ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015

ΘΕΜΑ Α

1. Για μια συνεχή συνάρτηση f να γράψετε τις τρείς κατηγορίες σημείων, τα οποία ειναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων. (6 Μονάδες)

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό** αν η πρόταση ειναι σωστή ή την λέξη **Λάθος** εαν πρόταση είναι λανθασμένη.

   a Η επικρατούσα τιμή μιας μεταβλητής είναι μοναδική (2 Μονάδες)

   b Εστω συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της f (δηλαδή $f'(x) = 0$). Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσημη στο x_0, τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 όταν $f''(x_0) < 0$. (2 Μονάδες)

   c Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει:

   $$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = a, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}^*$$ (2 Μονάδες)

   d Αν οι συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσημες στο πεδίο ορισμού τους Α, τότε και η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσημη στο Α και ισχύει:
   $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$ (2 Μονάδες)

   e Η σχετική συχνότητα τιμής x_i μιας μεταβλητής συμβολίζεται με f_i και ισχύει $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ (2 Μονάδες)

3. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

   a. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = ...$, με $\beta > \alpha > 0$ (3 Μονάδες)

   b. $(c)' = ...$, αν c σταθερά (3 Μονάδες)

   c. Αν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ τότε η μέση τιμή της μεταβλητής είναι $\bar{x} = ...$ (3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) 50 μαθητών της Γ' τάξης ενός ΕΠΑΛ για να γράψουν ένα διαγώνισμα, δινονται στον παρακάτω πίνακα κατανομής:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
$[5, 15)$		20		
$[15, 25)$			34	
$[25, 35)$		12		
$[35, 45)$				
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		

a. Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον προηγούμενο πίνακα και να τον συμπληρώσετε σωστά. (7 Μονάδες)

b. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ του χρόνου, που χρειάστηκαν οι μαθητές για να γράψουν το διαγώνισμα. (5 Μονάδες)

c. Να υπολογίσετε την διακύμανση s^2 (Μονάδες 7) και την τυπική απόκλιση s της μεταβλητής (Μονάδες 2) δίδεται ότι $\sqrt{96} = 10$ (9 Μονάδες)

d. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας $CV\%$ (4 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δινεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} & ,\text{αν} \quad x > 2 \\ \\ 4x + 4e^{x-2} & ,\text{αν} \quad x \leq 2 \end{cases}$$

1. Να βρειτε το $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (4 Μονάδες)
2. Να βρειτε το $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (8 Μονάδες)
3. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η συνάρτηση ειναι συνεχής στο $x_0 = 2$ (6 Μονάδες)
4. Για $\lambda = 1$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$ (7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Μια ομάδα περιβαλλοντολόγων εκτιμά ότι το βάρος B (B σε τόνους) ενός παγόβουνου μεταβάλλεται με τον χρόνο t (t σε έτη) σύμφωνα με την συνάρτηση:

$$B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15,\ 0 \le t \le 10$$

1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου. (5 Μονάδες)
2. Ποιά χρονική στιγμή το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο; (8 Μονάδες)
3. Να αποδείξετε ότι, αν $t \in [6, 9]$, τότε ισχύει: $B(9) \le B(t) \le B(6)$ (5 Μονάδες)
4. Ποιά χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος; (7 Μονάδες)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

1. Ορισμός σχολικού βιβλίου, στην σελίδα 212. Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι:

    a Τα σημεία όπου υπάρχει η παράγωγος και είναι ίση με 0.

    b Τα άκρα των διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού (όποιο ειναι κλειστό)

    c Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στο οποίο δεν υπάρχει η παράγωγος f (γωνιακά σημεία).

2. a. ΛΑΘΟΣ. Η επικρατούσα τιμή, εαν υπάρχει, είναι μια, αλλά μπορεί και να μην υπάρχει επικρατούσα τιμή, είναι εαν στο σύνολο όλων των δυνατών τιμών, όλες ειναι ίδιες.

    b. ΣΩΣΤΟ. Απο το θεώρημα της 2ης παραγώγου.

    c. ΛΑΘΟΣ. Ο τύπος λέει $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

    d. ΛΑΘΟΣ. Ο τύπος λέει $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Οχι πλην, αλλά συν.

    e. ΣΩΣΤΟ.

    a. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x}dx = [ln(x)]_{\alpha}^{\beta} = ln(\beta) - ln(\alpha)$

    b. $(c)' = 0$

    c. $\bar{x} = \frac{\nu_\kappa \cdot x_\kappa + ... + \nu_2 \cdot x_2 + \nu_1 \cdot x_1}{\nu_\kappa + ... + \nu_2 + \nu_1}$

