ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g ειναι παραγωγίσημες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: (Μονάδες 10)

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση ειναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εαν πρόταση είναι λανθασμένη. **(Μονάδες 6)**

α) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής (Μονάδες 2)

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει: (Μονάδες 2)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

γ) Το εύρος (R) ειναι μέτρο διασποράς (Μονάδες 2)

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες να τις συμπληρώσετε

α) $(x^\rho)' = ...$ (Μονάδες 3)

β) $(\sigma\upsilon\nu x)' = ...$ (Μονάδες 3)

γ) Αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής ενός δείγματος μεγέθους ν και $W_1, W_2, ..., W_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται απο τον τύπο: (Μονάδες 3)

$$\bar{x} = ...$$

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

$$4, \kappa, 5, 6, 2\kappa+1, 4, 6, \kappa+2, 6, 4$$

όπου:

$$\kappa = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

Β1. Να αποδείξετε οτι $\kappa = 3$ (Μονάδες 7)

B2. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε την μέση τιμή ($\bar{x}$) των βαθμών του φοιτητή. (Μονάδες 5)

B3. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε την διακύμανση (s^2) (Μονάδες 8)

B4. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV.
Δίνεται ότι $\sqrt{1,4} \cong 1,18$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Εαν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$ (Μονάδες 5)

Γ2. Η τυπική απόκλιση ειναι $s = 5$ (Μονάδες 10)

Εαν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης ειναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών; (Μονάδες 5)

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Δ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία (Μονάδες 8)

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$ (Μονάδες 6)

Δ4. Εαν τα σημεία $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της $y = f''(x)$ και η τυπική απόκλιση των τετμημένων x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ είναι ίση με 3, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4), M_5(x_5, y_5)$ (Μονάδες 5)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη απο σχολικό βιβλίο, σελ 31

Α2. Οι απαντήσεις Σωστό / Λάθος

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

Α3. α) $(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1}$

β) $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

γ) $\bar{x} = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} W_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} W_i}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει να υπολογίσουμε το όριο για να βρούμε την τιμή κ. Σε πρώτη φάση κάνουμε αντικατάσταση

$$\kappa = \lim_{x\to 1} = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{1^2+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Εχουμε απροσδιόριστη μορφή. Αρα πρέπει να κάνουμε τον αριθμητή γινόμενο παραγόντων, προκειμένου να απαληφθεί με τον παρανομαστή. Για να τον κάνουμε γινόμενο παραγόντων τον αριθμητή μπορούμε να το λύσουμε ως δευτεροβάθμια ή να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Χόρνερ, διαιρώντας με το 1 (μια απο τις δυο μεθόδους).

Με την μέθοδο εύρεσης των ριζών. Εχουμε: $x^2+x-2=0$ άρα έχουμε $\alpha=1, \beta=1, \gamma=(-2)$ οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 \Rightarrow \Delta = 9$

Εχουμε λοιπόν διακρίνουσα ίσο με 9, που ειναι θετικός αριθμός, άρα έχουμε δυο ρίζες x_1, x_2. Υπολογίζουμε: $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} = \dfrac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow$ $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1, x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Αφού έχουμε βρεί τις ρίζες, τότε το x^2+x-2 αναλύεται σε $(x-1)(x+2)$

Με την μέθοδο Χορνερ. Αναλύουμε το πολυώνυμο (αριθμητή)

x^2	$+x$	-2	$= (x-1)(x+2)$
1	1	-2	1
	1	2	
1	2	0	

Αφού έχουμε λοιπόν είτε με την μία μέθοδο είτε με την άλλη αναλύσει τον αριθμητή σε γινόμενο παραγόντων, ξαναγράφουμε το όριο και επιλύουμε, απαλοίφοντας τους παράγοντες στο κλάσμα

$$\kappa = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}(x+2)$$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε αντικατάσταση

$$\lim_{x\to 1}(x+2) = 1+2 = 3$$

B2. Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή, πρέπει όπου έχουμε κ να αντικαταστήσουμε με την τιμή 3, και να κάνουμε και τους απαραίτητους υπολογισμούς όπου χρειάζεται. Ετσι έχουμε:

$$4, \kappa, 5, 6, 2\kappa+1, 4, 6, \kappa+2, 6, 4 = 4, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 5, 6, 4$$

