Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

681.5
М 744

№ 3868

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
для студентов III курса дневного отделения АВТФ
(направление 230100 – Информатика и вычислительная техника)

НОВОСИБИРСК
2010

УДК 681.5.015.26(076.5)
М 744

Составители: *В.Г. Мамонова*, канд. техн. наук, доц.
Н.И. Лыгина, канд. пед. наук, доц.

Рецензент *Ю.В. Шорников,* д-р техн. наук, проф.

Работа подготовлена на кафедре
автоматизированных систем управления

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОЛУЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Цель работы – изучение методов генерирования случайных чисел с заданным законом распределения.

1.1. Основные теоретические положения

При статистическом моделировании систем одним из основных вопросов является учет стохастических воздействий. Количество и качество случайных чисел (СЧ), используемых для получения статистически устойчивой оценки характеристик процесса функционирования системы при программной реализации моделирующего алгоритма, колеблется в достаточно широких пределах в зависимости от класса объекта моделирования, вида оценивающих характеристик, необходимой точности и достоверности результатов моделирования [2]. В качестве исходной последовательности для генерирования СЧ с любым законом распределения, как правило, используется равномерное распределение.

Метод обратной функции (прямой метод). Это один из самых точных методов преобразования СЧ с равномерным распределением в последовательность СЧ с другим заданным законом распределения.

Этот метод основан на следующей теореме [1–3]. *Если случайная величина* η *имеет плотность распределения* $f_\eta(y)$*, то распределение случайной величины*

$$\xi = \int_0^\eta f_\eta(y)dy \qquad (1.1)$$

является равномерным в интервале [0, 1].

На основании этого распределения можно сделать следующий вывод. Чтобы получить число, принадлежащее последовательности случайных чисел $\{y_j\}$, имеющих функцию плотности $f_\eta\,(y)$, необходимо разрешить относительно y_j уравнение

$$\int_{-\infty}^{y_j} f_\eta(y)dy\,. \tag{1.2}$$

Рассмотренный метод рекомендуется использовать в том случае, когда интеграл от $f_\eta(y)$ можно взять в явном виде и разрешить уравнение относительно y_j аналитическими методами.

1.2. Получение СЧ с использованием предельных теорем теории вероятности (приближенный, неуниверсальный метод)

1.2.1. Получение СЧ с нормальным законом распределения

Нормальное (Гауссово) распределение имеет функцию плотности распределения

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(\frac{-\;\;y-m\;\;^{2}}{2\sigma^{2}}\right) \tag{1.3}$$

со средним a и дисперсией σ^2.

Из центральной предельной теоремы теории вероятностей следует, что сумма большого числа одинаково распределенных независимых слагаемых при весьма общих условиях имеет асимптотически нормальное распределение.

Центральная предельная теорема теории вероятностей утверждает следующее. *Если независимые, одинаково распределенные случайные величины X_1, …, X_N имеют каждая математическое ожидание m_1 и среднеквадратическое отклонение σ_1, то сумма*

$$\sum_{i=1}^{N} X_i$$

асимптотически нормальна с математическим ожиданием

$$m = Nm_1, \tag{1.4}$$

$$\sigma = \sigma_1\sqrt{N}\ . \tag{1.5}$$

Как показывают расчеты, X имеет распределение, близкое к нормальному, уже при сравнительно небольших N. Значение N можно определить, воспользовавшись соотношениями (1.4) и (1.5) [1–3].

1.2.2. Получение СЧ, распределенных по закону Пуассона

Пусть необходимо получить случайные числа, имеющие закон распределения Пуассона:

$$P(k, a) = \frac{a^m}{k!}e^{-a}\ , \tag{1.6}$$

где a – математическое ожидание; k – значение случайных величин.

Воспользуемся предельной теоремой Пуассона. *Если P – вероятность наступления события A при одном испытании, то вероятность наступления m событий в n независимых испытаниях при $n \to \infty$, $P \to 0$ и $nP = m$ асимптотически равна* $P(k, a)$.

Алгоритм генерации последовательности случайных чисел следующий. Выбираем P из интервала (0.1 + 0.2) и из соотношения $nP = m$ определяем n. Проводим серию из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью P, т. е. реализуем проверку условия (метод розыгрыша по жребию):

$$P < \xi_j\,, \tag{1.7}$$

где ξ_j – случайная величина, имеющая равномерный закон распределения в интервале [0, 1], и подсчитываем количество случаев, когда выполняется условие (7). Числа m будут приближенно следовать закону Пуассона [1–3].

