

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

2016

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = (x)' = 1$ για κάθε x στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών. (10 Μονάδες)
2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, όταν το ν είναι περιττός αριθμός. (5 Μονάδες)
3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή ή την λέξη Λάθος εαν πρόταση είναι λανθασμένη.
 - a) $(\eta\mu(x))' = \sigma\upsilon\nu(x)$ (2 Μονάδες)
 - b) $(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (2 Μονάδες)
 - c) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων (2 Μονάδες)
 - d) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ όπου l_1, l_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l_1 l_2$ (2 Μονάδες)
 - e) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (2 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης

| Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i | Αριθμός Υπαλλήλων ν_i | Αθροιστική Συχνότητα N_i | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ | $x_i\nu_i$ |
|--|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|------------|
| 0 | 5 | | | |
| 1 | | 9 | | |
| 2 | | | 10 | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| ΣΥΝΟΛΑ | | $\nu = 50$ | | |

1. Αν γνωρίζετε ότι η 5^η συχνότητα (ν_5) ισούται με την 1^η συχνότητα (ν_1), να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.
(10 Μονάδες)
2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή \bar{x} των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων. (5 Μονάδες)
3. Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες
(5 Μονάδες)
4. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες
(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$$

1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$
(6 Μονάδες)
2. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$
(4 Μονάδες)
3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα
(12 Μονάδες)
4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f .
(3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x - 3, \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν $\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$ (8 Μονάδες)
2. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την $f'(x)$ (3 Μονάδες)
3. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(-2, f(-2))$ $\alpha = 2$ (8 Μονάδες)
4. Αν τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4), A_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στην ευθεία $\epsilon : y = -2x - 7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουμε μέση τιμή $\bar{x} = 2$, να βρείτε την μέση τιμή \bar{y} των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών. (6 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

1. Ορισμός σχολικού βιβλίου, στην σελίδα 28. Απο τον ορισμό, πως ορίζεται η παράγωγος

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Αντικαθιστούμε στην όπου $f(x) = x$ και έτσι έχουμε

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

2. Ορισμός σχολικού βιβλίου, στην σελίδα 87.

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση όταν το n είναι περιττός.

3. Οι απαντήσεις Σωστό / Λάθος

- i) Σωστό (βιβλίο σελ 30)
- ii) Λάθος (βιβλίο σελ 28)
- iii) Σωστό (βιβλίο σελ 95)
- iv) Σωστό (βιβλίο σελ 16)
- v) Σωστό (βιβλίο σελ 13)

ΘΕΜΑ Β

- i) Αρκούσε να συμπληρωθεί ο πίνακας, δεν είναι αναγκαίο να δωθεί ο τρόπος εύρεσης των αριθμών στα κελια. Εδώ θα δωθεί η λύση όσο πιο επεξηγηματικά γίνεται, ο μαθητής όμως δεν χρειάζεται να κάνει όλα αυτά τα βήματα εδώ στο γραπτό του, παρα μόνο να παραθέσει την τελική λύση του πίνακα. Βάζοντας λοιπόν στην θέση $\nu_5 = 5$ όσον δηλαδή και στην θέση ν_1 και συμπληρώνοντας επίσης και το σύνολο που μας το δίνει η εκφώνηση, έχουμε

| Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i | Αριθμός Υπαλλήλων ν_i | Αθροιστική Συχνότητα N_i | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ | $x_i\nu_i$ |
|--|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|------------|
| 0 | 5 | | | |
| 1 | | 9 | | |
| 2 | | | 10 | |
| 3 | | | | |
| 4 | 5 | | | |
| ΣΥΝΟΛΑ | 20 | | | |

Απο την αθροιστική συχνότητα N_2 προκύπτει ότι στην θέση ν_2 πρέπει να έχει 4. Επίσης αφού το $f_3\% = 10$ και ο πληθυσμός είναι 20, προκύπτει ότι στην θέση ν_3 έχουμε $f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu} \cdot 100 \rightarrow 10 = \frac{\nu_3}{20} \cdot 100$ Λύνουμε την απλή αυτή εξίσωση και έχουμε $\nu_3 = 2$ Αφού όμως έχουμε βρεί όλα τα ν_i πλην ενός και το σύνολο είναι 20, άρα αυτό που μας λείπει, το ν_4 θαναι το σύνολο μείον όλα τα υπόλοιπα, οπότε $\nu_4 = 4$. Αρα ο πίνακας θαναι

| Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i | Αριθμός Υπαλλήλων ν_i | Αθροιστική Συχνότητα N_i | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ | $x_i\nu_i$ |
|--|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|------------|
| 0 | 5 | | | |
| 1 | 4 | 9 | | |
| 2 | 2 | | 10 | |
| 3 | 4 | | | |
| 4 | 5 | | | |
| ΣΥΝΟΛΑ | 20 | | | |

Οπότε η συμπλήρωση όλων των υπόλοιπων στηλών γίνεται κατα τα γνωστά.

| Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i | Αριθμός Υπαλλήλων ν_i | Αθροιστική Συχνότητα N_i | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ | $x_i\nu_i$ |
|--|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|------------|
| 0 | 5 | 5 | 25 | 0 |
| 1 | 4 | 9 | 20 | 4 |
| 2 | 2 | 11 | 10 | 4 |
| 3 | 4 | 15 | 20 | 12 |
| 4 | 5 | 20 | 25 | 20 |
| ΣΥΝΟΛΑ | 20 | | 100 | 40 |

ii) Γνωρίζουμε ότι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{40}{20} = 2$

