

PARCIAL 2 - ESTADÍSTICA I

ITAM, Otoño 2022

14/11/2022

Instrucciones

El examen se debe contestar individualmente y entregarse a más tardar a las 19:45. El examen cuenta con 6 preguntas a desarrollar. Se debe cuidar la formalidad al escribir los resultados, ya que es parte de la calificación del problema. En caso de no tener el desarrollo de la pregunta, o bien se llegó a la respuesta sin una justificación se podrá anular la respuesta. Cualquier práctica fraudulenta será sancionada de acuerdo al reglamento del departamento. **Trabajar con 4 cifras decimales**

Seccion A:

1. **(20 pts)** Se tiene una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2 . Se define una transformación como:

$$R(X) = \frac{(X - \mu)^2}{\sigma^2}$$

- A) (6pts) Encuentra el valor esperado de la variable aleatoria R .

Por otra parte se define Y como una variable aleatoria con media λ y varianza γ^2 . Se define una transformación como:

$$P(Y) = Y + \frac{2Y - \lambda}{\gamma}$$

- A) (6pts) Encuentre el valor esperado de la variable P
B) (6pts) Encuentre la varianza de la variable aleatoria P

2. **(20 pts)** El consumo mensual de kilos de croquetas de Colmillo sigue la siguiente función de distribución:

$$f(x) = \begin{cases} Kxe^{-\frac{x}{5}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- A) (6pts) Determine el valor de k para que $f(x)$ sea una función de distribución
B) (6pts) Obtenga la función de probabilidad acumulada. Compruebe que si X = límite inferior y Y = límite superior, entonces $F(X) = 0$ y $F(Y) = 1$
C) (3pts) Si para un mes particular solo se tienen 25 kilos de croqueta, ¿Cuál es la probabilidad que las croquetas sean insuficientes para colmillo?

3. **(15 pts)** El monto total de la cuenta en cientos de pesos (x) de un restaurante es una variable aleatoria que sigue la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & 0 \leq x \leq 10 \\ bx & 10 < x \leq 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Adicional, Se sabe que $P(0 \leq x \leq 10) = 0.5$

- A) (5pts) Calcule los valores de a y b de tal manera que $f(x)$ sea una función de distribución (Nota, debido a que trabajamos con 4 decimales, puede ser que no integre exactamente 1, pero debe tener un rango de error de ± 0.01)
- B) (5pts) La utilidad neta (UN) para el restaurante está en función del monto de la cuenta y sigue la siguiente distribución:

$$UN(X) = \frac{X}{2} - c$$

Donde c es una constante dada. Obtenga el valor esperado, la moda y la varianza de la utilidad neta. (Usando los resultados de inciso a)

4. **(15 pts)** El periodo de funcionamiento de un iphone hasta su primera falla (en años) se puede modelar por medio de la siguiente función de distribución acumulada:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y^2} & y \geq 0 \end{cases}$$

Es decir la probabilidad de que falle en 0 años o menos es $F(0) = 1 - \exp(0) = 0$, la probabilidad que falle en 3 años o menos es $F(3) = 1 - \exp(-9)$

- A) (2pts) Compruebe que $F(y)$ cumple con las propiedades de función de distribución acumulada
- B) (2pts) Calcule la probabilidad que el iphone no falle entre 1.5 y 3.5 años
- C) (4pts) Calcule la función de densidad correspondiente a la función de distribución acumulada
- D) (2pts) Compruebe que $f(y)$ cumple con las propiedades de función de distribución (En caso de no poder integrar $f(x)$, use como argumento la función $F(x)$)