ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013

ΘΕΜΑ Α

1. Εστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F. Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f απο το α ως το β ; (6 Μονάδες)

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση ειναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εαν πρόταση είναι λανθασμένη.

   a. Εαν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής (2 Μονάδες)

   b. Εαν οι συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσημες στο πεδίο ορισμού τους με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$. (2 Μονάδες)

   c. Εαν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε ειναι παραγωγίσημη στο στο x_0. (2 Μονάδες)

   d. Ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta e^x\, dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$. (2 Μονάδες)

   e. Διδονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\, dx$ (2 Μονάδες)

3. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

   a. $\int_\alpha^\beta \eta\mu x\, dx = \ldots$ (3 Μονάδες)

   b. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσημη στο $\mathbb{R}$ και c μια σταθερά, τότε $(c \cdot f)'(x) = \ldots$ (3 Μονάδες)

   c. Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$ τότε: $(x^a)' = \ldots$ (3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β Δινεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x, , \; 0 \leq x \leq 1 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R} \\ \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}, \quad \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

1. Να βρείτε το $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (7 Μονάδες)

2. Να δείξετε ότι $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$ (10 Μονάδες)

3. Να βρειτε για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ (8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρίας (σε εκατοντάδες ευρω).

Μισθός (εκατοντάδες ευρώ x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	$N =$	100	

1. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε. (5 Μονάδες)
2. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\overline{x}$ των μισθών των υπαλλήλων. (5 Μονάδες)
3. Τι ποσοστό των υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 ευρώ ; (7 Μονάδες)
4. Να υπολογίσετε την διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρίας. (8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2(x+\alpha), x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f ειναι $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2), x \in \mathbb{R}$ (5 Μονάδες)
2. Να βρείτε τον αριθμό α, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$. (5 Μονάδες)
3. Για $\alpha = -5$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων. (8 Μονάδες)
4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 3x^2 - 12x, x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 6x - 24, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται απο τις γραφικές παραστάσεις

των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$. (7 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. Ο ορισμός όπως δίδεται στο σχολικό βιβλίο.

2. a. Σωστό

   b. Σωστό

   c. Λάθος

   d. Λάθος

   e. Σωστό

3. a. $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x \, dx = \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta$

   b. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

   c. $(x^a)' = \alpha x^{\alpha-1}$

ΘΕΜΑ Β

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 + \ln 1 = \alpha^2$

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x^2-x)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} =$
   $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-2^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} =$
   $\lim\limits_{x\to 1^+} x(\sqrt{x+3}+2) = 1 \cdot (\sqrt{1+3}+2) = \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4$

   Πολλαπλασιάσαμε με τον συζυγή προκειμένου να προκύψει διαφορά τετραγώνων

3. Για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο σημειο $x_0 = 1$ θα πρέπει να ισχύει:
   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ δηλαδή $\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$

ΘΕΜΑ Γ

1. Συμπληρώνουμε τον πίνακα καθώς και επιπλέον στήλες που θα χρειαστούμε:

   Για το σύνολο του πληθυσμού N απλά προσθέτουμε όλα τα ν_i. Για τον υπολογισμό του κάθε $f_i\%$ εκτελούμε την πράξη $f_i\% = \dfrac{\nu_i}{N} \cdot 100$ Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής, είναι η επόμενη άσκηση. Οι υπόλοιπες στήλες υπολογίζονται με απλή αντικατάσταση.

	Μισθός (εκατοντάδες ευρώ)	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων)	Σχετική συχνότητα %			
i	x_i	ν_i	$f_i\%$	$x_i\nu_i$	$(x_i-\overline{x})^2$	$(x_i-\overline{x})^2\cdot\nu_i$
1	6	25	50	150	9	225
2	10	17	34	170	1	17
3	15	6	12	90	36	216
4	20	2	4	40	121	242
	Σύνολα	$N=50$	100	450		700

2. Εχουμε $\overline{x}=\dfrac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3+x_4\nu_4}{N}=\dfrac{450}{50}=9$
3. Ειναι 84%. Και αυτό γιατι είναι το άρθροισμα των $f_1\%+f_2\%$
4. $s^2=\dfrac{(x_1-\overline{x})^2\nu_1+(x_2-\overline{x})^2\nu_2+(x_3-\overline{x})^2\nu_3+(x_4-\overline{x})^2\nu_4}{N}=\dfrac{700}{50}=14$

   Αρα $s=\sqrt{14}$

ΘΕΜΑ Δ

1. $f'(x)=[(x-2)^2]'\cdot(x+\alpha)+(x-2)^2\cdot(x+\alpha)'=2(x-2)(x+\alpha)+(x-2)^2=(x-2)\cdot(3x+2a-2)$
2. Αφου η f έχει ακρότατο στο $x_0=4$ απο το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(4)=0\Leftrightarrow 2(10+2\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=-5$
3. $f(x)=(x-2)^2(x-5)$ και $f'(x)=(x-2)(3x-12)$ ή $f'(x)=3(x^2-6x+8)$
   Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0\Rightarrow x^2-6x+8=0$
   Εχουμε διακρίνουσα $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4$. Δυο λύσεις
   $x_{1,2}=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm2}{2}\Rightarrow x_1=2,x_2=4$

   Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
x^2-6x+8		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 2$
Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 4$
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.
Η f ειναι γνησιως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 4]$.
Η f ειναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4, +\infty)$.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x) = g(x) - h(x) = 3x^2 - 18x + 24$ και $k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 4$. Επειδή $k(x) < 0$ για $2 < x < 4$ θα έχουμε: $E(|Omega) = \int_2^4 |k(x)|\, dx = -\int_2^4 k(x)\, dx = -[x^2 - 9x^2 + 24x]_2^4 = 4$ τμ

[0]Σάββας Παυλίδης, 2013. Δημιουργημένο μέσω LaTeX