- iii) Αυτοί που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες, είναι οι τέσσερις πρώτες γραμμές, και το άθροισμα των υπαλλήλων προκύπτει αμέσως απ την αθροιστική συχνότητα είτε αθροίζοντας τις συχνότητες για 0 έως και 4 πιστωτικές κάρτες. Το αποτέλεσμα είναι 15
- iv) Προσοχή, ζητά ποσοστό. Τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες σημαίνει ότι πρέπει να έχει 2 ή περισσότερες, οπότε αθροίζουμε τα ποσοστά ($f_i\%$) των σχετικών περιπτώσεων. Το αποτέλεσμα είναι 55

ΘΕΜΑ Γ

- i) Ζητείται να αποδειχθεί ότι η παράγωγος της f ισουται με κάτι. Οπότε θα βρούμε την παράγωγο της f και θα δούμε εαν μας δίνει το αποτέλεσμα που θέλουμε.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \right)' = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' + \left(\frac{1}{2} \right)' = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' + 0$$

$$= \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

- ii) Ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος. Όταν μας ζητά πόσο είναι ο ρυθμός μεταβολής για συγκεκριμένο σημείο x , αρα μας ζητα την τιμή, το αποτέλεσμα, της παραγώγου, στο σημείο x . Οπότε χρησιμοποιούμε τον τύπο της παραγώγου που βρήκαμε πιο πάνω, και κάνουμε αντικατάσταση και βρίσκουμε τις τιμές:

$$\text{a. } f'(-1) = \frac{1 - (-1)^2}{((-1)^2 + 1)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{b. } f'(1) = \frac{1 - 1^2}{(1^2 + 1)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

- iii) Για την μελέτη της μονοτονίας και εύρεση των ακροτάτων, πρέπει να βρούμε τις ρίζες της παραγώγου. Θέτουμε την παράγωγο ίσο με μηδέν και επιλύουμε.
 $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0$ Έχουμε ρητή συνάρτηση, ο παρανομαστής είναι παντού θετικός (μιας και υψώνεται στο τετράγωνο, άρα αρκεί ο αριθμητής να είναι κάπου 0. Έχουμε:

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ Άρα έχουμε δυο μόνο ρίζες, η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, πεδίο ορισμού όλο το \mathbb{R} Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών όπου η μια ρίζα είναι το -1 και η άλλη το 1.

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ | | |
|------------|-----------|------|-----|---------------------|-----|-----|
| $-x^2 + 1$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $F(x)$ | | | | $\tau.\mu.$ | | |
| | | | | $\tau.\varepsilon.$ | | |

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ με τιμή $f(-1) = 0$ Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 1$ με τιμή $f(1) = 1$

- iv) Επειδή οι αριθμοί 2015 και 2016 είναι μέσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ σημαίνει ότι βρίσκονται σε διάστημα όπου η συνάρτηση είναι φθίνουσα, όπως έχουμε δει προηγουμένως. Αυτό, με βάση την θεωρία, μας λέει ότι εάν είναι φθίνουσα, τότε εάν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Οπότε συμπεραίνουμε ότι $f(2015) > f(2016)$ (Θα μπορούσαμε να κάνουμε και τις πράξεις και θα ήταν σωστή και έτσι η απάντηση, αλλά είναι πολύ πιο χρονοβόρο και η ενδεδειγμένη λύση είναι όπως παραπάνω).

ΘΕΜΑ Δ

- i) Υπολογίζουμε το α κανοντας αντικατάσταση στο όριο

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \frac{0}{0} \text{ Απροσδιόριστη μορφή}$$

Για να φύγει η απροσδιόριστη μορφή κάνουμε γινόμενο παραγόντων τον αριθμητή, είτε επιλύοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση είτε με μέθοδο Χόρνερ (διααιρούμε τον αριθμητή πολυώνυμο με το όριο, δηλαδή με 4). Έτσι γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x - 2)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} x - 2 = 2$$

ii) Βάζουμε στην συνάρτηση στην θέση του α το 2 και έτσι έχουμε:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

Οπότε πρέπει να βρούμε την παράγωγο αυτής

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 3)' = (x^2)' + (2x)' - (3)' = 2x + 2$$

iii) Για να βρούμε την συνάρτησης της εφαπτομένης σε ένα σημείο, χρειαζόμαστε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό, και της παραγώγου της

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$$

$$f'(-2) = 2(-2) + 2 = -2$$

Η συνάρτηση εφαπτομένης έχει τύπο $y = \lambda x + \beta$

και ξέρουμε ότι $\lambda = f'(-2) = -2$ Άρα $y = -2x + \beta$. Μένει να βρούμε το β

Οποτε αφού η εφαπτομένη "περνά" απο το σημείο $M(-2, f(-2))$ δηλαδή $(-2, -3)$ αρα για $x = -2$ θα πρέπει να έχει $y = -3$. Αντικαθιστούμε προκειμένου να βρούμε το β .

$$-3 = -2(-2) + \beta \Rightarrow -3 = -4 + \beta \Rightarrow \beta = -7 \text{ Αντικαθιστούμε και έχουμε}$$

$$y = -2x - 7$$

iv) Θα δωθούν δυο τρόποι επίλυσης

(a) (του υπουργείου) Ισχύει ότι $y_i = -2x_i - 7$ με $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Άρα $\bar{y} = -2\bar{x} - 7 = -2 \cdot 2 - 7 = -4 - 7 = -11$

(b) (άλλος τρόπος) Ξέρουμε ότι ο μέσος όρος των x_i είναι 2. Αυτό σημαίνει ότι $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 2 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 10$

$$\text{Θέλουμε τον μέσο όρο των } y_i, \text{ άρα } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} =$$

$$\frac{-2x_1 - 7 - 2x_2 - 7 - 2x_3 - 7 - 2x_4 - 7 - 2x_5 - 7}{5} = \frac{-2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - 5 \cdot 7}{5} =$$

$$\frac{-2 \cdot 10 - 35}{5} = \frac{-55}{5} = -11$$