① $Q(a) = \frac{1}{2}\|\Phi\Phi^T a - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T \Phi\Phi^T a = \frac{1}{2}\|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T K a \to min$

$\frac{\partial Q(a)}{\partial(a)} = K^T(Ka - y) + Ka = K^T K a - K^T y + Ka = 0$ (*) $\Rightarrow$

1) $\frac{\partial(\|Ka - y\|^2)}{\partial a} = 2\langle Ka - y, d(Ka - y)\rangle = 2K^T(Ka - y)$

2) $\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{2} a^T K a\right)}{\partial a} = \frac{\lambda}{2}(a^T K + Ka) = \frac{\lambda 2}{2} Ka = \lambda Ka$

(*) $\Rightarrow K^T K a + \lambda K a = K^T y \Rightarrow (K^T + I\lambda) K a = K^T y \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~K^T~~ т.к. K - симметр., то

$(K + I\lambda) a = y \Rightarrow a = (K + I\lambda)^{-1} y$ ■

③ $K(x, z) = \cos(x - z)$

$\cos(x - z) = \underline{\cos x \cos y} \overset{③}{+} \underline{\sin x \sin y}$.

$\cos x = f(x): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ -

$\sin x = g(x): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

1) $\cos(x)\cos(y) = f(x) \cdot f(y)$ - ядро

2) $\sin(x)\cos(x) = g(x) \cdot g(y)$ - ядро

3) ③ - сумма ядер - ядро. $\Rightarrow K(x, z)$ - ядро

■

④ $K(x, z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}}$

1) K - симметрично?

$K(x, z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}} = \frac{1}{1 + e^{-zx}} = K(z, x)$ - симметрично.

2) ~~Отр~~ Неотриц. определена?

$\exists\ \ell = 2,\ (x_1, x_2) = (+1, 2)$

$$\Delta\begin{pmatrix} \frac{1}{1+e^{-1}} & \frac{1}{1+e^{-2}} \\ \frac{1}{1+e^{-2}} & \frac{1}{1+e^{-4}} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+e^{-1})(1+e^{-4})} - \frac{1}{(1+e^{-2})^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1 + e^{-4} + e^{-1} + e^{-5}}}_{①} - \underbrace{\frac{1}{1 + 2e^{-2} + e^{-4}}}_{②} < 0, \text{ т.к. } ① < ②$$

$\Rightarrow$ не ядро.

■

② $\begin{cases} x^2+1 \to \min \\ (x-2)(x-4) \le 0 \end{cases}$, ОДЗ: $x \in [2;4]$

а) $L = x^2+1+\lambda(x^2-6x+8)$

ККТ:

$\begin{cases} 2x+2x\lambda-6\lambda=0 \\ x^2-6x+8 \le 0, \ \lambda \ge 0, \ x\in[2;4] \end{cases}$

1) $\lambda=0$, $x^2-6x+8\le 0 \Rightarrow x=0$, что $\downarrow\uparrow$ условию.

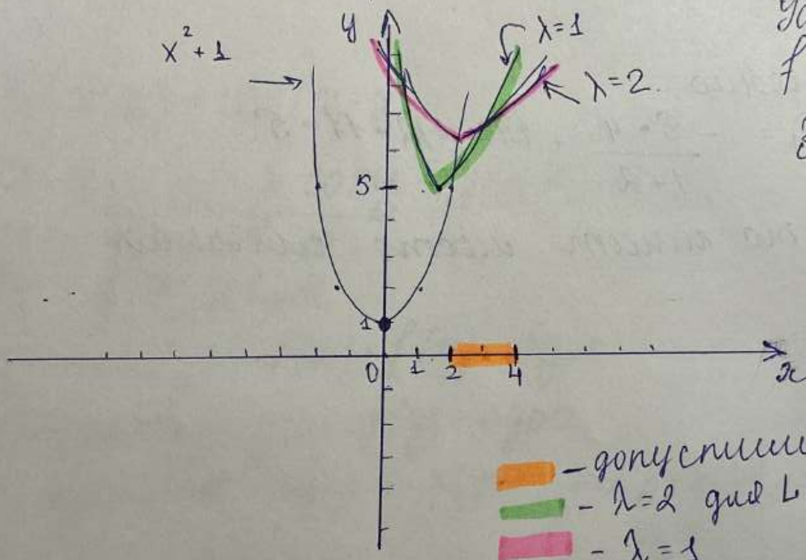
2) $\lambda \ge 0$, $x^2-6x+8=0 \Rightarrow$

$x=2 \Rightarrow \lambda=2$

$x=4 \Rightarrow \lambda=-4<0$ – $\downarrow\uparrow$ с условием.

