Συστήματα Αναμονής

(Queuing Systems)

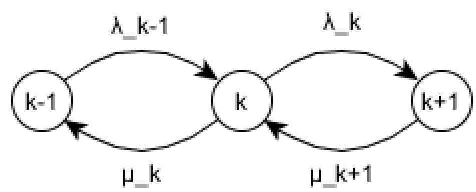
2η Εργαστηριακή Άσκηση

Λεούσης Σάββας

Α.Μ.: 03114945

Θεωρητική Μελέτη της ουράς M/M/1

A) Προκειμένου η ουρά M/M/1 να είναι εργοδική, η απαραίτητη συνθήκη είναι να ισχύει ότι λ<μ.Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1 είναι το παρακάτω:



Από τις εξισώσεις ισορροπίας προκύπτουν οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος:

- $\lambda P_0 = \mu P_1$ ή $P_1 = (\frac{\lambda}{\mu})P_0 = \rho P_0$
- $(\lambda+\mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ ή $P_2 = \rho^2 P_0$ και $P_k = \rho^k P_0$, $k>0$
- $P_0 + P_1 + \ldots + P_k + \ldots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots)$

Για $0 < \rho < 1$, η δυναμοσειρά συγκλίνει $P0(\frac{1}{1-\rho}) = 1$,

Τότε: $P_0 = (1-\rho)$, $P_k = (1-\rho)\rho^k$, $k>0$

B) Είναι:

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} kP_k = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-\rho)k\rho^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k\rho^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k\rho^{k+1} =$$
$$= \frac{\rho}{(1-\rho)^2} - \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}, \text{ όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα, όταν η ουρά αναμονής βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπου του Little:

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} \overset{\gamma=\lambda}{\Longrightarrow}$$

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{(1-\rho)\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

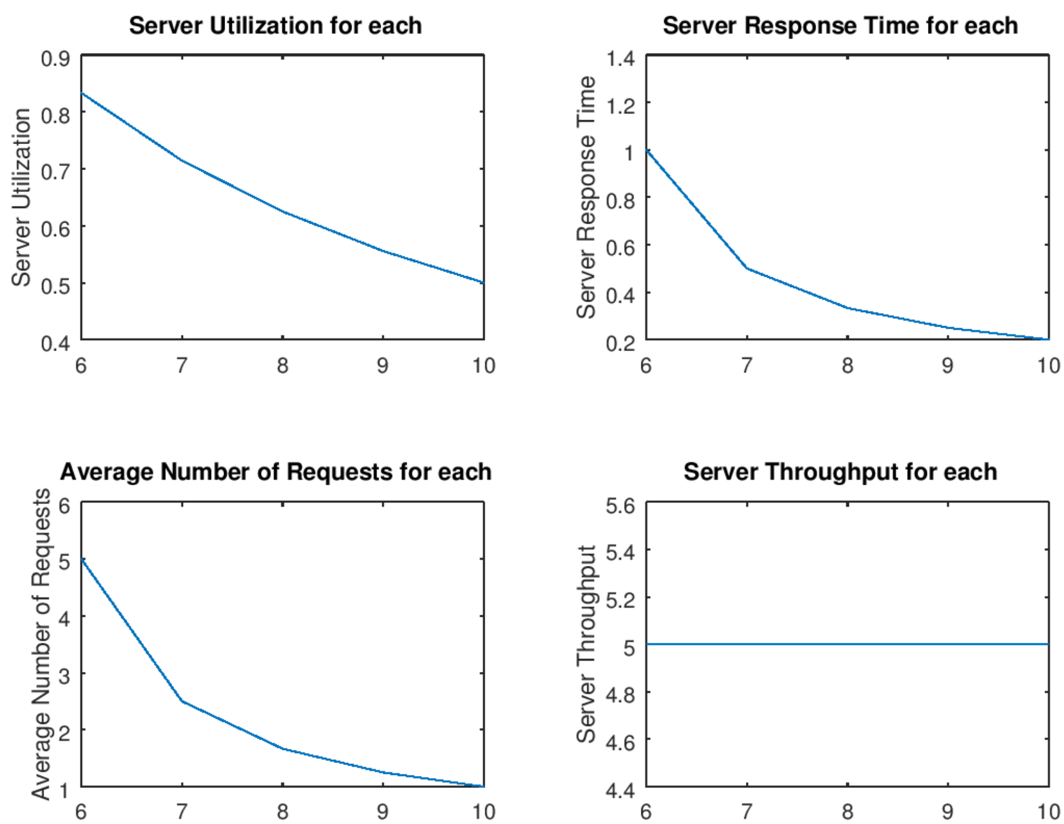
C) Σε ένα σύστημα M/M/1 μπορεί να υπάρξει χρονική στιγμή όπου θα υπάρχουν 57 πελάτες στο σύστημα, καθώς ο buffer της ουράς είναι απεριόριστος, επομένως πάντα υπάρχει η πιθανότητα να βρεθούν 57 πελάτες σε αυτόν.

D) Δεν θα άλλαζε τίποτα αν αρχικά υπήρχαν 5 πελάτες, καθώς το σύστημα είναι ανεξάρτητο από την αρχική κατάσταση.

Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

A) Προκειμένου το σύστημα να είναι εργοδικό, οι αποδεκτοί ρυθμοί εξυπηρέτησης είναι μ=6,7,8,9,10 πελάτες/min.

B) Για κάθε αποδεκτό ρυθμό εξυπηρέτησης, προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα βαθμού χρησιμοποίησης (utilization), μέσου χρόνου καθυστέρησης του συστήματος E(*T*), μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα, και ρυθμαπόδοσης (throughput) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης:



C) Θα επιλέγαμε τον μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης μ=10 πελάτες/min γιατί ο χρόνος καθυστέρησης ελαχιστοποιείται για αυτήν την τιμή.