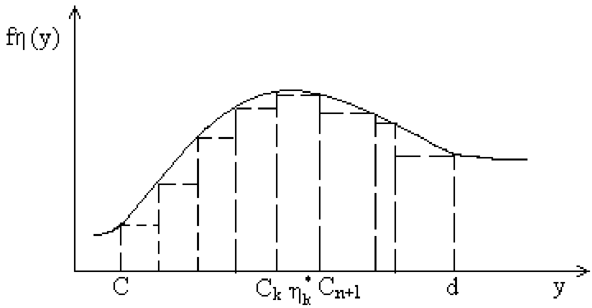
Рассмотренный способ может быть использован для генерирования СЧ с биномиальным распределением, если вероятность появления события при одном испытании достаточно велика.

1.3. Приближенный универсальный способ получения случайных чисел (метод кусочной аппроксимации функции плотности)

Пусть требуется получить последовательность СЧ $\{y_j\}$ с функцией плотности $f_\eta(y)$, возможные значения которой лежат в интервале (c, d). Функция плотности распределения $f_\eta(y)$ представляется в виде кусочно-постоянной, т. е. интервал (c, d) разбивается на ℓ подынтервалов, как это показано на рисунке, и на каждом подынтервале $f_\eta(y)$ считается постоянной. Тогда случайная величина представляется в виде

$$\eta = C_k + \eta_k^*,$$

где C_k – абсцисса левой границы k-го интервала; η_k^* – случайная величина, возможные значения которой располагаются равномерно внутри k-го интервала, т. е. на каждом участке величина считается распределенной равномерно (см. рисунок).



Кусочная аппроксимация функции плотности

Чтобы аппроксимировать $f_\eta(y)$ наиболее удобным для практических целей способом, целесообразно разбить (c, d) на интервалы так, чтобы вероятность попадания случайной величины n в любой интервал (C_k, C_{k+1}) была постоянной, т. е. не зависела от номера интервала k. Таким образом, для вычисления C_k используется следующее соотношение:

$$\int_{C_k}^{C_{k+1}} f_2(y)dy = \frac{1}{\ell}, \tag{1.8}$$

Значение η_k^* определяется исходя из того, что на интервале (C_k, C_{k+1}) функция плотности распределения $f_\eta(y)$ при аппроксимации кусочно-постоянной функцией является равномерной.

Алгоритм программной реализации этого способа следующий.

1. Генерируется случайное равномерно распределенное число X_i из интервала (0, 1).

2. С помощью этого числа случайным образом выбирается интервал (C_k, C_{k+1}).

3. Генерируется число X_{i+1} и масштабируется с целью приведения его к интервалу (C_k, C_{k+1}), т.е. домножается на величину ($C_{k+1} - C_k$).

4. Вычисляется случайное число $y_j = C_k + (C_{k-1} - C_k)\, X_{i+1}$ с требуемым законом распределения.

Велшичины C_k формируются заранее до начала процесса моделирования.

1.4. Критерии согласия

В процессе обработки исходной статистики моделирования результатов машинного эксперимента, а также формирования последовательности случайных чисел с любым законом распределения после генерации последних с помощью соответствующих алгоритмов необходимо решить следующие задачи:

– определить эмпирический закон распределения случайной величины;

– проверить однородность распределения;

– сравнить средние значения и дисперсию переменных и т.д.

С точки зрения математической статистики это типовые задачи на проверку статических гипотез [1–3], которые оцениваются с помощью критерия согласия.

Рассмотрим особенности использования ряда критериев согласия.

1.4.1. Критерий согласия Колмогорова

Основан на выборе в качестве меры расхождения U величины

$$D = \max \mid F_э(y) - F(y) \mid , \tag{1.9}$$

где $F_э(y)$ – экспериментальная функция распределения, $F(y)$ – теоретическая функция распределения.

Из теоремы Колмогорова следует, что величина $\lambda = D\sqrt{N}$ при $N \to \infty$ имеет функцию распределения

$$F(z) = P(\lambda < z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} . \qquad (1.10)$$

Если вычисленное на основе экспериментальных данных значение λ меньше, чем табличное при выбранном уровне значимости, то гипотезу H принимают, в противном случае расхождение (1.9) считается неслучайным и гипотеза H отвергается. Гипотеза H – полученное эмпирическое распределение согласуется с каким-либо теоретическим распределением.

