ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2011

ΘΕΜΑ Α

1. Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής; (6 Μονάδες)

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση ειναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εαν πρόταση είναι λανθασμένη.

   a Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές. (2 Μονάδες)

   b Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και ειναι $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$ (2 Μονάδες)

   c Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει: $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g'(x), x \in \mathbb{R}$ (2 Μονάδες)

   d Ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta \eta\mu x dx = \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha$ (2 Μονάδες)

   e Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). (2 Μονάδες)

3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω ισότητες:

   a. $(\ln x)' = ...$, με $x > 0$. (3 Μονάδες)

   b. $(\eta\mu x)' = ...$ (3 Μονάδες)

   c. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = ...$ (3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x < 4 \\ \alpha, & \text{αν } x = 4 \\ \dfrac{x - 4}{\sqrt{2} - 2} - 3, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

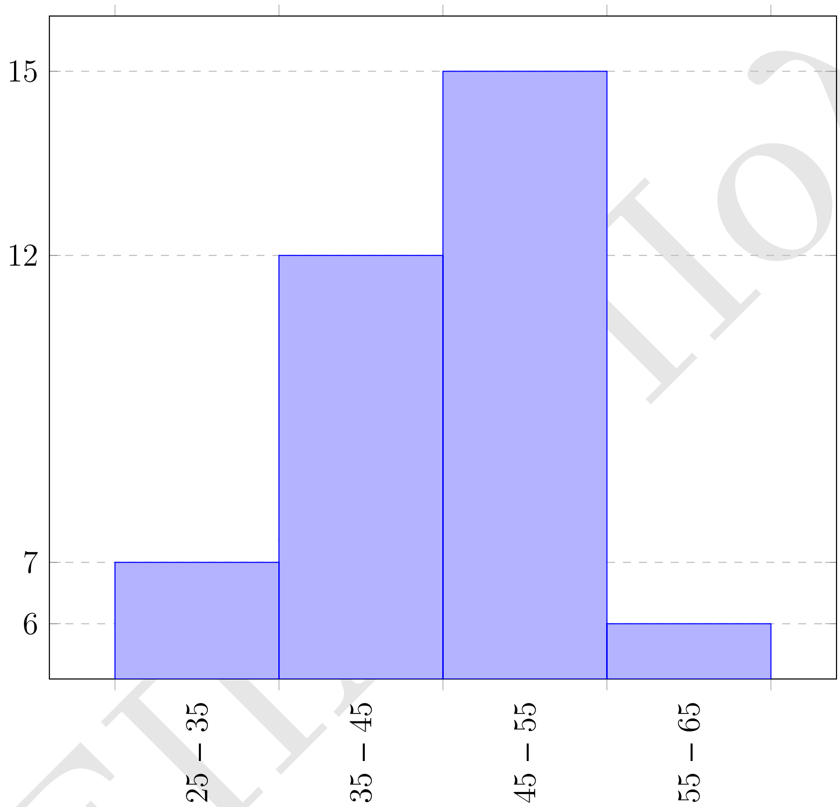
a. Να βρείτε το $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ (10 Μονάδες)

b. Να βρείτε το $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ (10 Μονάδες)

c. Να βρείτε για ποιά τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$. (5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



a. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες $[,)$	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα ν_i	$K_i \cdot \nu_i$	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$
$[25, 35)$				
$[35, 45)$				
$[45, 55)$				
$[55, 65)$				
ΣΥΝΟΛΑ				

(10 Μονάδες)

b. Να υπολογίσετε την μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων. (5 Μονάδες)

c. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών; (5 Μονάδες)

d. Τι ποσοστό των εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών; (5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$

a. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της. (6 Μονάδες)

b. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f. (5 Μονάδες)

c. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_1^3 f'(x)dx$ (6 Μονάδες)

d. Αν $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$ με $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 3$. (8 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

1. Ορισμός σχολικού βιβλίου. Εύρος μιας μεταβλητής ονομάζεται η διαφορά της μικρότερης τιμής απο την μεγαλύτερη τιμή.
2. 1.Σ 2.Σ 3.Λ 4.Λ 5.Σ
3. a. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ με $x > 0$

   b. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

   c. $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

ΘΕΜΑ Β

a. $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-7x+12}{x-4} = \frac{4^2-7\cdot 4+12}{4-4} = \frac{0}{0}$ άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή.