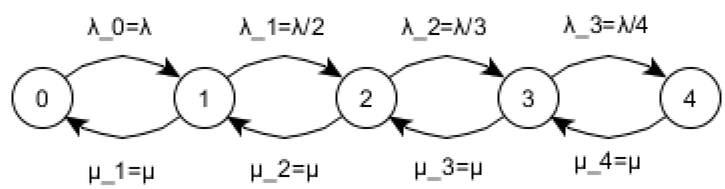
D) Το throughput σε μία ουρά M/M/1 παραμένει σταθερό και ίσο με το λ.

Σύγκριση συστημάτων με δύο εξυπηρετητές

Προσωμοιώνοντας την ουρά M/M/2, βλέπουμε ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης του συστήματος είναι 0.13333 secs (για λ=10 και μ=10), ενώ για τις δύο παράλληλες ουρές M/M/1, θεωρώντας ότι η διάσπαση των αφίξεων Poisson είναι τυχαία και ισοπίθανη, επομένως για κάθε ουρά M/M/1 ισχύει ξεχωριστά λ*=10*1/2=5 και μ*=μ=10, ο μέσος χρόνος καθυστέρησης που προέκυψε είναι 0,2 secs. Προφανώς θα επιλέγαμε το σύστημα M/M/2 εφόσον ανταποκρίνεται γρηγορότερα στις αφίξεις πελατών.

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

A) Παρακάτω βρίσκεται το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων για το σύστημα που ζητήθηκε η μοντελοποίησή του:



Οι εργοδικές πιθανότητες του συστήματος, με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$P_i = \rho^i \ P_0 \ , i = 0,1,2,3,4, \rho \quad = \frac{\lambda}{\mu} = 0.5, \lambda_i = \frac{\lambda}{i+1} \ , \mu_i = \mu = 10, \lambda = 5$$

Με $P_0 = \frac{1-\rho_0}{1-\rho_0^5} = 0.6066,$

$$P_1 = \rho^1 \ P_0 = 0.3033,$$

$$P_2 = \rho^2 \ P_0 = 0.0758,$$

$$P_3 = \rho^3 \ P_0 = 0.0126,$$

$$P_4 = \rho^4 \ P_0 = 0.0016$$

Πιθανότητα Απώλειας: $P_{blocking} = P_4 = 0.0016$

B)

i) Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων είναι η παρακάτω:

```
transition_matrix =

   -5.00000    5.00000    0.00000    0.00000    0.00000
   10.00000  -12.50000    2.50000    0.00000    0.00000
    0.00000   10.00000  -11.66667    1.66667    0.00000
    0.00000    0.00000   10.00000  -11.25000    1.25000
    0.00000    0.00000    0.00000   10.00000  -10.00000
```

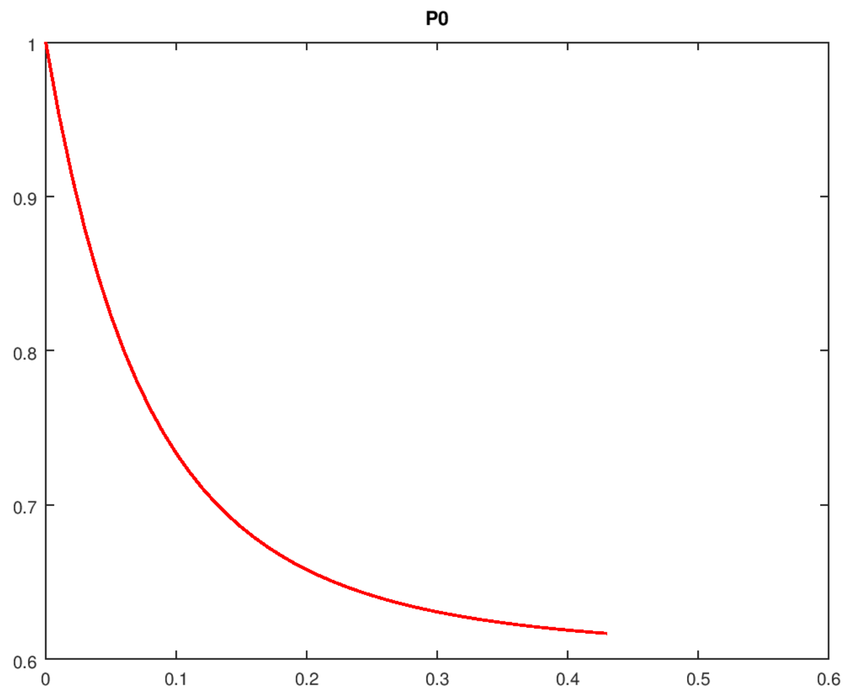
ii) Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος οι οποίες υπολογίστηκαν μέσω της εντολής ctmc είναι οι εξής:

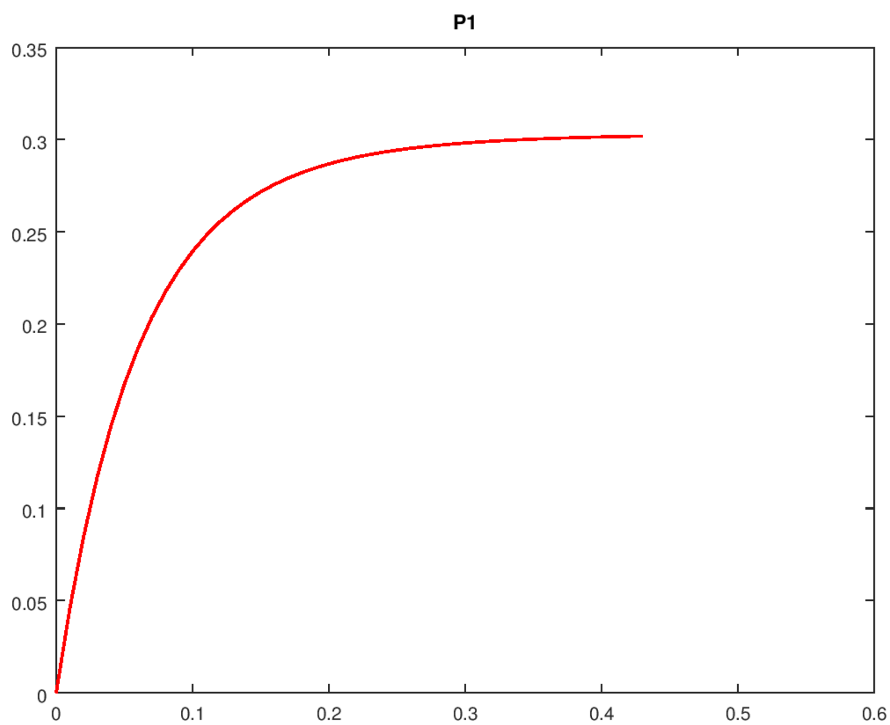
```
P =

   0.6066351   0.3033175   0.0758294   0.0126382   0.0015798
```