Данный критерий целесообразно применять в том случае, когда известны все параметры теоретической функции распределения [1, 2, 5].

1.4.2. Критерий согласия Пирсона

В качестве меры расхождения U выбирается

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{d} \frac{l_i - NP_i^{\ 2}}{NP_i}, \qquad (1.11)$$

где l_i – количество значений случайной величины η, попавших в i-й подынтервал; P_i – вероятность попадания случайной величины η в i-й подынтервал, вычисленная из теоретического распределения; d – количество подынтервалов, на которые разбивается интервал значений случайной последовательности.

При $N \to \infty$ закон распределения величины U зависит только от числа подынтервалов и приближается к закону распределения χ^2.

Вычисляется $U = \chi^2$ и определяется число степеней свободы

$$k = d - r - 1, \qquad (1.12)$$

где d – количество подынтервалов, а r – число независимых связей, накладываемых на распределение.

Затем по таблицам определяют $P(\chi^2\ \gamma \geq \chi^2)$. Если эта вероятность превышает некоторой уровень значимости у, то считается, что гипотеза H_0 не опровергается [1, 2, 5].

1.4.3. Критерий согласия Смирнова

В данном случае в качестве H_0 рассматривается гипотеза о том, что две выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности. Применение критерия сводится к следующему. По имеющимся результатам вычисляют эмпирические функции распределения $F_э(U)$ и $F_э(Z)$, которые являются непрерывными функциями своих аргументов.

Определяют

$$D = \max |F_э(U) - F_э(Z)|. \tag{1.13}$$

Затем при заданном уровне значимости y находят допустимое отклонение

$$D_y = \sqrt{|\ln y| \ 1/N_1 + 1/N_2 \ /2}\,, \tag{1.14}$$

где N_1 и N_2 – объемы сравниваемых выборок для $F_э(U)$ и $F_э(Z)$.

После этого проводится сравнение значений D и D_y. Если $D > D_y$, то нулевая гипотеза H_0 о тождественности законов распределения $F(U)$ и $F(Z)$ с доверительной вероятностью $\beta = 1 - \alpha$ отвергается [2].

Варианты заданий

1. Смоделировать последовательность СЧ с заданным законом распределения, построить экспериментальную функцию плотности распределения и определить ее параметры:

а) $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$;

б) $f(t) = \lambda_0 k t^{k-1} \exp(-\lambda_0 t^k)$ – распределение Вейбулла, которое часто используется в теории надежности;

в) $f(x) = \lambda (1 - \lambda x/2)$.

2. Необходимо: а) определить, принадлежат ли две выборки одной и той же генеральной совокупности с параметрами $a = 2$ и $\sigma^2 = 1$. Первая выборка последовательности случайных чисел с нормальным законом распределения получена на основе центральной предельной теоремы теории вероятностей и вторая с использованием метода Бокса–Маллера [4]. В основе метода Бокса–Маллера лежат следующие преобразования

$$y_n = (-2 \ln X_n)^{1/2} \cos(2\pi X_{n+1}),$$

$$y_{n+1} = (-2 \ln X_n)^{1/2} \sin(2\pi X_{n+1}),$$

где X_n и X_{n+1} – два числа с равномерным распределением в интервале (0, 1); y_n и y_{n+1} – пара некоррелированных, нормально распределенных случайных чисел с $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$.

Преобразование

$$y_n = a + \sigma\, y_n\,,$$

$$y_{n+1} = a + \sigma\, y_{n+1}$$

формирует пару нормально распределенных случайных чисел со средним a и дисперсией σ^2;

б) сравнить приведенные выше датчики по качеству.

3. Необходимо: а) сравнить методы получения случайных чисел с нормальным законом распределения. Рассмотреть метод, основанный на предельной центральной теореме теории вероятностей, и метод, основанный на преобразовании

$$Y = \sqrt{3\Big/ n\sigma \sum_{i=1}^{n} 2x_i - 1} \;\Big|\;\Big| + m\,.$$

Параметры распределения $m = 0{,}5$ и $\sigma^2 = 1$, x_i – число с равномерным законом распределения в интервале (0, 1);

б) для приведенных выше датчиков определить, принадлежат ли две выборки одной и той же генеральной совокупности.

