Многочлены. Разные задачи.

1. Разложите многочлен $x^3 - x^2 + 3x + 5$ на множители в

а) $\mathbb{N}[x]$, б) $\mathbb{Z}[x]$, в) $\mathbb{Q}[x]$, г) $\mathbb{R}[x]$, д) $\mathbb{C}[x]$.

2. Разложите многочлен $x^4 - 5x^2 + 6$ на множители в

а) $\mathbb{Q}[x]$ б) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][x]$, в) $\mathbb{R}[x]$, г) $\mathbb{C}[x]$.

3. Перечислите все неприводимые многочлены степени не выше 4 над полем $\mathbb{F}_2$.

4. Разложите многочлен $p(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2$ на множители в $\mathbb{F}_2[x]$.

5. Сколько существует многочленов степени n над полем $\mathbb{F}_2$?

6. Разложите многочлен $x^4 + 2$ на множители в $\mathbb{Z}_3$.

7. Докажите, что многочлен $x^4 + x + 2$ неприводим в $\mathbb{F}_3[x]$.

8. Приведите пример многочлена, разложение которого на множители в $\mathbb{Z}_{10}$ неоднозначно.

9. Найдите частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ в $\mathbb{F}_k[x]$.

а) $P(x) = x^2 + x + 1$, $Q(x) = x + 1$, $k = 2$,

б) $P(x) = x^4 + 3x^2 + 4$, $Q(x) = 3x^3 + x + 1$, $k = 5$.

10. Найдите наибольший общий делитель многочленов в $\mathbb{F}_5[x]$:

$x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 3$ и $x^4 + x^3 + x^2 + 4x + 2$.

11. Сколько существует неприводимых многочленов вида x^2+bx+c в $\mathbb{F}_p[x]$?

12. Разложите многочлен $P(x)$ над полем $\mathbb{F}_k$ на неприводимые множители. а) $P(x)=x^6+1, \quad k=2,$ б) $P(x)=x^3+x+2, \quad k=3.$

13. Докажите, что в $\mathbb{Q}[x]$ бесконечно много неприводимых многочленов вида $5x^{10}+21x^7+42x^4+n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

14. Докажите, что многочлен $P(x)=x^3+9x+6$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

Пусть ξ — корень $P(x)$. Найдите обратный элемент к $1+\xi$ в $\mathbb{Q}[\xi]$.

15. Найдите многочлен в $\mathbb{Z}_3[x]$, задающий отображение

а) $(0,1,2) \to (1,2,0)$ б) $(0,1,2) \to (1,1,2)$.

16. Найдите многочлен $P(x)$ над $\mathbb{Z}_5$, такой, что $P(0)=3$, $P(2)=2$, $P(3)=0$.