

Гомоморфизм и изоморфизм колец

Определение. Гомоморфизмом колец A и B называется отображение $\varphi : A \rightarrow B$, сохраняющее константы 0, 1:

$$\varphi(0_A) = 0_B, \quad \varphi(1_A) = 1_B,$$

а также операции сложения и умножения:

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a'), \quad \varphi(a \cdot a') = \varphi(a) \cdot \varphi(a').$$

Определение. Ядром ($\ker(\varphi)$) гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ называется подмножество в A , которое переводится под действием φ в 0_B . То есть $\ker(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0_B\}$.

Определение. Образом ($im(\varphi)$) гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ называется подмножество в B , которое является множеством всех образов элементов из A . То есть $im(\varphi) = \{b \in B \mid \varphi(a) = b, a \in A\}$.

1. Докажите, что свойство $\varphi(0_A) = 0_B$ следует из остальных.
2. Докажите равенства: а) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, б) $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.
3. Верно ли, что любой изоморфизм колец является гомоморфизмом? Верно ли обратное?
4. Определите, является ли отображение φ гомоморфизмом. Если является, то найдите его ядро и образ:

а) $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varphi(n) = 5n,$	ж) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = xy,$
б) $\varphi : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_{12}, \quad \varphi(x) = 4x,$	з) $\varphi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(p) = p(1),$
в) $\varphi : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p, \quad \varphi(n) = n^p,$ p — простое.	и) $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varphi(n) = n^k.$
г) $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varphi(x) = x \pmod{10},$	к) $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$
д) $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(a + bi) = a - bi,$	л) $\varphi : M_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}, \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a.$
е) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varphi(x) = [x],$	м) $\varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = f(1),$
ё) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = x + y,$	

5. Существует ли гомоморфизм а) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$? б) $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$?
 6. Докажите, что не существует гомоморфизма $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
 7. Докажите, что из \mathbb{Z} в \mathbb{Z} существует лишь тождественный гомоморфизм.
 8. Докажите, что отображение $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, где $\varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ является гомоморфизмом, найдите его ядро.
 9. Пусть $f : A \rightarrow B$ — гомоморфизм. Докажите, что f — изоморфизм тогда, и только тогда, когда найдется $g : B \rightarrow A$, такое, что fg и gf — тождества.
 10. Докажите, что множество матриц $R = \left\{ \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ является кольцом, изоморфным \mathbb{Z} .
 11. Докажите, что ядро гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ — идеал кольца A .
 12. Докажите, что образ гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ — подкольцо кольца B .
 13. Пусть I — идеал кольца A . Докажите, что отображение $\varphi : A \rightarrow A/I$, которое ставит в соответствие элементам кольца их классы эквивалентности в A/I является гомоморфизмом. То есть $\varphi(a) = a + I$. Такой гомоморфизм называется каноническим.
- Теорема.** Факторкольцо по ядру гомоморфизма φ изоморфно образу φ , то есть $A/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi$.
14. Пусть φ — канонический гомоморфизм. Докажите, что если J идеал кольца A , содержащий I (т.е. $I \subset J$), то $\varphi(J)$ — идеал в A/I .
 15. Покажите, что из предыдущей задачи следует, что если I максимальный идеал, то A/I — поле.
 16. Пользуясь результатом задачи 16, постройте поле из 8 элементов.