4. Необходимо: а) получить пуассоновские числа с математическим ожиданием $m = 3$ с использованием двух методов. Выбрать лучший.

Первый метод основан на теореме Пуассона.

Второй метод получения пуассоновских чисел заключается в следующем. Образуется произведение равномерно распределенных последовательных случайных чисел x_i. Количество сомножителей k выбирается таким, чтобы удовлетворялось неравенство: $\prod_{i=1}^{k} x_i < e^{-m}$.

Число $k - 1$ представляет собой переменную, принадлежащую совокупности, распределенной по закону Пуассона с математическим ожиданием nP. Если неравенству удовлетворяет первое из равномерно распределенных случайных чисел, то случайное пуассоновское число равно 0;

б) проверить, принадлежат ли две выборки, полученные с помощью датчиков СЧ, одной и той же генеральной совокупности.

5. Используя способ кусочной аппроксимации, получить совокупность случайных чисел, плотность вероятности которых равна.

$$f(\eta) = (-0{,}5)\,\eta + 1.$$

Построить теоретическую и экспериментальную функции распределения вероятностей. Оценить степень согласия законов распределения по критерию Колмагорова.

6. Методом серий проверить последовательность СЧ, полученных с помощью датчика Лемера.

Датчик Лемера имеет вид

$$\xi_{i+1} = \xi_i \nu - \operatorname{int}(\xi_i \nu),$$

где $\xi_0 = 0{,}12345$, $\nu = 3456$.

Метод серий. При анализе «случайности» методом серий элементы исследуемой совокупности СЧ ξ_{i} подразделяются на элементы первого рода (*а*) и второго рода (*в*). Серией называется любой отрезок последовательности, состоящий из следующих друг за другом элементов одного и того же рода. Число элементов в отрезке называется длиной серии. Обычно к элементам первого рода относят СЧ, меньшие 0,5, а к элементам второго рода – все остальные.

Введем обозначения:

r_{ai} – число серий элементов a длиной i в исследуемой совокупности $\{\xi_{\text{i}}\}$;

r_{bi} – число серий элементов b длиной i;

$R_a = \sum\limits_{i=1}^{n_a} r_{ai}$ – общее число серий элементов первого рода;

$R_b = \sum\limits_{i=1}^{n_b} r_{bi}$ – общее число серий элементов второго рода;

$n_{a\,\max}$, $n_{b\,\max}$ – максимальная длина серий элементов рода a и b соответственно;

$R = R_a + R_b$ – общее число серий в исследуемой совокупности.

После выделения серий найдем теоретические и эмпирические значения величин R_a, R_b и R по большой выборке, задаваясь некоторой величиной доверительной вероятности β.

Теоретическое значение R_a при $\beta = 0{,}95$ можно найти по формуле

$$R_a = R_b = \frac{1}{4}\left(N - 1{,}63\sqrt{N+1}\right).$$

Значение R_a и R_b являются нижними пределами числа серий при заданной величине β.

Предельное верхнее значение длины серии определяется выражением

$$n_{a\max} = n_{b\max} = \frac{\lg\left(-\dfrac{N}{\ln\beta}\right)}{\lg 2} - 1.$$

В таблице приведены теоретические значения R_a, R_b, R и $n_{\max}$ для выборок различного объема при $\beta = 0{,}95$.

Если полученные экспериментальные значения R_a, R_b больше, а величина $n_{\max}$ меньше соответствующих теоретических значений, то можно считать, что гипотеза о «случайности» не опровергается опытными данными и датчик случайных чисел при выполнении других условий пригоден для моделирования случайных величин.

Параметры	$N = 1024$	$N = 16\,384$
R_a	243	4043
R_b	243	4043
R	486	8086
$n_{\max}$	13	17,3

7. Проверить последовательность СЧ, полученных с помощью датчика Лемера на равномерность и независимость.

8. Сравнить датчик Лемера (СЧ с равномерным законом распределения) и функцию, встроенную в используемую систему программирования.

Содержание отчета

1. Задание.
2. Алгоритм моделирования случайных чисел с заданным законом распределения и используемые критерии согласия.
3. Программа, реализующая соответствующий алгоритм.

4. Результаты проверки гипотезы о распределении случайных чисел с помощью критериев согласия.

