

Многочлены. Разные задачи.

1. Разложите многочлен $x^3 - x^2 + 3x + 5$ на множители в
а) $\mathbb{N}[x]$, б) $\mathbb{Z}[x]$, в) $\mathbb{Q}[x]$, г) $\mathbb{R}[x]$, д) $\mathbb{C}[x]$.
2. Разложите многочлен $x^4 - 5x^2 + 6$ на множители в
а) $\mathbb{Q}[x]$ б) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][x]$, в) $\mathbb{R}[x]$, г) $\mathbb{C}[x]$.
3. Перечислите все неприводимые многочлены степени не выше 4 над полем \mathbb{F}_2 .
4. Разложите многочлен $p(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2$ на множители в $\mathbb{F}_2[x]$.
5. Сколько существует многочленов степени n над полем \mathbb{F}_2 ?
6. Разложите многочлен $x^4 + 2$ на множители в \mathbb{Z}_3 .
7. Докажите, что многочлен $x^4 + x + 2$ неприводим в $\mathbb{F}_3[x]$.
8. Приведите пример многочлена, разложение которого на множители в \mathbb{Z}_{10} неоднозначно.
9. Найдите частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ в $\mathbb{F}_k[x]$.
а) $P(x) = x^2 + x + 1$, $Q(x) = x + 1$, $k = 2$,
б) $P(x) = x^4 + 3x^2 + 4$, $Q(x) = 3x^3 + x + 1$, $k = 5$.
10. Найдите наибольший общий делитель многочленов в $\mathbb{F}_5[x]$:
 $x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 3$ и $x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 2$.

11. Сколько существует неприводимых многочленов вида $x^2 + bx + c$ в $\mathbb{F}_p[x]$?
12. Разложите многочлен $P(x)$ над полем \mathbb{F}_k на неприводимые множители.
а) $P(x) = x^6 + 1$, $k = 2$, б) $P(x) = x^3 + x + 2$, $k = 3$.
13. Докажите, что в $\mathbb{Q}[x]$ бесконечно много неприводимых многочленов вида $5x^{10} + 21x^7 + 42x^4 + n$, где $n \in \mathbb{Z}$.
14. Докажите, что многочлен $P(x) = x^3 + 9x + 6$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.
Пусть ξ — корень $P(x)$. Найдите обратный элемент к $1 + \xi$ в $\mathbb{Q}[\xi]$.
15. Найдите многочлен в $\mathbb{Z}_3[x]$, задающий отображение
а) $(0, 1, 2) \rightarrow (1, 2, 0)$ б) $(0, 1, 2) \rightarrow (1, 1, 2)$.
16. Найдите многочлен $P(x)$ над \mathbb{Z}_5 , такой, что $P(0) = 3$, $P(2) = 2$, $P(3) = 0$.