

# PARCIAL 2 - ESTADÍSTICA I

ITAM, Primavera 2022

09/05/2022

## Instrucciones

El examen se debe contestar individualmente y entregarse a más tardar a las 19:45. El examen cuenta con 6 preguntas a desarrollar. Se debe cuidar la formalidad al escribir los resultados, ya que es parte de la calificación del problema. En caso de no tener el desarrollo de la pregunta, o bien se llegó a la respuesta sin una justificación se podrá anular la respuesta. Cualquier práctica fraudulenta será sancionada de acuerdo al reglamento del departamento. **Trabajar con 4 cifras decimales**

## Seccion A:

1. **(20 pts)** Se tiene una variable aleatoria  $X$  con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Se define una transformación como:

$$R(X) = \frac{(X - \mu)^2}{\sigma^2}$$

- A) (6pts) Encuentra el valor esperado de la variable aleatoria  $R$ .

Por otra parte se define  $Y$  como una variable aleatoria con media  $\lambda$  y varianza  $\gamma^2$ . Se define una transformación como:

$$P(Y) = Y + \frac{2Y - \lambda}{\gamma}$$

- A) (6pts) Encuentre el valor esperado de la variable  $P$
- B) (6pts) Encuentre la varianza de la variable aleatoria  $P$
2. **(15 pts)** Una marca de whisky llamada Juanito Caminante cuenta con distintas submarcas que se venden de acuerdo a la siguiente distribución de probabilidad  $f(x)$ . Adicional, se presentan los ingresos por botella:

Submarca	Probabilidad	Costo por botella (C)	Ingreso por botella (I)
Paliacate rojo	$\frac{k}{2!}$	200	300
Paliacate negro	$\frac{k}{3!}$	600	800
Paliacate dorado	$\frac{k}{3!}$	800	1200
Paliacate verde	$\frac{k}{4!}$	1200	1800
Paliacate azul	$\frac{15k}{5!}$	3000	5000

- A) (2pts) Obtenga el valor de  $k$  que hace que  $f(x)$  sea una función de distribución.
- B) (3pts) Obtenga el valor esperado del costo por botella y la varianza del costo por botella

- C) (3pts) Obtenga el valor esperado del ingreso por botella y la varianza del ingreso por botella
- D) (2pts) Si se venden 1000 botellas al día, encuentre la utilidad esperada para un día de venta (utilidad=ingreso-costo)

3. **(20 pts)** El consumo mensual de kilos de croquetas de Colmillo sigue la siguiente función de distribución:

$$f(x) = \begin{cases} Kxe^{-\frac{x}{5}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- A) (6pts) Determine el valor de k para que f(x) sea una función de distribución
- B) (6pts) Obtenga la función de probabilidad acumulada. Compruebe que si X = límite inferior y Y = límite superior, entonces F(X) = 0 y F(Y) = 1
- C) (3pts) Si para un mes particular solo se tienen 25 kilos de croqueta, ¿Cuál es la probabilidad que las croquetas sean insuficientes para colmillo?
4. **(15 pts)** El monto total de la cuenta en cientos de pesos (x) de un restaurante es una variable aleatoria que sigue la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & 0 \leq x \leq 10 \\ bx & 10 < x \leq 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Adicional, Se sabe que  $P(0 \leq x \leq 10) = 0.5$

- A) (5pts) Calcule los valores de a y b de tal manera que f(x) sea una función de distribución (Nota, debido a que trabajamos con 4 decimales, puede ser que no integre exactamente 1, pero debe tener un rango de error de  $\pm 0.01$ )
- B) (5pts) La utilidad neta (UN) para el restaurante está en función del monto de la cuenta y sigue la siguiente distribución:

$$UN(X) = \frac{X}{2} - c$$

Donde c es una constante dada. Obtenga el valor esperado, la moda y la varianza de la utilidad neta. (Usando los resultados de inciso a)

5. **(15 pts)**

A partir de la siguiente tabla de probabilidad conjunta, calcule las siguientes probabilidades (los valores que toma X se expresan en los renglones, los valores que toma Y se expresan en las columnas):

p(x,y)	1	2
0	0.1	0.2
1	0.05	0.05
2	0.2	0.1
3	0.1	0.2

- A) Obtenga la distribución marginal de X y la distribución marginal de Y

- B) (1pt) Obtenga:  $P(X \leq 1)$  y  $P(Y > 1)$
- C) (1pt) Obtenga:  $P(X \leq 1, Y \leq 1)$  y  $P(X \leq 1, Y > 1)$
- D) (1pt) Obtenga:  $P(Y - X > 2)$
- E) (1pt) Obtenga:  $P(X > 0 | Y = 2)$
- F) (4pts) Obtenga: coeficiente de correlación de X y Y
- G) (2pts) Obtenga  $E(Y - X)$  y  $\text{Var}(Y - X)$

6. **(15 pts)** El periodo de funcionamiento de un iphone hasta su primera falla (en años) se puede modelar por medio de la siguiente función de distribución acumulada:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y^2} & y \geq 0 \end{cases}$$

Es decir la probabilidad de que falle en 0 años o menos es  $F(0) = 1 - \exp(0) = 0$ , la probabilidad que falle en 3 años o menos es  $F(3) = 1 - \exp(-9)$

- A) (2pts) Comprueba que  $F(y)$  cumple con las propiedades de función de distribución acumulada
- B) (2pts) Calcule la probabilidad que el iphone no falle entre 1.5 y 3.5 años
- C) (4pts) Calcule la función de densidad correspondiente a la función de distribución acumulada
- D) (2pts) Compruebe que  $f(y)$  cumple con las propiedades de función de distribución (En caso de no poder integrar  $f(x)$ , use como argumento la función  $F(x)$ )