Идеал кольца

Идеалом I кольца A называется подмножество A такое, что:

1. I — абелева группа по сложению.

2. $\forall a \in A$, $\forall i \in I$ выполняется $ai \in I$.

Любое кольцо содержит тривиальные идеалы $I = \{0\}$ и $I = A$.

Идеал кольца A, не совпадающий с A называется собственным.

Собственный идеал называется максимальным, если он не лежит в другом собственном идеале.

Идеал называется главным, если он порожден одним элементом. Запись $I = (a)$ означает, что $I = \{ax\}$, где x — любой элемент из кольца. Например, идеал $2\mathbb{Z} = (2)$ — главный.

1. Определите, является ли множество I идеалом кольца A:

а) $A = \mathbb{Z}$, I — все целые числа, кратные 100.

б) $A = \mathbb{R}[x]$, I — множество всех многочленов, имеющих корень 2.

в) $A = \mathbb{R}[x]$, I — множество всех многочленов, касающихся оси Ox в точке 2.

г) $R = \mathbb{Z}^{2\times 2}$ — множество матриц 2×2 с целочисленными коэффициентами. I — множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

2. Перечислите все максимальные идеалы в кольце $\mathbb{Z}_{60}$.

3. Рассмотрим кольцо $\mathbb{F}_2[x]$ и идеал $I = (x^2+1)$

а) Приведите примеры 3-х элементов из I.

б) Приведите примеры 3-х элементов из $\mathbb{F}_2[x]$, не принадлежащих I.

в) Сколько существует идеалов, содержащих I?

г) Приведите примеры 3-х элементов из $\mathbb{F}_2[x]$, эквивалентных 0 ($p \sim q$, если $p - q \in I$).

д) Приведите примеры 3-х элементов из $\mathbb{F}_2[x]$, эквивалентных 1.

е) Приведите примеры 3-х элементов из $\mathbb{F}_2[x]$, эквивалентных x^3.

4. Пусть $I = (x^2+1) \subset \mathbb{Z}[x]$. Определите, содержит ли I многочлены:

а) $x^5 + 4x^3 + x^2 + 3x + 4$, б) $x^5 + 6x^3 + 2x^2 + 5x + 2$.

5. Докажите, что идеал $I = (x^3+1)$ не является максимальным в $\mathbb{Z}_2[x]$. Перечислите максимальные идеалы, содержащие I.

6. Пусть $I = (18)$, $J = (24)$ — идеалы в $\mathbb{Z}$. Найдите а) $I \cap J$, б) $I + J$.

7. Докажите, что кольцо A матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_5$ не является полем.

а) Сколько в нем элементов?

б) Найдие все необратимые элементы.

в) Перечислите все идеалы в A.

г) Можно ли разложить A в прямое произведение колец?

8. Найдите все необратимые элементы кольца $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+1)$.

9. Пусть $I = (1+3i)$ — максимальный идеал в $\mathbb{Z}[i]$ ($\mathbb{Z}[i]$ — минимальное кольцо, содержащее $\mathbb{Z}$ и i, где $i^2 = -1$). Докажите, что $\mathbb{Z} \cap I = 10\mathbb{Z}$.

10. Докажите, что если I является идеалом кольца A и содержит единицу, то $I = A$.

11. Докажите, что поле содержит только тривиальные идеалы (само себя и $\{0\}$).

12. Пусть I, J — идеалы кольца A. Докажите, что $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$ — тоже идеал A.

13. Верно ли, что множество делителей нуля всегда является идеалом кольца?

14. Опишите множество $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+x)$, является ли оно кольцом или полем? Перечислите все его идеалы.

15. Найдите мультипликативную группу, идемпотенты и идеалы кольца $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+1)$.