OPTIMALISATIETECHNIEKEN 2019-2020

PROJECT: OPTIMALISATIE VAN BROUWPROCES VAN BIER

Sam A. Vanmassenhove
Faculty of Science
Student MSc. in Bioinformatics: Engineering
Ghent University, 9000 Belgium
sam.vanmassenhove@ugent.be

22 mei 2020

1 Eerste analyse: kostprijs in functie van het te produceren biervolume.

1.1 Hoeveel liter bier kan men produceren met $25.44kg$ gerst?

Dit is nog geen optimalisatieprobleem en kan direct berekend worden uit de gegeven formules voor het omzetten van gerst naar mout, het verband tussen mout en moutextract, en de formule voor het soortelijk gewicht van het wortmengsel.

$$m_{mout} = 0.75 \cdot m_{gerst} \tag{1}$$

$$m_{extract} = 0.8 \cdot m_{mout} \tag{2}$$

$$\frac{m_{extract}}{V_{wort}} = 2.9 \cdot (SG - 1) \tag{3}$$

Met het gegeven dat $SG = 1.050$ en $m_{gerst} = 25.44$ is het mogelijk om op te lossen naar V_{wort}. Tijdens het kookproces gaat 5% van het volume verloren door verdamping en het toevoegen van hop en gist heeft geen effect op het volume, dus we komen aan het volgende resultaat voor het volume bier V_{bier}:

$$V_{bier} = 0.95 \cdot V_{wort} = 0.95 \cdot 0.75 \cdot 0.8 \cdot \frac{m_{gerst}}{2.9 \cdot (SG - 1)} = 100.0 \tag{4}$$

Dit komt inderdaad mooi uit zoals in de opgave beschreven.

1.2 Vergelijken van de verschillende manieren van wort-productie?

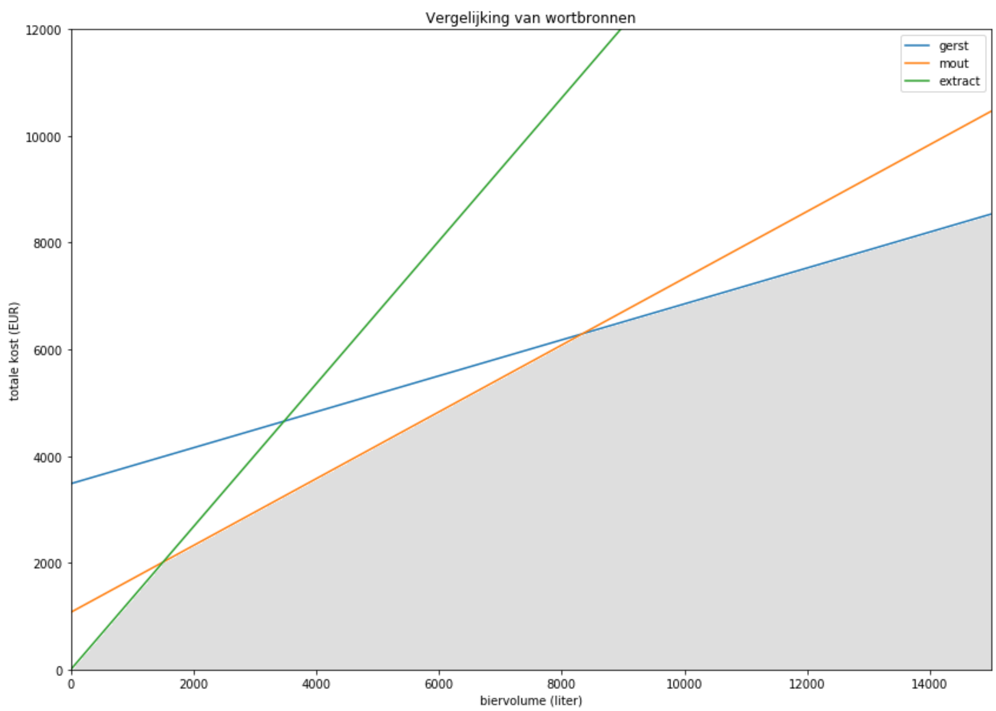
Omdat deze vraag geen vereisten stelt voor de kwaliteit en kleur van het bier zijn we vrij om enkel de goedkoopste ingrediënten (gerst, mout, moutextract, gist en hop) te gebruiken. Zo is de totale kost van elk proces automatisch minimaal.

