciencias biomédicas y de la ingeniería y las ciencias sociales y humanas. El Marco General de Acción hace hincapié en las promesas y el dinamismo de las ciencias naturales así como en sus posibles efectos negativos, y en la necesidad de comprender sus repercusiones en la sociedad y sus relaciones con ella mientras que, el compromiso con la ciencia, así como las tareas y responsabilidades recogidas en esta Declaración, corresponden a todos los campos del saber científico. Todas las culturas pueden aportar conocimientos científicos de valor universal. Las ciencias deben estar al servicio del conjunto de la humanidad y contribuir a dotar a todas las personas de una comprensión más profunda de la naturaleza y la sociedad, una mejor calidad de vida y un medio ambiente sano y sostenible para las generaciones presentes y futuras.
2. El saber científico ha dado lugar a notables innovaciones sumamente beneficiosas para la humanidad. La esperanza de vida ha aumentado de manera considerable y se han descubierto tratamientos para muchas enfermedades. La producción agrícola se ha incrementado enormemente en muchos lugares del mundo para atender las crecientes necesidades de la población. Está al alcance de la humanidad el liberarse de los trabajos penosos gracias al progreso tecnológico y a la explotación de nuevas fuentes de energía, que también han permitido que surgiera una gama

compleja y cada vez mayor de productos y procedimientos industriales. Las tecnologías basadas en nuevos métodos de comunicación, tratamiento de la información e informática han suscitado oportunidades, tareas y problemas sin precedentes para el quehacer científico y para la sociedad en general. El avance ininterrumpido de los conocimientos científicos sobre el origen, las funciones y la evolución del universo y de la vida proporciona a la humanidad enfoques conceptuales y pragmáticos que ejercen una influencia profunda en su conducta y sus perspectivas.

3. Además de sus ventajas manifiestas, las aplicaciones de los avances científicos y el desarrollo y la expansión de la actividad de los seres humanos han provocado también la degradación del medio ambiente y catástrofes tecnológicas, y han contribuido al desequilibrio social o la exclusión. Un ejemplo: el progreso científico ha posibilitado la fabricación de armas muy perfeccionadas, lo mismo tradicionales que de destrucción masiva. Existe ahora la posibilidad de instar a una reducción de los recursos asignados a la concepción y fabricación de nuevas armas y fomentar la transformación, al menos parcial, de las instalaciones de producción e investigación militares para destinarlas a fines civiles. La Asamblea General de las Naciones Unidas proclamó el año 2000 Año Internacional para la Cultura de la Paz y el año 2001 Año de las Naciones Unidas del Diálogo entre Civilizaciones como pasos hacia la instauración de una paz duradera. La comunidad científica, junto con otros sectores de la sociedad, puede y debe desempeñar un papel fundamental en este proceso.
4. En nuestros días, aunque se perfilan avances científicos sin precedentes, hace falta un debate democrático vigoroso y bien fundado sobre la producción y la aplicación del saber científico. La comunidad científica y los políticos deberían tratar de fortalecer la confianza de los ciudadanos en la ciencia y el apoyo que le prestan mediante ese debate. Para hacer frente a los problemas éticos, sociales, culturales, ambientales, de equilibrio entre ambos sexos, económicos y sanitarios, es indispensable intensificar los esfuerzos interdisciplinarios recurriendo a las ciencias naturales y sociales. El fortalecimiento del papel de la ciencia en pro de un mundo más equitativo, próspero y sostenible requiere un compromiso a largo plazo de todas las partes interesadas, sean del sector público o privado, que incluya un aumento de las inversiones y el análisis correspondiente de las prioridades en materia de inversión, y el aprovechamiento compartido del saber científico.
5. La mayor parte de los beneficios derivados de la ciencia están desigualmente distribuidos a causa de las asimetrías estructurales existentes entre los países, las regiones y los grupos sociales, así como entre los sexos. Conforme el saber científico se ha transformado en un factor decisivo de la producción de riquezas, su distribución se ha vuelto más desigual. Lo que distingue a los pobres (sean personas o países) de los ricos no es sólo que poseen menos bienes, sino que la gran mayoría de ellos está excluida de la creación y de los beneficios del saber científico. Nosotros, los participantes en la *Conferencia Mundial sobre la Ciencia para el Siglo XXI: Un nuevo compromiso*, reunidos en Budapest (Hungria) del 26 de junio al 1º de julio de 1999, bajo los auspicios de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) y el Consejo Internacional para la Ciencia (ICSU):