Για την μέση τιμή $\bar{x} = \dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \dfrac{1}{10}(4+3+5+6+7+4+6+5+6+4) = \dfrac{1}{10}50 = 5$

B3. Για να υπολογίσουμε την διακύμανση, επειδή έχουμε παρατηρ'ησεις, και όχι πίνακα, είτε υπολογίζουμε λοιπόν με τις παρατηρήσεις, ή κάνουμε πρώτα πίνακα συχνοτήτων με αυτές, και εφαρμόζουμε ότι ξέρουμε. Θα δείξουμε και τις δυο περιπτώσεις.

Με παρατηρησεις. $s^2 = \dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(t_i - \bar{x})^2 =$

$$\frac{1}{10}((4-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(7-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2(5-5)^2+(6-5)^2+(4-5)^2) =$$

$$\frac{1}{10}((-1)^2+(-2)^2+0^2+1^2+2^2+(-1)^2+1^2+0^2+1^2+(-1)^2) =$$

$$\frac{1}{10}(1+4+0+1+4+1+1+0+1+1) = \frac{1}{10}(14) = 1,4$$

Με πίνακα συχνοτήτων. Απο τις τιμές φτιάχνουμε έναν πίνακα συχνοτήτων, δηλαδή κάθε βαθμός που έχει πάρει, πόσες φορές εμφανίζεται (συχνότητα)

x_i	ν_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i(x_i - \bar{x})^2$
3	1	$3-5=-2$	$(-2)^2=4$	$1 \cdot 4 = 4$
4	3	$4-5=-1$	$(-1)^2=1$	$3 \cdot 1 = 3$
5	2	$5-5=0$	$0^2=0$	$2 \cdot 0 = 0$
6	3	$6-5=1$	$1^2=1$	$3 \cdot 1 = 3$
7	1	$7-5=2$	$2^2=4$	$1 \cdot 4 = 4$
ΣΥΝΟΛΟ	10			14

Οπότε έχουμε $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \dfrac{1}{10} \cdot 14 = 1,4$

Οπότε, αφού $s^2 = 1,4 \Rightarrow s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,4} \cong 1,18$