5. График экспериментальной функции распределения случайной величины или гистограмма.

6. Анализ полученных результатов.

Контрольные вопросы

1. Теорема о преобразовании случайных чисел.
2. Приближенный универсальный метод получения случайных чисел.
3. Получение случайных чисел с распределением Пуассона.
4. Получение случайных чисел с нормальным законом распределения.
5. Метод кусочно-линейной аппроксимации.
6. Использование критериев согласия для проверки гипотез.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Цель работы – исследование динамики поведения сложных систем и расчет показателей эффективности их функционирования методом динамического моделирования.

2.1. Основные теоретические положениЯ

2.1.1. Основные этапы построения динамической модели

Основой динамического моделирования является принцип моделирования Δt. В соответствии с этим принципом строится математическая модель сложной производственной, экономической или социальной системы. Модель описывает поведение исследуемой системы во времени, причем состояние системы определяется начиная с некоторого момента времени в каждый последующий момент с шагом Δt. Такой подход в общем случае позволяет определить не только значение показателей эффективности сложной системы на момент окончания интервала моделирования, но и (это самое важное) динамику изменения любой переменной динамической модели.

Процедура построения динамической модели включает в себя следующие этапы [1].

1. Определение проблемы в сложной системе, постановка основной цели (целей) моделирования. Проблема формулируется в виде вопросов, ответы на которые может дать исследование поведения системы с помощью динамической модели. Помните: тривиальные вопросы могут привести лишь к тривиальным ответам! Вопросы общего характера также непригодны, как и узкие вопросы, ограничивающие область исследования (в обоих случаях практически невозможно добиться существенного результата).

2. Выделение факторов (переменных), влияющих на решение проблемы. Переменные динамической модели должны соответствовать реальным характеристикам исследуемой системы (в частности, модельные переменные имеют те же единицы измерения, что и реальные переменные). Определяются фактические и требуемые значения переменных.

3. Выявление причинно-следственных связей в информационных потоках систем с обратной связью. Причинно-следственные связи характеризуют влияние принимаемых решений на состояние системы.

4. Построение математической модели. Нередко анализ начинается с построения непрерывной модели, что предполагает существенное агрегирование событий в исследуемой системе. Динамика модели с непрерывными потоками более проста для исследования и может быть проанализирована прежде, чем будут введены в модель исследуемой системы усложняющие, но более близкие к реальному поведению системы причинно-следственные связи.

5. Программная реализация модели. Выбор программного средства определяет класс моделируемой системы и затраты (в частности, временные) на моделирование.

6. Проверка адекватности модели. При необходимости проводится корректировка модели с целью приближения ее к реальной системе.

7. Анализ результатов моделирования. Подводит к решению выявленной в исследуемой системе проблемы.

Построение эффективной динамической модели предполагает использование принципов и методов системного анализа на различных этапах ее разработки и использования.

2.1.2. Структура динамической модели

В качестве базовых элементов динамической модели используются (рис. 2.1):

– Уровни, или материальные накопления, в исследуемой системе;

– темпы потоков, перемещающие содержимое уровней от одного уровня к другому;

– функции решений, изменяющие темпы потоков между уровнями;

– информационные каналы.

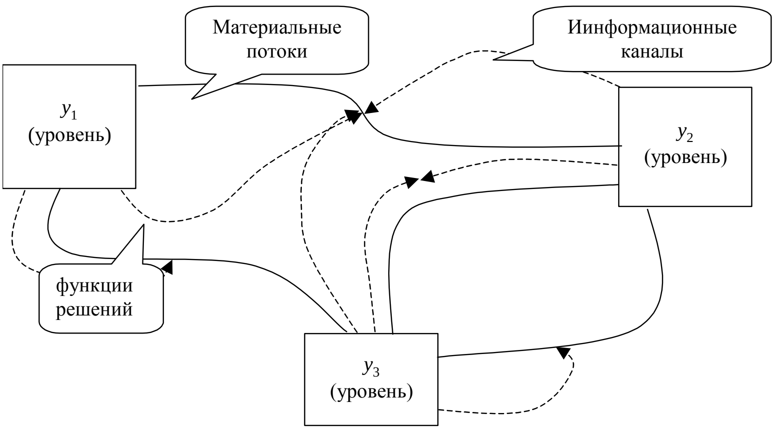


Рис. 2.1. Базовые элементы динамической модели

Уровни характеризуют накопления в исследуемой системе (товары на складе, численность работающих, денежные массы и т. д.). Они определяют значения в некоторый момент времени тех переменных динамической модели, которые накапливаются из-за разности между входными и выходными потоками (один уровень может зависеть от нескольких входных и выходных потоков).

