Συστήματα Αναμονής
(Queuing Systems)

5η Εργαστηριακή Άσκηση

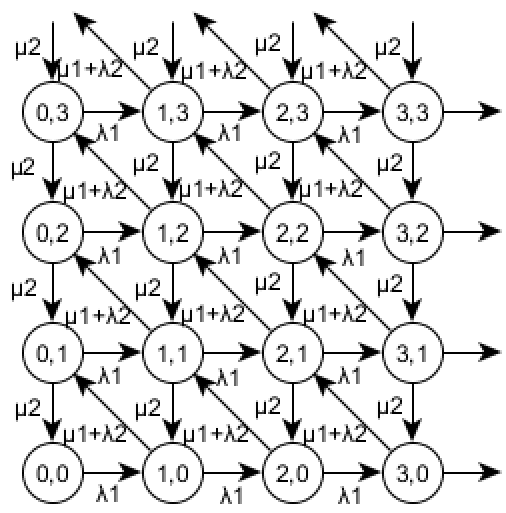
Λεούσης Σάββας

Α.Μ.: 03114945

Δίκτυο δύο εκθετικών ουρών εν σειρά

1. Οι παραδοχές που απαιτούνται ώστε να έχουν οι εργοδικές πιθανότητες του συστήματος τη μορφή γινομένου είναι να έχουμε:
    - Ένα ανοικτό δίκτυο M δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού (ουρών αναμονής) $Q_i, i = 1,2,\dots,M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i
    - Αφίξεις πελατών από εξωτερικές πηγές άμεσα συνδεδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού Q_s προς εξωτερικούς προορισμούς άμεσα συνδεδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού Q_d: Ανεξάρτητες ροές Poisson μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1,2,\dots,M\}$
    - Εσωτερική δρομολόγηση με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού Q_i στον κόμβο Q_j: r_{ij}
    - Έστω $\delta_{sd}(i) = 1$ πελάτες της ροής (s, d) διακινούνται μέσα από τον κόμβο κορμού Q_i ή αλλιώς $\delta_{sd}(i) = 0$, τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης Q_i διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό $\lambda_i = \sum_{d=1}^{M}\sum_{s=1}^{M}\gamma_{sd}\,\delta_{sd}(i)$
    - Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους αλλά αποκτούν χρόνο εκθυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή
2. 1η ουρά: $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$

    2η ουρά: $\rho_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}$
3.



4. Είναι $P(n) = P(n_1, n_2) = P(n_1)P(n_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2} = K\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$

    - Για $n_1, n_2 > 0$:

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(n_1,n_2) = \lambda_1 P(n_1-1,n_2) + \mu_2 P(n_1,n_2+1) + (\mu_1+\lambda_2)P(n_1+1,n_2-1)$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\mu_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}$$
$$=\lambda_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1-1}\left(\frac{\mu_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}+\mu_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\mu_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2+1}+(\mu_1$$
$$+\lambda_2)PK\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1+1}\left(\frac{\mu_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1}$$

- Για $n_1=0, n_2>0$:

$$(\lambda_1+\mu_2)P(0,n_2)=(\mu_1+\lambda_2)P(1,n_2-1)+\mu_2 P(0,n_2+1)$$
$$(\lambda_1+\mu_2)K\left(\frac{\mu_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}=(\mu_1+\lambda_2)\frac{\lambda_1}{\mu_1}\left(\frac{\mu_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1}+\mu_2\left(\frac{\mu_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2+1}$$