- Enkel gebruik van moutextract: in dit geval zijn er geen proceskosten, enkel de ingrediëntkosten van moutextract, gist en hop.
- Enkel gebruik van mout: in dit geval moeten zowel vaste als variabele kosten worden betaald voor het maischproces. De ingrediëntkosten zijn voor mout, gist en hop.
- Enkel gebruik van gerst: Er moeten vaste en variabele kosten worden betaald voor zowel het mout- als maischproces. De ingrediëntkosten zijn voor gerst, gist en hop.

We kunnen zien op de grafiek dat de vaste proceskosten van mouten en maischen voor kleine volumes de grootste kosten zijn. Het is voor kleine volumes dus goedkoper om direct moutextract aan te kopen in plaats van zelf wort aan te maken uit mout of gerst. Het is duidelijk op de figuur dat het voor grote volumes voordeliger wordt om zelf te mouten en maischen; dit vooral door de relatief lagere ingrediëntkosten van gerst/mout in vergelijking met moutextract.

De ingrediënten hebben zeer verschillende kosten: hop en gist zijn het duurst maar worden ook in kleine hoeveelheden gebruikt waardoor hun totale kost relatief laag blijft. Van de moutbronnen is moutextract het duurst, gevolgd door mout en dan gerst. Bij kleine volumes zijn de proceskosten (vast en variabel) de grootste kost.

Indien de moutbronnen door elkaar worden gebruikt dan wordt steeds één bron exclusief gebruikt, totdat de volgende bron voordeliger wordt bij grotere volumes (de proceskosten wegen niet meer op tegen de lagere kost van het ingrediënt), en deze dan exclusief wordt gebruikt. Dit minimale kost in dit geval is de bovengrens aan het grijze gebied in de grafiek.



Figuur 1: Verloop van de kostprijs per volume voor de verschillende moutbronnen.

2 Formulering als lineair programma

Minimaliseer de totale kost voor het brouwen van een volume bier met een bepaalde bierkleur (bepaald door EBC-grenzen) en een opgelegde minimale gemiddelde kwaliteit voor elke ingrediëntengroep.

2.1 Formulatie van het gemengd integer lineair programma

2.1.1 Volume

Het totale biervolume V_{bier} dat wordt geproduceerd is een gegeven van het probleem en wordt bepaald door onderstaande formule:

$$V_{bier} = \frac{0.95}{2.9(SG-1)}\left(\sum_{i \in extracten} x_i + 0.8 \sum_{i \in mouten} x_i + 0.6 \sum_{i \in gersten} x_i\right) \tag{5}$$

2.1.2 Kwaliteit

De gemiddelde kwaliteit van de hoppen, gisten, en de gecombineerde moutbronnen moeten respectievelijk groter zijn dan de gegeven waarden Q_{hop}, Q_{gist}, en Q_{mout}. We stellen de ongelijkheid voor hoppen op in Formule 6 (analoog voor gist). Hier is N het aantal soorten hop dat men ter beschikking heeft. In het geval van de moutbronnen moet eerst alles omgezet worden in moutextract-equivalente gewichten, maar voor de rest blijft de formule voor de kwaliteit analoog aan die van de hoppen.