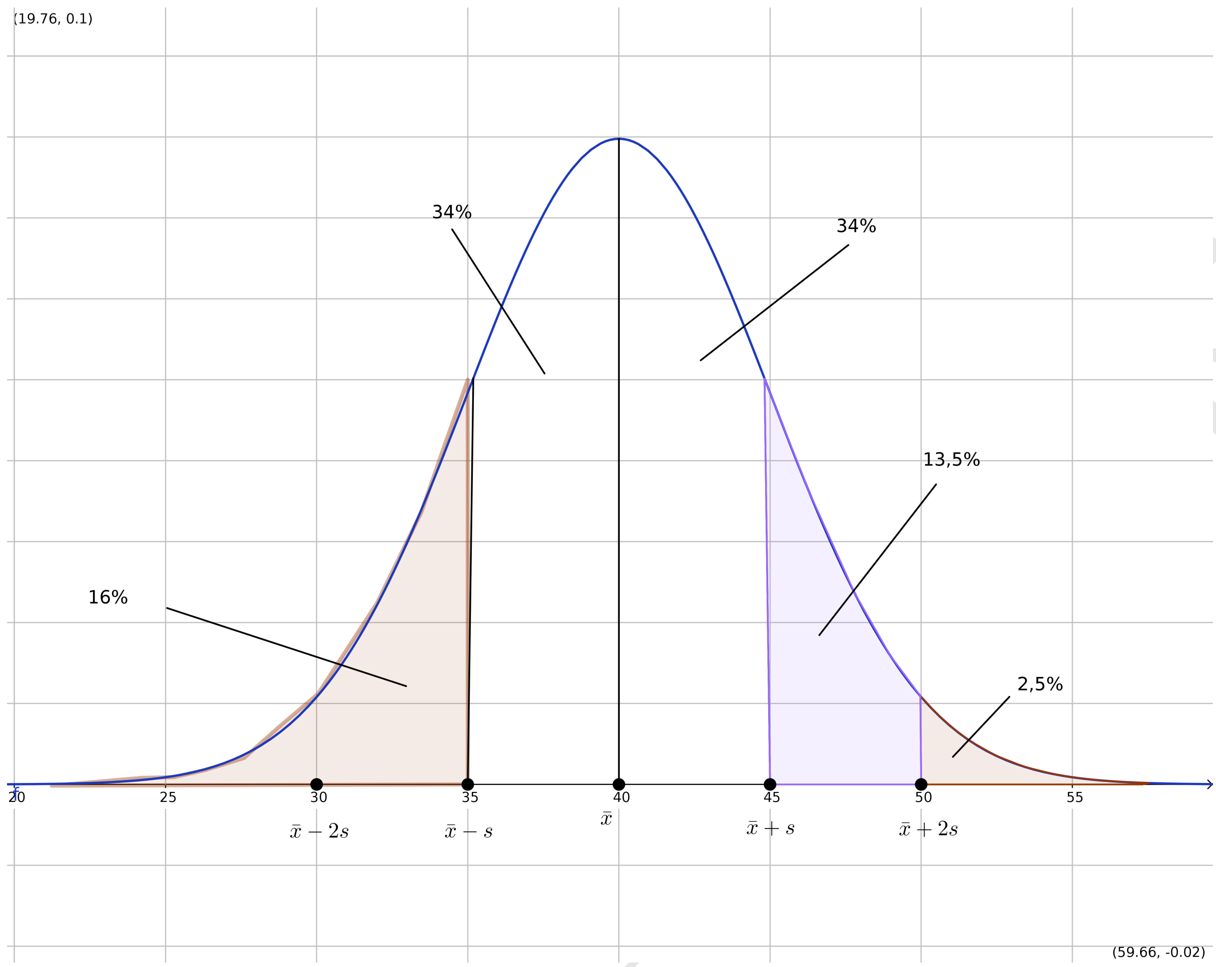
B4. Για τον υπολογισμό του συντελεστή μεταβλητότητας χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1,18}{5} = \frac{1,18 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2,36}{10} = 0,236$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ξέρουμε ότι στην κανονική κατανομή, η διάμεσος ειναι ίση με την μέση τιμή. Αφού μας λέει ότι τα μισά δεδομένα, το 50%, ειναι πάνω απο 40 ετών, άρα τα άλλα μισά ειναι κάτω απο 40 ετών. Αρα η διάμεσος ειναι ίση με 40. Και αφού η διάμεσος ειναι ίση με 40, άρα και η μέση τιμή ειναι ίση με 40.

Γ2. Απο την κανονική κατανομή γνωρίζουμε ότι σε απόσταση ίση με το s δεξιά και αριστερά της μέσης τιμής, βρίσκεται συνολικά το 68% των παρατηρήσεων. Αυτό σημαίνει ότι αριστερά και δεξιά, υπάρχει και το υπόλοιπο 16% και 16%, Αφού λοιπόν μας λέει ότι 16% ειναι μικρότεροι των 35 ετών, άρα αυτό σημαίνει ότι η τυπική απόκλιση $s = 40 - 35 = 5$.



Γ3. Γνωρίζουμε ότι το $s = 5$. Επίσης γνωρίζουμε ότι στην κανονική κατανομή, το υπολοιπο στην άκρη απο το διάστημα $\bar{x} + s$ και πέρα ειναι 16%. Αρα $16\% \cdot 400 = 64$

Γ4. Οπως και πιο πάνω, παίρνουμε τα διαστήματα επάνω στην κανονική κατανομή. Αρα έχουμε, απο $\bar{x} - 2s$ έως $\bar{x}$ ποσοστό 47,5%. Απο $\bar{x}$ έως $\bar{x} + s$ ποσοστό 34%. Τα προσθέτουμε και έχουμε $47,5\% + 34\% = 81,5\%$ Σε αριθμό ατόμων αυτό μεταφράζεται $0,815 \cdot 400 = 326$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει πρώτα να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης, την θέτουμε ίση με μηδέν, για να βρούμε ακρότατα, και στην συνέχεια φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών.