Μπορούμε να το επιλύσουμε δημιουργώντας γινόμενο παραγόντων προκειμένου να εξαλειφθεί ο παράγοντας που δημιουργεί 0 στον αριθμητή και στον παρανομαστή, και ο οποίος ειναι το $x-4$. Μπορούμε και με την μέθοδο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης και με την διαίρεση πολυωνύμου, ή σχήμα Horner, διαιρώντας το $x^3-7x+12$ με το $x-4$. Το αποτέλεσμα είναι ότι $x^2-7x+12 = (x-3)(x-4)$.
Οπότε έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-7x+12}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{(x-3)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}} = \lim_{x\to 4^-} x-3 = 4-3 = 1$

b. $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3\right) = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} - 3 = \frac{0}{0} - 3$ Απροσδιόριστη μορφή.

$$\lim_{x\to 4^+} \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3\right) = \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3\right) =$$
$$\lim_{x\to 4^+} \left(\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{((\sqrt{x})^2-2^2)} - 3\right) = \lim_{x\to 4^+} \left(\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}} - 3\right) = \tag{1}$$
$$\lim_{x\to 4^+} \left((\sqrt{x}+2)-3\right) = \sqrt{4}+2-3 = 1$$

c. Πρέπει $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$. Αρα πρέπει $f(4) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

ΘΕΜΑ Γ

a. Ακολουθεί ο πίνακας.

Ηλικίες $[,)$	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$K_i \cdot \nu_i$	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$
$[25, 35)$	30	7	7	210	17,5
$[35, 45)$	40	12	19	480	30
$[45, 55)$	50	15	34	750	37,5
$[55, 65)$	60	6	40	360	15
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 40$		1800	100

$$f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$$

b. $\bar{x} = \dfrac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3 + K_4\nu_4}{\nu} = \dfrac{1800}{40} = 45$ έτη

c. Τουλάχιστον 45 ετών είναι $\nu_3 + \nu_4 = 15 + 6 = 21$ εργαζόμενοι.

d. Κάτω των 35 ετών είναι 17,5

ΘΕΜΑ Δ

a. Για να μελετήσουμε την μονοτονία της συνάρτησης, πρέπει να βρούμε σε ποιά διαστήματα του πεδίου ορισμού της είναι αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα. Για να βρούμε τα διαστήματα αρκεί να βρούμε τα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης (ακρότατα). Αρα η παράγωγος εχει ρίζες λύνοντας την εξίσωση:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$3x^2-12x+9$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

b. Στο $x_1 = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 5$ στο $x_2 = 3$ η

c. $I = \int_1^3 f'(x)dx = [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = -4$

d. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$g(x) = 3x^2 - 12x + 9$ άρα $g(x) = 0$.

Λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση και έχουμε δύο λύσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$

Για $x < 1$ είναι $|g(x)| = g(x)$.

Για $1 < x < 3$ είναι $|g(x)| = -g(x)$.

$$E = \int_0^3 (g(x))dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^3 -g(x)dx =$$

$$\int_0^1 (3x^2 - 12x + 9)dx - \int_1^3 (3x^2 - 12x + 9)dx =$$

$$\left[3\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 9x\right]_0^1 - \left[3\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 9x\right]_1^3 =$$

$$[x^3 - 6x^2 + 9x]_0^1 - [x^3 - 6x^2 + 9x]_1^3 =$$

$$[1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 - (0^3 - 6\cdot 0^2 + 9\cdot 0)] - [3^3 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3 - (1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1)] = 8$$
τ.μ.

[0]Σάββας Παυλίδης, 2014. Δημιουργημένο με LaTeX