Lista 3 Fundamentos Matemáticos da Computação II - Respostas

January 20, 2025

Alesandro Alex Mendes da Silva
Francisco Matheus Fonseca de Farias
Ryan David dos Santos Silvestre
Sávio Emanuel Mariano Fonseca
Sebastião Fellipe Pinto Lopes
Weuler dos Santos Barbosa

1 Seção Múltipla Escolha

1.1 Questão M1

Considerando a definição de um grupo abeliano e a operação *: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b - 3$, o grupo $(\mathbb{R}, *)$ é abeliano, $e = 3$ e o inverso do elemento 15 é o -9.

Dessa forma, a alternativa correta é a letra **B**

1.2 Questão M2

Dada a estrutura $(\mathbb{Z}, *)$, onde $*$ é definida por $a * b = a - b$, analisamos as propriedades:
Fechamento: A operação é fechada, pois $a - b \in \mathbb{Z}$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.
Associatividade: Não é associativa, pois $(a * b) * c = a - b - c \neq a - b + c = a * (b * c)$.
Elemento neutro: O elemento neutro é 0, pois $a * 0 = a$.
Inversos: Não existem inversos distintos, pois $a * b = 0 \implies b = a$.

Portanto, a alternativa correta é **B**.

1.3 Questão M3

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

No grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$, o inverso do elemento $\bar{4}$ é $\bar{2}$, pois:

$$4 + 2 \equiv 0 \pmod 6.$$

Logo, a alternativa correta é a letra **C**

1.4 Questão M4

Analisando a tábua de operação de * e o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que:

$$(3 * 3) * (4 * 4) = 1 = (4 * 4) * (3 * 3)$$

Logo, a operação é comutativa e alternativa correta é a letra **D**.

---

2 Seção Discursiva

2.1 Questão D1

Considere a estrutura algébrica $(M_2(\mathbb{Z}), \cdot)$, onde $M_2(\mathbb{Z})$ é o conjunto das matrizes 2×2 com entradas inteiras e $(\cdot)$ é o produto usual de matrizes.

A. A operação do produto de matrizes satisfaz a condição de fechamento? Explique.

Sim, a operação de produto de matrizes em $M_2(\mathbb{Z})$ satisfaz a condição de fechamento. Dado que o produto usual de duas matrizes 2×2 com entradas inteiras resulta em outra matriz 2×2 com entradas inteiras, concluímos que o resultado pertence ao conjunto $M_2(\mathbb{Z})$.

B. A operação do produto de matrizes é associativa? Explique.

Sim, a operação de produto de matrizes é associativa. Para quaisquer matrizes $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, temos:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Essa propriedade é válida para o produto usual de matrizes.

C. Verifique a existência de elemento neutro. Em caso afirmativo, especifique o elemento neutro.

Sim, existe um elemento neutro na operação de produto de matrizes. Esse elemento é a matriz identidade I, dada por:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para qualquer matriz $A \in M_2(\mathbb{Z})$, temos:

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

D. Verifique a condição de existência de simétricos/inversos.

Nem todas as matrizes 2×2 com entradas inteiras possuem inverso em $M_2(\mathbb{Z})$. Uma matriz $A \in M_2(\mathbb{Z})$ é inversível se, e somente se, seu determinante $\det(A)$ for igual a ± 1. Caso contrário, não existe matriz inversa em $M_2(\mathbb{Z})$.

E. Essa estrutura se enquadra na definição de grupos? Explique.

Não, a estrutura $(M_2(\mathbb{Z}), \cdot)$ não se enquadra na definição de grupo. Apesar de satisfazer as propriedades de fechamento, associatividade e possuir um elemento neutro, nem todos os elementos de $M_2(\mathbb{Z})$ possuem inverso, o que impede que a estrutura seja um grupo.

2.2 Questão D2

Considere a estrutura algébrica $(\mathbb{R}^+, *)$ com a operação binária definida como $a * b = |a - b|$

A. Verifique se essa operação satisfaz a condição de fechamento.Explique. Para a operação $a * b = |a - b|$, observe que:

$$a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+ \implies a - b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |a - b| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Portanto, a operação $*$ satisfaz a condição de fechamento sobre $\mathbb{R}^+$, pois o resultado $|a-b|$ será um número real não negativo.

B. A operação possui elemento neutro? Explique com base na definição de elemento neutro e em caso positivo, descreva quem é o elemento neutro.

Para verificar a existência de um elemento neutro $e \in \mathbb{R}^+$, precisamos que:

$$a * e = |a - e| = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+.$$

Temos que:

$$a - e = a \implies e = 0.$$

Então como $e \in \mathbb{R}^+$, portanto, existe um elemento neutro para esta operação.

C. Verifique a existência de simétricos/inversos. Para que exista um simétrico $b \in \mathbb{R}^+$ de a, precisamos que:

$$a * b = |a - b| = e, \quad \text{onde } e = 0.$$

Resolvendo $|a - b| = 0$:

$$a - b = 0 \implies b = a.$$

Portanto, o único simétrico de a é o próprio a.

D. Essa operação é associativa e comutativa? Explique usando a definição de associatividade e comutatividade.

Comutatividade: Verificamos se:

$$a * b = b * a.$$

Sabemos que:

$$a * b = |a - b| \quad \text{e} \quad b * a = |b - a| = |a - b|.$$

Portanto, $a * b = b * a$, e a operação é comutativa.

Associatividade: Verificamos se:

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Calculando cada lado:

$$a * b = |a - b|, \quad (a * b) * c = ||a - b| - c|,$$

$$b * c = |b - c|, \quad a * (b * c) = |a - |b - c||.$$

Por trivialidade, $||a - b| - c| \neq |a - |b - c||$. Logo, a operação $*$ não é associativa.

E. Essa estrutura pode ser considerada um grupo? Explique. Para que a estrutura $(\mathbb{R}^+, *)$ seja um grupo, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Fechamento: Satisfeito, pois $|a - b| \in \mathbb{R}^+$.
- Elemento neutro: Existe, e é $e = 0$.
- Simétricos: Cada elemento $a \in \mathbb{R}^+$ é o seu próprio inverso.
- Associatividade: Não satisfeito, pois $*$ não é associativa.

Portanto, a estrutura $(\mathbb{R}^+, *)$ não pode ser considerada um grupo devido a falta de Associatividade.