Teorijska analiza rotirajućih haloa tamne materije

Autori:
Nikola Savić, drugi razred Matematičke gimnazije, Beograd
Predrag Despotović, drugi razred gimnazije “Jovan Jovanović Zmaj, Novi Sad”

Mentori:
Mateja Bošović, Fizički fakultet, Beograd
Aleksandra Arsovski, ???, ???

Uvod

- Model tamne materije (CDM) postulira hladnu tamnu materiju čije čestice ne interaguju elektromagnetno. Uspešna je na međugalaktičkim i većim skalama, dok na galaktičkim nije.

- Modifikovana njutnovska dinamika (MOND) pretpostavlja uopštenje drugog Njutnovog zakona. Uspešan je na galaktičkim skalama dok na većim skalama nailazi na probleme.

- Neke tečnosti pri temperaturama reda ~mK prelaze u superfluidnu fazu. Tada se fluid makroskopski može opisati kao smeša superfluidne (nema viskoznosti) i normalne komponente.

- Superfluidi ne mogu da rotiraju uniformno. Pri dovoljno velikim ugaonim brzinama u superfluidu se stvaraju vorteksi koji efektivno daju uniformnu rotaciju superfluida.

- Boze-Ajnštajnov kondenzat (BEC) je stanje Boze gasa na temperaturama bliskim apsolutnoj nuli, gde najniže energetsko stanje zauzima makroskopski broj čestica. Kondenzat se javlja kod većine superfluida i objašnjava superfluidno ponašanje.

- Teorija superfluidne tamne materije Berežianija i Kourija postulira čestice tamne materije koje na galaktičkim skalama formiraju superfluidni kondenzat. Na galaktičkim skalama superfluidna faza tamne materije reprodukuje fenomenologiju MOND-a dok na većim skalama, u normalnoj fazi, ponaša kao hladna tamna materija. Pokazali su da te čestice imaju dominantnu tro-čestičnu interakciju

- Berežiani i Kouri su procenili minimalnu ugaonu brzinu haloa tamne materije pri kojoj će se pojaviti vorteksi formulom koja važi za laboratorijske sisteme sa dominantnom dvo-čestičnom interakcijom. U ovom radu napravljen je model nerotirajućeg i rotirajućeg halao tamne materije, sa i bez vorteksa koristeći čestice čiji je opis dat u radu Berežianija i Kourija. Ispitana je validnost procene kritične ugaone brzine iz rada Berežianija i Kourija.

Modelovanje superfluidnog haloa

-Halo je tamne materije je modelovan kao skup bozona na niskoj temperaturi. Jednačina koja opisuje skup čestica je odgovarajuća Šredingerova jednačina. Broj čestica haloa je reda veličine Avogadrovog broja, pa se međusobni uticaji čestica mogu zameniti usrednjenim pozadinskim potencijalnom sa kojim interaguju. Ovako se jednačina svodi na Gros-Pitaevski (GPE) sa tročestičnom interakcijom:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\vec{\Delta}+\mathrm{V}_{\mathrm{ext}}(\vec{\mathrm{r}})+g|\psi(\vec{\mathrm{r}})|^4\right)\psi(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})}{\partial\mathrm{t}}$$

Član $g|\psi(\vec{r})|^4$ predstavlja energiju interakcije čestica. Uz pretpostavku hidrostatičke ravnoteže i konstantnog broja čestica, GPE jednačina u stacionarnom režimu se svodi na:

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\vec{\Delta}+\mathrm{m}\Phi(\vec{\mathrm{r}})+g|\psi(\vec{\mathrm{r}})|^4\right)\psi(\vec{\mathrm{r}})=\mu\psi(\vec{r})}$$

gde je µ hemijski potencijal.

Nerotirajući halo

Izražavajući talasnu funkciju preko gustine, iz stacionarne GPE jednačine dobija se jednačina:

$$Q\vec{\nabla}\rho+\rho\vec{\nabla}Q+\frac{1}{m}\rho\left(m\vec{\nabla}\Phi(\vec{\mathrm{r}})+g\vec{\nabla}\frac{\rho^2}{\mathrm{m}^2}\right)+\frac{1}{m}\left(m\Phi+g\frac{\rho^2}{m^2}\right)\vec{\nabla}\rho=0$$

gde *Q* predstavlja kvantno-mehanički pritisak. Kako je interakcija čestica jaka, jednačina se može rešavati u Tomas-Fermijevom režimu, gde se kvantno-mehanički pritisak može zanemariti. Tada se jednačina svodi na jednačinu hidrostatičke ravnoteže. Uz politropsku jednačinu stanja:

$$P=\frac{1}{12m^6\Lambda^2}\rho^3$$

i Poasonovu jednačinu, koja određuje potencijal u zavisnosti od profila gustine:

$$\Delta\Phi=4\pi G\rho(r)$$

Dobija se Lejn-Emdenova jednačina:

$$\frac{1}{\Xi^2}\frac{d}{d\Xi}\left(\Xi^2\frac{\partial\Theta}{\partial\Xi}\right)=-\Theta^n$$

