

## Кольца и многочлены

1. Существует ли такое кольцо  $R$ , что  $R[x]$  — поле?
2. Разложите многочлен  $x^3 - x^2 + 3x + 5$  на множители в а)  $\mathbb{Z}[x]$ , б)  $\mathbb{Q}[x]$ , в)  $\mathbb{R}[x]$ , г)  $\mathbb{C}[x]$ .
3. Разложите многочлен  $x^4 - 5x^2 + 6$  на множители в а)  $\mathbb{Q}[x]$  б)  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][x]$ , в)  $\mathbb{R}[x]$ , г)  $\mathbb{C}[x]$ .
4. Разделите многочлен  $u(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$  на многочлен  $v(x) = x^2 + 1$ ,  $u(x), v(x) \in \mathbb{F}_3[x]$ .
5. Найдите НОД многочленов  $u(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$  и  $v(x) = x^3 + x^2 + x + 1$  в кольце  $\mathbb{F}_5[x]$ .
6. Покажите, что в кольце  $\mathbb{Z}_6[x]$  найдутся многочлены, разложение которых на множители неоднозначно. Существуют ли такие многочлены в  $\mathbb{Z}_7[x]$ ?
7. Какую функцию  $\mathbb{F}_5 \rightarrow \mathbb{F}_5$  задают многочлены:  
а)  $x^2 - 3x + 1$ , б)  $x^{2019} - 3x^{716} + 2$   
Изобразите эту функцию в виде двудольного графа.
8. Приведите пример функции  $\mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ , которая не задается многочленом.
9. Постройте многочлен  $p(x) \in \mathbb{F}_5[x]$  такой, что  $p(0) = 3$ ,  $p(2) = -1$ ,  $p(4) = 3$ .
10. Найдите многочлен наименьшей степени, задающий нулевую функцию на  $\mathbb{Z}_6$ .

11. Покажите на примерах  $\mathbb{Z}_4$  и  $\mathbb{Z}_6$ , что не все линейные функции биективны.

12. Найдите многочлен, принимающий значение 1 в точке 0 и 0 во всех остальных точках поля  $\mathbb{F}_p$ , где

а)  $p = 3$       б)  $p = 7$       в)  $p$  — произвольное простое число.

13. В поле  $\mathbb{F}_p$  найдите многочлен для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

а)  $p = 3$       б)  $p = 7$       в)  $p$  — произвольное простое число.