$f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$

Sea $f(n)+g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$, entonces $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tal que $\forall\, n \geq n_0$:

$\Rightarrow c_2 \min\{f(n), g(n)\} \leq f(n)+g(n) \leq c_1 \min\{f(n), g(n)\}$

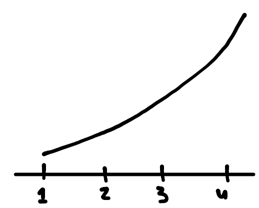
Como $g, f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, entonces podemos dar un contraejemplo que contradiga que $f(n)+g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$

Sea $f(n) = 2^n$ y $g(n) = 1$ (o cualquier constante)

Entonces, en este caso en particular: $\min\{f(n), g(n)\} = f(n)\ \forall n > 0$

$$C_2\, g(n) \leq f(n) + g(n) \leq C_1\, g(n)$$

$$\Rightarrow C_2 \leq 2^n + 1 \leq C_1$$



$2^n = 2$ con $n=1$

$2^n = 4$ con $n=2$

$2^n = 8$ con $n=3$

Podemos acotar por debajo a 2^n+1 con $C_2 = 3$ pero es imposible acotar a 2^n+1 por arriba con una constante

$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

Sea $f(n) = O(g(n))$ entontes $\exists\ c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$

$f(n) \leq c_2\, g(n)$

Podemos proponer un contraejemplo: $f(n) = 2n$ $g(n) = n$, entonces tenemos.

$\Rightarrow f(n) = O(g(n))$

Existe $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$

$2n \leq C\ n$

$2 \leq C$ que tomando $C \geq 2$, $n_0 = 1$, se cumple

pero, no se cumple para $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

$\Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

Existe $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0$

$2^{f(n)} \leq C\, 2^{g(n)}$

$2^{2n} \leq C\, 2^{n}$

$\frac{2^{2n}}{2^{n}} \leq C$

$2^{n} \leq C$ $\Rightarrow$ no podemos acotar superiormente a 2^n con una constante.

Por lo tanto no se cumple