Конечные кольца и поля — 1

1. Докажите, что $\mathbb{F}_5[x]/(x+2) \cong \mathbb{F}_5$.

2. Докажите, что $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$, опишите явно этот изоморфизм (для каждого элемента укажите, в какой он переходит).

3. Найдите такой многочлен $p(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, что

а) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x)) \cong \mathbb{Z}_3$, б) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x)) \cong \mathbb{Z}_9$, в) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

или докажите его отсутствие.

4. Пусть $\Bbbk$ — поле, $(p(x))$ — идеал кольца $\Bbbk[x]$. Обозначим $\alpha = x + I$ — класс эквивалентности x. Покажите, что α является корнем многочлена $p(t)$ в кольце $\Bbbk[x]/(p(x))$.

5. Объясните следствие из предыдущей задачи: кольцо $\Bbbk[x]/(p(x))$ можно понимать как минимальное кольцо, содержащее $\Bbbk$ и корень многочлена $p(x)$.

6. Для каждого многочлена второй степени в $p(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ постройте кольцо $\mathbb{F}[\alpha]$, где α — корень многочлена $p(x)$. Укажите кольца, которые являются полями, найдите идемпотенты и идеалы в каждом полученном кольце. Укажите, какие кольца изоморфны $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

7. Докажите, что $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где α — корень многочлена $x^2 + x + 2$, является полем. Найдите порядок по умножению $\alpha + 2$ в этом поле.

Решение. Покажем, что многочлен $p(x) = x^2 + x + 2$ неприводим над $\mathbb{F}_3$. Так как этот многочлен степени не выше 3, достаточно проверить, что он не имеет в $\mathbb{F}_3$ корней. Проверяем:

$p(0)=2, \quad p(1)=1, \quad p(2)=p(-1)=2.$

Многочлен $p(x)$ неприводим, а следовательно идеал (x^2+x+2) максимален в $\mathbb{F}_3[x]$, поэтому $\mathbb{F}_3[\alpha] \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^2+x+2)$ — поле.

Так как α корень $p(x)$, в поле $\mathbb{F}_3[\alpha]$ выполняется $\alpha^2+\alpha+2=0$, отсюда: $\alpha^2=2\alpha+1$.

Найдем порядок элемента $\alpha+2$. Мы знаем из теоремы Лагранжа, что порядок элемента — делитель порядка мультипликативной группы. Так как $\mathbb{F}_3[\alpha]$ поле, в котором 9 элементов:

$$0,\ 1,\ 2,\ \alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ 2\alpha,\ 2\alpha+1,\ 2\alpha+2,$$

в мультипликативной группе 8 элементов (все, кроме 0). Поэтому $ord(\alpha+2)$ может быть только $1,2,4,8$. Можно сообразить, что ответ будет лишь 4 или 8 (так как элементы порядка $1,2$ находятся в подполе $\mathbb{F}_3$), поэтому достаточно возвести $\alpha+2$ в степень 4 и проверить, получим ли мы 1. Если нет, то ответ: 8. Возводим (не забываем, что арифметика по правилам $\mathbb{F}_3$):

$(\alpha+2)^2=\alpha^2+\alpha+1=(2\alpha+1)+\alpha+1=2$

$(\alpha+2)^4=2^2=1$

Таким образом $ord(\alpha+2)=4$.

8. Постройте поле из 4-х элементов и найдите порядок каждого элемента.

9. В поле $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где α корень многочлена x^2+1, найдите порядок элемента α. Найдите элемент наибольшего порядка.

10. Найдите порядок элементов α и $2\alpha-1$ в поле $\mathbb{F}_5[\alpha]$, где α корень многочлена x^2+3x+3.

11. Найдите все неприводимые над полем $\mathbb{F}_2$ многочлены, степени не выше 4.

12. Найдите все неприводимые над полем $\mathbb{F}_3$ многочлены, степени не выше 2.

13. Постройте приводимый над $\mathbb{F}_3$ многочлен, не имеющий корней.

14. Определите количество неприводимых многочленов второй степени над $\mathbb{F}_p$, где: а) $p = 2$, б) $p = 3$, в) p — произвольное простое число.

15. В поле $\mathbb{F}_2[\alpha]$, где α — корень многочлена $p(x) = x^4 + x + 1$, найдите минимальный многочлен элемента $\alpha^3 + 1$ и все его корни.

16. Для кольца $\Bbbk = \mathbb{F}_5[\alpha]$, где α — корень многочлена $x^3 + 3x - 2$ выполните задания:

а) Докажите, что $\Bbbk$ — поле.

б) Найдите порядок элемента $\alpha^2 + 2$ и его минимальный многочлен.

в) Найдите все корни многочлена $x^3 + 3x - 2$.

г) Найдите $(\alpha + 3)^{-1}$.

17. В поле $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где α — корень многочлена $x^2 + 1$ решите уравнения:

а) $x + 2 = 0$ б) $x^2 + x + 1 = 0$ в) $x^2 + 1 = 0$ г) $x^2 + 2x + 2 = 0$