Considerando:

7. el lugar que ocupan las ciencias naturales en la actualidad y la dirección que están tomando, las repercusiones sociales que han tenido y lo que espera de ellas la sociedad,
8. que en el siglo XXI la ciencia debe convertirse en un bien compartido solidariamente en beneficio de todos los pueblos, que la ciencia constituye un poderoso instrumento para comprender los fenómenos naturales y sociales y que desempeñará probablemente un papel aún más importante en el futuro a medida que se conozca mejor la complejidad creciente de las relaciones que existen entre la sociedad y el medio natural,
9. la necesidad cada vez mayor de conocimientos científicos para la adopción de decisiones, ya sea en el sector público o en el privado, teniendo presente en particular la influencia que la ciencia ha de ejercer en la formulación de políticas y reglamentaciones,

10. que el acceso al saber científico con fines pacíficos desde una edad muy temprana forma parte del derecho a la educación que tienen todos los hombres y mujeres, y que la enseñanza de la ciencia es fundamental para la plena realización del ser humano, para crear una capacidad científica endógena y para contar con ciudadanos activos e informados,
11. que la investigación científica y sus aplicaciones pueden ser de gran beneficio para el crecimiento económico y el desarrollo humano sostenible, comprendida la mitigación de la pobreza, y que el futuro de la humanidad dependerá más que nunca de la producción, la difusión y la utilización equitativas del saber,
12. que la investigación científica es una fuerza motriz fundamental en el campo de la salud y la protección social y que una mayor utilización del saber científico podría mejorar considerablemente la salud de la humanidad,
13. el proceso de mundialización en curso y la función estratégica que en él desempeña el conocimiento científico y tecnológico,
14. la imperiosa necesidad de reducir las disparidades entre los países en desarrollo y los desarrollados mejorando las capacidades e infraestructuras científicas de los países en desarrollo,
15. que la revolución de la información y la comunicación ofrece medios nuevos y más eficaces para intercambiar los conocimientos científicos y hacer progresar la educación y la investigación,
16. la importancia que tiene para la investigación y la enseñanza científicas el acceso libre y completo a la información y los datos de dominio público,
17. la función que desempeñan las ciencias sociales en el análisis de las transformaciones sociales relacionadas con los adelantos científicos y tecnológicos y en la búsqueda de soluciones a los problemas que esos procesos generan,
18. las recomendaciones de las grandes conferencias convocadas por las organizaciones del sistema de las Naciones Unidas y otras entidades y de las reuniones asociadas a la Conferencia Mundial sobre la Ciencia,
19. que la investigación científica y el uso del saber científico deben respetar los derechos humanos y la dignidad de los seres humanos, en consonancia con la Declaración Universal de Derechos Humanos y a la luz de la Declaración Universal sobre el Genoma Humano y los Derechos Humanos,
20. que algunas aplicaciones de la ciencia pueden ser perjudiciales para las personas y la sociedad, el medio ambiente y la salud de los seres humanos e incluso poner en peligro la supervivencia de la especie humana, y que la ciencia aporta una contribución indispensable a la causa de la paz y el desarrollo y a la protección y la seguridad mundiales,
21. que incumbe a los científicos, junto a otros importantes agentes, una responsabilidad especial para evitar las aplicaciones de la ciencia que son éticamente erróneas o que tienen consecuencias negativas,
22. la necesidad de practicar y aplicar las ciencias de acuerdo con normas éticas apropiadas, fundadas en un amplio debate público,
23. que la labor científica y el uso del saber científico deben respetar y preservar todas las formas de vida y los sistemas de sustentación de la vida de nuestro planeta,
24. que siempre hubo un desequilibrio en la participación de hombres y mujeres en todas las actividades relacionadas con la ciencia,
25. que existen obstáculos que han impedido la plena participación de hombres y mujeres de otros grupos, entre otros las personas discapacitadas, los pueblos indígenas y las minorías étnicas, denominados en adelante grupos desfavorecidos,
26. que los sistemas tradicionales y locales de conocimiento, como expresiones dinámicas de la percepción y la comprensión del mundo, pueden aportar, y lo han hecho en el curso de la historia, una valiosa contribución a la ciencia y la tecnología, y que es menester preservar, proteger, investigar y promover ese patrimonio cultural y ese saber empírico,
27. que son necesarias unas nuevas relaciones entre la ciencia y la sociedad para resolver apremiantes problemas mundiales como la pobreza, la degradación del medio ambiente, la insuficiencia de los