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i Q_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i} \geq Q_{hop} \iff \sum_{i=1}^{N} x_i (Q_{hop} - Q_i) \leq 0 \tag{6}$$

2.1.3 EBC

Voor de EBC wordt zowel een minimum als maximum opgegeven. In onderstaande ongelijkheden is b een bepaalde moutbron (gerst, mout of moutextract) en x_b het gewicht omgerekend naar moutextract-equivalent.

$$EBC_{min} \leq \frac{SG - 1}{0.0344} \sum_{b} EBC_b \frac{x_b}{m_{tot}} \leq EBC_{max} \tag{7}$$

2.1.4 Kostfunctie

In dit probleem wensen we de totale kost van de ingrediënten en de processen te minimaliseren. Deze kost kan beschreven worden zoals in Formule 8.
De kosten van de ingrediënten zijn eenvoudig te berekenen zoals in Formule 9 wordt gedaan voor gerst; de formules voor de andere ingrediënten zijn analoog.
De proceskosten zijn iets moeilijker te bepalen omdat ze bestaan uit een vaste kost c_f en een variabele kost c_v per kilogram mout/moutextract dat wordt geproduceerd [1] in het proces (zie Formule 10). De vaste kost moet enkel betaald worden als het proces (mouten/maischen) uitgevoerd wordt; hiervoor worden binaire beslissingsvariabelen y_1 en y_2 ingevoerd. We moeten dan ook een extra ongelijkheid van de vorm $\boldsymbol{x} \leq My_i$ invoeren voor elke y_i zoals in de theorielessen werd vermeld.

$$T_{totaal} = T_{mouten} + T_{maischen} + T_{gerst} + T_{mout} + T_{extract} + T_{hop} + T_{gist} \tag{8}$$

$$T_{gerst} = \sum_{i \in gersten} x_i c_i \tag{9}$$

$$\begin{aligned} T_{mouten} &= y_1 c_{mouten} + c_{v,maischen}\, 0.75 \sum_{i \in gersten} x_i \\ T_{maischen} &= y_2 c_{f,maischen} + c_{v,maischen}\, 0.8\, (0.75 \sum_{i \in gersten} x_i + \sum_{i \in mouten} x_i) \end{aligned} \tag{10}$$

[1] Ik heb hier verondersteld dat de variabele kost per kg geproduceerd product gerekend wordt, en niet per kg grondstoffen die het proces binnengaan.

2.1.5 Hoppen en gisten

Er zijn extra voorwaarden voor het gewicht aan hoppen en gisten die in het productieproces worden gebruikt. Tijdens het koken wordt $1.3g$ hop toegevoegd per liter wort, en na het koken $75g$ gist per 100 liter.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in hoppen} x_i = 0.0013\cdot\frac{V_{bier}}{0.95}\\ \sum_{i\in gisten} x_i = 0.075\cdot\frac{V_{bier}}{100}\end{aligned} \tag{11}$$

2.1.6 Andere vereisten

Alle beslissingsvariabelen x_i voor de gewichten moeten positief zijn. We leggen ook op dat de beslissingsvariabelen y_i binair moeten zijn in het ILP-probleem, maar deze voorwaarde zal later gerelaxeerd worden zodat y_i een reële waarde tussen 0 en 1 kan aannemen.

2.1.7 Totale LP

We kunnen nu het volledige ILP opstellen:

$$\begin{aligned} minimaliseer\ T_{totaal} & \\ & \sum_{i\in S} x_i(Q_S - Q_i) \leq 0\ ,\ \forall S\in\{mouten, hop, gist\} \\ & \frac{SG-1}{0.0344}\sum_{i=1}^{3N}(EBC_i - EBC_{max}) \leq 0 \\ & \frac{SG-1}{0.0344}\sum_{i=1}^{3N}(EBC_{min} - EBC_i) \leq 0 \\ & \sum_{i\in gersten} x_i \leq M_1 y_1 \\ & \sum_{i\in gersten} 0.75x_i + \sum_{i\in mouten} x_i \leq M_2 y_2 \\ & \sum_{i\in hoppen} x_i = 0.0013\cdot\frac{V_{bier}}{0.95} \\ & \sum_{i\in gisten} x_i = 0.075\cdot\frac{V_{bier}}{100} \\ & \sum_{i\in extracten} x_i + \sum_{i\in mouten} 0.8x_i + \sum_{i\in gersten} 0.6x_i = \frac{2.9(SG-1)}{0.95}V_{bier} \\ & x_i \geq 0\ ,\forall i\in\{1,...,5N\} \\ & y_i = \{0,1\}\ ,\forall i\in\{1,2\} \end{aligned} \tag{12}$$

Er zijn dus twee binaire beslissingsvariabelen in het probleem en zoveel reële als er mogelijke ingrediënten zijn; dus 62 in totaal voor de gegeven dataset. M_i een positieve constante die een bovengrens vormt.