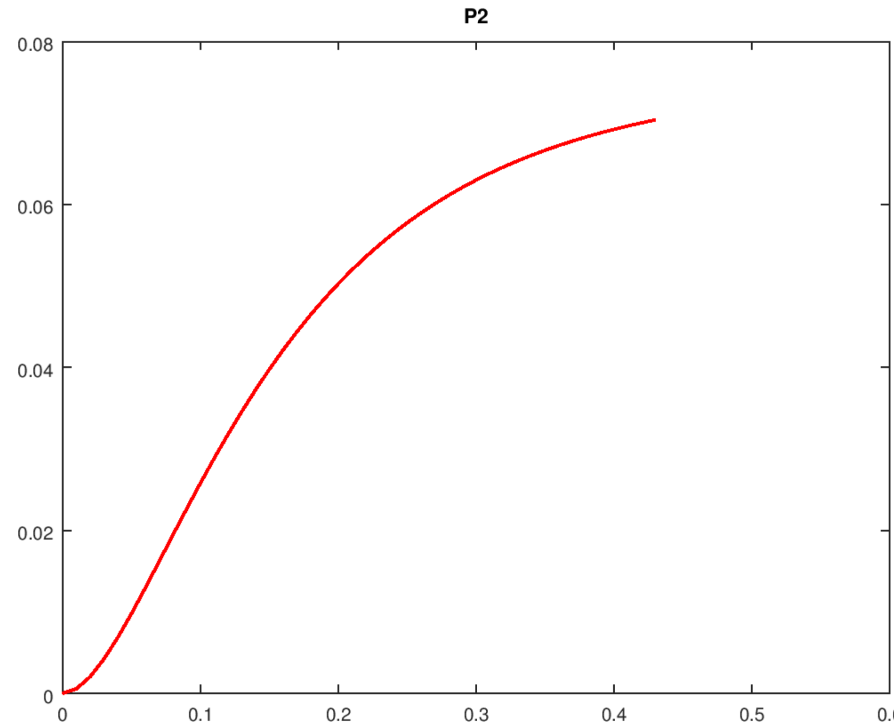
iii) $E[n(t)] = \rho \frac{1-(4+1)\rho^4+4\rho^{4+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{4+1})} = 0.8387$

