Parcial 2 - Estadística I

ITAM, Primavera 2022 09/05/2022

Instrucciones

El examen se debe contestar individualmente y entregarse a más tardar a las 19:45. El examen cuenta con 6 preguntas a desarrollar. Se debe cuidar la formalidad al escribir los resultados, ya que es parte de la calificación del problema. En caso de no tener el desarrollo de la pregunta, o bien se llegué a la respuesta sin una justificación se podrá anular la respuesta. Cualquier práctica fraudulenta será sancionada de acuerdo al reglamento del departamento. **Trabajar con 4 cifras decimales**

Seccion A:

1. **(20 pts)** Se tiene una variable aleatoria X con media μ y varianza σ^2. Se define una transformación como:

$$R(X) = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$$

   A) (6pts) Encuentra el valor esperado de la variable aleatoria R.

   Por otra parte se define Y como una variable aleatoria con media λ y varianza γ^2. Se define una transformación como:

$$P(Y) = Y + \frac{2Y-\lambda}{\gamma}$$

   A) (6pts) Encuentre el valor esperado de la variable P

   B) (6pts) Encuentre la varianza de la variable aleatoria P

2. **(15 pts)** Una marca de whisky llamada Juanito Caminante cuenta con distintas submarcas que se venden de acuerdo a la siguiente distribución de probabilidad f(x). Adicional, se presentan los ingresos por botella:

Submarca	Probabilidad	Costo por botella (C)	Ingreso por botella (I)
Paliacate rojo	$\frac{k}{2!}$	200	300
Paliacate negro	$\frac{k}{3!}$	600	800
Paliacate dorado	$\frac{k}{3!}$	800	1200
Paliacate verde	$\frac{k}{4!}$	1200	1800
Paliacate azul	$\frac{15k}{5!}$	3000	5000

   A) (2pts) Obtenga el valor de k que hace que f(x) sea una función de distribución.

   B) (3pts) Obtenga el valor esperado del costo por botella y la varianza del costo por botella

C) (3pts) Obtenga el valor esperado del ingreso por botella y la varianza del ingreso por botella

D) (2pts) Si se venden 1000 botellas al dia, encuentre la utilidad esperada para un día de venta (utilidad=ingreso-costo)

3. **(20 pts)** El consumo mensual de kilos de croquetas de Colmillo sigue la siguiente función de distribución:

$$f(x) = \begin{cases} Kxe^{-\frac{x}{5}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A) (6pts) Determine el valor de k para que f(x) sea una función de distribución

B) (6pts) Obtenga la función de probabilidad acumulada. Compruebe que si X = límite inferior y Y = límite superior, entonces F(X) = 0 y F(Y) = 1

C) (3pts) Si para un mes particular solo se tienen 25 kilos de croqueta, ¿Cuál es la probabilidad que las croquetas sean insuficientes para colmillo?

4. **(15 pts)** El monto total de la cuenta en cientos de pesos (x) de un restaurante es una variable alatoria que sigue la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & 0 \leq x \leq 10 \\ bx & 10 < x \leq 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Adicional, Se sabe que $P(0 \geq x \geq 10) = 0.5$

A) (5pts) Calcule los valores de a y b de tal manera que $f(x)$ sea una función de distribución (Nota, debido a que trabajamos con 4 decimales, puede ser que no integre exactamente 1, pero debe tener un rango de error de ± 0.01)

B) (5pts) La utilidad neta (UN) para el restaurante está en función del monto de la cuenta y sigue la siguiente distribución:

$$UN(X) = \frac{X}{2} - c$$

Donde c es una constante dada. Obtenga el valor esperado, la moda y la varianza de la utilidad neta. (Usando los resultados de inciso a)

5. **(15 pts)**

A partir de la siguiente tabla de probabilidad conjunta, calcule las siguientes probabilidades (los valores que toma **X** se expresan en los renglones, los valores que toma **Y** se expresan en las columnas):

p(x,y)	1	2
0	0.1	0.2
1	0.05	0.05
2	0.2	0.1
3	0.1	0.2

A) Obtenga la distribución marginal de X y la distribución marginal de Y

B) (1pt) Obtenga: P(X<=1) y P(Y>1)

C) (1pt) Obtenga: P(X<=1, y<=1) y P(X<=1, y>1)

D) (1pt) Obtenga: P(Y-X>2)

E) (1pt) Obtenga: P(X>0|Y=2)

F) (4pts) Obtenga: coeficiente de correlación de X y Y

G) (2pts) Obtenga E(Y-X) y Var(Y-X)

6. **(15 pts)** El periodo de funcionamiento de un iphone hasta su primera falla (en años) se puede modelar por medio de la siguiente función de distribución acumulada:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y^2} & y \geq 0 \end{cases}$$

Es decir la probabilidad de que falle en 0 años o menos es F(0) = 1-exp(0) = 0, la probabilidad que falle en 3 años o menos es F(3) = 1-exp(-9)

A) (2pts) Comprueba que F(y) cumple con las propiedades de función de distribución acumulada

B) (2pts) Calcule la probabilidad que el iphone no falle entre 1.5 y 3.5 años

C) (4pts) Calcule la función de densidad correspondiente a la función de distribución acumulada

D) (2pts) Compruebe que f(y) cumple con las propiedades de función de distribución (En caso de no poder integrar f(x), use como argumento la función F(x))