Графы. Введение.

1. Нарисуйте неориентированный граф, заданный множествами V, $\vec{E}$ и отображениями $t:\vec{E}\to V$, $\ i:\vec{E}\to\vec{E}$. Если для некоторых рёбер значения t и i не определены, доопределите их и нарисуйте все возможные графы.

а) $V=\{a,b\}$, $\vec{E}=\{e_1,e_2\}$, $t(e_1)=a$, $t(e_2)=b$.

б) $V=\{a,b,c\}$, $\vec{E}=\{e_1,e_2\}$, $t(e_1)=b$.

в) $V=\{a,b,c\}$, $\vec{E}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $t(e_1)=c$, $t(e_2)=b$, $i(e_4)=e_1$.

2. Нарисуйте граф отношения:

а) $x^2+y^2<16$ на множестве $M=\{0,-1,-2,2,4,5\}$.

б) $x \,\vdots\, y$ на множестве $M=\{-2,1,0,4,6,3\}$.

в) $x\equiv y \pmod 3$ на множестве $M=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

г) $x-y$ — простое число. На множестве $M=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

д) $ab=1$ или $ab=0$, где $a,b\in\mathbb{Z}_{14}\setminus\{0\}$.

3. Нарисуйте все связные графы с паспортами:

а) $(3,3)$, б) $(4,4,4)$, в) $(3,3,3,3)$, г) $(2,2,\ldots,2)$, всего — n двоек.

4. 2017 шахматистов проводят турнир в один круг (каждый должен сыграть один раз со всеми остальными по разу). Может ли в какой-то момент оказаться, что все шахматисты сыграли разное количество партий?

5. Докажите, что в любой компании из 6 человек либо найдутся трое попарно знакомых, либо трое попарно не знакомых.

6. В некоторой школе каждый школьник знаком с 32 школьницами, а каждая школьница — с 29 школьниками. Кого в школе больше: школьников или школьниц и во сколько раз?

7. Докажите, что в неориентированном графе без петель и кратных ребер всегда найдутся две вершины с одинаковой валентностью.

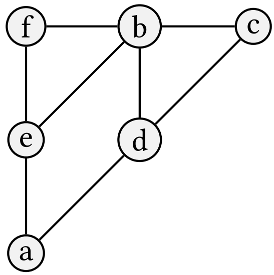
8. Определите минимальное и максимальное возможное количество ребер в связном неориентированном графе без петель и кратных ребер, имеющем n вершин.

9. В связном графе без петель и кратных ребер 50 вершин. При каком наименьшем количестве ребер этот граф гарантированно окажется связным?

10. Докажите, что в связном графе без циклов, петель и кратных ребер (дереве) на n вершинах $n-1$ ребро.

11. В первенстве по футболу участвует 16 команд, которые последовательно играют по разу друг с другом. В некоторый момент, после очередной игры, оказалось, что среди любых трех команд найдутся две, уже сыгравшие между собой. Определите наименьшее возможное число уже сыгранных игр.

12. Определите количество путей длины 4 из вершины a в b



13. Сколько решений имеет система логических уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \to \neg y_1) \to (x_2 \equiv \neg y_2) = 1,\\
&(x_2 \to \neg y_2) \to (x_3 \equiv \neg y_3) = 1,\\
&\ldots\\
&(x_6 \to \neg y_6) \to (x_7 \equiv \neg y_7) = 1.
\end{aligned}
$$

Лемма о рукопожатиях

1. Докажите, что в любой компании количество людей, сделавших нечетное число рукопожатий чётно.

2. Определите, существует ли связный граф с заданным паспортом. Если да, приведите пример такого графа.

а) $(6, 4, 4, 3, 1)$, б) $(4, 3, 2, 1, 1)$, в) $(4, 3, 2, 2, 1)$ г) $(6, 4, 3, 3, 3, 3, 2)$. д) $(6, 6, 5, 4, 3, 2, 2)$.

3. В парке 9 озер. Каждое озеро соединено с другими озерами не менее чем 3 каналами. Какое наименьшее количество каналов может быть в парке.

4. Одинадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлёт открытки трём из остальных. Может ли оказаться так, что каждый получит открытки именно от тех, кому напишет сам?

5. Можно ли изобразить на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно 3 других? (считая, что в одной точке могут пересекаться не более двух отрезков).

6. В компьютерной сети каждый компьютер соединен с 8-ю другими компьютерами так, что любые два компьютера сети могут обмениваться данными (возможно, через другие компьютеры этой сети). Хакер оборвал одну связь между какими-то двумя компьютерами. Верно ли, что работоспособность сети не пострадала, и любые два компьютера все равно могут обмениваться данными?