

ITAM - Estadística 1

Respuestas Assignment 06

1. Función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2000}{(x+100)^3} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar:

- a) La probabilidad de que un paquete de ese medicamento tenga una vida útil de a lo más 200 días.

Entonces:

$$\int_0^{200} \frac{2000}{(x+100)^3} \cdot dx \quad (1)$$

=

$$(2000) \int_0^{200} (x+100)^{-3} \cdot dx \quad (2)$$

$$= 2000 \left[\frac{(x+100)^{-2}}{-2} \right]_0^{200} = 2000 \left[\frac{1}{-2(300)^2} \right] = 2000 \left[\frac{1}{-180000} \right]$$

- b) La probabilidad de entre 90 y 130 días.

Entonces:

$$\int_{90}^{130} \frac{2000}{(x+100)^3} \cdot dx \quad (3)$$

=

$$(2000) \int_{90}^{130} (x+100)^{-3} \cdot dx \quad (4)$$

$$= 2000 \left[\frac{(x+100)^{-2}}{-2} \right]_{90}^{130} = 2000 \left[\frac{1}{-2(130+100)^2} \right] \left[\frac{1}{-2(90+100)^2} \right] = 2000(0.0000043) \cong 0.0087$$

- c) La vida útil promedio del medicamento. Tenemos que calcular $E(X)$, entonces:

$$\int x \left(\frac{2000}{(x+100)^3} \right) \cdot dx \quad (5)$$

=

$$\int \frac{2000x}{(x+100)^3} \cdot dx \quad (6)$$

=

$$\int 2000 \left(\frac{x}{(x+100)^3} \right) \cdot dx \quad (7)$$

$$= 2000 \left(\frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{(x+100)^{-2}}{-2} \right)$$

$$= 2000 \left(\frac{x^2(x+100)^{-2}}{4} \right) = 2000 \left(\frac{x^2}{4(x+100)^2} \right) = 0.8737$$

- d) La varianza de la vida útil del medicamento: Sabemos que

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

Entonces

$$\int x^2 \left(\frac{2000}{(x+100)^3} \right) \cdot dx \quad (8)$$

=

$$\int \frac{2000x^2}{(x+100)^3} \cdot dx \quad (9)$$

=

$$\int 2000 \left(\frac{x^2}{(x+100)^3} \right) \cdot dx \quad (10)$$

=

$$2000 \int \left(\frac{x^2}{(x+100)^3} \right) \cdot dx \quad (11)$$

= 39.44

Ahora:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

$$= 39.44 - (0.8737)^2 = 38.67$$

2. Función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}} & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre:

- a) El valor de c

$$\int_0^4 \frac{c}{\sqrt{x}} \cdot dx \quad (12)$$

=

$$\int_0^4 \frac{c}{x^{1/2}} \cdot dx \quad (13)$$

=

$$\int_0^4 c(x^{1/2}) \cdot dx \quad (14)$$

$$= c \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_0^4 = 1$$

$$= 4c = 1$$

$$c = \frac{1}{4}$$

- b) Función de distribución acumulada.

$$\int_0^4 \frac{1/4}{\sqrt{x}} \cdot dx \quad (15)$$

=

$$\int_0^4 \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot dx \quad (16)$$

=

$$\frac{1}{4} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \quad (17)$$

=

$$\frac{1}{4} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2} \right]_0^4$$

=

$$\frac{1}{4} [2x^{1/2}]_0^4$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x}$$

- c) La probabilidad de que x menor a 1/4

$$\int_{-\infty}^{1/4} \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot dx \quad (18)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sqrt{x} \right]_{-\infty}^{1/4} = \frac{1}{2} \sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$$

- d) La probabilidad de que x mayor a 1

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot dx \quad (19)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sqrt{x} \right]_1^{\infty} = - \left[\frac{1}{2} \sqrt{1} \right] = - \frac{1}{4}$$

