Классы булевых функций

1. Для функции $f = (0110)$ найдите

а) $f(f(x, y), y)$, б) $f(0, f(1, y))$, в) $f(1, f(y, f(x, 0)))$.

2. Для функции $f = (1101\,0101)$ найдите $f(z, f(x, y, x), z)$.

3. Система (или класс) булевых функций $\Sigma = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называется полной, если всякая булева функция f может быть представлена в виде суперпозиции булевых функций из системы Σ. Какие системы булевых функций являются полными:

а) $\{\neg, \wedge, \vee\}$, б) $\{\neg, \wedge\}$, в) $\{\vee, \wedge\}$, г) $\{\neg, \vee\}$, д) $\{(1000)\}$, е) $\{\mathbf{1}, \wedge, \oplus\}$.

Замыканием класса булевых функций Σ называется система булевых функций $|\Sigma|$, которая содержит любую суперпозицию функций системы Σ.

Класс Σ называется замкнутым, если $\Sigma = |\Sigma|$.

Классы T_0 и T_1

Множество функций f таких, что $f(\vec{0}) = 0$ называется классом функций, сохраняющих 0, и обозначается T_0.

Множество функций f таких, что $f(\vec{1}) = 1$ называется классом функций, сохраняющих 1, и обозначается T_1.

1. Для данной функции $f \notin T_0$ выразите функцию $\mathbf{1}$ или $\neg$. Докажите, что из любой функции $f \notin T_0$ всегда можно выразить $\mathbf{1}$ или $\neg$. Сформулируйте аналогичное утверждение для $g \notin T_1$.

а) $f = (10)$, б) $f = (1101)$, в) $f = (1110\,0010)$.

2. Сколько существует булевых функций от n переменных, принадлежащих классу T_1?

3. Сколько существует булевых функций от n переменных, не принадлежащих классам T_0 и T_1?

Класс L

Линейной булевой функцией называется функция, многочлен Жегалкина которой содержит только линейные слагаемые. Класс линейных булевых функций обозначается L.

1. Докажите, что если функция линейна, то количество единиц и нулей в таблице истинности одинаково.

2. Проверьте, является ли функция f линейной:

а) $f = (0110)$, б) $f = (0001\,0111)$, в) $f = (1100\,0011)$

3. С помощью констант 0, 1 и операции $\neg$ и данной нелинейной функции f постройте функцию $h(x, y) = x \wedge y$. Докажите, что это можно сделать для любой функции $f \notin L$.

а) $f(x, y) = 1 + x + xy$, б) $f(x, y, z) = xy + xz$, в) $f(x, y, z) = x + zy + xyz$.

4. Сколько существует линейных булевых функций от n переменных?

Класс S

Двойственной функцией к булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) \equiv \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Функция, совпадающая с двойственной себе называется самодвойственной. Класс самодвойственных функций обозначается как S.

1. Докажите, что таблица аргументов булевой функции антисимметрична относительно середины.

2. Докажите, что у самодвойственной функции таблица значений антисимметрична относительно середины таблицы.

3. Какие из перечисленных функций являются самодвойственными:

а) $\mathbf{1}$, б) $\wedge$, в) $\neg$, г) $f = (0010\,1011)$, д) $f = (1001\,0111)$.

4. Используя функции $\neg$ и $f \notin S$ постройте функцию $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$. Докажите, что это можно сделать для любой $f \notin S$.

а) $f = (0111)$, б) $f = (0100\,1001)$.

5. Сколько существует самодвойственных булевых функций от n переменных?

Класс M

Булева функция называется монотонной, если при прохождении по рёбрам булева куба вдоль любого кратчайшего пути из вершины $(\vec{0})$ в вершину $(\vec{1})$ значение функции не убывает.

Аналогичное определение: будем называеть векторы $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{Z}_2^n$ сравнимыми, если соответствующие им вершины булева куба находятся на одном ребре. Будем говорить, что $\vec{\alpha} < \vec{\beta}$, если $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ сравнимы и при этом в $\vec{\alpha}$ меньше единиц, чем в $\vec{\beta}$.

Функция f называется монотонной, если для любых сравнимых $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ из $\vec{\alpha} \leqslant \vec{\beta}$ следует $f(\vec{\alpha}) \leqslant f(\vec{\beta})$. Класс монотонных булевых функций обозначается M.

1. Определите, является ли функция монотонной:

а) $\vee$, б) $f = (1001\,1111)$, в) $f = (0101\,0111)$.

2. Имеются функции $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ и $f \notin M$. Выразите функцию $h(x) = \neg x$. Докажите, что это можно сделать для любой $f \notin M$.

а) $f = (0110)$, б) $f = (0010\,1101)$

3. Сколько существует монотонных булевых функций от n переменных?

Теорема Поста

1. Докажите, что классы T_0 и T_1 замкнуты.

2. Докажите, что класс M замкнут.

3. Докажите, что класс L замкнут.

4. Докажите, что класс S замкнут.

5. **Теорема**. Система булевых функций Σ полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

6. *Необходимость.* Докажите, что если Σ полна, то она не содержится в классах T_0, T_1, S, M, L.

7. *Достаточность.* Пусть Σ не принадлежит классам Поста. Тогда в Σ найдутся функции $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_S \notin S$, $f_L \notin L$, $f_M \notin M$ (некоторые из них могут совпасть). Достаточно показать, что через эти функции всегда можно выразить функции $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\neg$, $\wedge$.