Конечные кольца и поля

1. Докажите, что $\mathbb{F}_5[x]/(x+2) \cong \mathbb{F}_5$.

2. Пусть $\Bbbk$ — поле, $(p(x))$ — идеал кольца $\Bbbk[x]$. Обозначим $\alpha = x + I$ — класс эквивалентности x. Покажите, что α является корнем многочлена $p(t)$ в кольце $\Bbbk[x]/(p(x))$.

3. Объясните следствие из предыдущей задачи: кольцо $\Bbbk[x]/(p(x))$ можно понимать как минимальное кольцо, содержащее $\Bbbk$ и корень многочлена $p(x)$.

4. Для каждого многочлена второй степени в $p(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ посройте кольцо $\mathbb{F}[\alpha]$, где α — корень многочлена $p(x)$. Укажите кольца, которые являются полями, найдите идемпотенты и идеалы в каждом полученном кольце. Укажите, какие кольца изоморфны $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

5. Постройте поле из 4-х элементов и найдите порядок каждого элемента.

6. В поле $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где α корень многочлена x^2+1, найдите порядок элемента α. Найдите элемент наибольшего порядка.

7. Найдите порядок элементов α и $2\alpha - 1$ в поле $\mathbb{F}_5[\alpha]$, где α корень многочлена x^2+3x+3.

8. Для кольца $\Bbbk = \mathbb{F}_5[\alpha]$, где α — корень многочлена x^3+3x-2 выполните задания:

а) Докажите, что $\Bbbk$ — поле.

б) Найдите порядок элемента α^2+2 и его минимальный многочлен.

в) Найдите все корни многочлена x^3+3x-2.

г) Найдите $(\alpha+3)^{-1}$.

9. Постройте поле из 49 элементов и найдите в нем элемент порядка

а) 3, б) 4, в) 6.

Задачу можно сильно упростить, выбрав «удобный» многочлен для построения поля.

10. В поле $\mathbb{F}_2[\alpha]$, где α — корень многочлена $p(x) = x^4+x+1$, найдите минимальный многочлен элемента α^3+1 и все его корни.

11. Найдите мультипликативную группу и идемпотенты кольца $\mathbb{F}_2[\alpha]$, где α — корень многочлена x^3+1.

12. Найдите порядок мультипликативной группы кольца $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где α — корень многочлена x^3+x+1

13. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{F}_3[x] \to GL(2, \mathbb{F}_3)$, заданное так:

$$\varphi(p) = p\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Докажите, что $Im(\varphi)$ — поле.

14. Определите количество неприводимых многочленов второй степени над $\mathbb{F}_p$, где: а) $p=2$, б) $p=3$, в) p — произвольное простое число.

15. Постройте поле $\mathbb{k}$, не содержащее подполей, в котором существует элемент t порядка 5. Найдите этот элемент.

16. Постройте поле $\mathbb{k}$, содержащее одно подполе $\mathbb{L}$ и элемент $t \notin \mathbb{L}$ порядка 4. Найдите этот элемент.

17. Постройте поле $\mathbb{k}$, содержащее более одного подполя и элемент t порядка 5, не содержащийся ни в одном подполе. Найдите этот элемент.