ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = (x)' = 1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. (10 Μονάδες)

2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, όταν το ν είναι περιττός αριθμός. (5 Μονάδες)

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση ειναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εαν πρόταση είναι λανθασμένη.

   a) $(\eta\mu(x))' = \sigma\upsilon\nu(x)$ (2 Μονάδες)

   b) $(\sqrt{3})' = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ (2 Μονάδες)

   c) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ βίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων (2 Μονάδες)

   d) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ όπου l_1, l_2 ειναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = l_1 l_2$ (2 Μονάδες)

   e) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (2 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός Υπαλλήλων ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4				
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		

1. Αν γνωρίζετε ότι η 5^η συχνότητα (ν_5) ισούται με την 1^η συχνότητα (ν_1), να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε. (10 Μονάδες)
2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων. (5 Μονάδες)
3. Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες (5 Μονάδες)
4. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες (5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}$$

1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ (6 Μονάδες)
2. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ (4 Μονάδες)
3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα (12 Μονάδες)
4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f. (3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x - 3, \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν $\alpha = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$ (8 Μονάδες)
2. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την $f'(x)$ (3 Μονάδες)
3. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(-2, f(-2))$ $\alpha = 2$ (8 Μονάδες)
4. Αν τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4), A_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στην ευθεία $\epsilon : y = -2x - 7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουμε μέση τιμή $\bar{x} = 2$, να βρείτε την μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών. (6 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

1. Ορισμός σχολικού βιβλίου, στην σελίδα 28. Απο τον ορισμό, πως οριζεται η παράγωγος
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
Αντικαθιστούμε στην όπου $f(x) = x$ και έτσι έχουμε
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

2. Ορισμός σχολικού βιβλίου, στην σελίδα 87.
Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση οταν το ν ειναι περιττός.

3. Οι απαντήσεις Σωστό / Λάθος

   i) Σωστό (βιβλίο σελ 30)

   ii) Λάθος (βιβλίο σελ 28)

   iii) Σωστό (βιβλίο σελ 95)

   iv) Σωστό (βιβλίο σελ 16)

   v) Σωστό (βιβλίο σελ 13)

ΘΕΜΑ Β

i) Αρκούσε να συμπληρωθεί ο πίνακας, δεν είναι αναγκαίο να δωθεί ο τρόπος εύρεσης των αριθμών στα κελια. Εδώ θα δωθεί η λύση όσο πιο επεξηγηματικά γίνεται, ο μαθητής όμως δεν χρειαζόταν να κάνει όλα αυτά τα βήματα εδώ στο γραπτό του, παρα μόνο να παραθέσει την τελική λύση του πίνακα. Βάζοντας λοιπόν στην θέση $\nu_5 = 5$ όσον δηλαδή και στην θέση ν_1 και συμπληρώνοντας επίσης και το σύνολο που μας το δίνει η εκφώνηση, έχουμε

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός Υπαλλήλων ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4	5			
ΣΥΝΟΛΑ	20			

Απο την αθροιστική συχνότητα N_2 προκύπτει ότι στην θέση ν_2 πρέπει να έχει 4. Επίσης αφού το $f_3\% = 10$ και ο πληθυσμός είναι 20, προκύπτει ότι στην θέση ν_3 έχουμε $f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu} \cdot 100 \rightarrow 10 = \frac{\nu_3}{20} \cdot 100$ Λύνουμε την απλή αυτή εξίσωση και έχουμε $\nu_3 = 2$ Αφού όμως έχουμε βρεί όλα τα ν_i πλην ενός και το σύνολο είναι 20, άρα αυτό που μας λείπει, το ν_4 θαναι το σύνολο μείον όλα τα υπόλοιπα, οπότε $\nu_4 = 4$. Αρα ο πίνακας θαναι

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός Υπαλλήλων ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
0	5			
1	4	9		
2	2		10	
3	4			
4	5			
ΣΥΝΟΛΑ	20			

Οπότε η συμπλήρωση όλων των υπόλοιπων στηλών γίνεται κατα τα γνωστά.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός Υπαλλήλων ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
ΣΥΝΟΛΑ	20		100	40

ii) Γνωρίζουμε ότι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i}{\nu} = \dfrac{40}{20} = 2$

iii) Αυτοί που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες, ειναι οι τέσσερις πρώτες γραμμές, και το άθροισμα των υπαλλήλων προκύπτει αμέσως απ την αθροιστική συχνότητα είτε αθροίζοντας τις συχνοτητες για 0 έως και 4 πιστωτικές κάρτες. Το αποτέλεσμα ειναι 15

iv) Προσοχή, ζητά ποσοστό. Τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες σημαίνει ότι πρέπει να εχει 2 ή περισσότερες, οπότε αθροίζουμε τα ποσοστά ($f_i\%$) των σχετικών περιπτώσεων. Το αποτέλεσμα ειναι 55

