ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΑΛ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2010

ΘΕΜΑ Α

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσημη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (5 Μονάδες)

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση ειναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εαν πρόταση είναι λανθασμένη.

   a Η μέση τιμή δεν επηρεάζεται απο τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. (3 Μονάδες)

   b Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και ειναι $l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ (3 Μονάδες)

   c Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσημη στο x_0 (3 Μονάδες)

   d Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (3 Μονάδες)

3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω ισότητες:

   a. $(\frac{f}{g})' = \ldots$ (2 Μονάδες)

   b. $(\sqrt{x})' = \ldots\ldots.$ (2 Μονάδες)

   c. $(e^x)' = \ldots\ldots.$ (2 Μονάδες)

   d. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \ldots$ (2 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Οι ημέρες απουσιας των 50 υπαλλήλων μιας εταιρίας απο την εργασίας τους, τον περασμένο μήνα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι ν_i	Σχετική Συχνότητα % $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα % $F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
0	8				
1	10				
2					
3	10				
4	5				
5	2				
Αθροίσματα					

a. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε. (10 Μονάδες)

b. Να υπολογίσετε την μέση τιμή της μεταβλητής x. (5 Μονάδες)

c. Να υπολογίσετε την διάμεσο της μεταβλητής x. (5 Μονάδες)

d. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των υπαλλήλων που απουσίαζαν απο 2 έως και 4 ημέρες. (5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}, & \text{αν } x < 1 \\ \sqrt{x+3} + \alpha, & \text{αν } x \geq 1 \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ (7 Μονάδες)

b. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ (7 Μονάδες)

c. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. (5 Μονάδες)

d. Για $\alpha = -3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $= 3f(0) + 2f(6)$. (6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται απο το σημείο Α(0,1) τότε:

a. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β. (8 Μονάδες)

b. Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. (6 Μονάδες)

c. Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f. (6 Μονάδες)

d. Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$ (5 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

1. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ 175
2. α.Λ β.Σ γ.Σ δ.Λ
3. a. $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

   b. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ όπου $x \geq 0$

   c. $(e^x)' = e^x$

   d. $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

ΘΕΜΑ Β

a. Συμπληρώνουμε τον πίνακα, οι υπάλληλοι ειναι 50, άρα ο πλυθυσμός είναι 50. Οπότε λείπει ένα μόνο στοιχείο στις συχνότητες, άρα πρέπει ναναι ότι χρειάζεται προκειμένου το άθροισμα των συχνοτήτων να βγάζει 50.

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι ν_i	Σχετική Συχνότητα % $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα % $F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
0	8	16	8	16	0
1	10	20	18	36	10
2	15	30	33	66	30
3	10	20	43	86	30
4	5	10	48	96	20
5	2	4	50	100	10
Αθροίσματα	$\nu = 50$	100			100

Για την στήλη "Σχετική συχνότητα %" κάναμε τον υπολογισμό, σε κάθε γραμμή $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} * 100$ όπου $\nu = 50$.

b. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i\nu_i}{\nu} = \frac{100}{50} = 2$

c. Το ν είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός. Οπότε θα χρειαστεί να πάρουμε τον μέσο όρο δυο τιμών της μεταβλητής. Το μισό του πληθυσμού ειναι $\frac{\nu}{2} = \frac{50}{2} = 25$. Αρα θα πάρουμε τον μέσο όρο απο την 25η τιμή και την 26η τιμή.

Εχουμε: $\delta = \frac{2+2}{2} = 2$

d. Απο τον πίνακα παίρνουμε τους υπαλλήλους που έλειπαν απο 2 ως και 4 ημέρες. 2 ημέρες έλειπαν 15 υπάλληλοι, 3 ημέρες έλειπαν 10 και 4 ημέρες έλειπαν 5, σύνολο 30 υπάλληλοι. Σε ποσοστά αθροίζουμε αντιστοιχα $30\% + 20\% + 10\% = 60\%$

ΘΕΜΑ Γ

a. Υπολογίζουμε κάνοντας αντικατάσταση:
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{1^2-4\cdot 1+3}{1^2-1} = \frac{0}{0}$ αρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή. Οπότε, διαιρούμε και τα δυο πολυώνυμα με σχήμα Horner, με το $(x-1)$.