2.2 Beschrijf de oplossing door volledige opsomming

Het probleem dat hierboven beschreven werd bevat twee binaire beslissingsvariabelen y_i. We kunnen dit probleem oplossen door volledige opsomming door de variabelen (y_1, y_2) vast te zetten en enkel te optimaliseren voor $\boldsymbol{x}$. In dit geval is dit zeer doenbaar omdat er slechts vier mogelijkheden zijn met twee binaire variabelen. De oplossing met de kleinste waarde voor de totale kost uit deze vier is de optimale oplossing van het volledige ILP-probleem.

Merk op dat de oplossing $(y_1 = 1, y_2 = 0)$ fysisch onmogelijk is,

2.3 Schrijf programma om dit probleem met volledige opsomming op te lossen

Zie bijgeleverde code: alle vragen waarvoor code verwacht wordt zijn in volgorde in een Jupyter Notebook opgelost.

3 Productie van 5000 liter amber bier

3.1 Beschrijf gemengd lineair programma en vergelijk met vorige vraag

In dit probleem wordt geen minimale kwaliteit voor de ingrediënten opgelegd; deze ongelijkheden vallen weg. Het probleem wordt dus wat eenvoudiger dan wat in de vorige vraag werd opgesteld. Men wenst amber bier dus de opgelegde EBC-grenzen zijn [20, 29]. De functies voor de kosten, EBC, hoppen en gisten veranderen niet; het probleem is identiek behalve dat de kwaliteitsvereisten (Formule 6) wegvallen.

3.2 Relaxeer programma en los op

3.2.1 Gerelaxeerde probleem

We relaxeren de binaire beslissingsvariabelen y_1 en y_2 zodat ze reële waarden tussen 0 en 1 kunnen aannemen. De oplossingen voor de beslissingsvariabelen van de ingrediënten zijn hieronder in de tabel te zien. De binaire waarden zijn $(y_1 = 0.0, y_2 = 0.0954)$. De minimale totale kost is 4237.08 EUR.

	gerst	mout	extract	hop	gist
1	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
2	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
3	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
4	0.0	497.711670	0.0	0.000000	0.00
5	0.0	0.000000	0.0	0.000000	3.75
6	0.0	456.235698	0.0	0.000000	0.00
7	0.0	0.000000	0.0	6.842105	0.00
8	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
9	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
10	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
11	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
12	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00

Figuur 2: Oplossing van gerelaxeerde probleem.

3.3 Waarom worden de meeste ingrediënten niet gebruikt?

In dit probleem stelden we geen verwachtingen qua kwaliteit van de ingrediënten. Het is dus evident dat een optimale oplossing met minimale kost enkel de goedkoopste ingrediënten van elke soort zal gebruiken. Dit is inderdaad wat we zien in de oplossing: er wordt slechts één soort hop gebruikt, één soort gist. Elke EBC-waarde kan gehaald worden door een lineaire combinatie van maximum twee soorten mout als er geen kwaliteitseisen zijn. Als we kwaliteitseisen opleggen zal de oplossing niet langer zo eenvoudig zijn, omdat dan ook duurdere ingrediënten nodig zullen zijn om de gevraagde minimale kwaliteit Q_{min} te halen.

We zien ook dat wat werd besproken in de eerste vraag hier blijft gelden, namelijk dat voor een volume van 5000 liter enkel mout zal gebruikt worden en geen gerst of moutextract; deze beslissingsvariabelen zijn allemaal nul.