Ξ je bezdimenziono rastojanje od centra haloa a Θ bezdimenziona gustina. Broj n je indeks politrope. Za tro-čestičnu interakciju, $n = 0.5$. Lejn-Emdenova jednačina rešena je numerički RK4 metodom. Dobijeni profil gustine može se aproksimirati analitičkom funkcijom:

$$\rho=\rho_c\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)}$$

gde je ρ_c gustina centra haloa tamne materije, a *R poluprečnik haloa.*

Uticaj vorteksa na rotaciju

Ukoliko halo ima dovoljan moment impulsa, formiraće se vorteksi. Tada će polja brzine vorteksa stvarati polje brzine haloa. Iz jednačina koje opisuju cirkulaciju u blizini vorteksa i oko celog haloa, procenjeno je da je broj vorteksa koji mogu nastati u halou reda veličine Avogadrovog broja. Ovi vorteksi će efektivno dati uniformnu rotaciju haloa.

Rotirajući halo

Stacionarna GPE za rotirajući vorteks će biti izmenjena u odnosu na GPE nerotirajućeg haloa za rotacioni član energije:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\vec{\Delta}+\mathrm{V}_{\mathrm{ext}}(\vec{r})+g|\psi(\vec{r})|^4+\frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2\right)\psi(\vec{r})=\mu\psi(\vec{r})$$

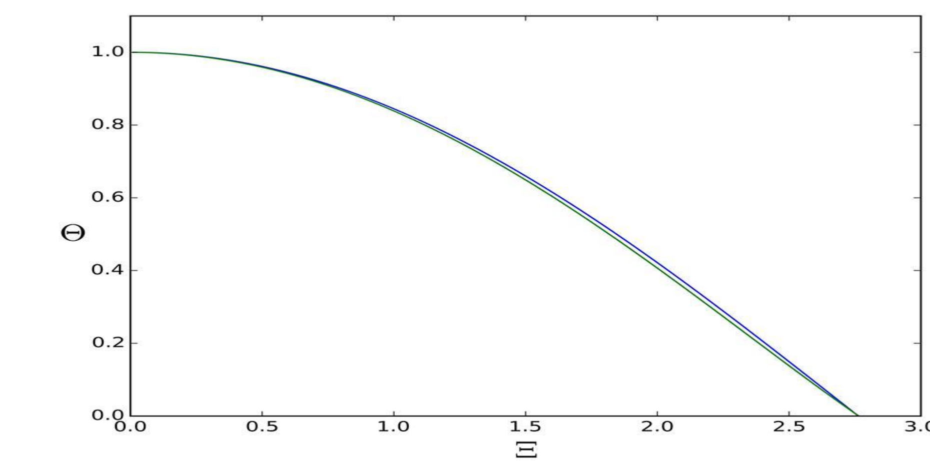
Analogno izvođenju jednačine hidrostatičke ravnoteže od nerotirajućeg haloa, dobija se jednačina hidrostatičke ravnoteže haloa:

$$\rho\vec{\nabla}\Phi+\vec{\nabla}\mathrm{P}_{\mathrm{si}}=\vec{\nabla}\mathrm{V}_{\mathrm{rot}}$$

P_{si} je pritisak interakcije čestica a V_{rot} rotacioni potencijal. Ova parcijalna diferencijalna jednačina po radijalnom rastojanju i polarnom uglu. Kako haloi sporo rotiraju, koristeći Tomas-Kipenhan aproksimaciju, jednačina se može svesti na diferencijalnu jednačinu po jednoj koordinati, srednjem radijusu. Kao i u slučaju nerotirajućeg haloa, dobija se modifikovana Lejn-Emdenova jednačina:

$$\frac{1}{\Xi^2}\frac{d}{d\Xi}\left(\Xi^2\frac{\partial\Theta}{\partial\Xi}\right)=-\Theta^n+\mathrm{v}$$

gde Ξ predstavlja bezdimenzioni srednji radijus a član v je rotacioni član koji je srazmeran kvadratu ugaone brzine haloa. Iz profila gustine u zavisnosti od srednjeg radijusa ne može se odrediti profil gustine u zavisnosti od fizičkih koordinata. Međutim mogu se odrediti kumulativne veličine kao što je masa. Određivanjem masa haloa iz modifikovane Lejn-Emdenove jednačine za različite ugaone brzine i centralne gustine, ustanovljeno je da rotacija haloa neznatno utiče na profil gustine haloa.