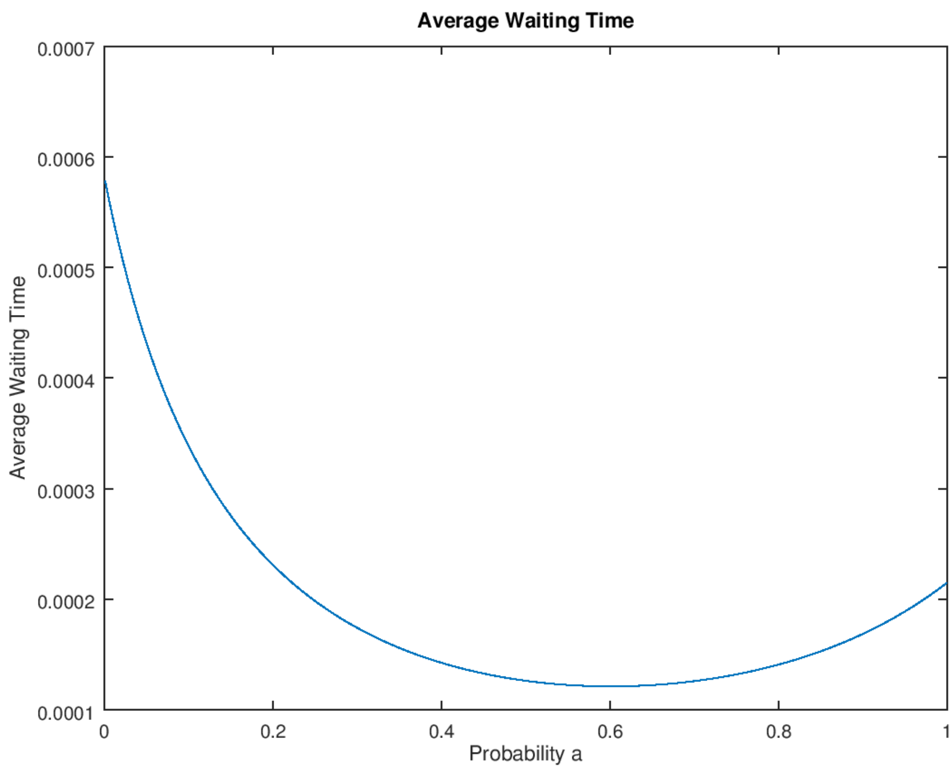
- Για $n_1>0, n_2=0$:

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(n_1,0)=\lambda_1 P(n_1-1,0)+\mu_2 P(n_1,1)$$
$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}=\lambda_1\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1-1}+\mu_2\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\mu_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)$$

5. Είναι $E(T)=\frac{1}{\mu_1-\lambda_1}+\frac{1}{\mu_2-\mu_1-\lambda_2}=\frac{\mu_2-\lambda_2-\lambda_1}{(\mu_1-\lambda_1)(\mu_2-\mu_1-\lambda_2)}$

<u>Δίκτυο με εναλλακτική δρομολόγηση</u>

1. Πρέπει:
    - Οι χρόνοι εξυπηρέτησης να μην διατήρουν τα μεγέθη τους όταν προωθούνται μεταξύ συστημάτων εξυπηρέτησης. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ανατίθενται σε κάθε σύστημα σαν ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές.
    - Οι εργοδικές πιθανότητες έχουν μορφή γινομένου.
2. Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το παρακάτω:



Με τη βοήθεια του Octave, η βέλτιστη τιμή που ελαχιστοποιεί το E(T) και ο ελάχιστος χρόνος καθυστέρησης E(T) είναι τα παρακάτω:

```
lowest_E =   1.2120e-004
best_a =  0.60100
```

<u>Ανοιχτό δίκτυο ουρών αναμονής</u>

1. Οι παραδοχές που απαιτούνται ώστε το δίκτυο να μπορεί να μελετηθεί ως ένα ανοιχτό δίκτυο με το θεώρημα Jackson είναι να έχουμε:
    a. Ένα ανοικτό δίκτυο M δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού (ουρών αναμονής) $Q_i, i = 1,2, \dots, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i
    b. Αφίξεις πελατών από εξωτερικές πηγές άμεσα συνδεδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού Q_s προς εξωτερικούς προορισμούς άμεσα συνδεδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού Q_d: Ανεξάρτητες ροές Poisson μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1,2, \dots, M\}$
    c. Εσωτερική δρομολόγηση με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού Q_i στον κόμβο Q_j: r_{ij}
    d. Έστω $\delta_{sd}(i) = 1$ πελάτες της ροής (s, d) διακινούνται μέσα από τον κόμβο κορμού Q_i ή αλλιώς $\delta_{sd}(i) = 0$, τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης Q_i διαπερνούν ροές