3. Función de densidad

- a) $P(40 < X < 50) =$

$$\int_{40}^{50} \frac{x-30}{450} \cdot dx \quad (20)$$

=

$$\frac{1}{450} \left[\frac{x^2}{2} - 30x \right]_{40}^{50} = \frac{1}{450} (150) = \frac{1}{3}$$

- b) La demanda promedio de bolsas

$$x \int_{40}^{50} \frac{x-30}{450} \cdot dx \quad (21)$$

=

$$\frac{1}{450} \left[\frac{x^3}{3} - 30x^2 \right]_{40}^{50}$$

= 44.51

- c) La varianza de la demanda de bolsas

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

Entonces $E[x^2]$

$$x^2 \int_{40}^{50} \frac{x-30}{450} \cdot dx \quad (22)$$

=

$$\frac{1}{450} \left[\frac{x^4}{4} - 30x^3 \right]_{40}^{50}$$

= 2049.33

Entonces $\sigma_x^2 = 2049.33 - 44.51^2 = 67.43$

4. **Función de densidad** Sea x las ventas mensuales de chocolates, está dada por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Encontrar la función de distribución $F(x)$

$$\int_0^2 x - \frac{x^3}{4} \cdot dx \quad (23)$$

- b) Calcular la varianza

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

Primero: $E[x] =$

$$x \int_0^2 x - \frac{x^3}{4} \cdot dx \quad (24)$$

$= 16/15$

Entonces $E[x^2]$

$$x^2 \int_0^2 x - \frac{x^3}{4} \cdot dx \quad (25)$$

$= 4/3$

Entonces $\sigma_x^2 = 4/3 - (16/15)^2 = 0.1955$

5. **Bivariado Continuo.** Sea (X,Y) una variable aleatoria bivariada con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} K & 0 < yx < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Encontrar el valor de K tal que la función sea función de densidad

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (26)$$

$$= 1 =$$

$$\int_0^1 \int_0^x k \cdot dx \cdot dy \quad (27)$$

$$\int_0^1 K \left(\int_0^x \cdot dy \right) \cdot dx \quad (28)$$

$$=$$

$$\int_0^1 K[y]_0^x \cdot dx \quad (29)$$

$$=$$

$$K \int_0^1 x \cdot dx \quad (30)$$

$$= K \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{K}{2} = 1 \text{ Entonces: } K = 2$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < yx < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- b) Encontrar las funciones de densidad marginales. ¿Son X e Y independientes?

Primero:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dy \quad (31)$$

$$=$$

$$\int_0^x 2 \cdot dy \quad (32)$$

$$= 2[y]_0^x = 2x \text{ para : } 0 < x < 1$$

Ahora

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot dx \quad (33)$$

$$=$$

$$\int_0^x 2 \cdot dx \quad (34)$$

$$= 2[x]_y^1 = 2 - 2y \text{ para : } 0 < y < 1$$

X e Y son independientes cuando $f(x, y) = f_1(x) * f_2(y)$

$$f_1(x) * f_2(y) = 2x * (2 - 2y) = 4x - 4xy \neq 2 = f(x, y)$$

- c) Encontrar las funciones de distribución marginales.

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) \cdot dt \quad (35)$$

$$= \int_0^x f_1(t) \cdot dt \quad (36)$$

$$= \int_0^x 2t \cdot dt \quad (37)$$

$$= [t^2]_0^x = x^2 \quad \text{para : } 0 < x < 1$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(t) \cdot dt \quad (38)$$

$$= \int_0^y f_2(t) \cdot dt \quad (39)$$

$$= \int_0^y (2 - 2t) \cdot dt \quad (40)$$

$$= [2t - t^2]_0^y = 2y - y^2 \quad \text{para : } 0 < y < 1$$

- d) Encontrar las funciones de densidad

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2-2y} \quad \text{para : } 0 < y < 1 \quad 0 < x < 1$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{2}{2x} \quad \text{para : } 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

Bibliografía Aguirre, V. A. B. A. (2006). Fundamentos de Probabilidad y Estadística (2 ed.). Jit Press.