Темпы характеризуют мгновенные потоки между уровнями в модели. Значения темпов потоков определяются в соответствии с функциями решений, а затем по известным значениям темпов потоков рассчитываются их уровни.

Чтобы выяснить, является ли данная переменная уровнем или темпом потока, нужно привести систему в состояние покоя, тогда темпы потоков будут равны нулю, а уровни потоков будут иметь значение, как правило, отличное от нуля.

Темпы и уровни потоков могут иметь одни и те же единицы измерения (в частности, это характерно для информационных потоков).

Для системного представления процессов функционирования сложной системы нужно использовать различные сети потоков. Разделение на сети произвольно. Все уровни одной сети имеют одинаковые единицы измерения. Входные и выходные потоки одного уровня переносят только те материалы, которые накапливаются данным уровнем. Вместе с тем информационная сеть может связывать уровни с темпами этой же или другой сети. В общем случае информационная сеть переносит информацию от уровней к функциям решений. Она начинается от уровней и темпов различных сетей и заканчивается функциями решений, определяющих темпы в этих сетях. Информационную переменную не следует смешивать с истинной переменной, которую она отображает.

Информация является соединяющим элементом, обеспечивающим взаимодействие различных сетей динамической модели. Изменения информационных потоков определяются изменениями в исследуемой системе в процессе ее функционирования.

Функции решений представляют собой правила, по которым рассчитываются темпы потоков на основе данных об уровнях потоков в данной сети. Темпы потоков определяются только уровнями. Решения, принимаемые в данный момент времени в различных потоках, независимы друг от друга.

2.1.3. Математическое описание динамической модели

Для описания структуры динамической модели используется система уравнений, включающая в основном уравнения для расчета темпов и уровней потоков в различных сетях. Система уравнений определяет состояние исследуемой системы в данный момент времени исходя из состояния исследуемой системы в предыдущий момент времени (разница между предыдущим и данным моментом времени равна Δt).

Пусть в момент времени t_1 уровень потока материалов равен y_1, а темп этого же потока в пределах промежутка времени Δt остается постоянным. Численные значения величин темпа и уровня потока известны (рис. 2.2).

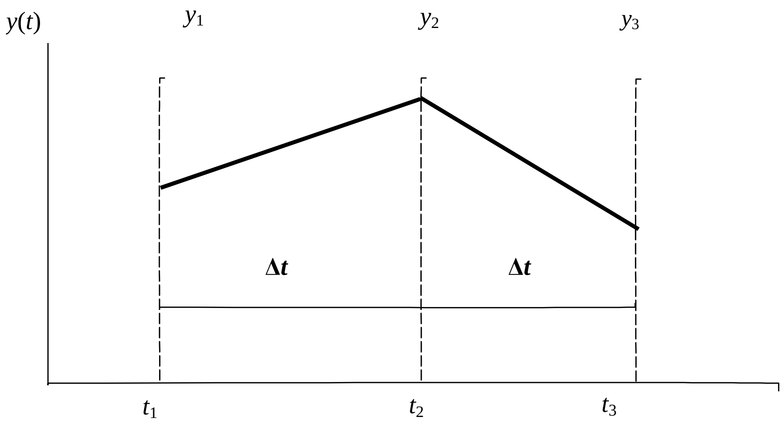


Рис. 2.2. Динамика изменения уровней потока на заданном временном интервале

Порядок вычисления темпов и уровней в различные моменты следующий.

1. По известному значению уровня рассматриваемого материального потока в момент t_1 и функции принятия решения на интервале $[t_1, t_2]$ определяется значение уровня для момента времени t_2.

2. По значению уровня потока y_2 в момент времени t_2 определяется значение темпа материального потока в момент времени t_2.

3. По вычисленным ранее значениям темпа и уровня потока в момент времени t_2 определяется значение функции решения на интервале $[t_2, t_3]$.

4. Вся последовательность вычислений повторяется для определения темпа, уровня и функции решения на следующем интервале.