με συνολικό μέσο ρυθμό $\lambda_i = \sum_{d=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \gamma_{sd}\, \delta_{sd}(i)$

e. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους αλλά αποκτούν χρόνο εκθυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή

2. Η ένταση του φορτίου που δέχεται κάθε ουρά του δικτύου είναι:
   - $1^η$ ουρά: $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$
   - $2^η$ ουρά: $\rho_2 = \frac{\lambda_2 + \frac{2}{7}\lambda_1}{\mu_2}$
   - $3^η$ ουρά: $\rho_3 = \frac{\frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_3}$
   - $4^η$ ουρά: $\rho_4 = \frac{\frac{3}{7}\lambda_1}{\mu_4}$
   - $5^η$ ουρά: $\rho_5 = \frac{\lambda_2 + \frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_5}$

   Η ζητούμενη συνάρτηση intensities είναι η παρακάτω:

```
function [rho ergodicity] = intesities(lambda, mu)
  rho(1)=lambda(1)/mu(1);
  rho(2)=(lambda(2)+(2/7)*lambda_1(1))/mu(2);
  rho(3)=((4/7)*lambda(1))/mu(3);
  rho(4)=((3/7)*lambda(1))/mu(4);
  rho(5)=(lambda(2)+(4/7)*lambda(1))/mu(5);
  ergodicity=1;
  for i=1:5
    if rho(i)>1
      ergodicity=0;
    endif
  endfor
  #display(rho);
endfunction
```

3. Η ζητούμενη συνάρτηση mean_clients είναι η παρακάτω:

```
function clients = mean_clients(lambda, mu)
  [rho erg] = intesities(lambda,mu);
  if erg == 1
    for i=1:5
      clients(i)=rho(i)/(1-rho(i));
    endfor
  else
    for i=1:5
      clients(i)=0;
    endfor
  endif
endfunction
```

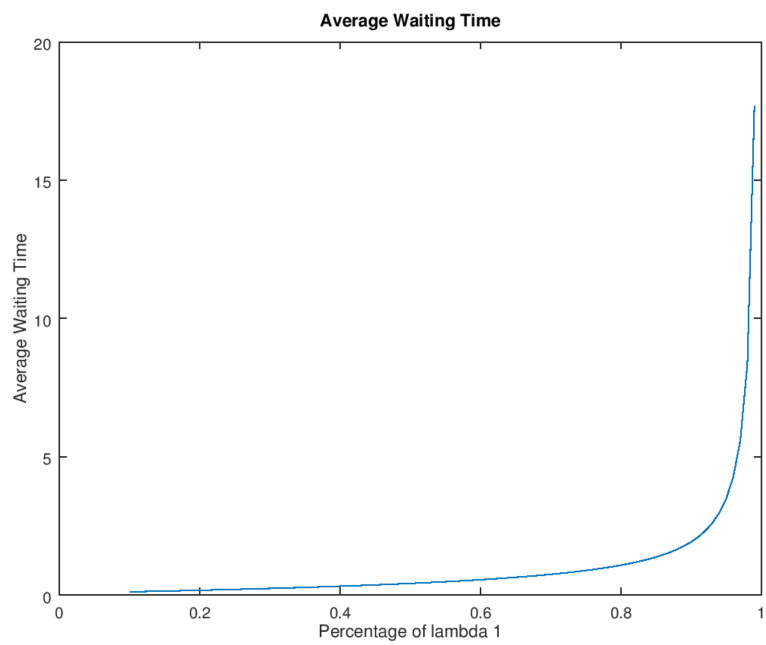
4. Οι εντάσεις των φορτίων και ο μέσος χρόνος καθυστέρησης από άκρο σε άκρο είναι τα παρακάτω:

```
rho =

   0.66667   0.42857   0.28571   0.24490   0.54762

Average_Time =  0.93697
```