Grafik 1: Rešenja Lejn-Emdenove jednačine: numeričko rešenje (plavo) i analitička aproksimacija (zeleno)

Model vorteksa

U ovom radu modelovan je aksisimetričan vorteks čija se osa poklapa sa osom rotacije. GPE koja opisuje vorteks u stacionarnom režimu je:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial|\psi(\vec{r})|}{\partial r}\right)\right)+\frac{\hbar^2 l^2}{2mr^2}|\psi(\vec{r})|+g|\psi(\vec{r})|^5=\mu|\psi(\vec{r})|$$

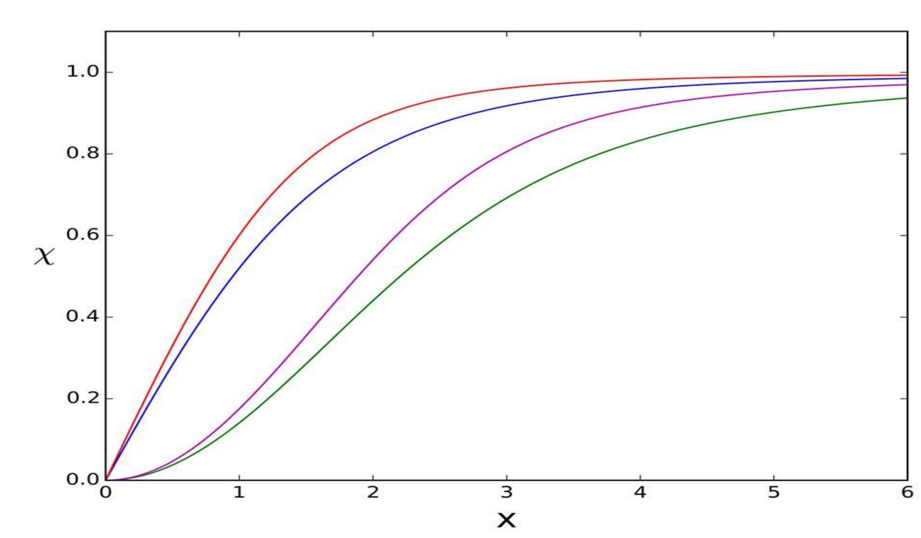
gde je *l* prirodan broj. Član $\frac{\hbar^2 l^2}{2mr^2}$ predstavlja kinetičku energiju rotacije čestica oko ose vorteksa. Ispostavlja se da su favorizovaniji vorteksi za koje je $l = 1$. Pretpostavljen je vorteks u homogenom halou bez prisustva potencijala. Rastojanje od ose vorteksa na kome je energija interakcije čestica jednaka kinetičkoj energiji čestica je healing length. U ovom radu pokazano je da je healing length reda veličine milimetra, što daje okvirne dimenzije vorteksa. GPE jednačina vorteksa se svodi na bezdimenzionu jednačinu:

$$-\frac{1}{\mathrm{x}}\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}}\left(\mathrm{x}\frac{\partial\chi}{\partial\mathrm{x}}\right)+\frac{\chi}{\mathrm{x}^2}l^2+\chi^5-\chi=0$$

X je bezdimenziona udaljenost od centra ose rotacije vorteksa a χ predstavlja gustinu. Jednačina se rešava na intervalu [0,+∞]. Uz početne uslove:

$$\chi_0=0 \qquad \chi_{x\to\infty}=1$$

Ova diferencijalna jednačina se može razbiti na kvadratni sistem nelinearnih algebarskih jednačina metodom konačniih razlika. Taj sistem se može rešiti Njutn-Rapson metodom. Rešavanjem jednačine vorteksa, dobijen je profil gustine vorteksa.



Grafik 2: Plavom bojom obeleženo je rešenje jednačine vorteksa za dominantnu dvo-čestičnu interakciju u slučaju *l = 1*. Zelenom bojom obeleženo je rešenje jednačine vorteksa za dominantnu dvo-čestičnu interakciju u slučaju *l = 2*. Crvenom bojom obeleženo je rešenje jednačine vorteksa za dominantnu tro-čestičnu interakciju u slučaju *l = 1*. Ljubičastom bojom obeleženo je rešenje jednačine vorteksa za dominantnu tro-čestičnu interakciju u slučaju *l = 2*. Crvenom i ljubičastom bojom obeležena su rešenja jednačine vorteksa u našem slučaju.