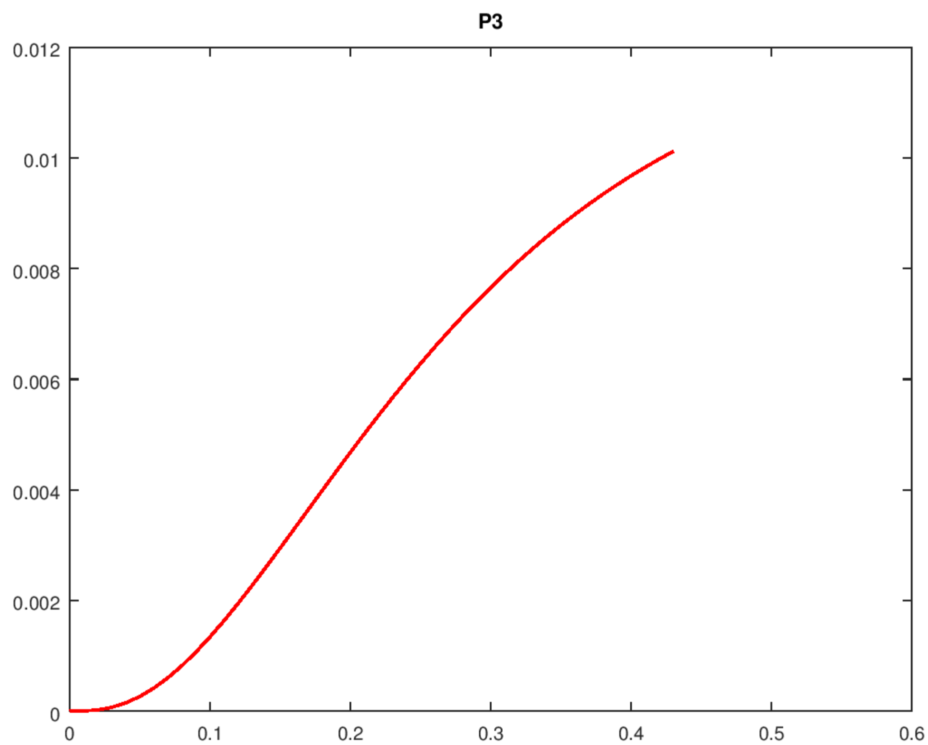
iv) $P_{blocking} = P_4 = 0.0015798$

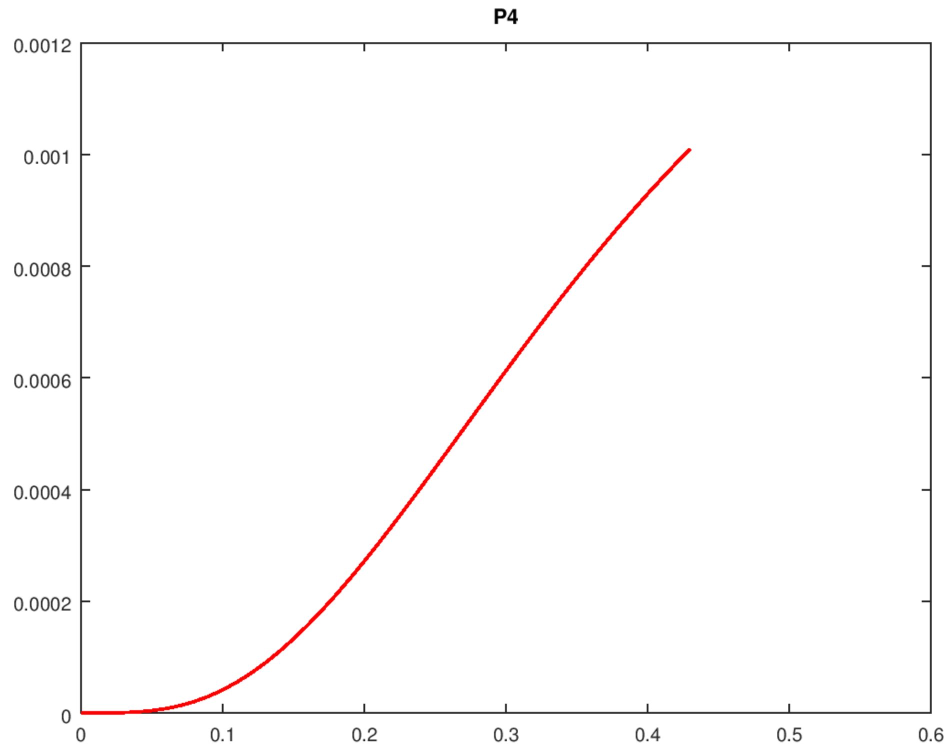
v) Παρακάτω παρατίθεται τα διαγράμματα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος σαν συναρτήσεις του χρόνου από την αρχική κατάσταση μέχρι οι πιθανότητες να έχουν απόσταση μικρότερη του 1% από τις εργοδικές πιθανότητες:


