

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2011

ΘΕΜΑ Α

1. Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής; (6 Μονάδες)
2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εάν πρόταση είναι λανθασμένη.
 - a Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές. (2 Μονάδες)
 - b Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$ (2 Μονάδες)
 - c Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , τότε ισχύει: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x), x \in \mathbb{R}$ (2 Μονάδες)
 - d Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = \sigma \nu \nu \beta - \sigma \nu \nu \alpha$ (2 Μονάδες)
 - e Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . (2 Μονάδες)
3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω ισότητες:
 - a. $(\ln x)' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$. (3 Μονάδες)
 - b. $(\eta \mu x)' = \dots\dots\dots$ (3 Μονάδες)
 - c. Αν f συνεχής στο \mathbb{R} με $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \dots\dots\dots$ (3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

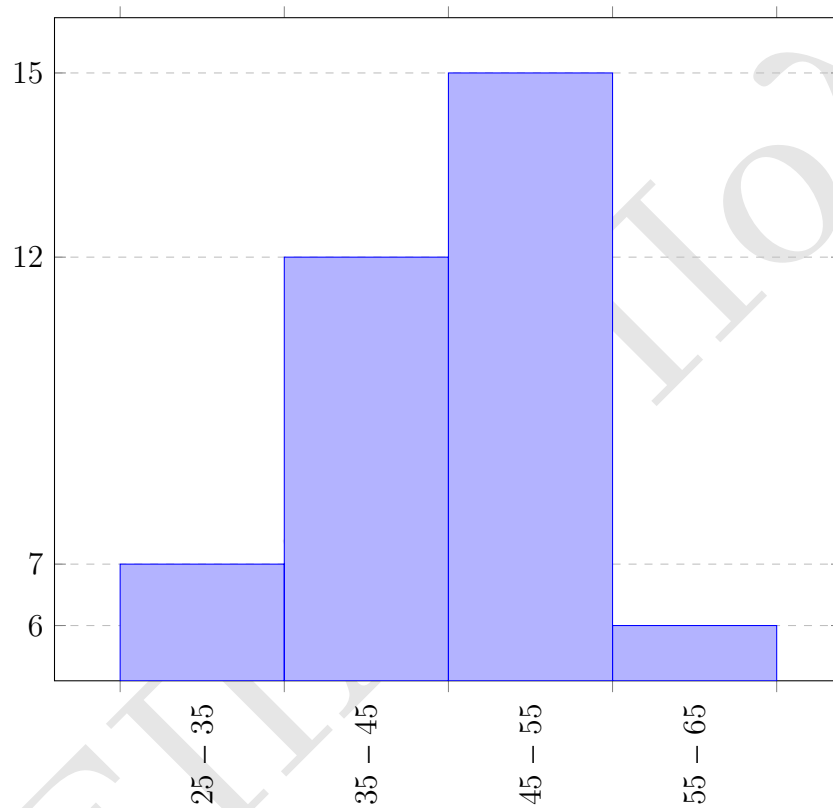
Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x < 4 \\ \alpha, & \text{αν } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{2} - 2} - 3, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

- a. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ (10 Μονάδες)
- b. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ (10 Μονάδες)
- c. Να βρείτε για ποιά τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$. (5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



- a. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα ν_i	$K_i \cdot \nu_i$	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$
[25, 35)				
[35, 45)				
[45, 55)				
[55, 65)				
ΣΥΝΟΛΑ				

(10 Μονάδες)

- b. Να υπολογίσετε την μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων. (5 Μονάδες)
- c. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών; (5 Μονάδες)
- d. Τι ποσοστό των εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών; (5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$

- a. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της. (6 Μονάδες)
- b. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f . (5 Μονάδες)
- c. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 f'(x)dx$ (6 Μονάδες)
- d. Αν $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$ με $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 3$. (8 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

1. Ορισμός σχολικού βιβλίου. Εύρος μιας μεταβλητής ονομάζεται η διαφορά της μικρότερης τιμής από την μεγαλύτερη τιμή.
2. 1.Σ 2.Σ 3.Λ 4.Λ 5.Σ
3. a. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ με $x > 0$
b. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
c. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

ΘΕΜΑ Β

- a. $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \frac{4^2 - 7 \cdot 4 + 12}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή.

Μπορούμε να το επιλύσουμε δημιουργώντας γινόμενο παραγόντων προκειμένου να εξαλειφθεί ο παράγοντας που δημιουργεί 0 στον αριθμητή και στον παρανομαστή, και ο οποίος είναι το $x - 4$. Μπορούμε και με την μέθοδο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης και με την διαίρεση πολυωνύμου, ή σχήμα Horner, διαιρώντας το $x^3 - 7x + 12$ με το $x - 4$. Το αποτέλεσμα είναι ότι $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$.

Οπότε έχουμε $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x - 3)(x - 4)}{(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} x - 3 = 4 - 3 = 1$

- b. $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3 \right) = \frac{4 - 4}{\sqrt{4} - 2} - 3 = \frac{0}{0} - 3$ Απροσδιόριστη μορφή.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3 \right) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - 3 \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{((\sqrt{x})^2 - 2^2)} - 3 \right) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)} - 3 \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} ((\sqrt{x} + 2) - 3) &= \sqrt{4} + 2 - 3 = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

- c. Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$. Άρα πρέπει $f(4) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

ΘΕΜΑ Γ

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$3x^2 - 12x + 9$	+	0	-	0	+
$f(x)$		τ.μ.		τ.ε.	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$

b. Στο $x_1 = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 5$ στο $x_2 = 3$ η

c. $I = \int_1^3 f'(x)dx = [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = -4$

d. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$g(x) = 3x^2 - 12x + 9 \text{ άρα } g(x) = 0.$$

Λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση και έχουμε δύο λύσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$

Για $x < 1$ είναι $|g(x)| = g(x)$.

Για $1 < x < 3$ είναι $|g(x)| = -g(x)$.

$$E = \int_0^3 (g(x))dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^3 -g(x)dx =$$

$$\int_0^1 (3x^2 - 12x + 9)dx - \int_1^3 (3x^2 - 12x + 9)dx =$$

$$\left[3\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 9x \right]_0^1 - \left[3\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2} + 9x \right]_1^3 =$$

$$[x^3 - 6x^2 + 9x]_0^1 - [x^3 - 6x^2 + 9x]_1^3 =$$

$$[1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - (0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0)] - [3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - (1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1)] = 8$$

τ.μ.