3.4 Welke variabelen van relaxatie voldoen niet aan originele probleem?

Na relaxatie zijn de beslissingsvariabelen y_i niet strikt binair meer maar reëel. Oplossingen van de relaxatie zijn enkel oplossingen van het originele probleem indien deze variabelen 0 of 1 zijn.
In dit geval is enkel y_2 niet binair, dus we ronden 0.954 af naar 1. Alle andere variabelen voor de ingrediënten blijven de zelfde waarde houden. De nieuwe totale kost is 4286.45 EUR.

3.5 Los origineel lineair programma op (met opsomming)

We merken op dat onderstaande oplossing met opsomming dezelfde oplossing is als deze die door afronding werd gevonden. In dit geval hebben een zeer goede en sterke relaxatie. De kost is eveneens hetzelfde: 4286.45 EUR.

	gerst	mout	extract	hop	gist
1	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
2	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
3	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
4	0.0	497.711670	0.0	0.000000	0.00
5	0.0	0.000000	0.0	0.000000	3.75
6	0.0	456.235698	0.0	0.000000	0.00
7	0.0	0.000000	0.0	6.842105	0.00
8	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
9	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
10	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
11	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
12	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00

Figuur 3: Oplossing van originele ILP probleem met volledige opsomming.

4 Mag het iets meer/minder zijn?

4.1 Welke vergelijkingen en voorwaarden veranderen?

Als het gewenste volume verandert dan veranderen de vereisten voor de totale gewichten aan hop en gist, en ook de totale gewichten van de moutbronnen die gebruikt moeten worden. De vorm van de vergelijkingen/ongelijkheden zelf veranderen niet, maar de waarde voor V_{bier} moet natuurlijk wel aangepast worden.

4.2 Los gerelaxeerde probleem, de afronding en integer lineaire programma op zoals in de vorige vraag.

4.2.1 50 liter

Bij het gerelaxeerde probleem vinden we een oplossing van het originele probleem (zie onderstaande tabel), met $(y_1 = 0, y_2 = 0)$ en kost 67.70 EUR. De kostprijs en oplossing veranderen dus niet na afronding.
Bij oplossing met volledige opsomming vinden we dezelfde oplossing terug, met dezelfde kost. We kunnen hier dus opnieuw spreken van een goede en sterke relaxatie.

	gerst	mout	extract	hop	gist
1	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0000
2	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0000
3	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0000
4	0.0	0.0	1.315789	0.000000	0.0000
5	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0375
6	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0000
7	0.0	0.0	0.000000	0.068421	0.0000
8	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0000
9	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0000
10	0.0	0.0	6.315789	0.000000	0.0000
11	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0000
12	0.0	0.0	0.000000	0.000000	0.0000

Figuur 4: Oplossing van gerelaxeerd probleem voor 50l.

4.2.2 25000 liter

Bij het gerelaxeerde probleem vinden we geen oplossing van het originele probleem (zie onderstaande tabel), want de y-variabelen zijn niet beiden binair $(y_1 = 1, y_2 = 0.954)$. De totale kost voor de relaxatie is 13399.31 EUR en 13448.68 na afronding.
De optimale oplossing van het ILP: $(y_1 = 1, y_2 = 1)$ met totale kost 11903.44 EUR. De rest van de beslissingsvariabelen kunnen in de onderstaande tabel worden gevonden.

	gerst	mout	extract	hop	gist
1	0.000000	0.00000	0.0	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.00000	0.0	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.00000	0.0	0.000000	0.000000
4	769.368705	0.00000	0.0	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.00000	0.0	0.000000	18.749998
6	0.000000	1019.73679	0.0	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.00000	0.0	34.210515	0.000000
8	0.000000	0.00000	0.0	0.000000	0.000000
9	4230.630337	0.00000	0.0	0.000000	0.000000
10	0.000453	0.00000	0.0	0.000000	0.000000
11	0.000000	0.00000	0.0	0.000000	0.000000
12	0.000000	0.00000	0.0	0.000000	0.000000

