Гомоморфизм и изоморфизм колец

Определение. Гомоморфизмом колец A и B называется отображение $\varphi : A \to B$, сохраняющее константы 0, 1:

$$\varphi(0_A) = 0_B, \qquad \varphi(1_A) = 1_B,$$

а также операции сложения и умножения:

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a'), \qquad \varphi(a \cdot a') = \varphi(a) \cdot \varphi(a').$$

Определение. Ядром ($\ker(\varphi)$) гомоморфизма $\varphi : A \to B$ называется подмножество в A, которое переводится под действием φ в 0_B. То есть $\ker(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0_B\}$.

Определение. Образом ($im(\varphi)$) гомоморфизма $\varphi : A \to B$ называется подмножество в B, которое является множеством всех образов элементов из A. То есть $im(\varphi) = \{b \in B \mid \varphi(a) = b,\ a \in A\}$.

1. Докажите, что свойство $\varphi(0_A) = 0_B$ следует из остальных.

2. Докажите равенства: а) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, б) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

3. Верно ли, что любой изоморфизм колец является гомоморфизмом? Верно ли обратное?

4. Определите, является ли отображение φ гомоморфизмом. Если является, то найдите его ядро и образ:

а) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = 5n$,
б) $\varphi : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_{12}$, $\varphi(x) = 4x$,
в) $\varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $\varphi(n) = n^p$,
p — простое.
г) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = x \pmod{10}$,
д) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(a + bi) = a - bi$,
е) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(x) = [x]$,
ё) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = x + y$,
ж) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = xy$,
з) $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = p(1)$,
и) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = n^k$.
к) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
л) $\varphi : M_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a$.
м) $\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(1)$,

5. Существует ли гомоморфизм а) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$? б) $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$?

6. Докажите, что не существует гомоморфизма $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$

7. Докажите, что из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ существует лишь тождественный гомоморфизм.

8. Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм. Докажите, что f — изоморфизм тогда, и только тогда, когда найдется $g : B \to A$, такое, что fg и gf — тождества.

9. Докажите, что множество матриц $R = \left\{ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$ является кольцом, изоморфным $\mathbb{Z}$.

10. Докажите, что ядро гомоморфизма $\varphi : A \to B$ — идеал кольца A.

11. Докажите, что образ гомоморфизма $\varphi : A \to B$ — подкольцо кольца B.

12. Пусть I — идеал кольца A. Докажите, что отображение $\varphi : A \to A/I$, которое ставит в соответствие элементам кольца их классы эквивалентности в A/I является гомоморфизмом. То есть $\varphi(a) = a + I$. Такой гомоморфизм называется каноническим.

Теорема. Факторкольцо по ядру гомоморфизма φ изоморфно образу φ, то есть $A/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.

13. Пусть φ — канонический гомоморфизм. Докажите, что если J идеал кольца A, содержащий I (т.е. $I \subset J$) тогда и только тогда, когда $\varphi(J)$ — идеал в A/I.

14. Покажите, что из предыдущей задачи следует, что если I максимальный идеал, то A/I — поле.

15. Пользуясь результатом задачи 14, постройте поле из 4 элементов.