$$f'(x) = (-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1)' = -\frac{1}{3}3x^2 + 2 \cdot 2x - 3 = -x^2 + 4x - 3$$

Θέτουμε ίσο με μηδέν και επιλύουμε την εξίσωση $-x^2 + 4x - 3 = 0$ άρα

$\alpha = (-1), \beta = 4, \gamma = (-3)$, οπότε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$$

Η διακρίνουσα είναι θετικός αριθμός, άρα έχουμε δυο λύσεις.

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-4+2}{-2} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{-2} \Rightarrow x_2 = 3$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x) = -x^2+4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	

Η συνάρτηση f ειναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$
Η συνάρτηση f ειναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 3]$
Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$

Δ2. Σε συνέχεια απο το προηγούμενο, βλέπουμε ότι:
Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x=1, με τιμή
$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -\frac{1}{3}$
Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x=1, με τιμή
$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = -9 + 18 - 9 + 1 = 1$

Δ3. Η εφαπτομένη της συνάρτησης με την ευθεία $y = x + 2017$ για να είναι παράλληλες, πρέπει να έχουν ακριβώς τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Για την ευθεία τον έχουμε τον συντελεστή διεύθυνσης, άρα πρέπει να βρούμε σε ποιό σημείο x τυχαίνει η εφαπτομένη να έχει ακριβώς το ίδιο. Η γενική μορφή ειναι $y = \lambda x \pm \beta$. Στην περίπτωση μας $\lambda = 1$

Ο συντελεστής διεύθυνσης λοιπόν της εξισωσης ευθείας μας δίδεται. Μενει να βρούμε λοιπόν στην συνάρτηση. Αρκεί λοιπόν $\lambda = f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 1 \Rightarrow -x_0^2 - 4x_0 + 3 = 1 \Rightarrow -x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0$
Αυτό ειναι ταυτότητα και ειναι $(-x_0 + 2)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$ (διπλή ρίζα). Μπορεί να λυθεί και με επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Αρα το σημείο x στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει εφαπτομένη παράλληλη είναι στο $x_0 = 2$. Η αντίστοιχη τιμη $y = f(x_0) = -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -\frac{1}{3} \cdot 8 + 8 - 6 + 1 = -\frac{8}{3} + 3 = \frac{-8+9}{3} = \frac{1}{3}$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο μας (x, y) είναι $(x, f(x)) = (2, \frac{1}{3})$

Δ4. Εχουμε $f''(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4$. Αρα έχουμε

$$y_1 = -2x_1 + 4, y_2 = -2x_2 + 4, y_3 = -2x_3 + 4, y_4 = -2x_4 + 4$$

Μας δίδεται ότι η τυπική απόκλιση για τα σημεία x ειναι $s_x = 3$, και είναι ήδη γνωστό ότι έχουμε μια κάποια μέση τιμη $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$

Υπολογίζουμε πόσο είναι η μέση τιμή $\bar{y} = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$ Αντικαθιστούμε με ότι έχουμε βρεί πιό πάνω.

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{4}((-2x_1+4)+(-2x_2+4)+(-2x_3+4)+(-2x_4+4)) = \frac{1}{4}(-2(x_1+x_2+x_3+x_4)+16) =$$

$$-2\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} + \frac{16}{4} = -2\bar{x} + 4$$

Αρα $\bar{y} = -2\bar{x} + 4$

Οπότε τώρα αφού έχουμε βρεί την μέση τιμή $\bar{y}$, υπολογίζουμε το s_y.

$$s_y = |-2|s_x \Rightarrow s_y = 2s_x = 2 \cdot 3 \Rightarrow s_y = 6$$

[0]Σάββας Παυλίδης, 2017. Δημιουργημένο με LaTeX