5. Στενωπός του δικτύου είναι η ουρά 1, και το καλύτερο λ_1 είναι το παρακάτω:

```
best_lambda =  6.0100
```

6. Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το παρακάτω:



Παράρτημα (κώδικας Lab5.m)

```
clc;
clear all;
close all;

##### NETWORK WITH ALTERNATIVE ROUTING #####

#2#
lambda = 10*10^3;
b_1= 1875000;
b_2= 1500000;
mu_1=b_1/128;
mu_2=b_2/128;
i=1;
best_a=0;
lowest_E=9999999;
for a=0.001:0.001:0.999;
  E(i)=(1/(mu_1-a*lambda))*a + (1/(mu_2-(1-a)*lambda))*(1-a);
  if E(i)<lowest_E;
    lowest_E = E(i);
    best_a=a;
   endif
  i++;
endfor
#figure(1);
#plot(0.001:0.001:0.999,E);
#xlabel("Probability a");
#ylabel("Average Waiting Time");
#title("Average Waiting Time");
#display(lowest_E);
#display(best_a);

##### OPEN QUEUING SYSTEM NETWORK #####

#2#

function [rho ergodicity] = intensities(lambda, mu)
  rho(1)=lambda(1)/mu(1);
  rho(2)=(lambda(2)+(2/7)*lambda(1))/mu(2);
  rho(3)=((4/7)*lambda(1))/mu(3);
  rho(4)=((3/7)*lambda(1))/mu(4);
  rho(5)=(lambda(2)+(4/7)*lambda(1))/mu(5);
  ergodicity=1;
  for i=1:5
    if rho(i)>1
      ergodicity=0;
    endif
  endfor
  display(rho);
endfunction
```

```
#3#

function clients = mean_clients(lambda, mu)
  [rho erg] = intensities(lambda,mu);
  if erg == 1
    for i=1:5
      clients(i)=rho(i)/(1-rho(i));
    endfor
  else
    for i=1:5
      clients(i)=0;
    endfor
  endif
endfunction

#4#

lambda = [4 1];
mu = [6 5 8 7 6];

[rho erg] = intensities(lambda,mu);
mean_clients_ = mean_clients(lambda,mu);
Average_Time =
(mean_clients_(1)+mean_clients_(2)+mean_clients_(3)+mean_clients_
(4)+mean_clients_(5))/(lambda(1)+lambda(2));
display(Average_Time);

#5#

mu = [6 5 8 7 6];
best_lambda=99;
lambda_1 = 4;
while 1
  lambda=[lambda_1 1];
  [rho erg]=intensities(lambda,mu);
  if erg == 0
     best_lambda = lambda_1;
     break;
  endif
  lambda_1 = lambda_1 + 0.01;
endwhile
display(best_lambda);

#6#
mu = [6 5 8 7 6];
a = 1;
mean_clients_ = zeros(1, 5);
for i = 0.1:0.01:0.99
  list=[best_lambda*i 1];
  mean_clients_ = mean_clients(list,mu);
  Average_Time_(a) =
(mean_clients_(1)+mean_clients_(2)+mean_clients_(3)+mean_clients_
```

```
 (4)+mean_clients_(5))/(lambda(1)+lambda(2));
   a++;
 endfor
 figure(2)
 plot(0.1:0.01:0.99,Average_Time_);
 title("Average Waiting Time");
 xlabel("Percentage of lambda 1");
ylabel("Average Waiting Time");
```