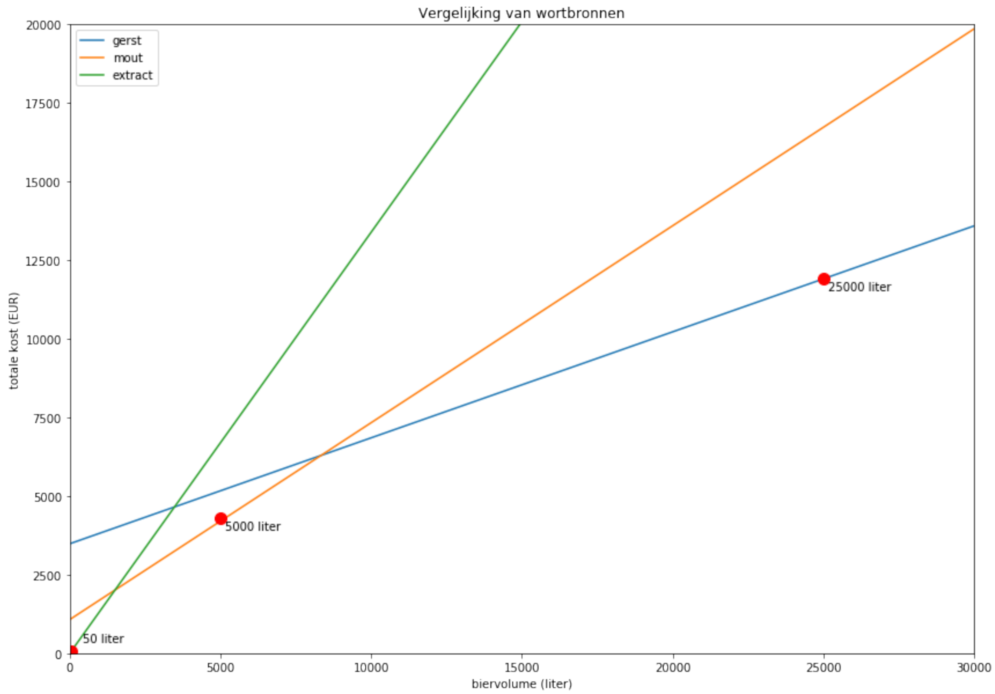
Figuur 5: Oplossing van gerelaxeerd probleem voor 25000l.

	gerst	mout	extract	hop	gist
1	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00
2	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00
3	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00
4	6359.649123	0.0	0.0	0.000000	0.00
5	0.000000	0.0	0.0	0.000000	18.75
6	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00
7	0.000000	0.0	0.0	34.210526	0.00
8	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00
9	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00
10	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00
11	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00
12	0.000000	0.0	0.0	0.000000	0.00

Figuur 6: Oplossing van ILP probleem met volledige opsomming voor 25000l.

4.3 Duid de kosten aan de grafiek van de eerste vraag en verklaar.

De kosten voor de drie gevallen (50, 5000 en 25000 liter) zijn aangeduid in de grafiek. We zien dat de punten quasi exact op de lijnen liggen zoals verwacht, aangezien voor 50, 5000 en 25000 liter respectievelijk exclusief moutextract, mout en gerst worden gebruikt. De punten liggen niet exact op de lijnen omdat er door de EBC-voorwaarden niet enkel het goedkoopste ingrediënt wordt gebruikt.



Figuur 7: Oplossingen per liter aangeduid op grafiek uit 3.1.

4.4 Bespreking van verloop van de kost per liter bier.

De kost per liter bier wordt kleiner met toenemend volume omdat het voor grotere volumes voordeliger wordt om eigen productieprocessen op te starten (mouten/maischen). Voor kleine volumes is het niet voordelig om zelf te maischen, maar voor "medium"volumes is dit wel zo; voor zeer grote volumes wordt het betaalbaar om zelf te mouten.
Dit komt overeen met wat men intuïtief verwacht: dat productiekosten per liter dalen als men grotere volumes begint te produceren, en dat men slechts eigen machines moet aanschaffen als er wordt geproduceerd op grote schaal; anders is het best om reeds bewerkte grondstoffen aan te kopen.