- servicios de salud pública y la seguridad del suministro de alimentos y agua, especialmente en relación con el crecimiento demográfico,
28. la necesidad de que los gobiernos, la sociedad civil y el sector de la producción asuman un compromiso firme con la ciencia, y de que los investigadores científicos asuman un compromiso igualmente firme en pro del bienestar de la sociedad,

#### **1. La ciencia al servicio del conocimiento; el conocimiento al servicio del progreso**

29. La función inherente al quehacer científico consiste en estudiar de manera sistemática y profunda la naturaleza y la sociedad para obtener nuevos conocimientos. Estos nuevos conocimientos, fuente de enriquecimiento educativo, cultural e intelectual, generan avances tecnológicos y beneficios económicos. La promoción de la investigación básica y orientada hacia los problemas es esencial para alcanzar un desarrollo y un progreso endógenos.
30. Mediante políticas nacionales de ciencia y como catalizadores que facilitan la interacción y la comunicación entre las partes interesadas, los gobiernos deben reconocer la función esencial que desempeña la investigación científica en la adquisición del saber, la formación de científicos y la educación de los ciudadanos. La investigación científica financiada por el sector privado se ha convertido en un factor clave del desarrollo socioeconómico, pero no puede excluir la necesidad de la investigación financiada con fondos públicos. Ambos sectores deben colaborar estrechamente y considerarse complementarios para financiar las investigaciones científicas que persigan objetivos a largo plazo.

#### **2. La ciencia al servicio de la paz**

31. En esencia, el pensamiento científico consiste en la capacidad de examinar los problemas desde distintas perspectivas y en buscar explicaciones a los fenómenos naturales y sociales, sometiéndolas constantemente a análisis críticos. La ciencia se basa, pues, en una reflexión crítica y libre, fundamental en un mundo democrático. La comunidad científica, que desde hace largo tiempo comparte una tradición que trasciende las naciones, las religiones y las etnias, tiene el deber, como afirma la Constitución de la UNESCO, de promover la "solidaridad intelectual y moral de la humanidad", base de una cultura de paz. La cooperación entre los investigadores de todo el mundo aporta una contribución valiosa y constructiva a la seguridad mundial y al establecimiento de relaciones pacíficas entre las diferentes naciones, sociedades y culturas, y puede fomentar la adopción de nuevas medidas en pro del desarme, comprendido el desarme nuclear.
32. Los gobiernos y la sociedad en general deben tener conciencia de la necesidad de usar las ciencias naturales y sociales y la tecnología como herramientas para atacar las causas profundas y los efectos de los conflictos. Hay que aumentar las inversiones en las investigaciones científicas sobre esas cuestiones.