P0
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

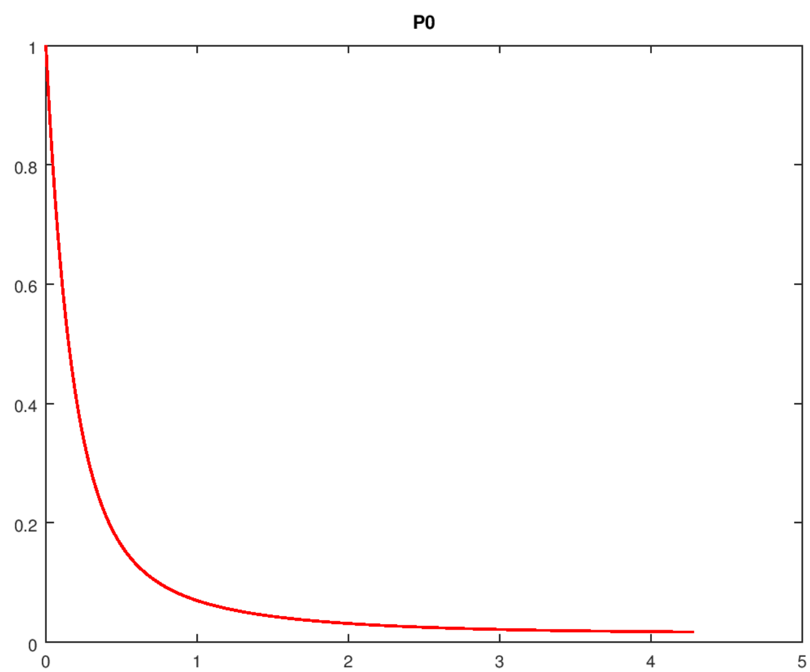

P1
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

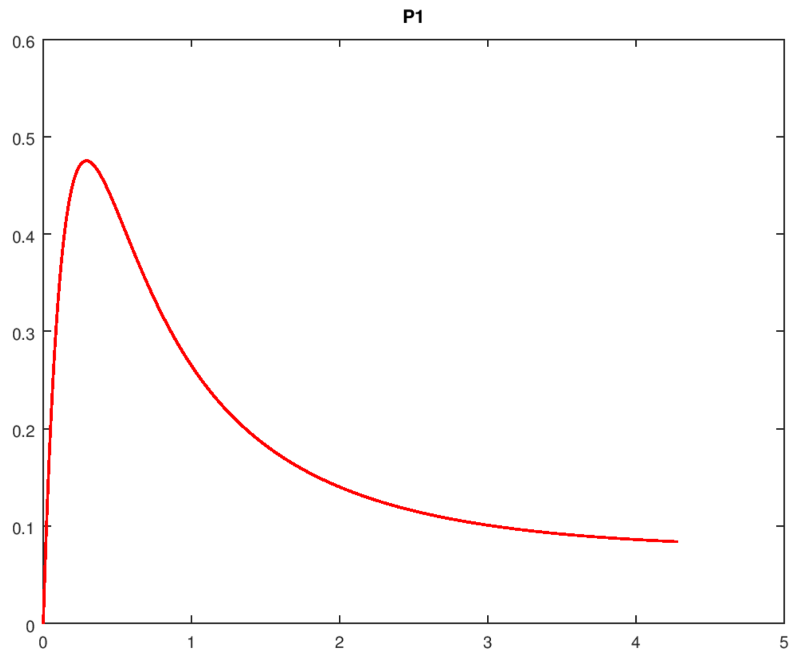

P2
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

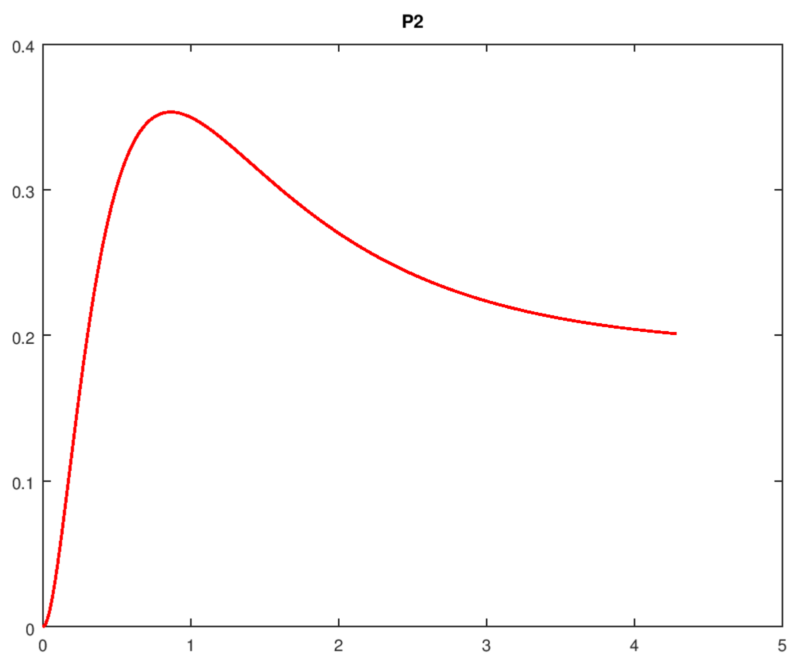

P3
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

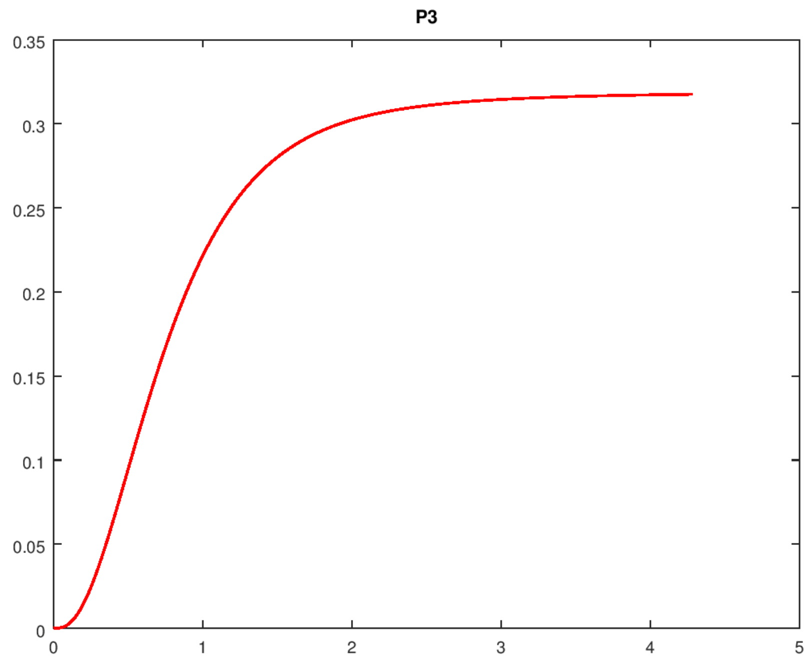


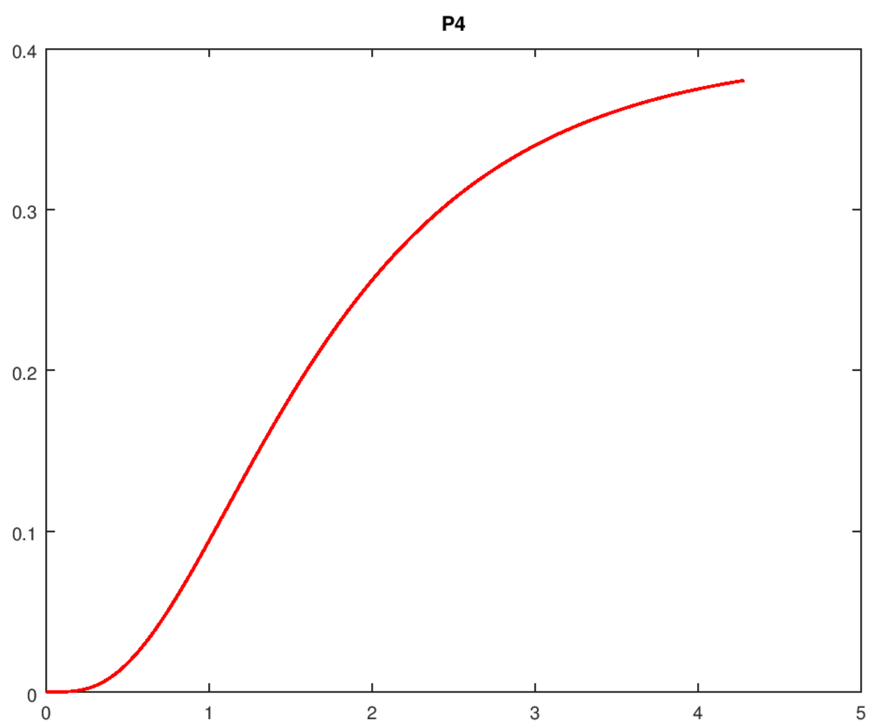
vi) Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμμα του ερωτήματος (v) για άλλες παραμέτρους:
   i) Για λ=5, μ=1:



