

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΑΛ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2010

ΘΕΜΑ Α

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (5 Μονάδες)
2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εάν πρόταση είναι λανθασμένη.
 - a Η μέση τιμή δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. (3 Μονάδες)
 - b Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και είναι $l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$ (3 Μονάδες)
 - c Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 (3 Μονάδες)
 - d Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (3 Μονάδες)
3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω ισότητες:
 - a. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \dots$ (2 Μονάδες)
 - b. $(\sqrt{x})' = \dots\dots\dots$ (2 Μονάδες)
 - c. $(e^x)' = \dots\dots\dots$ (2 Μονάδες)
 - d. $(\sin x)' = \dots$ (2 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Οι ημέρες απουσίας των 50 υπαλλήλων μιας εταιρίας από την εργασία τους, τον περασμένο μήνα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι ν_i	Σχετική Συχνότητα % $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα % $F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
0	8				
1	10				
2					
3	10				
4	5				
5	2				
Αθροίσματα					

- a. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε. (10 Μονάδες)
- b. Να υπολογίσετε την μέση τιμή της μεταβλητής x . (5 Μονάδες)
- c. Να υπολογίσετε την διάμεσο της μεταβλητής x . (5 Μονάδες)
- d. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των υπαλλήλων που απουσίαζαν απο 2 έως και 4 ημέρες. (5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \sqrt{x+3} + \alpha, & \text{αν } x \geq 1 \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- a. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (7 Μονάδες)
- b. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (7 Μονάδες)
- c. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. (5 Μονάδες)
- d. Για $\alpha = -3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $= 3f(0) + 2f(6)$. (6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται απο

το σημείο $A(0,1)$ τότε:

a. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β . (8 Μονάδες)

b. Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
(6 Μονάδες)

c. Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f . (6 Μονάδες)

d. Για $\alpha = 6$ και $\beta = 1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$ (5 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

1. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ 175
2. α.Λ β.Σ γ.Σ δ.Λ
3. a. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
b. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ όπου $x \geq 0$
c. $(e^x)' = e^x$
d. $(\sin x)' = -\eta\mu x$

ΘΕΜΑ Β

- a. Συμπληρώνουμε τον πίνακα, οι υπάλληλοι είναι 50, άρα ο πληθυσμός είναι 50. Οπότε λείπει ένα μόνο στοιχείο στις συχνότητες, άρα πρέπει να είναι ότι χρειάζεται προκειμένου το άθροισμα των συχνοτήτων να βγάζει 50.

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι ν_i	Σχετική Συχνότητα % $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα % $F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
0	8	16	8	16	0
1	10	20	18	36	10
2	15	30	33	66	30
3	10	20	43	86	30
4	5	10	48	96	20
5	2	4	50	100	10
Αθροίσματα	$\nu = 50$	100			100

Για την στήλη "Σχετική συχνότητα %" κάναμε τον υπολογισμό, σε κάθε γραμμή
 $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} * 100$ όπου $\nu = 50$.

b. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{100}{50} = 2$

- c. Το ν είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός. Οπότε θα χρειαστεί να πάρουμε τον μέσο όρο δυο τιμών της μεταβλητής. Το μισό του πληθυσμού είναι $\frac{\nu}{2} = \frac{50}{2} = 25$. Αρα θα πάρουμε τον μέσο όρο από την 25η τιμή και την 26η τιμή.

Εχουμε: $\delta = \frac{2+2}{2} = 2$

- d. Από τον πίνακα παίρνουμε τους υπαλλήλους που έλειπαν από 2 ως και 4 ημέρες. 2 ημέρες έλειπαν 15 υπάλληλοι, 3 ημέρες έλειπαν 10 και 4 ημέρες έλειπαν 5, σύνολο 30 υπάλληλοι. Σε ποσοστά αθροίζουμε αντιστοιχα $30\% + 20\% + 10\% = 60\%$

ΘΕΜΑ Γ

- a. Υπολογίζουμε κάνοντας αντικατάσταση:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \frac{1^2 - 4 \cdot 1 + 3}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ αρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή. Οπότε, διαιρούμε και τα δυο πολυώνυμα με σχήμα Horner, με το } (x-1).$$

x^2	$-4x$	$+3$	
1	-4	3	1
	1	-3	
1	-3	0	
x	-3		$\Rightarrow (x-3)(x-1)$

Στον παρονομαστή, έχουμε ταυτότητα ή κάνουμε ομοίως σχήμα Horner και προκύπτει $(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-3)}{(x+1)} =$$

$$\text{Αντικαθιστούμε τώρα και έχουμε: } = \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3} + \alpha) = \sqrt{1+3} + \alpha = \sqrt{4} + \alpha = 2 + \alpha$

