Конечные кольца и поля — 1

1. Докажите, что $\mathbb{F}_5[x]/(x+2) \cong \mathbb{F}_5$.

2. Докажите, что $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$, опишите явно этот изоморфизм (для каждого элемента укажите, в какой он переходит).

3. Найдите такой многочлен $p(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, что

а) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x)) \cong \mathbb{Z}_3$, б) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x)) \cong \mathbb{Z}_9$, в) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

или докажите его отсутствие.

4. Пусть $\Bbbk$ — поле, $(p(x))$ — идеал кольца $\Bbbk[x]$. Обозначим $\alpha = x + I$ — класс эквивалентности x. Покажите, что α является корнем многочлена $p(t)$ в кольце $\Bbbk[x]/(p(x))$.

5. Объясните следствие из предыдущей задачи: кольцо $\Bbbk[x]/(p(x))$ можно понимать как минимальное кольцо, содержащее $\Bbbk$ и корень многочлена $p(x)$.

6. Для каждого многочлена второй степени в $p(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ посройте кольцо $\mathbb{F}[\alpha]$, где α — корень многочлена $p(x)$. Укажите кольца, которые являются полями, найдите идемпотенты и идеалы в каждом полученном кольце. Укажите, какие кольца изоморфны $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

7. Постройте поле из 4-х элементов и найдите порядок каждого элемента.

8. В поле $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где α корень многочлена x^2+1, найдите порядок элемента α. Найдите элемент наибольшего порядка.

9. Найдите порядок элементов α и $2\alpha - 1$ в поле $\mathbb{F}_5[\alpha]$, где α корень многочлена x^2+3x+3.

10. Найдите все неприводимые над полем $\mathbb{F}_2$ многочлены, степени не выше 4.

11. Найдите все неприводимые над полем $\mathbb{F}_3$ многочлены, степени не выше 2.

12. Постройте приводимый над $\mathbb{F}_3$ многочлен, не имеющий корней.

13. Определите количество неприводимых многочленов второй степени над $\mathbb{F}_p$, где: а) $p = 2$, б) $p = 3$, в) p — произвольное простое число.

14. В поле $\mathbb{F}_2[\alpha]$, где α — корень многочлена $p(x) = x^4 + x + 1$, найдите минимальный многочлен элемента $\alpha^3 + 1$ и все его корни.

15. Для кольца $\Bbbk = \mathbb{F}_5[\alpha]$, где α — корень многочлена $x^3 + 3x - 2$ выполните задания:

а) Докажите, что $\Bbbk$ — поле.

б) Найдите порядок элемента $\alpha^2 + 2$ и его минимальный многочлен.

в) Найдите все корни многочлена $x^3 + 3x - 2$.

г) Найдите $(\alpha + 3)^{-1}$.

16. В поле $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где α — корень многочлена $x^2 + 1$ решите уравнения:

а) $x + 2 = 0$ б) $x^2 + x + 1 = 0$ в) $x^2 + 1 = 0$ г) $x^2 + 2x + 2 = 0$