Конечные кольца и поля — 2

1. Сколько существует полей с количеством элементов, меньшим 100?

2. Найдите мультипликативную группу и идемпотенты кольца $\mathbb{F}_2[\alpha]$, где α — корень многочлена x^3+1.

3. Найдите порядок мультипликативной группы кольца $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где α — корень многочлена x^3+x+1

4. Постройте поле из 32 элементов и найдите в нем элемент наибольшего порядка.

5. Постройте поле $\Bbbk$, не содержащее подполей, в котором существует элемент t порядка 5. Найдите этот элемент.

6. Постройте поле $\Bbbk$, содержащее одно подполе $\mathbb{L}$ и элемент $t \notin \mathbb{L}$ порядка 4. Найдите этот элемент.

7. Постройте поле $\Bbbk$, содержащее более одного подполя и элемент t порядка 5, не содержащийся ни в одном подполе. Найдите этот элемент.

8. Постройте поле из 49 элементов и найдите в нем элемент порядка

а) 3, б) 4, в) 6.

Задачу можно сильно упростить, выбрав «удобный» многочлен для построения поля.

9. Постройте поле, содержащее элемент порядка 13, в котором

а) не содержится подполей б) содержится подполе, укажите его.

10. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{F}_3[x] \to GL(2, \mathbb{F}_3)$, заданное так:

$$\varphi(p) = p \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Докажите, что $Im(\varphi)$ — поле.

11. Определите возможные порядки элемента в кольце $Im\varphi$, где $\varphi : \mathbb{F}_5[x] \to GL(2, \mathbb{F}_5)$,

$$\varphi(p) = p \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Найдите два корня многочлена $x^2 + 3x + 1$, принадлежащие $GL(2, \mathbb{F}_7)$.

13. Докажите, что множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_2$ является кольцом, но не полем. Найдите его мультипликативную группу. Можно ли это кольцо разложить в прямое произведение колец?