#### **3. La ciencia al servicio del desarrollo**

33. Hoy más que nunca, la ciencia y sus aplicaciones son indispensables para el desarrollo. Mediante los apropiados programas de educación e investigación, las autoridades, sea cual fuere su ámbito de competencia, y el sector privado deben prestar más apoyo a la construcción de una capacidad científica y tecnológica adecuada y distribuida de manera equitativa, fundamento indispensable de un desarrollo económico, social, cultural y ambiental racional. Esta necesidad es especialmente apremiante en los países en desarrollo. El desarrollo tecnológico exige una base científica sólida y debe orientarse resueltamente hacia modos de producción seguros y no contaminantes, una utilización de los recursos más eficaz y productos más inocuos para el medio ambiente. La ciencia y la tecnología también deben orientarse decididamente hacia un mejoramiento de las posibilidades de

empleo, la competitividad y la justicia social. Hay que aumentar las inversiones en ciencia y tecnología encaminadas a estos objetivos y a conocer y proteger mejor la base de recursos naturales del planeta, la diversidad biológica y los sistemas de sustentación de la vida. El objetivo debe ser avanzar hacia estrategias de desarrollo sostenible mediante la integración de las dimensiones económicas, sociales, culturales y ambientales.

34. La enseñanza científica, en sentido amplio, sin discriminación y que abarque todos los niveles y modalidades, es un requisito previo fundamental de la democracia y el desarrollo sostenible. En los últimos años se han tomado medidas en todo el mundo para promover la enseñanza básica para todos. Es esencial que se reconozca el papel primordial desempeñado por las mujeres en la aplicación del progreso científico a la producción de alimentos y la atención sanitaria, y que se realicen esfuerzos para mejorar su comprensión de los adelantos científicos logrados en esos terrenos. La enseñanza, la transmisión y la divulgación de la ciencia deben construirse sobre esta base. Los grupos marginados aún requieren una atención especial. Hoy más que nunca es necesario fomentar y difundir conocimientos científicos básicos en todas las culturas y todos los sectores de la sociedad así como las capacidades de razonamiento y las competencias prácticas y una apreciación de los valores éticos, a fin de mejorar la participación de los ciudadanos en la adopción de decisiones relativas a la aplicación de los nuevos conocimientos. Habida cuenta de los progresos científicos, es especialmente importante la función de las universidades en la promoción y la modernización de la enseñanza de la ciencia y su coordinación en todos los niveles del ciclo educativo. En todos los países, especialmente en los países en desarrollo, es preciso reforzar la investigación científica en los programas de enseñanza superior y de estudios de posgrado tomando en cuenta las prioridades nacionales.
35. La creación de capacidades científicas deberá contar con el apoyo de la cooperación regional e internacional a fin de alcanzar un desarrollo equitativo y la difusión y la utilización de la creatividad humana sin discriminación de ningún tipo contra países, grupos o individuos. La cooperación entre los países desarrollados y los países en desarrollo debe llevarse a cabo ateniéndose a los principios de pleno y libre acceso a la información, equidad y beneficio mutuo. En todas las actividades de cooperación es menester prestar la debida atención a la diversidad de tradiciones y culturas. El mundo desarrollado tiene el deber de acrecentar las actividades de cooperación con los países en desarrollo y los países en transición en el ámbito de la ciencia. Es particularmente importante ayudar a los Estados pequeños y los países menos adelantados a crear una masa crítica de investigación nacional en ciencias mediante la cooperación regional e internacional. La existencia de estructuras científicas, como las universidades, es un elemento esencial para que el personal pueda capacitarse en su propio país, con miras a una carrera profesional ulterior en él. Se deberán crear condiciones que contribuyan a reducir el éxodo de profesionales o a invertir esa tendencia. Ahora bien, ninguna medida que se adopte deberá limitar la libre circulación de los científicos.
36. El progreso científico requiere varios tipos de cooperación en los planos intergubernamental, gubernamental y no gubernamental, y entre ellos, como: proyectos multilaterales; redes de investigación, en especial entre países del Sur; relaciones de colaboración entre las comunidades científicas de los países desarrollados y en desarrollo para satisfacer las necesidades de todos los países y favorecer su progreso; becas y subvenciones y el fomento de investigaciones conjuntas; programas que faciliten el intercambio de conocimientos; la creación de centros de investigación de reconocido prestigio internacional, en particular en países en desarrollo; acuerdos internacionales para promover, evaluar y financiar conjuntamente grandes proyectos científicos y facilitar un amplio acceso a ellos; grupos internacionales para que evalúen científicamente problemas complejos, y acuerdos internacionales que impulsen la formación de posgrado. Se deben poner en marcha nuevas iniciativas de colaboración interdisciplinaria. Se debe reforzar la índole internacional de la investigación básica, aumentando considerablemente el apoyo a los proyectos de investigación a largo plazo y los proyectos de colaboración internacional, especialmente los de alcance mundial. Al respecto, se debe prestar particular atención a la necesidad de continuidad en el apoyo a la investigación. Debe facilitarse activamente el acceso de los investigadores de los países en

