ITAM - Estadística 1

Assignment 06

1. **Función de densidad**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2000}{(x+100)^3} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar:

- a) La probabilidad de que un paquete de ese medicamento tenga una vida útil de a lo más 200 días.
  Entonces:

$$\int_0^{200} \frac{2000}{(x+100)^3} \cdot dx \tag{1}$$

=

$$(2000) \int_0^{200} (x+100)^{-3} \cdot dx \tag{2}$$

$= 2000[\frac{(x+100)^{-2}}{-2}]_0^{200} = 2000[\frac{1}{-2(300)^2}]$ - $2000[\frac{1}{-2(100)^2}] = 2000[\frac{1}{-180000}] + 2000[\frac{1}{20000}] = 0.889$

- b) La probabilidad de entre 90 y 130 días.
  Entonces:

$$\int_{90}^{130} \frac{2000}{(x+100)^3} \cdot dx \tag{3}$$

=

$$(2000) \int_{90}^{130} (x+100)^{-3} \cdot dx \tag{4}$$

$= 2000[\frac{(x+100)^{-2}}{-2}]_{90}^{130} = 2000[\frac{1}{-2(130+100)^2}] - 2000[\frac{1}{-2(90+100)^2}] \cong 0.0087$

- c) La vida útil promedio del medicamento. Tenemos que calcular E(X), entonces:

$$\int x(\frac{2000}{(x+100)^3}) \cdot dx \tag{5}$$

=

$$\int \frac{2000x}{(x+100)^3} \cdot dx \tag{6}$$

=

$$\int 2000(\frac{x}{(x+100)^3}) \cdot dx \tag{7}$$

$= 2000(\frac{x^2}{2})(\frac{(x+100)^{-2}}{-2})$
$= 2000(\frac{x^2(x+100)^{-2}}{4}) = 2000(\frac{x^2}{4(x+100)^2}) = 0.8737$

2. **Función de densidad**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}} & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre:

- a) El valor de c

$$\int_0^4 \frac{c}{\sqrt{x}} \cdot dx \tag{8}$$

=

$$\int_0^4 \frac{c}{x^{1/2}} \cdot dx \tag{9}$$

=

$$\int_0^4 c(x^{1/2}) \cdot dx \tag{10}$$

= c$[\frac{(x^{1/2}}{1/2}]_0^4 = 1$

$= 4c = 1$

$c = \frac{1}{4}$

- b) Función de distribución acumulada.

$$\int_0^4 \frac{1/4}{\sqrt{x}} \cdot dx \tag{11}$$

=

$$\int_0^4 \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot dx \tag{12}$$

=

$$\frac{1}{4}\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \tag{13}$$

=

$$\frac{1}{4}[\frac{x^{1/2}}{1/2}]_0^4$$

=

$$\frac{1}{4}[2x^{1/2}]^4$$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x}$

- c) La probabilidad de que x menor a 1/4

$$\int_0^{1/4} \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot dx \tag{14}$$

$= [\frac{1}{2}\sqrt{x}]_0^{1/4} = \frac{1}{2}\sqrt{1/4}$ - $0 = \frac{1}{2}$

3. **Función de densidad**

- a) P(40 < X < 50) =

$$\int_{40}^{50} \frac{x-30}{450} \cdot dx \tag{15}$$

=

$$\frac{1}{450}[\frac{x^2}{2} - 30x]_{40}^{50} = \frac{1}{450}(150) = \frac{1}{3}$$

- b) La demanda promedio de bolsas

$$x \int_{40}^{50} \frac{x-30}{450} \cdot dx \tag{16}$$

=

$$\frac{1}{450}[\frac{x^3}{3} - 30x]_{40}^{50}$$

= 44.51

- c) La varianza de la demanda de bolsas

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

Entonces $E[x^2]$

$$x^2 \int_{40}^{50} \frac{x-30}{450} \cdot dx \tag{17}$$

=

$$\frac{1}{450}[\frac{x^4}{4} - 30x]_{40}^{50}$$

= 2049.33

Entonces σ_x^2 $= 2049.33 - 44.51^2 = 67.43$

4. **Función de densidad** Sea x las ventas mensuales de chocolates, está dada por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{4} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Encontrar la función de distribución f(x)

$$\int_0^2 x - \frac{x^3}{4} \cdot dx \tag{18}$$

- b) Calcular la varianza

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

Primero: $E[x] =$

$$x \int_0^2 x - \frac{x^3}{4} \cdot dx \tag{19}$$

$= 16/15$
Entonces $E[x^2]$

$$x^2 \int_0^2 x - \frac{x^3}{4} \cdot dx \tag{20}$$

$= 4/3$
Entonces σ_x^2 $=4/3 - (16/15)^2 = 0.1955$

5. **Bivariado Continuo.** Sea (X,Y) una variable aleatoria bivariada con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} K & 0 < yx < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Encontrar el valor de K tal que la función sea función de densidad

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dx \cdot dy \tag{21}$$

$= 1 =$

$$\int_0^1 \int_0^x k \cdot dx \cdot dy \tag{22}$$

$$\int_0^1 K(\int_0^x \cdot dy) \cdot dx \tag{23}$$

$=$

$$\int_0^1 K[y]_0^x \cdot dx \tag{24}$$

$=$

$$K \int_0^1 x \cdot dx \tag{25}$$

$= K[\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{K}{2} = 1$ Entonces: K = 2

Por lo tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < yx < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- b) Encontrar las funciones de densidad marginales. ¿Son X e Y independientes?

Primero:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dy \tag{26}$$

$=$

$$\int_0^x 2 \cdot dy \tag{27}$$

$= 2[y]_0^x =$ 2x para : 0 < x < 1

Ahora

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dx \tag{28}$$

$=$

$$\int_0^x 2 \cdot dx \tag{29}$$

$= 2[x]_y^1 =$ 2- 2y para : 0 < y < 1

X e Y son independientes cuando $f(x,y) = f_1(x) * f_2(y)$

$f_1(x) * f_2(y) = 2x * (2 - 2y) = 4x - 4xy \neq 2 = f(x,y)$

- c) Encontrar las funciones de distribución marginales.

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{X} f_1(t) \cdot dt \tag{30}$$

=

$$\int_{0}^{X} f_1(t) \cdot dt \tag{31}$$

=

$$\int_{0}^{X} 2t \cdot dt \tag{32}$$

$= [t^2]_0^x = x^2$ para : 0 < x < 1

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(t) \cdot dt \tag{33}$$

=

$$\int_{0}^{y} f_2(t) \cdot dt \tag{34}$$

=

$$\int_{0}^{y} (2 - 2t) \cdot dt \tag{35}$$

$= [2t - t^2]_0^y = 2y - y^2$ para : 0 < y < 1

- d) Encontrar las funciones de densidad
  $f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2-2y}$ para : 0 < y < 1 0 < x < 1
  $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{2}{2x}$ para : 0 < x < 1 0 < y < 1

Bibliografía Aguirre, V. A. B. A. (2006). Fundamentos de Probabilidad y Estadística (2 ed.). Jit Press.