ITAM - Métodos Estadísticos para C.Pol y R.I.

Respuestas: Repaso de Estadística 2

1. Sabemos que para determinar el sesgo

$$Bias(\hat{\mu_1}) = E(\hat{\mu_1}) - \mu_1$$

Entonces:

$$E(\hat{\mu_1}) = E(\bar{y}) = E(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$$

$$= \frac{1}{3}((E(y_1 + y_2 + y_3))$$

Se puede resolver de dos formas: primero

$$= \frac{1}{3} * 3E(y_i) = E(Y_i) = \mu_i$$

o bien:

$$\frac{1}{3}((E(y_1 + y_2 + y_3)) = \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = \frac{1}{3} * 3\mu_i = \mu_i$$

Entonces:

$$Bias(\hat{\mu_1}) = E(\hat{\mu_1}) - \mu_1 = \mu_i - \mu_i = 0$$

Por lo tanto, el estimador es insesgado

2. • a) Si Y_1,Y_2, (...) Y_9 denota el contenido en onzas de las botellas que se van a observar, entonces sabemos que las Y_i están distribuidas normalmente con media μ y varianza $\sigma^2 = 1$ para i=$1, 2, (...), 9$. Por lo cual $\bar{y}$ posee una distribución muestral normal con media

$$\mu_{\bar{y}} = \mu$$

y varianza

$$\sigma^2_{\bar{y}} = \frac{\sigma^2}{n} = 1/9$$

Tenemos que:

$$P(-0.3 \leq (bary - \mu) \leq 0.3) = P(\frac{-0.3}{\sigma/n} \leq \frac{(\bar{y}-\mu)}{\sigma/n} \leq \frac{0.3}{\sigma/n})$$

Como $\bar{y}$ se distribuye como una normal estándar, se deduce que:
$P(\frac{-0.3}{1/9} \leq Z \leq \frac{0.3}{1/9})$
$= P(-0.9 \leq Z \leq 0.9)$
Por simetría de una normal estándar, entonces:

$$P(-0.9 \leq Z \leq 0.9) = 1 - 2P(Z \leq 0.9) = 1 - 2(0.1841) = 0.6318$$

En conclusión: si tomamos una muestra aleatoria de tamaño 9 de forma iterada solo el .6318 la media muestral se encuentra a no más de 0.3 onzas de la verdadera media poblacional

• b) Ahora buscamos: $= P(-0.3 \leq (\bar{y} - \mu) \leq 0.3) = 0.95$
Entonces al estandarizar:
$P(\frac{-0.3}{\sigma/n} \leq \frac{(\bar{y}-\mu)}{\sigma/n} \leq \frac{0.3}{\sigma/n}) = P(-0.3\sqrt{n} \leq Z \leq 0.3\sqrt{n}) = 0.95$
Entonces al buscar en tablas:

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

Para obtener el tamaño de una muestra:

$$-0.3\sqrt{n} = 1.96$$

o bien, lo que es equivalente: $n = (\frac{1.96}{0.3})^2 = 42.68)$
redondeando al entero próximo hacia arriba $n = 43$

3. Denote a $\bar{y}$ como la media muestral de tamaño $n = 100$ calificaciones de una población con media $\mu = 60$ y varianza $\sigma^2 =$
Queremos calcular
$P(\bar{y} \leq 58)$. Dado que sigue una distribución que se puede aproximar a una normal estándar
tenemos:

$$P(\bar{y} \leq 58) = P(\frac{\bar{y}-\mu}{\sigma/\sqrt(n)} \leq \frac{58-60}{0.8}) \approx P(Z \leq -2.5) = 0.0062$$

4. Como $n_1 = 6$ y $n_2 = 10$ y las varianzas son iguales, entonces:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Sabemos que tiene una distribución F con $n_1 - 1 = 5$ grados de libertad en el numerador y $n_2 - 1 = 9$ grados de libertad

$$P(\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq b) = 1 - P(\frac{S_1^2}{S_2^2} > b)$$

Por tanto, queremos determinar el número de b que delimita un área en la cola superior que acumula el 0.05 bajo la funci

$b = 3.48$

5. Tenemos que, si denotamos con Y_i el tiempo de servicio i-ésimo cliente, entonces queremos calcular:

$$P(\sum_{i=1}^{100} Y_i \leq 120) = P(\bar{y} \leq \frac{120}{100}) = P(\bar{y} \leq 1.20)$$

Dado que el tamaño de muestra es lo suficientemente grande podemos aplicar el TLC (Teorema Central del Límite): nos

Entonces:

$$P(\bar{y} \leq 1.20) = P(\frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt(n)} \leq \frac{1.2 - 1.5}{1/\sqrt(100)})$$

$$\approx P(Z \leq (1.2 - 1.5) * 10) = P(Z \leq -3) = .0013$$

Dado que, la probabilidad de que 100 clientes puedan ser atendidos en menos de dos horas es aproximadamente 0.0013. E

6. Sea Y el número de votantes de la CDMX que están a favor de la candidata A. Debemos calcular $P(\frac{y}{n} \geq 0.55)$ cuando p es la probabilidad de que un votante seleccionado aleatoriamente de la CDMX esté a favor de la candidata A.

Si consideramos los $n = 100$ votantes de la CDMX como una muestra aleatoria de la ciudad, entonces Y tiene una distri

Dado que el tamaño de muestra es suficientemente grande, aplicamos TCL esto implica que $\bar{x} = Y/n$ está distribuida no

Entonces:

$p = 0.5$ y la varianza: (pq/n) = (.5)(.5) = 0.0025

por tanto

$P(\frac{y}{n} \geq .55) = P(\frac{y/n-\mu}{\sqrt{\sigma}} \geq \frac{.55-.50}{0.05}$

$\approx P(Z \geq 1) = 0.1587$

Bibliografía Wackerly. (2008). Estadística Matemática con Aplicaciones (7.a ed.). Cengage Learning.