

Формальные ряды

1. В кольце $\mathbb{k}[[x]]$ найдите а) $(1-x)^{-1}$, б) $(1+x^2)^{-1}$, в) $(1+x+x^2)^{-1}$.
2. Докажите, что ряд $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ обратим тогда, и только тогда, когда a_0 обратим.
3. Найдите а) $(3-2x)^{-1} \in \mathbb{Z}_4[[x]]$, б) $(2+x)^{-1} \in \mathbb{Z}_9[[x]]$.
4. Перечислите все идеалы кольца $\mathbb{Z}_{12}[[x]]$, содержащие ряд $x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots$.
5. Сколько слов и какой длины можно получить следующим способом $(a|ab|c)(g|t|hh)(d|to|jy)$. В скобках указаны возможные подслова, а символ «|» обозначает, что можно использовать лишь одно подслово. Примеры слов: «agd», «ahhto», «cgjy».
6. Сколько слов длины n можно составить из слов $(a) * (b|c) * (d|e|f)^*$. Звездочка означает, что выбранную букву можно повторить 0 или более раз.
7. Найдите производящий ряд, для определения количества способов выдать сумму n рублей монетами по a и b рублей?
8. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $a + b + c = 6$, где $-1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b, c \leq 4$.
9. Выведите формулу Бине для чисел Фибоначчи:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

10. Найдите явный вид последовательности

$$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}, x_0 = 2, x_1 = 0.$$