5 Volledig probleem

5.1 Bespreek oplossing

We lossen hier direct op met volledige opsomming. De relaxatie is te vinden in de Jupyter Notebook. De oplossing staat hieronder, met eveneens $(y_1 = 0, y_2 = 1)$ en totale kost 4727.39 EUR:

5.2 Vergelijk met vorige vraag

We zien dat er meer ingrediënten worden gebruikt dan in de vorige opgave (2 soorten hoppen, 3 soorten mout, en nog steeds 1 soort gist), dit omdat er nu ook een vereiste is voor de kwaliteit van de moutbronnen, hoppen en gisten: om de kwaliteit hoog te houden moeten enkele duurdere ingrediënten worden gebruikt.
We merken op dat er nog steeds enkel mout wordt gebruikt (geen gerst/moutextract), zoals verwacht voor dit volume bier.

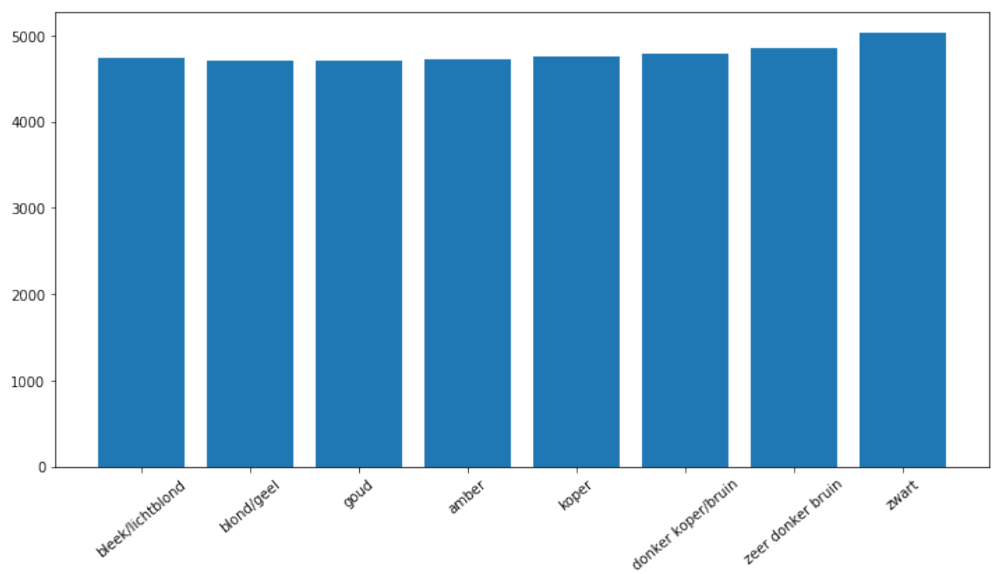
	gerst	mout	extract	hop	gist
1	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
2	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
3	0.0	814.345315	0.0	0.000000	3.75
4	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
5	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
6	0.0	46.534018	0.0	0.000000	0.00
7	0.0	0.000000	0.0	3.421053	0.00
8	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
9	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
10	0.0	0.000000	0.0	3.421053	0.00
11	0.0	0.000000	0.0	0.000000	0.00
12	0.0	93.068036	0.0	0.000000	0.00

Figuur 8: Oplossing van 3.5 met opsomming.

De vereiste van hogere kwaliteit van het bier heeft ook de productieprijs voor hetzelfde volume doen stijgen met 10.2%.

6 Van lichtblond tot zwart

6.1 Zet kostprijs uit in functie van de bierkleur.



Figuur 9: Kostprijs van 5000 liter bier per kleur.