desarrollo a estas estructuras, que deberían estar abiertas a todos en función de la capacidad científica. Es menester ampliar la utilización de la tecnología de la información y la comunicación, en especial mediante la creación de redes, a fin de fomentar la libre circulación de los conocimientos. Al mismo tiempo, se debe velar por que la utilización de estas tecnologías no conduzca a negar ni a limitar la riqueza de las distintas culturas y los diferentes medios de expresión.

37. Para que todos los países se atengán a los objetivos que se determinan en esta Declaración, paralelamente a los enfoques internacionales se deberían establecer en primer lugar y en el plano nacional estrategias, mecanismos institucionales y sistemas de financiación, o revisar los que existen, a fin de fortalecer el papel de las ciencias en el desarrollo sostenible en el nuevo contexto. Concretamente, deberían consistir en: una política nacional de ciencia a largo plazo, que se ha de elaborar conjuntamente con los principales actores de los sectores público y privado; el apoyo a la enseñanza y la investigación científicas; la instauración de una cooperación entre organismos de investigación y desarrollo, universidades y empresas en el marco de los sistemas nacionales de innovación; la creación y el mantenimiento de entidades nacionales encargadas de la evaluación y la gestión de los riesgos, la reducción de la vulnerabilidad a éstos y la seguridad y la salud; e incentivos para favorecer las inversiones, investigaciones e innovaciones. Se debe invitar a los parlamentos y a los gobiernos a establecer una base jurídica, institucional y económica que propicie el desarrollo de las capacidades científicas y tecnológicas en los sectores público y privado, y facilite su interacción. La adopción de decisiones y la determinación de prioridades en materia de ciencia deben formar parte de la planificación global del desarrollo y de la formulación de estrategias de desarrollo sostenible. En este contexto, la reciente decisión adoptada por los principales países acreedores del grupo G8 para iniciar un proceso de reducción de la deuda de determinados países en desarrollo favorecerá un esfuerzo conjunto de los países en desarrollo y de los países desarrollados encaminado a crear mecanismos adecuados de financiación de la ciencia con miras a fortalecer los sistemas nacionales y regionales de investigación científica y tecnológica.
38. Es preciso proteger adecuadamente los derechos de propiedad intelectual a escala mundial, y el acceso a los datos y la información es fundamental para llevar a cabo la labor científica y plasmar los resultados de la investigación científica en beneficios tangibles para la sociedad. Habrá que adoptar medidas para reforzar las relaciones mutuamente provechosas entre la protección de los derechos de propiedad intelectual y la difusión de los conocimientos científicos. Es menester considerar el ámbito, el alcance y la aplicación de los derechos de propiedad intelectual en relación con la elaboración, la distribución y el uso equitativos del saber. También es necesario desarrollar aún más los adecuados marcos jurídicos nacionales para satisfacer las exigencias específicas de los países en desarrollo y tener en cuenta los conocimientos tradicionales, así como sus fuentes y productos, velar por su reconocimiento y protección apropiados, basados en el consentimiento fundado de los propietarios consuetudinarios o tradicionales de ese saber.