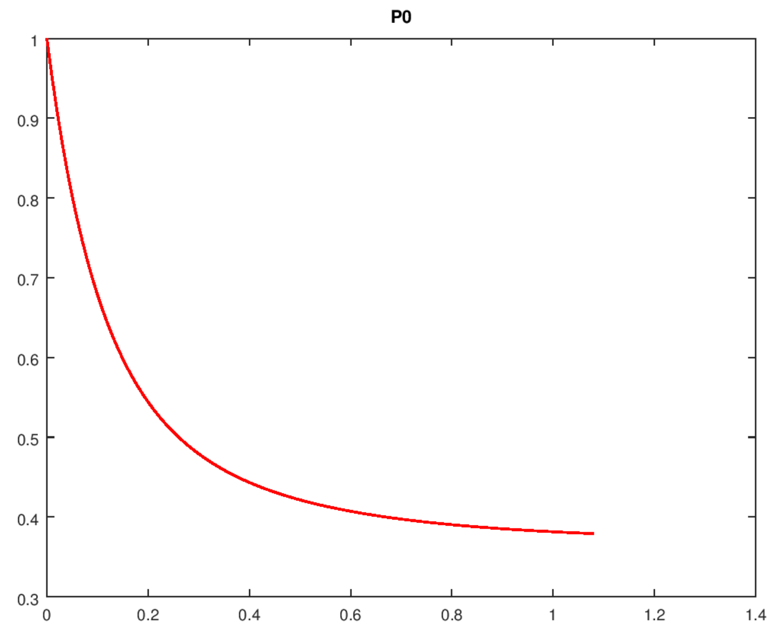

P1
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5


P2
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5

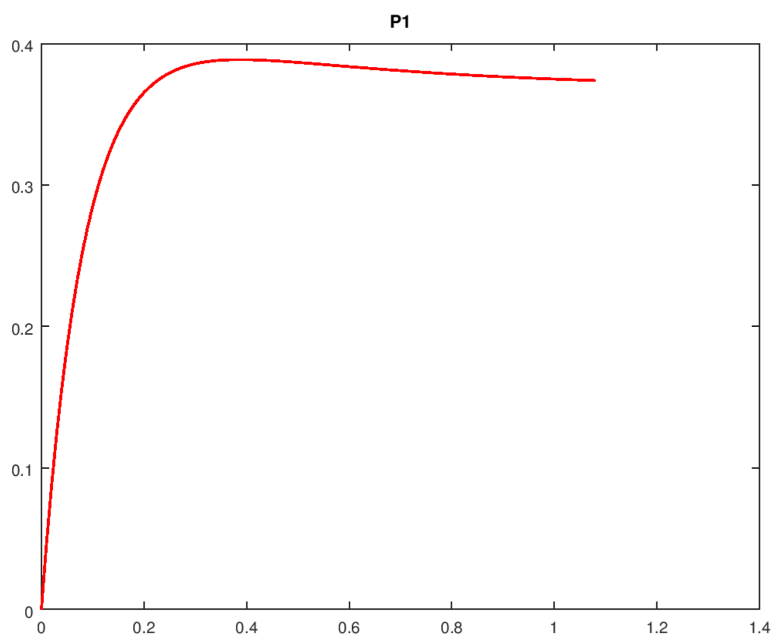

P3
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
1
2
3
4
5


P4
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5

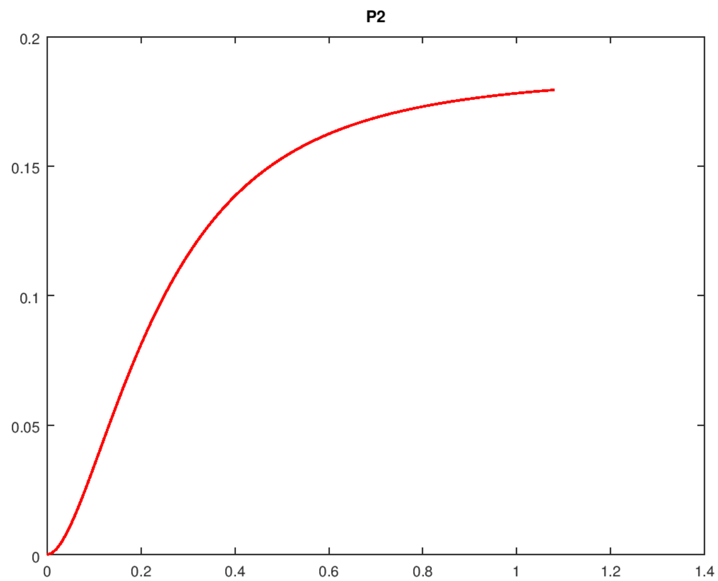
ii) Για λ=5, μ=5:

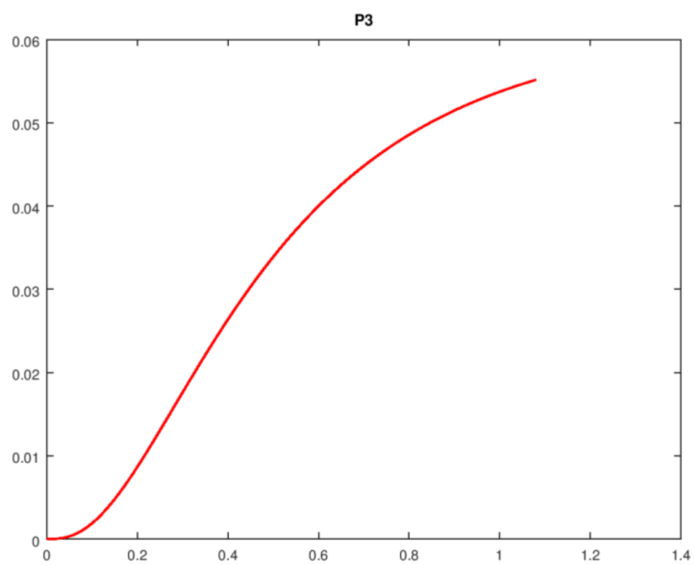


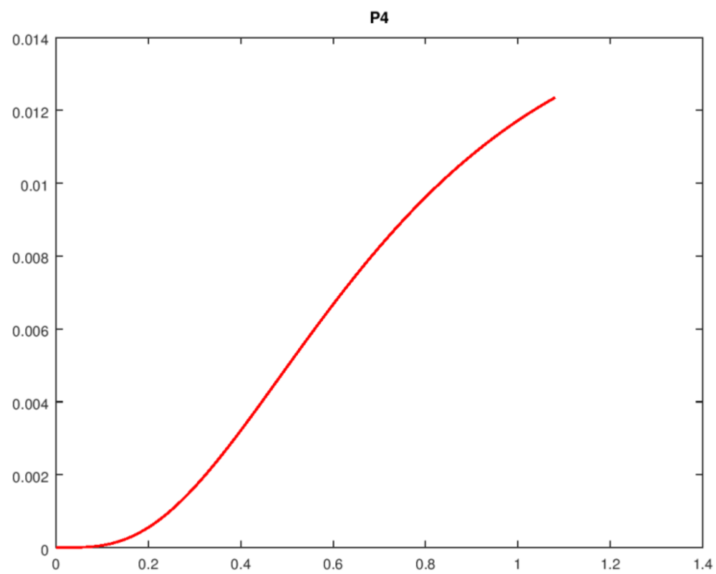
P0
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4