x^2	$-4x$	$+3$	
1	-4	3	1
	1	-3	
1	-3	0	
x	-3		$\Rightarrow (x-3)(x-1)$

Στον παρονομαστή, έχουμε ταυτότητα ή κάνουμε ομοίως σχήμα Horner και προκύπτει $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$
Οπότε: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-3)}{(x+1)} =$
Αντικαθιστούμε τώρα και έχουμε: $= \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$

b. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\sqrt{x+3} + \alpha) = \sqrt{1+3} + \alpha = \sqrt{4} + \alpha = 2 + \alpha$

c. Για να είναι η f συνεχής στο x_0 πρέπει: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$
Απο τα προηγούμενα έχουμε ήδη υπολογίσει τα δυο αυτά όρια, μένει να βρούμε πόσο είναι το $f(1)$
Εχουμε $f(1) = \sqrt{3+1} + \alpha = \sqrt{4} + \alpha = 2 + \alpha$
Αρα το $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$
Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι και το $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ισούτε με τα δυο προηγούμενα, δηλαδή: $2 + \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -2 - 1 \Rightarrow \alpha = -3$

d. Για $\alpha = -3$ η συνάρτησή μας γίνεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}, & \text{αν } x < 1 \\ \sqrt{x+3}-3, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Οπότε μπορούμε να κάνουμε πλέον τον υπολογισμό.

$$f(0) = \frac{0^2 - 4\cdot 0 + 3}{0^2 - 1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$f(6) = \sqrt{6+3} - 3 = \sqrt{9} + 3 = 3 - 3 = 0$$

Οπότε: $A = 3f(0) + 2f(6) = 3(-3) + 2\cdot 0 = -9 + 0 = -9$

ΘΕΜΑ Δ

1. Ολες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις γνωρίζουμε ότι έχουν πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχείς σε αυτό. Αρα:

   $$f'(x) = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta)' = (\frac{1}{3}x^3)' - (\frac{5}{2}x^2)' + (\alpha x)' + (\beta)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - \frac{5}{2}\cdot 2x + \alpha\cdot 1 + 0 = x^2 - 5x + \alpha$$

   Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και είναι παραγωγίσημη, απο το θεώρημα του Fermat γνωρίζουμε ότι ισχύει

   $$f'(2) = 0 \Rightarrow 2^2 - 5\cdot 2 + \alpha = 0 \Rightarrow 4 - 10 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 6$$

   Επίσης γνωρίζουμε ότι η f διέρχεται απο το σημείο Α(0,1), δηλαδή στο σημείο $x_0 = 0$ έχει τιμή $y = 1$. Αρα:

   $$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}0^3 - \frac{5}{2}0^2 + \alpha\cdot 0 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1$$

2. Αντικαθιστούμε τα α και β που έχουμε βρεί και έτσι η συνάρτηση που προκύπτει και η παράγωγος της θα είναι:

   $$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1, f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

   Για να μελετήσουμε μονοτονία της συνάρτησης πρέπει να βρούμε τα σημεία που έχει ακρότατα, δηλαδή $f'(x) = 0$. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 5x + 6 = 0$. Η εξίσωση ειναι δευτεροβάθμια. Εχουμε

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

Οπότε η f ειναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2] \bigcup [3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$

3. Απο την προηγούμενη άσκηση βλέπουμε ότι έχουμε ακρότατα στα σημεία 2 και 3. Με οδηγό την μονοτονία βλέπουμε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 2$, με τιμή

$$f(2) = \frac{1}{3}2^3 - \frac{5}{2}2^2 + 6 \cdot 2 + 1 = \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 + 1 = \frac{8}{3} - 10 + 13 = \frac{8}{3} + 3 = \frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{17}{3}$$

Εχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 3$ με τιμή

$$f(3) = \frac{1}{3}3^3 - \frac{5}{2}3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = \frac{1}{3}27 - \frac{5}{2}9 + 18 + 1 = 9 - \frac{45}{2} + 19 = 28 - \frac{45}{2} = \frac{56}{2} - \frac{45}{2} = \frac{11}{2}$$

4. Εχουμε:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1)dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 dx - \int_1^2 \frac{5}{2}x^2 dx + \int_1^2 6x dx + \int_1^2 1 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 x^3 dx - \frac{5}{2}\int_1^2 x^2 dx + 6\int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 - \frac{5}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + 6\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3} + 6 \cdot \frac{3}{2} + 1 =$$

$$\frac{15}{12} - \frac{35}{6} + \frac{18}{2} + 1 = \frac{15}{12} - \frac{70}{12} + 10 = \frac{15}{12} - \frac{70}{12} + \frac{120}{12} = \frac{65}{12}$$

[0]Σάββας Παυλίδης, 2014. Δημιουργημένο με LaTeX