ΘΕΜΑ Γ

i) Ζητείται να αποδειχθεί ότι η παράγωγος της f ισουται με κάτι. Οπότε θα βρούμε την παράγωγο της f και θα δούμε εαν μας δίνει το αποτέλεσμα που θέλουμε.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' + \left(\frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' + 0$$

$$= \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x2+1)^2} = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος. Οταν μας ζητά πόσο ειναι ο ρυθμός μεταβολής για συκεκριμένο σημείο x, αρα μας ζητα την τιμή, το αποτέλεσμα, της παραγώγου, στο σημείο x. Οπότε χρησιμοποιούμε τον τύπο της παραγώγου που βρίκαμε πιο πάνω, και κάνουμε αντικατάσταση και βρίσκουμε τις τιμές:

a. $f'(-1) = \dfrac{1-(-1)^2}{((-1)^2+1)^2} = \dfrac{0}{4} = 0$

b. $f'(1) = \dfrac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = \dfrac{0}{4} = 0$

iii) Για την μελέτη της μονοτονίας και εύρεση των ακροτάτων, πρέπει να βρούμε τις ρίζες της παραγώγου. Θέτουμε την παράγωγο ίσο με μηδέν και επιλύουμε. $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$ Εχουμε ρητή συνάρτηση, ο παρανομαστής είναι παντού θετικός (μιας και υψώνεται στο τετράγωνο, άρα αρκεί ο αριθμητής ναναι κάπου 0. Εχουμε:
$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ Αρα έχουμε δυο μόνο ρίζες, η συνάρτηση ειναι πολυωνυμική, πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ Εχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών όπου η μια ρίζα ειναι το -1 και η άλλη το 1.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x^2+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		↘	τ.ε.	↗	τ.μ.	↘	

Η συνάρτηση f ειναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ Η συνάρτηση f ειναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ Η συνάρτηση f ειναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = -1$ με τιμή $f(-1) = 0$ Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = -1$ με τιμή $f(1) = 1$

iv) Επειδή οι αριθμοί 2015 και 2016 είναι μέσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ σημαίνει ότι βρίσκονται σε διάστημα όπου η συνάρτηση ειναι φθίνουσα, όπως έχουμε δει προηγουμένως. Αυτό, με βάση την θεωρία, μας λέει ότι εαν είναι φθίνουσα, τότε εαν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Οπότε συμπεραίνουμε ότι $f(2015) > f(2016)$ (Θα μπορούσαμε να κάνουμε και τις πράξεις και θα ήταν σωστή και έτσι η απάντηση, αλλά είναι πολύ πιο χρονοβόρο και η ενδεδειγμένη λύση ειναι όπως παραπάνω).

ΘΕΜΑ Δ

i) Υπολογίζουμε το α κανοντας αντικατάσταση στο όριο
$\alpha = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \dfrac{0}{0}$ Απροσδιόριστη μορφή

Για να φύγει η απροσδιόριστη μορφή κάνουμε γινόμενο παραγόντων τον αριθμητή, είτε επιλύοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση είτε με μέθοδο Χόρνερ (διαιρούμε τον αριθμητή πολυώνυμο με το όριο, δηλαδή με 4). Ετσι γίνεται
$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}x-2=2$

ii) Βάζουμε στην συνάρτηση στην θέση του α το 2 και έτσι έχουμε:

$$f(x)=x^2+2x-3$$

Οπότε πρέπει να βρούμε την παράγωγο αυτής

$$f'(x)=(x^2+2x-3)'=(x^2)'+(2x)'-(3)'=2x+2$$

iii) Για να βρούμε την συνάρτησης της εφαπτομένης σε ένα σημείο, χρειαζόμαστε την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό, και της παραγώγου της

$$f(-2)=(-2)^2+2(-2)-3=-3$$

$$f'(-2)=2(-2)+2=-2$$

Η συνάρτηση εφαπτομένης έχει τύπο $y=\lambda x+\beta$
και ξέρουμε ότι $\lambda=f'(-2)=-2$ Αρα $y=-2x+\beta$. Μένει να βρούμε το β
Οποτε αφού η εφαπτομένη "περνά" απο το σημείο $M(-2,f(-2))$ δηλαδή $(-2,-3)$ αρα για $x=-2$ θα πρέπει να έχει $y=-3$. Αντικαθιστούμε προκειμένου να βρούμε το β.
$-3=-2(-2)+\beta\Rightarrow -3=-4+\beta\Rightarrow \beta=-7$ Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$y=-2x-7$$

iv) Θα δωθούν δυο τρόποι επίλυσης

(a) (του υπουργείου) Ισχύει ότι $y_i=-2x_i-7$ με $i=1,2,3,4,5$. Αρα $\bar{}(y)=-2\bar{x}-7=-2\cdot 2-7=-4-7=-11$

(b) (άλλος τρόπος) Ξέρουμε ότι ο μέσος όρος των x_i ειναι 2. Αυτό σημαίνει ότι $\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}=2\Rightarrow(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=10$
Θέλουμε τον μέσο όρο των y_i, άρα $\bar{y}=\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{5}=$

$\dfrac{-2x_1-7-2x_2-7-2x_3-7-2x_4-7-2x_5-7}{5}=\dfrac{-2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)-5\cdot 7}{5}=$
$\dfrac{-2\cdot 10-35}{5}=\dfrac{-55}{5}=-11$

[0]Σάββας Παυλίδης, 2016. Δημιουργημένο με LaTeX