ΘΕΜΑ Β

1. Υπολογίζουμε το κέντρο κλάσης ως το μέσο του διαστήματος της αντίστοιχης κλάσης. Το βρίσκουμε προσθέτοντας τα άκρα του διαστήματος και διαιρώντας δια δυο. Για την συχνότητα, αφού ξέρουμε ότι αθροιστική $N_2 = 34$ αλλά $N_2 = \nu_1 + \nu_2 \Rightarrow 34 = \nu_2 + 20 \Rightarrow \nu_2 = 34 - 20 = 14$ Και αφού ξέρουμε ότι ο πληθυσμός ειναι συνολικά 50, θα έχουμε $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = \nu \Rightarrow 20 + 14 + 12 + \nu_4 = 50 \Rightarrow \nu_4 = 50 - 46 \Rightarrow \nu_4 = 4$ Η τελευταία στήλη προκύπτει απο απλό πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων στηλών.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
$[5,15)$	10	20	20	200
$[15,25)$	20	14	34	280
$[25,35)$	30	12	46	360
$[35,45)$	40	4	50	160
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		1000

2. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \kappa_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{1000}{50} = 20$
3. Για την διακύμανση, αφού ξέρουμε το $\bar{x}$ πρέπει να υπολογίσουμε, όπως μάθαμε σε επιπλέον στήλες (ακολουθεί ο πίνακας μόνο με τις στήλες που χρειαζόμαστε, βήμα-βήμα)

Χρόνος (σε λεπτά)	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα ν_i	$(\kappa_i - \bar{x})^2$	$\nu_i(\kappa_i - \bar{x})^2$
$[5,15)$	10	20	$(10-20)^2 = (-10)^2 = 100$	2000
$[15,25)$	20	14	$(20-20)^2 = 0^2 = 0$	0
$[25,35)$	30	12	$(30-20)^2 = 10^2 = 100$	1200
$[35,45)$	40	4	$(40-20)^2 = 20^2 = 400$	1600
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		4800

Ξέρουμε ότι $s^2 = \dfrac{\sum_1^4 \nu_i(\kappa_i - \bar{x})^2}{\nu} \Rightarrow s^2 = \dfrac{4800}{50} = 96$ Αφού $s^2 = 96 \Rightarrow s = \sqrt{96} \Rightarrow s \approx 10$ (όπως δίδεται απο την εκφώνηση).

4. Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας επι τοις εκατό, χρησιμοποιούμε τον τύπο $CV\% = CV \cdot 100 = \dfrac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \dfrac{10}{20} \cdot 100 = \dfrac{1}{2} \cdot 100 = 0,5 \cdot 100 = 50\%$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} & \text{,αν} \quad x > 2 \\ \\ 4x + 4e^{x-2} & \text{,αν} \quad x \leq 2 \end{cases}$$

a. Για το $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ παίρνουμε την ΚΑΤΩ συνάρτηση. Αρα έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4\cdot 2 + 4e^{2-2} = 8 + 4e^0 = 8 + 4\cdot 1 = 8 + 4 = 12$$

b. Για το $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ παίρνουμε την ΠΑΝΩ συνάρτηση. Αρα έχουμε

Για το $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{2^3-8}{\lambda\cdot 2 - 2\cdot\lambda} = \dfrac{0}{0}$ Αρα απροσδιόριστη μορφή

Οπότε πρέπει να εξαλλείψουμε την απροσδιόριστη μορφή... $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3-8}{\lambda x - 2\lambda}$ βγάζουμε κοινό παράγοντα το λάμδα στον παρανομαστή, και έτσι γίνεται

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3-8}{\lambda(x-2)}$ Πρέπει λοιπόν (εφόσον δεν θυμόμαστε ταυτότητες, αν θυμόμαστε αντικαθιστούμε κατευθείαν το x^3-8). Χρησιμοποιούμε σχήμα Χορνερ $x^3-8 = x^3+0x^2+x-8$

x^3	$+0x^2$	$+0x$	-8	
1	0	0	-8	2
	2	4	8	
1	2	4	0	
x^2	$+2x$	$+4$		

Αρα το $x^3-8 = (x^2+2x+4)(x-2)$. Αντικαθιστούμε πάνω στο όριο και έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{\lambda(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2+2x+4)(x-2)}{\lambda(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x+4}{\lambda} =$$

$$= \frac{2^2+2\cdot 2+4}{\lambda} = \frac{12}{\lambda}$$

c. Για να είναι συνεχής στο σημείο αλλαγής τύπου της συνάρτησης ξέρουμε ότι πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ Οπότε έχουμε:

$$12 = \frac{12}{\lambda} = 12 \Rightarrow \frac{12}{\lambda} = 12 \Rightarrow 12 = \lambda\cdot 12 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{12} \Rightarrow \lambda = 1$$

d. Αφού βάλουμε στην θέση του λ το 1, η συνάρτηση μας γίνεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & ,\text{αν} \quad x > 2 \\ \\ 4x + 4e^{x-2} & ,\text{αν} \quad x \leq 2 \end{cases}$

