

Расширение полей

1. Являются ли полями кольца $\mathbb{Q}[\xi]$, в которых а) $\xi^3 + 1 = 0$, б) $\xi^3 + 2 = 0$?
2. Найдите степень расширения
а) $[\mathbb{Q}[\sqrt{5}] : \mathbb{Q}]$ б) $[\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}] : \mathbb{Q}]$ в) $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}]$
3. В поле $\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ найдите элемент, обратный к $2 + 3\sqrt{3}$.
4. В поле $\{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ найдите элемент, обратный к $1 - \sqrt{5}$.
5. Постройте поле из 9 элементов. Покажите, что оно содержит простое подполе. Найдите степень расширения данного поля над простым подполем. Приведите 3 примера выбора базиса расширения. Найдите элемент порядка 4 и постройте его минимальный многочлен.
6. Постройте поле, с помощью присоединения корня многочлена $x^2 - 5$ к \mathbb{Q} и найдите обратный элемент к $-3\sqrt{5}$.
7. Рассмотрим поле \mathbb{Q} и присоединим к нему $\sqrt{2}$, а к полученному полю $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ присоединим число i . Докажите, что данное поле можно получить присоединением к \mathbb{Q} числа $\sqrt{2} + i$.
8. Определите размерность пространства $\mathbb{Q}[\sqrt{5} + i]$ над полем \mathbb{Q} и найдите какой-нибудь его базис.