

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΘΕΜΑ Α

- Εστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F . Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α ως το β ; (6 Μονάδες)
- Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εάν πρόταση είναι λανθασμένη.
 - Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής (2 Μονάδες)
 - Εάν οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$. (2 Μονάδες)
 - Εάν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . (2 Μονάδες)
 - Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} e^x dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$. (2 Μονάδες)
 - Δίδονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ (2 Μονάδες)
- Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:
 - $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = \dots$ (3 Μονάδες)
 - Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και c μια σταθερά, τότε $(c \cdot f)'(x) = \dots$ (3 Μονάδες)
 - Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$ τότε: $(x^{\alpha})' = \dots$ (3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x, & 0 \leq x \leq 1 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (7 Μονάδες)
- Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ (10 Μονάδες)

3. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

(8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρίας (σε εκατοντάδες ευρώ).

Μισθός (εκατοντάδες ευρώ) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i \nu_i$
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	$N =$	100	

1. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.
2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή \bar{x} των μισθών των υπαλλήλων.
3. Τι ποσοστό των υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 ευρώ ;
4. Να υπολογίσετε την διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρίας.

(5 Μονάδες)

(5 Μονάδες)

(7 Μονάδες)

(8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)^2(x + \alpha), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = (x - 2)(3x + 2\alpha - 2), x \in \mathbb{R}$
2. Να βρείτε τον αριθμό α , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$.
3. Για $\alpha = -5$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.
4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 3x^2 - 12x, x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 6x - 24, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις

(5 Μονάδες)

(8 Μονάδες)

των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

(7 Μονάδες)

1ο ΕΠΑΛ Πολίχνης

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Ο ορισμός όπως δίδεται στο σχολικό βιβλίο.

2. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

3. α. $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x \, dx = \sigma \nu \nu \alpha - \sigma \nu \nu \beta$

β. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

γ. $(x^a)' = \alpha x^{\alpha-1}$

ΘΕΜΑ Β

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 + \ln 1 = \alpha^2$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x+3-2^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} =$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} x(\sqrt{x+3} + 2) = 1 \cdot (\sqrt{1+3} + 2) = \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4$

Πολλαπλασιάσαμε με τον συζυγή προκειμένου να προκύψει διαφορά τετραγώνων

3. Για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ δηλαδή } \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$$

ΘΕΜΑ Γ

1. Συμπληρώνουμε τον πίνακα καθώς και επιπλέον στήλες που θα χρειαστούμε:

Για το σύνολο του πληθυσμού N απλά προσθέτουμε όλα τα ν_i . Για τον υπολογισμό του κάθε $f_i\%$ εκτελούμε την πράξη $f_i\% = \frac{\nu_i}{N} \cdot 100$ Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής, είναι η επόμενη άσκηση. Οι υπόλοιπες στήλες υπολογίζονται με απλή αντικατάσταση.

	Μισθός (εκατοντάδες ευρώ)	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων)	Σχετική συχνότητα %			
i	x_i	ν_i	$f_i\%$	$x_i\nu_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
1	6	25	50	150	9	225
2	10	17	34	170	1	17
3	15	6	12	90	36	216
4	20	2	4	40	121	242
	Σύνολα	$N = 50$	100	450		700

2. Έχουμε $\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{N} = \frac{450}{50} = 9$

3. Είναι 84%. Και αυτό γιατί είναι το άθροισμα των $f_1\% + f_2\%$

4. $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2\nu_1 + (x_2 - \bar{x})^2\nu_2 + (x_3 - \bar{x})^2\nu_3 + (x_4 - \bar{x})^2\nu_4}{N} = \frac{700}{50} = 14$

Άρα $s = \sqrt{14}$

ΘΕΜΑ Δ

1. $f'(x) = [(x-2)^2]' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)' = 2(x-2)(x+\alpha) + (x-2)^2 = (x-2) \cdot (3x+2\alpha-2)$

2. Αφού η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 4$ από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(4) = 0 \Leftrightarrow 2(10+2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$

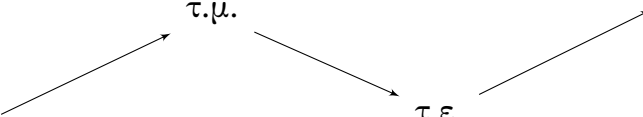
3. $f(x) = (x-2)^2(x-5)$ και $f'(x) = (x-2)(3x-12)$ ή $f'(x) = 3(x^2-6x+8)$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

Έχουμε διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$. Δυο λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$$

Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 8$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 2$

Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 4$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 4]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4, +\infty)$.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x) = g(x) - h(x) = 3x^2 - 18x + 24$ και $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 4$. Επειδή $k(x) < 0$ για $2 < x < 4$ θα έχουμε: $E(|\Omega|) = \int_2^4 |k(x)| dx = - \int_2^4 k(x) dx = -[x^2 - 9x^2 + 24x]_2^4 = 4$ τμ