Αφού εμείς θέλουμε στο διάστημα απο 1 έως 2, τότε ισχύει η ΚΑΤΩ συνάρτηση. Αρα έχουμε

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 4x + 4e^{x-2}dx = 4\int_1^2 x + e^{x-2}dx =$$

$$= 4\int_1^2 xdx + 4\int_1^2 e^{x-2}dx = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 4\left[e^{x-2}\right]_1^2 =$$

$$4\cdot\left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] + 4\left[e^{2-2} - e^{1-2}\right] = 4\cdot\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + 4\cdot\left[e^0 - e^{-1}\right] = 4\cdot\frac{3}{2} + 4\cdot\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 6 + 4 - \frac{4}{e} = 10 - \frac{4}{e}$$

ΘΕΜΑ Δ

Οποτε μιλάμε για ρυθμό μεταβολής υποννοούμε ΠΑΡΑΓΩΓΟ.

a. Αρα πρέπει να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $B(t)$. Εχουμε:

$$B'(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15\right)' = -3\cdot\frac{t^2}{3} + 2\cdot 2t + 12 = -t^2 + 4t + 12$$

b. Οταν μας ζητάει το μέγιστο, ξέρουμε ότι μας ζητάει το τοπικό ακρότατο όπου η συνάρτηση έχει την μέγιστη τιμή. Αλλά αυτό ειναι εύκολο, βρίσκουμε τα σημεία όπου η παράγωγος γίνεται μηδέν (θεώρημα Fermat)και βρίσκουμε ποιό απο αυτά είναι μέγιστο.

$B'(t) = 0 \Rightarrow -t^2 + 4t + 12 = 0$ Λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 12 = 16 + 48 = 64$

Η διακρίνουσα ειναι θετική, άρα έχουμε δύο λύσεις.

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 8}{-2} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-4+8}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \text{ και } x_2 = \frac{-4-8}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Αφού βρήκαμε τις ρίζες, κανουμε πινακα μεταβολών

t	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$-t^2+4t+12$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(t)$		↘	τ.ε.	↗	τ.μ.	↘	

Τις τιμές κάτω απο το 0, δεν τις υπολογίζουμε γιατί δεν είναι στο πεδίο τιμών, απλά τις δείχνουμε στο πινακάκι για ευκολία στην επίλυση της δευτεροβάθμιας, όπως κάναμε στην τάξη.Αρα ουσιαστικά έχουμε παίρνουμε απο το πινακάκι μόνο απο το 0 ως το 10, δηλαδή γίνεται ένα πινακάκι όπως παρακάτω.

t	0		6		10
$-t^2+4t+12$		$+$	0	$-$	
$B(t)$		↗	τ.μ.	↘	

Αρα το τοπικό μέγιστο θα βρίσκεται στο σημείο $t = 6$. Δηλαδή στα 6 έτη έχουμε το μεγαλύτερο βάρος το παγόβουνου.

c. Αφού με το πινακάκι που κάναμε παραπάνω φαίνεται ότι η συνάρτηση $B(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα απο 6 ώς 10, τότε και οι τιμές ισχύει ο τύπος.

d. Αφού θέλουμε το μέγιστο του ρυθμού μεταβολής, είναι σαν να λέμε ότι θέλουμε να βρούμε πότε γίνεται μέγιστο (έχει μέγιστο) η παράγωγος $B'(t)$. Αρα παίρνουμε την παράγωγο της παραγώγου, και προσπαθούμε να βρούμε που έχει ακρότατο.

$B''(t) = (B'(t))' = (-t^2 + 4t + 12)' = -2t + 4$

Η συνάρτηση αυτή έχει ρίζες $-2t + 4 = 0 \Rightarrow -2t = -4 \Rightarrow t = \dfrac{-4}{-2} = 2$ Εχουμε λοιπόν μια ρίζα.

t	0		2		10
$B''(t) = -2t + 4$		$+$	0	$-$	
$B'(t)$		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	

Αρα η $B'(t)$ (που ειναι ο ρυθμός μεταβολής) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $t_0 = 2$ με τιμη $B'(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 12 = -4 + 8 + 12 = 16$. Αρα όταν $t = 2$ έχουμε την ταχύτερη μεταβολή του βάρους, δηλαδη στα 2 έτη.

[0]Σάββας Παυλίδης, 2015. Δημιουργημένο με LaTeX