#### **4. La ciencia en la sociedad y la ciencia para la sociedad**

39. La práctica de la investigación científica y la utilización del saber derivado de esa investigación deberían estar siempre encaminadas a lograr el bienestar de la humanidad, y en particular la reducción de la pobreza, respetar la dignidad y los derechos de los seres humanos, así como el medio ambiente del planeta, y tener plenamente en cuenta la responsabilidad que nos incumbe con respecto a las generaciones presentes y futuras. Todas las partes interesadas deben asumir un nuevo compromiso con estos importantes principios.
40. Hay que garantizar la libre circulación de la información sobre todas las utilizaciones y consecuencias posibles de los nuevos descubrimientos y tecnologías, a fin de que las cuestiones éticas se puedan debatir de modo apropiado. Todos los países deben adoptar medidas adecuadas en relación con los aspectos éticos de la práctica científica y del uso del conocimiento científico y sus aplicaciones. Dichas medidas deberían incluir las debidas garantías procesales para que las divergencias de opinión y quienes las expresan sean tratados con equidad y consideración. La

Comisión Mundial de Ética del Conocimiento Científico y la Tecnología de la UNESCO puede ofrecer un medio de interacción a este respecto.

41. Todos los investigadores deberían comprometerse a acatar normas éticas estrictas y habría que elaborar para las profesiones científicas un código de deontología basado en los principios pertinentes consagrados en los instrumentos internacionales relativos a los derechos humanos. La responsabilidad social que incumbe a los investigadores exige que mantengan en un alto grado la honradez y el control de calidad profesionales, difundan sus conocimientos, participen en el debate público y formen a las jóvenes generaciones. Las autoridades políticas deberían respetar la acción de los científicos a este respecto. Los programas de estudios científicos deberían incluir la ética de la ciencia, así como una formación relativa a la historia y la filosofía de la ciencia y sus repercusiones culturales.
42. La igualdad de acceso a la ciencia no sólo es una exigencia social y ética para el desarrollo humano, sino que además constituye una necesidad para explotar plenamente el potencial de las comunidades científicas de todo el mundo y orientar el progreso científico de manera que se satisfagan las necesidades de la humanidad. Habría que resolver con urgencia los problemas con que las mujeres, que constituyen más de la mitad de la población mundial, tienen que enfrentarse para emprender carreras científicas, proseguirlas, obtener promociones en ellas y participar en la adopción de decisiones en materia de ciencia y tecnología. No menos apremiante es la necesidad de eliminar los obstáculos con que tropiezan los grupos desfavorecidos y que impiden su plena y efectiva participación.
43. Los gobiernos y científicos del mundo entero deben abordar los problemas complejos planteados por la salud de las poblaciones pobres, así como por las disparidades crecientes en materia de salud que se dan entre países y entre comunidades de un mismo país, con miras a lograr un nivel de salud mejor y más equitativo, y facilitar también mejores servicios de asistencia sanitaria de calidad para todos. Esto se debe llevar a cabo mediante la educación, la utilización de los adelantos científicos y tecnológicos, la creación de sólidas asociaciones a largo plazo entre las partes interesadas, y el aprovechamiento de programas encaminados a ese fin.

\* \* \*

44. Nosotros, los participantes en la *Conferencia Mundial sobre la Ciencia para el Siglo XXI: Un nuevo compromiso*, nos comprometemos a hacer todo lo posible para promover el diálogo entre la comunidad científica y la sociedad, a eliminar todas las formas de discriminación relacionadas con la educación científica y los beneficios de la ciencia, a actuar con ética y espíritu de cooperación en nuestras esferas de responsabilidad respectivas, a consolidar la cultura científica y su aplicación con fines pacíficos en todo el mundo, y a fomentar la utilización del saber científico en pro del bienestar de los pueblos y de la paz y el desarrollo sostenibles, teniendo en cuenta los principios sociales y éticos mencionados.
45. Consideramos que el documento de la Conferencia *Programa en pro de la Ciencia: Marco General de Acción* plasma un nuevo compromiso con la ciencia y puede servir de guía estratégica para establecer relaciones de cooperación dentro del sistema de las Naciones Unidas y entre todos los interesados en la actividad científica durante los años venideros.
46. En consecuencia, aprobamos la presente *Declaración sobre la Ciencia y el Uso del Saber Científico* y nos adherimos de común acuerdo al *Programa en pro de la Ciencia: Marco General de Acción*, como medio de alcanzar los objetivos expuestos en la Declaración. Asimismo, pedimos a la UNESCO y al ICSU que presenten ambos documentos a su Conferencia General y a su Asamblea General respectivas. Dichos documentos también se someterán a la Asamblea General de las Naciones Unidas. El objetivo perseguido es que la UNESCO y el ICSU definan y realicen una actividad de seguimiento en sus respectivos programas, y movilicen también el apoyo de todos los protagonistas de la cooperación, especialmente los pertenecientes al sistema de las Naciones Unidas, con miras a fortalecer la coordinación y cooperación internacionales en la esfera científica.