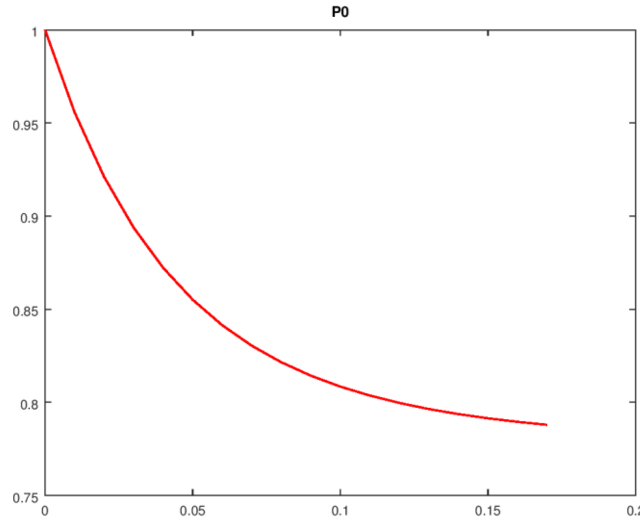
P1
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4

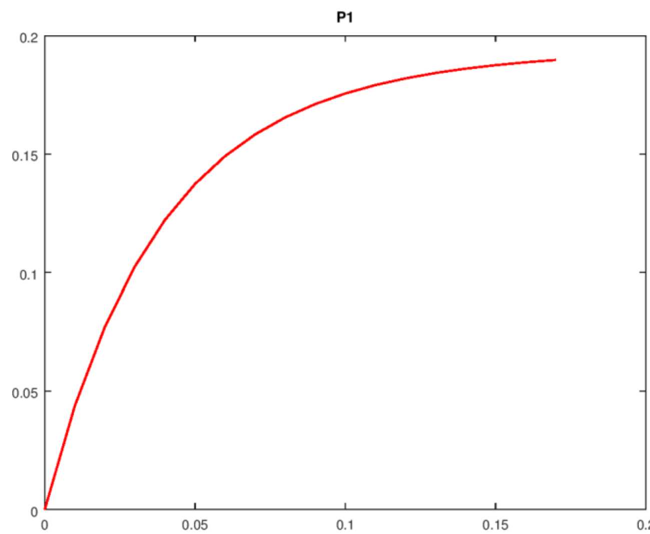

P2
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4

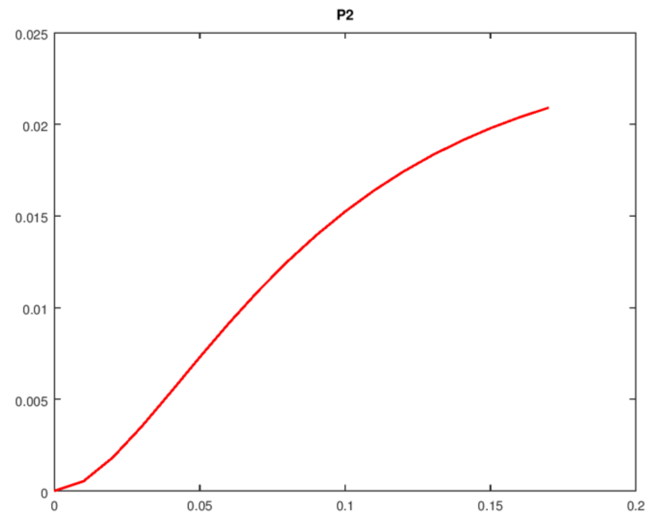

P3
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4

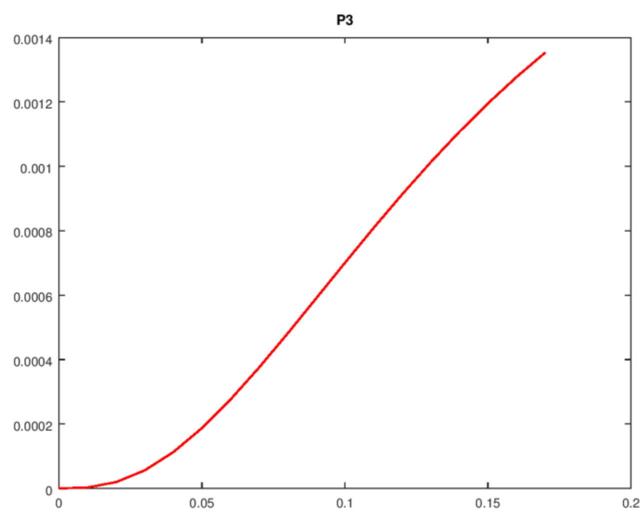

P4
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4

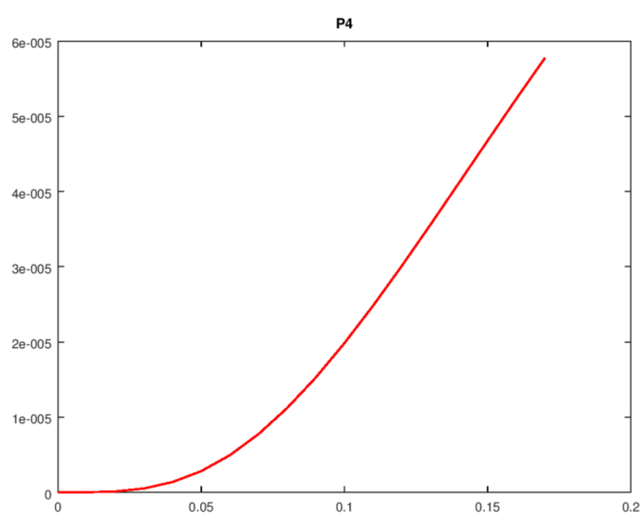
iii) Για λ=5, μ=20:






P2
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2


P3
0.0014
0.0012
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2


P4
6e-005
5e-005
4e-005
3e-005
2e-005
1e-005
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2

Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό είναι το μ, τόσο πιο γρήγορα η πιθανότητα P0 θα συγκλίνει στο μηδέν ενώ οι υπόλοιπες πιθανότητες αποκλίνουν απο το μηδέν πιο γρήγορα και αντίστροφα. Επίσης παρατηρούμε ότι από την πιθανότητα P0 μέχρι την πιθανότητα P4 η συμπεριφορά στην κυρτότητα αλλάζει.

