ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2012

ΘΕΜΑ Α

1. Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά. (6 Μονάδες)

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση ειναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εαν πρόταση είναι λανθασμένη.

   a Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο στο x_0. (2 Μονάδες)

   b Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο απο τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. (2 Μονάδες)

   c Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

   $$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \text{ με } \alpha < \gamma < \beta.$$ (2 Μονάδες)

   d Ισχύει ότι: $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}^{*}, x > 0$

   e Εστω δυο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g'. Τότε ισχύει ότι:

   $$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$ (2 Μονάδες)

3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω ισότητες:

   a $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\alpha x}dx = \ldots$ με $\beta > \alpha > 0$ (3 Μονάδες)

   b Εστω συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο Α και ισχύει ότι: $(g \circ f)'(x) = \ldots$ (3 Μονάδες)

   c $\int_{\alpha}^{\beta} cdx = \ldots$ με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (3 Μονάδες)

1ο ΕΠΑΛ Πολίχνης

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ΕΠΑΛ

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$	$x_i\nu_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	$2\kappa+1$			
Σύνολο	$\nu=25$		100	

1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ. (4 Μονάδες)
2. Για $\kappa=3$ να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιο σας τον παραπάνω πίνακα. (8 Μονάδες)
3. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ και να βρείτε την διάμεσο δ των παρατηρήσεων. (10 Μονάδες)
4. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως. (3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x>1\\ & \alpha,\beta\in\mathbb{R}\\ \alpha x^2+\beta x, & \text{αν } x\leq 1\end{cases}$$

1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (5 Μονάδες)
2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (10 Μονάδες)
3. Να υπολογίσετε τα α και β, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται απο το σημείο Α(-1,2). (10 Μονάδες)

1ο ΕΠΑΛ Πολίχνης

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

1. Να βρείτε την παράγουσα F της f, αν $F(0) = 1$. (5 Μονάδες)
2. Αν $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F. (8 Μονάδες)
3. Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (5 Μονάδες)
4. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται απο την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$. (7 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

1. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ 81
2. 1.Σ 2.Σ 3.Λ 4.Σ 5.Σ
3. a. $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x} dx = [\ln x]_\alpha^\beta = \ln\beta - \ln\alpha$

   b. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

   c. $\int_\alpha^\beta c dx = c[x]_\alpha^\beta = c(\beta - \alpha)$

ΘΕΜΑ Β

1. Πρέπει το άθροισμα των συχνοτήτων να μας κάνει 25. Αρα έχουμε: $6 + 5 + 4 + \kappa + (2\kappa + 1) = 25$. Λύνουμε αυτή την εξίσωση ως προς κ. Εχουμε $15 + \kappa + 2\kappa + 1 = 25 \Leftrightarrow 16 + 3\kappa = 25 \Leftrightarrow 3\kappa = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \kappa = 3$
2. Συμπληρώνουμε τον πίνακα.

1ο ΕΠΑΛ Πολίχνης

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$	$x_i\nu_i$
1	6	6	24	6
2	5	11	20	10
3	4	15	16	12
4	3	18	12	12
5	7	25	28	35
Σύνολο	$\nu = 25$		100	75

3. $\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4 + x_5\nu_5}{\nu} = \frac{75}{25} = 3$ Το πληθος των παρατηρήσεων ειναι περιττός αριθμός (μονός), οπότε διάμεσος θα είναι μια τιμή, η μεσαία παρατήρηση. Σε σύνολο παρατηρήσεων 25 (όσο είναι το άθροισμα των συχνοτήτων), το μισό ειναι 12,5 άρα η μεσαία παρατήρηση ειναι η 13η παρατήρηση. Αυτή βλέπουμε απο την στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων ότι βρίσκεται για την τιμή x=3. Αρα $\delta = 3$.

4. Το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίωβς βρίσκεται εαν αρθροίσουμε τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες (μαθητές) που διαβάζουν 3 ώρες ή παραπάνω, και είναι $16 + 12 + 28 = 56\%$

ΘΕΜΑ Γ

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (\alpha x^2 + \beta x) = \alpha + \beta$

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} =$

   $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3})^2-2^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1^+} (\sqrt{x+3}+2) = \sqrt{1+3}+2 = \sqrt{4}+2 = 4$

3. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha+\beta = 4$. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται απο το σημείο A(-1,2) αυτό σημαίνει ότι $f(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2$ Ετσι έχουμε δύο εξισώσεις και λύνουμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases}$$

1ο ΕΠΑΛ Πολίχνης

$\Rightarrow \alpha = 3$ και $\beta = 1$

ΘΕΜΑ Δ

1. $F(x) = x^3 - x^2 - x + c$

   $F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$ Αρα, $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

2. Η F ειναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Εχουμε $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$ άρα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$ άρα δύο λύσεις, οπότε $x_{1,2} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \dfrac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

   Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

   Η F είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\frac{1}{3}]$ και $[1, +\infty)$.

   Η F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-\frac{1}{3}, 1]$.

   Η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -\frac{1}{3}$ με τιμή

   $F(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 - (-\frac{1}{3})^2 - (-\frac{1}{3}) + 1 = \frac{32}{27}$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 1$ με τιμή $F(1) = 0$

3. $2011, 2012 \in [1, +\infty)$ και στο διάστημα αυτό η F είναι γνησίως αύξουσα, άρα $2011 < 2012 \Leftrightarrow F(2011) < F(2012)$.

4. Επειδή $F'(x) = f(x)$, ο πίνακας προσήμων της $F'(x)$ είναι ο πίνακας προσήμων της $f(x)$ απο το οποίο φαίνεται ότι $f(x) < 0$ για $x \in [0, 1]$. Αρα:

   $$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 -f(x) dx = -\int_0^1 F'(x) dx =$$

1ο ΕΠΑΛ Πολίχνης

$-[F(x)]_0^1 = -(0-1) = 1$ τ.μ.

1ο ΕΠΑΛ Πολίχνης

[0] Σάββας Παυλίδης, 2014. Δημιουργημένο μέσω LaTeX