## **Anexo J**

## **Anexo**

# **Declaración Universal de Derechos Humanos**

Adoptada y proclamada por la Asamblea General en su resolución 217 A (III), de 10 de diciembre de 1948

## **Preámbulo**

Considerando que la libertad, la justicia y la paz en el mundo tienen por base el reconocimiento de la dignidad intrínseca y de los derechos iguales e inalienables de todos los miembros de la familia humana,

Considerando que el desconocimiento y el menosprecio de los derechos humanos han originado actos de barbarie ultrajantes para la conciencia de la humanidad; y que se ha proclamado, como la aspiración más elevada del hombre, el advenimiento de un mundo en que los seres humanos, liberados del temor y de la miseria, disfruten de la libertad de palabra y de la libertad de creencias,

Considerando esencial que los derechos humanos sean protegidos por un régimen de Derecho, a fin de que el hombre no se vea compelido al supremo recurso de la rebelión contra la tiranía y la opresión,

Considerando también esencial promover el desarrollo de relaciones amistosas entre las naciones,

Considerando que los pueblos de las Naciones Unidas han reafirmado en la Carta su fe en los derechos fundamentales del hombre, en la dignidad y el valor de la persona humana y en la igualdad de derechos de hombres y mujeres; y se han declarado resueltos a promover el progreso social y a elevar el nivel de vida dentro de un concepto más amplio de la libertad,

Considerando que los Estados Miembros se han comprometido a asegurar, en cooperación con la Organización de las Naciones Unidas, el respeto universal y efectivo a los derechos y libertades fundamentales del hombre, y

Considerando que una concepción común de estos derechos y libertades es de la mayor importancia para el pleno cumplimiento de dicho compromiso,

## **La Asamblea General**

Proclama la presente Declaración Universal de Derechos Humanos como ideal común por el que todos los pueblos y naciones deben esforzarse, a fin de que tanto los individuos como las instituciones, inspirándose constantemente en ella, promuevan, mediante la enseñanza y la educación, el respeto a estos derechos y libertades, y aseguren, por medidas progresivas de carácter nacional e internacional, su reconocimiento y aplicación universales y efectivos, tanto entre los pueblos de los Estados Miembros como entre los de los territorios colocados bajo su jurisdicción.

## **Artículo 1**

Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, dotados como están de razón y conciencia, deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

## **Artículo 2**

Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición.

Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona, tanto si se trata de un país independiente, como de un territorio bajo administración fiduciaria, no autónomo o sometido a cualquier otra limitación de soberanía.

## **Artículo 3**

Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

## **Artículo 4**

Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

## **Artículo 5**

Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

## **Artículo 6**

Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

## **Artículo 7**

Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración y contra toda provocación a tal discriminación.

## **Artículo 8**

Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales reconocidos por la constitución o por la ley.

## **Artículo 9**

Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

## **Artículo 10**

Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la

determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

## **Artículo 11**

1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad, conforme a la ley y en juicio público en el que se le hayan asegurado todas las garantías necesarias para su defensa.
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

## **Artículo 12**

Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

## **Artículo 13**

1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

## **Artículo 14**

1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.

- Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

## **Artículo 15**

- Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
- A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

## **Artículo 16**

- Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia; y disfrutarán de iguales derechos en cuanto al matrimonio, durante el matrimonio y en caso de disolución del matrimonio.
- Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
- La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

## **Artículo 17**

- Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
- Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

## **Artículo 18**

Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión; este derecho incluye la libertad de cambiar de religión o de creencia, así como la libertad de manifestar su religión o su creencia, individual y colectivamente, tanto en público como en privado, por la enseñanza, la práctica, el culto y la observancia.