6.2 Waarom zijn bepaalde kleuren het duurst/goedkoopst?

De prijs lijkt te stijgen met de EBC-waarde (met uitzondering van bleek/lichtblond bier). We kunnen duidelijk zien dat het zwarte bier het duurste is.
We merken op dat alle oplossingen volledig uit mout worden opgesteld (geen gerst of moutextract gebruikt); dit is wat we verwachten want voor dit volume is dit het goedkoopst. Als we naar de data kijken zien we dat

er slechts twee moutsoorten beschikbaar zijn met een EBC>53, en dat beide duurder dan gemiddeld zijn. Om dit volume (5000l) bier met hoge EBC-waarden te maken zijn we hier dus verplicht om deze duurdere ingrediënten te gebruiken.
Eveneens zijn de moutsoorten met een EBC<8 en Q>3 ook zeer duur, en in dit probleem kan men niet anders dan deze duurdere mouten te gebruiken; waardoor de prijs van bleek/lichtblond iets hoger is dan dat van zijn buur (blond/geel).

6.3 Zijn alle kleuren bereikbaar? Waarom wel/niet?

Alle kleuren zijn bereikbaar (zelfs door enkel mout te gebruiken) want er is een moutsoort beschikbaar met EBC=134 én een met EBC=6. Beide voldoen aan de kwaliteitseisen Q>3 dus een lineaire combinatie van de twee kan in theorie elk bier maken met $6 \leq EBC \leq 134$.

7 Maximaliseren van de kwaliteit

Het lineair programma wordt nu een maximalisatieprobleem waarbij men niet de kost maar de kwaliteit wenst te optimaliseren. De meeste vereisten blijven hetzelfde, maar de ongelijkheden van de kwaliteit vallen uiteraard weg. Omdat we de waarden voor het volume en de EBC-grenzen kennen, kunnen we wat vereenvoudigen.

$$T = min(Q_{mout}, Q_{hop}, Q_{gist}) \tag{13}$$

$$maximaliseer\ T = min(Q_{mout}, Q_{hop}, Q_{gist})$$

$$\begin{aligned}
&\frac{SG-1}{0.0344}\sum_{i=1}^{3N}(EBC_i - 29) \leq 0\\
&\frac{SG-1}{0.0344}\sum_{i=1}^{3N}(20 - EBC_i) \leq 0\\
&\sum_{i \in gersten} x_i \leq M_1 y_1\\
&\sum_{i \in gersten} 0.75 x_i + \sum_{i \in mouten} x_i \leq M_2 y_2\\
&\sum_{i \in hoppen} x_i = 0.0013 \cdot \frac{V_{bier}}{0.95} = 130/19\\
&\sum_{i \in gisten} x_i = 0.075 \cdot \frac{V_{bier}}{100} = 15/4\\
&\sum_{i \in extracten} x_i + \sum_{i \in mouten} 0.8 x_i + \sum_{i \in gersten} 0.6 x_i = 14500/19\\
&Q_{hop} = \frac{19\sum_{i \in hoppen} x_i Q_i}{130}\\
&Q_{gist} = \frac{4\sum_{i \in gisten} x_i Q_i}{15}\\
&Q_{mout} = \frac{19\sum_{i \in mouten} x_i Q_i}{14500}\\
&x_i \geq 0\ , \forall i \in \{1, ..., 5N\}\\
&y_i = \{0, 1\}\ , \forall i \in \{1, 2\}
\end{aligned} \tag{14}$$

7.1 Kan het minimum van het gemiddelde 5 zijn?

Als het minimum van het gemiddelde 5 is dan zijn alle 3 de kwaliteitsmetrieken gelijk aan 5. Dit is met deze dataset zeker mogelijk als de kostprijs geen belang heeft. Men kan de hoppen en gisten van de hoogste kwaliteit gebruiken, in deze dataset zijn is er één hopsoort en gistsoort van kwaliteit 5.

Nu moet enkel nog een wortmengsel met de correcte EBC en Q aangemaakt worden. Er is opnieuw één gerstsoort (EBC=116), moutsoort (EBC=6) en extractsoort (EBC=95) met Q=5. Het is evident dat een lineaire combinatie bestaat waarvoor het resulterende bier een EBC heeft van 20-29.