

## Расширение полей

1. Являются ли полями кольца  $\mathbb{Q}[\xi]$ , в которых а)  $\xi^3 + 1 = 0$ , б)  $\xi^3 + 2 = 0$ ?
2. Найдите степень расширения  
а)  $[\mathbb{Q}[\sqrt{5}] : \mathbb{Q}]$  б)  $[\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}] : \mathbb{Q}]$  в)  $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$
3. В поле  $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  найдите элемент, обратный к  $2 + 3\sqrt{3}$ .
4. В поле  $\{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  найдите элемент, обратный к  $1 - \sqrt{5}$ .
5. Постройте поле из 9 элементов. Покажите, что оно содержит простое подполе. Найдите степень расширения данного поля над простым подполем. Приведите 3 примера выбора базиса расширения. Найдите элемент порядка 4 и построьте его минимальный многочлен.
6. Постройте поле, с помощью присоединения корня многочлена  $x^2 - 5$  к  $\mathbb{Q}$  и найдите обратный элемент к  $-3\sqrt{5}$ .
7. Рассмотрим поле  $\mathbb{Q}$  и присоединим к нему  $\sqrt{2}$ , а к полученному полю  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  присоединим число  $i$ . Докажите, что данное поле можно получить присоединением к  $\mathbb{Q}$  числа  $\sqrt{2} + i$ .
8. Определите размерность пространства  $\mathbb{Q}[\sqrt{5} + i]$  над полем  $\mathbb{Q}$  и найдите какой-нибудь его базис.