## **Artículo 19**

Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión; este derecho incluye el no ser molestado a causa de sus opiniones, el de investigar y recibir informaciones y opiniones, y el de difundirlas, sin limitación de fronteras, por cualquier medio de expresión.

## **Artículo 20**

1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

## **Artículo 21**

1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

## **Artículo 22**

Toda persona, como miembro de la sociedad, tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, mediante el esfuerzo nacional y la cooperación internacional, habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

## **Artículo 23**

1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

## **Artículo 24**

Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

## **Artículo 25**

1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

## **Artículo 26**

1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

## **Artículo 27**

1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

## **Artículo 28**

Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

## **Artículo 29**

1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad, puesto que sólo en ella puede desarrollar libre y plenamente su personalidad.
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

## Artículo 30

Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades o realizar actos tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.

# Bibliografía

- [1] R. Clavel, 1985.
- [2] P. Zsombor-Murray, “Descriptive geometric kinematic analysis of clavel’s.”
- [3] P. J. O. M. B. P. B. F. K. J. C. J. Holub, M., “Delta - robot with parallel kinematics,” *Mechatronics Recent Technological and Scientific Advances [en linea] : [Fecha de consulta: 4 de julio de 2018]*, 2011.
- [4] no name reference, “Industrial circuits application note sppter motor basics,” *Internet free access document*, 2018.
- [5] Allegro, “a4988,” <http://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/pdf/338780/ALLEGRO/A4988.html>, accessed: 2018-09-28.
- [6] ATMEL, “Atmega2560,” <http://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/pdf/107092/ATMEL/ATMEGA2560.html>, accessed: 2018-09-28.
- [7] P. linear, “Nema linear motors,” <http://www.pbclinear.com/Download/DataSheet/Stepper-Motor-Support-Document.pdf>, accessed: 2018-09-28.
- [8] SAMSUNG, “Tip42,” <http://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/pdf/37898/SAMSUNG/TIP42.html>, accessed: 2018-09-28.
- [9] R. W. II, “The delta parallel robot: Kinematics solutions,” *Internet Publicación,,* 2016, [www.ohio.edu/people/williar4/html/pdf/DeltaKin.pdf](http://www.ohio.edu/people/williar4/html/pdf/DeltaKin.pdf).
- [10] “Solución cinemática para un delta,” :<http://forums.trossenrobotics.com/tutorials/introduction-129/delta-robot-kinematics-3276/>, accessed: 2018-22-07.
- [11] M. W. J. Brinker, B. Corves, “A comparative study of inverse dynamics based on clavel’s delta robot,” *The 14th IFToMM world Congress, Taipei, Taiwan, Octorber 25-30, 2015*, 2015.
- [12] N. Desineni Sunnara, *OPTIMAL CONTROL SYSTEMS*. CRC PRESS, 1940.
- [13] maplesoft, “Dynamicssystems, todiscret,”  
  
<https://www.maplesoft.com/support/help/maple/view.aspx?path=DynamicSystems%2FToDiscrete>  
, accessed: 2018-09-04.
- [14] e. a. Hebertt Sira Ramirez, *Control de sistemas no lineales, Linealizacion aproximada, extendida, exacta.* Madrid Pearson Educacion, 2005.
- [15] D. G. LUENBERGER, “An introduction to observers,” *IEEE Transactions on automatic control*, 1971.
- [16] airspayce, “Library for controlling stepper motors,” <https://www.airspayce.com/mikem/arduino/AccelStepper/index.html>, accessed: 2018-10-31.
- [17] Q. H. F. DÍAZ ARIAS, ALEXÁNDER, “Sobre la determinaciÓn de la movilidad en los mecanismos,” *Scientia Et Technica [en linea] : [Fecha de consulta: 4 de julio de 2018]*, 2005.
- [18] G. B. O. Yann LeCun, Leon Bottou and K.-R. Müller, “Efficient backprop,” *Springer*, 1998.
- [19] C. M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning.* Springer, 2006.