Procena kritične ugaone brzine

Vorteks će se pojaviti u haloau ako je energija haloa sa vorteksom manja od energije haloa bez vorteksa. Ako je E_1 energija sa vorteksom a E_0 energija haloa bez vorteksa, energija vorteksa, *Ev* se može izraziti kao $E_1 - E_0$. U referentnom sistemu koji rotira ugaonom brzinom Ω energija vorteksa je:

$$E_v^*=E_v-\vec{\Omega}\cdot\vec{L}$$

gde je $L=\mathrm{N}\hbar=\hbar\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{m}}$ moment impulsa vorteksa. Dakle vorteksi će se formirati kada je energija vorteksa u referentnom sistemu rotacije negativna. To će važiti za sve ugaone brzine manje od kritične ugaone brzine.

$$E_v-\Omega_c L=0$$

U našem slučaju, energija vorteksa u referentnom sistemu koji rotira je:

$$E_v=\frac{2\mathrm{R}l^2\pi\mathrm{n}\hbar^2}{\mathrm{m}}\int_0^{\frac{\mathrm{R}}{\xi}}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{dx}}\right)^2+\frac{\chi^2}{\mathrm{x}^2}l^2+\frac{1}{2}\chi^6-\chi^2+\frac{1}{2}\right]\mathrm{xdx}$$

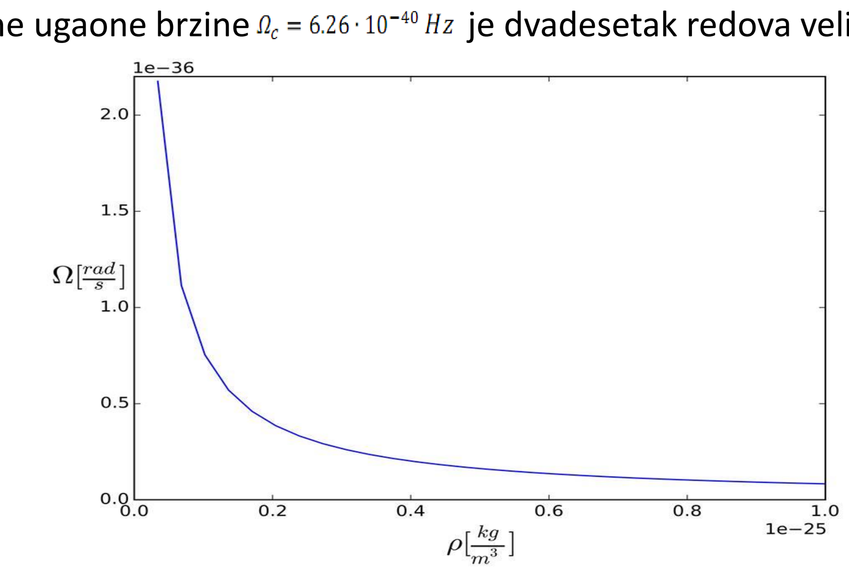
gde je ξ healing length. Kako za veliko *x* $\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{dx}}$ teži nuli a χ teži 1, energija vorteksa će biti oblika:

$$E_v\approx\frac{2Rl^2\pi n\hbar^2}{m}\ln\left(\frac{R}{\xi}\right)$$

Odatle se može izraziti kritična ugaona brzina:

$$\Omega_c=\frac{m}{\hbar M}E_v=\frac{3\hbar}{2mR^2}$$

Procenjena vrednost kritične ugaone brzine $\Omega_c=6.26\cdot10^{-40}\,Hz$ je dvadesetak redova veličine manje od ugaone brzine halao.



Grafik 3: Zavisnost kritične ugaone brzine u zavisnosti od centralne gustine haloa tamne materije. Grafik ukazuje da je u rasponu realističnih vrednosti centralnih gustina haloa tamne materije kritična ugaona brzina mnogo manja od ugaone brzine kojom halo rotira.

Diskusija i zaključak

- Napravljen je model nerotirajućeg haloa za koji je nađen profil gustine i rotirajućeg haloa. Ustanovljeno je da haloi imaju dovoljan moment impulsa za formiranje makroskopskog broja vorteksa koji bi obezbedili uniformnu rotaciju haloa. Pokazano je da je uticaj rotacije na profil gustine haloa zanemarljiv.

- Urađena je procena kritične ugaone brzine za formiranje vorteksa na osnovu relativno jednostavnog modela vorteksa i opravdana procena Berežianija i Kourija. Poređenja sa drugim radovima u kojima su uzeti u obzir rotacija haloa, gravitaciono polje haloa i njegov profil gustine može se zaključiti da ti efekti mogu da variraju procenu kritične ugaone brzine za najviše jedan red veličine. Stoga nema potrebe za sofisticiranijim modelom vorteksa kojim bi se procenjivala kritična ugaona brzina.

- U ovom radu je pokazano da uzimanje u obzir tro-čestične, umesto dvo-čestične interakcije ne pravi značajnu razliku u proceni kritične ugaone brzine.