Παράρτημα (κώδικας Lab2.m)

```
clc;
clear all;
close all;

############M/M/1 QUEUE ANALYSIS WITH OCTAVE############

# B

lambda=5;
mu=[6,7,8,9,10];
[U R Q X p0] = qsmm1( lambda,mu);

figure(1);
subplot(2,2,1);
plot(mu,U);
title("Server Utilization for each μ");
xlabel("μ");
ylabel("Server Utilization");
subplot(2,2,2);
plot(mu,R);
title("Server Response Time for each μ");
xlabel("μ");
ylabel("Server Response Time");
subplot(2,2,3);
plot(mu,Q);
title("Average Number of Requests for each μ");
xlabel("μ");
ylabel("Average Number of Requests");
subplot(2,2,4);
plot(mu,X);
title("Server Throughput for each μ");
xlabel("μ");
ylabel("Server Throughput");
```

```
##########COMPARISON OF SYSTEMS WITH 2 SERVERS##########

lambda=10;
mu=10;
[U R Q X p0 pm] = qsmmm( lambda, mu, 2 );
display("M/M/2 queue response time =");
display(R);

[U R Q X p0] = qsmm1( lambda/2, mu ); #Assuming that each of the
                                      #M/M/1 queues have the
same
                                      #propability of being used
by
                                      #the clients, then the
lambda
                                      #parameter of each queue
becomes
                                      #lambda times that
propability,which
                                      #is lambda/2.
display("2 M/M/1 parallel queues response time =");
display(R);

#################BIRTH-DEATH PROCESS#################
########IMPLEMENTATION IN A M/M/1/K SYSTEM###########

# B lambda=5, mu=10
states = [0,1,2,3,4];
initial_state = [1,0,0,0,0];
lambda = 5;
mu = 10;
births_B = [lambda,lambda/2,lambda/3,lambda/4];
deaths_D = [mu,mu,mu,mu];
# B-i
transition_matrix = ctmcbd(births_B,deaths_D);
display(transition_matrix);
# B-ii
P = ctmc(transition_matrix);
display("Ergodic propabilities (From P0 to P4):");
display(P);
# B-v
for i=[1,2,3,4,5]
  index = 0;
  for T=0:0.01:50
```

```
    index = index + 1;
    P0 = ctmc(transition_matrix,T,initial_state);
    Prob0(index) = P0(i);
    if P0-P < 0.01
      break;
    endif
  endfor

  T = 0:0.01:T;
  figure(i+1);
  plot(T,Prob0,"r","linewidth",1.3);
  title({"lambda=10, mu=5";strcat("P",num2str(i-1));});
endfor
# B-vi-i lambda=5, mu=1
clear Prob0,T;
states = [0,1,2,3,4];
initial_state = [1,0,0,0,0];
lambda = 5;
mu = 1;
births_B = [lambda,lambda/2,lambda/3,lambda/4];
deaths_D = [mu,mu,mu,mu];
transition_matrix = ctmcbd(births_B,deaths_D);
P = ctmc(transition_matrix);
for i=[1,2,3,4,5]
  index = 0;
  for T=0:0.01:50
    index = index + 1;
    P0 = ctmc(transition_matrix,T,initial_state);
    Prob0(index) = P0(i);
    if P0-P < 0.01
      break;
    endif
  endfor
  T = 0:0.01:T;
  figure(i+6);
  plot(T,Prob0,"r","linewidth",1.3);
  title({"lambda=5, mu=1";strcat("P",num2str(i-1));});
endfor
# B-vi-ii lambda=5, mu=5
clear Prob0,T;
states = [0,1,2,3,4];
initial_state = [1,0,0,0,0];
lambda = 5;
mu = 5;
```

```
births_B = [lambda,lambda/2,lambda/3,lambda/4];
deaths_D = [mu,mu,mu,mu];
transition_matrix = ctmcbd(births_B,deaths_D);
P = ctmc(transition_matrix);
for i=[1,2,3,4,5]
  index = 0;
  for T=0:0.01:50
    index = index + 1;
    P0 = ctmc(transition_matrix,T,initial_state);
    Prob0(index) = P0(i);
    if P0-P < 0.01
      break;
    endif
  endfor
  T = 0:0.01:T;
  figure(i+11);
  plot(T,Prob0,"r","linewidth",1.3);
  title({"lambda=5, mu=5";strcat("P",num2str(i-1));});
endfor
# B-vi-iii lambda=5, mu=20
clear Prob0,T;
states = [0,1,2,3,4];
initial_state = [1,0,0,0,0];
lambda = 5;
mu = 20;
births_B = [lambda,lambda/2,lambda/3,lambda/4];
deaths_D = [mu,mu,mu,mu];
transition_matrix = ctmcbd(births_B,deaths_D);
P = ctmc(transition_matrix);
for i=[1,2,3,4,5]
  index = 0;
  for T=0:0.01:50
    index = index + 1;
    P0 = ctmc(transition_matrix,T,initial_state);
    Prob0(index) = P0(i);
    if P0-P < 0.01
      break;
    endif
  endfor
  T = 0:0.01:T;
  figure(i+16);
  plot(T,Prob0,"r","linewidth",1.3);
  title({"lambda=5, mu=20";strcat("P",num2str(i-1));});
endfor
```