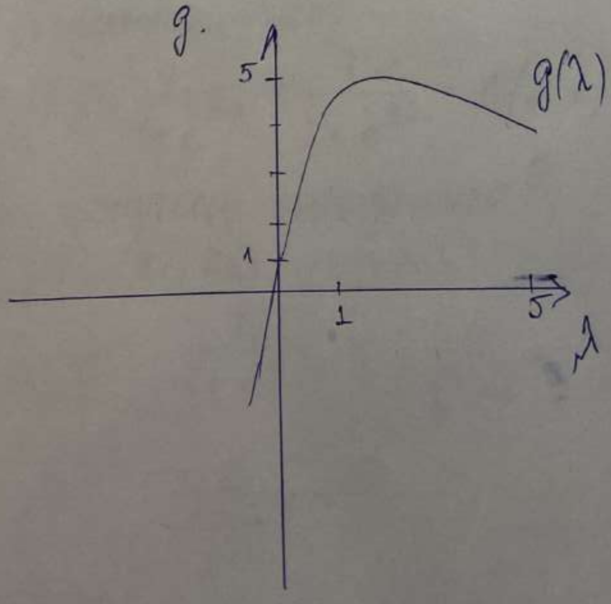
Тогда $x_*=2$, $f(x_*)=5$.

б)



Условие $f(x_*) \ge \inf_x L(x,\lambda)$ выполн.

Двойств. ф-ция:



в) $g(\lambda) = \left(\frac{3\lambda}{1+\lambda}\right)^2(1+\lambda) - \frac{18\lambda^2}{1+\lambda} + 8\lambda + 1 \Rightarrow max$, $\lambda \geq 0$

$L = x^2 + 1 + \lambda x^2 - 6\lambda x + 8\lambda (= x^2(1+\lambda) - 6\lambda x + 8\lambda + 1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x - 6\lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{3\lambda}{1+\lambda}$

$g(\lambda) = \frac{9\lambda^2 - 18\lambda^2}{1+\lambda} + 8\lambda + 1 = -\frac{9\lambda^2}{1+\lambda} + 8\lambda + 1 \to max$

$\frac{\partial g(\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{9(2\lambda(1+\lambda) - \lambda^2)}{(1+\lambda)^2} + 8 = \frac{-9(2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2) + 8 + 8\lambda^2 + 16\lambda}{(1+\lambda)^2} =$

$= \frac{-18\lambda - 18\lambda^2 + 9\lambda^2 + 8 + 8\lambda^2 + 16\lambda}{(1+\lambda)^2} = \frac{-\lambda^2 - 2\lambda + 8}{(1+\lambda)^2} = 0.$

Т.к. $(1+\lambda)^2 > 0$, то

$-\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -4$ – против. условию.

Тогда $\lambda_* = 2$, $g(\lambda_*) = -\frac{9 \cdot 4}{1+2} + 17 = -12 + 17 = 5.$

Т.к. $f(x_*) = g(\lambda_*)$, то имеет место сильная двойственность.

5) $K_1(x,z) = (1+x,z)^2$, $K_2(x,x) = (1+xz+x^2z^2)$,

$x, z \in \mathbb{R}$

$K_1 = 1 + 2xz + (xz)^2 \Rightarrow \varphi_1(x) = (1, \sqrt{2}x, x^2)$

$\varphi_1(z) = (1, \sqrt{2}z, z^2)$

$K_2 = 1 + xz + x^2z^2 \Rightarrow \varphi_2(x) = (1, x, x^2)$

$\varphi_2(z) = (1, z, z^2)$

$K_3 = K_1 + K_2 = 2 + 3xz + 2x^2z^2 \Rightarrow \varphi_3(x) = (\sqrt{2}, \sqrt{3}x, \sqrt{2}x^2)$