- c. Για να είναι η f συνεχής στο x_0 πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

Από τα προηγούμενα έχουμε ήδη υπολογίσει τα δυο αυτά όρια, μένει να βρούμε πόσο είναι το $f(1)$

$$\text{Εχουμε } f(1) = \sqrt{3+1} + \alpha = \sqrt{4} + \alpha = 2 + \alpha$$

$$\text{Αρα το } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι και το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ισούτε με τα δυο προηγούμενα, δηλαδή: $2 + \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -2 - 1 \Rightarrow \alpha = -3$

- d. Για $\alpha = -3$ η συνάρτησή μας γίνεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \sqrt{x+3} - 3, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Οπότε μπορούμε να κάνουμε πλέον τον υπολογισμό.

$$f(0) = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 3}{0^2 - 1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$f(6) = \sqrt{6+3} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$\text{Οπότε: } A = 3f(0) + 2f(6) = 3(-3) + 2 \cdot 0 = -9 + 0 = -9$$

ΘΕΜΑ Δ

1. Όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις γνωρίζουμε ότι έχουν πεδίο ορισμού όλο το \mathbb{R} και είναι συνεχείς σε αυτό. Αρα:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \left(\frac{5}{2}x^2\right)' + (\alpha x)' + (\beta)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x + \alpha \cdot 1 + 0 = x^2 - 5x + \alpha$$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και είναι παραγωγίσιμη, απο το θεώρημα του Fermat γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 2^2 - 5 \cdot 2 + \alpha = 0 \Rightarrow 4 - 10 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 6$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η f διέρχεται απο το σημείο $A(0,1)$, δηλαδή στο σημείο $x_0 = 0$ έχει τιμή $y = 1$. Αρα:

$$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}0^3 - \frac{5}{2}0^2 + \alpha \cdot 0 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1$$

2. Αντικαθιστούμε τα α και β που έχουμε βρεί και έτσι η συνάρτηση που προκύπτει και η παράγωγος της θα είναι:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1, f'(x) = x^2 - 5x + 6$$

Για να μελετήσουμε μονοτονία της συνάρτησης πρέπει να βρούμε τα σημεία που έχει ακρότατα, δηλαδή $f'(x) = 0$. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 5x + 6 = 0$. Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια. Έχουμε

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	+	0	-	0	+
$f(x)$	<div><div><div></div><div>$\tau.\mu.$</div><div></div></div><div><div></div><div>$\tau.\epsilon.$</div><div></div></div><div></div></div>				

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$

3. Από την προηγούμενη άσκηση βλέπουμε ότι έχουμε ακρότατα στα σημεία 2 και 3. Με οδηγό την μονοτονία βλέπουμε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 2$, με τιμή

$$f(2) = \frac{1}{3}2^3 - \frac{5}{2}2^2 + 6 \cdot 2 + 1 = \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 + 1 = \frac{8}{3} - 10 + 13 = \frac{8}{3} + 3 = \frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{17}{3}$$

Έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 3$ με τιμή

$$f(3) = \frac{1}{3}3^3 - \frac{5}{2}3^2 + 6 \cdot 3 + 1 = \frac{1}{3}27 - \frac{5}{2}9 + 18 + 1 = 9 - \frac{45}{2} + 19 = 28 - \frac{45}{2} = \frac{56}{2} - \frac{45}{2} = \frac{11}{2}$$

4. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \right) dx = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 dx - \int_1^2 \frac{5}{2}x^2 dx + \int_1^2 6x dx + \int_1^2 1 dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 x^3 dx - \frac{5}{2} \int_1^2 x^2 dx + 6 \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 - \frac{5}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \left[x \right]_1^2 = \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) - \frac{5}{2} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) + 6 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) + (2 - 1) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3} + 6 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \\
&\frac{15}{12} - \frac{35}{6} + \frac{18}{2} + 1 = \frac{15}{12} - \frac{70}{12} + 10 = \frac{15}{12} - \frac{70}{12} + \frac{120}{12} = \frac{65}{12}
\end{aligned}$$