$T(n) = aT(n-1) + \Theta(n)$ tiene la solución $T(n) = \Theta(a^n)$

Tenemos que $T(n) = aT(n-1) + \Theta(n)$, entonces $T(n) = aT(n-1) + O(n)$ por lo que existe una $c$ tal que $T(n) \leq aT(n-1) + cn$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n-1) + \Theta(n) \\
&\leq aT(n-1) + cn
\end{aligned}
$$

Por inducción tenemos que $T(n-1) = O(a^{n-1})$, y queremos probar $T(n) = O(a^n)$, entonces

$$T(n-1) \leq ca^{n-1} \quad \text{por definición}$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq aT(n-1) + cn \\
&\leq a[ca^{n-1}] + cn \\
&\leq ca^n + cn \\
&\leq ca^n
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $T(n) = O(a^n)$

Por otra parte tenemos que probar $T(n) = \Omega(a^n)$

p.d. $T(n) \geq ca^n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\geq a\,T(n-1) + cn \\
&\geq a\,[c a^{n-1}] + cn \\
&\geq c a^n + cn \\
&\geq c a^n
\end{aligned}
$$