Рассмотрим пример составления уравнения для расчета уровня материального потока на примере. Пусть необходимо определить уровень (количество) заготовок на складе материалов в момент времени t_2, если известны уровень заготовок y_1 в момент времени t_1, темп (скорость) x_1 поступления заготовок на склад на интервале $[t_1, t_2]$, темп выдачи заготовок в цех x_2 на интервале $[t_1, t_2]$ и величина интервала Δt. Тогда

$$y_2(t_2) = y_1(t_1) + \Delta t\,(x_1(t_1, t_2) - x_2(t_1, t_2)). \tag{2.1}$$

Если $\Delta t \to 0$, тогда уравнение (2.1) принимает следующий вид:

$$y(t_2) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (x_1(t) - x_2(t))dt. \quad (2.2)$$

Для имитационного моделирования используется разностная форма уравнения, определяющего уровень материального потока (2.1).

Уравнения уровней в различных сетях для одного и того же момента времени не зависят друг от друга и определяются информацией о состоянии системы исследования в предшествующий момент времени.

Уравнение темпа в момент t_2 задает правило, по которому будет изменяться темп в пределах следующего интервала Δt.

Уравнения темпов потоков в различных сетях не зависят друг от друга и могут быть решены в любой последовательности.

Зачастую удобно разделить уравнение темпа потока на отдельные части, представляющие собой вспомогательные уравнения. Вспомогательные уравнения дают возможность привести динамическую модель в соответствие с исследуемой системой, так как с их помощью можно задавать многие факторы, учитываемые в функциях решений.

Вспомогательные уравнения являются промежуточными. Путем алгебраических подстановок они могут быть исключены из основных уравнений темпов и уровней потоков, при этом и теряется ясность, возрастает сложность основных уравнений, что затрудняет интерпретацию их смыслового содержания.

Вспомогательные уравнения решаются *после* уравнений уровней потоков, поскольку для решения вспомогательных уравнений и уравнений темпов потоков используются значения уровней потоков, определенные для одного и того же момента времени, но они решаются *прежде* уравнений темпов потоков, и полученные значения уровней подставляются в уравнения темпов. Вспомогательные уравнения решаются в *определенном* порядке. Система вспомогательных уравнений не должна быть замкнутой, в противном случае она составлена неверно.

В динамическую модель можно ввести дополнительные уравнения для определения переменных, не являющихся частью структуры динамической модели, но представляющих интерес для понимания процессов функционирования исследуемой системы.

В динамическую модель включаются также уравнения начальных условий, определяющие исходные значения всех уровней потоков и некоторых темпов. Эти уравнения решаются только один раз перед началом процесса динамического моделирования.

Интервал моделирования Δt должен быть достаточно коротким, чтобы его величина не влияла существенно на результаты вычислений. Практически Δt должно быть меньше продолжительности любого запаздывания первого порядка (см. п. 2.14). Вместе с тем за время Δt суммарный входной или выходной поток не должны вызывать значительных изменений уровней потоков, в противном случае за время Δt величина уровня может стать отрицательной (если из потока изъято больше материалов, чем их имелось в начале интервала Δt).

Отметим еще раз, что каждое уравнение позволяет определить одну переменную динамической модели с помощью констант и других переменных. Уравнений в системе уравнений должно быть не меньше, чем переменных в динамической модели.

2.1.4. Запаздывания

Запаздывания характеризуют уровни потоков в исследуемой системе, при этом возможна ситуация, когда входные и выходные темпы потоков различны (при отсутствии такой характеристики потока, как уровень, подобное соотношение между входным и выходным темпами было бы невозможным).

Запаздывание понимается как особый класс уровней, когда выходной поток определяется только уровнем, содержащимся внутри запаздывания, и некоторыми константами.

Например, если транспортная система представлена в виде запаздывания, то уровень товаров внутри такой системы является единственной переменной запаздывания, а константа характеризует среднее запаздывание в транспортной системе.

Для количественного описания запаздывания используются следующие характеристики.

1. Среднее значение запаздывания (его длительность). Эта характеристика определяет установившееся запаздывание, при котором темпы потоков на входе и на выходе запаздывания и его уровень постоянны (тогда темпы входного и выходного потоков должны быть равны между собой). Уровень потока в запаздывании будет равен темпу входного потока, умноженному на среднюю величину запаздывания.

2. Величина неустановившейся реакции потока в запаздывании. Эта характеристика определяет влияние изменения входного потока на выходной поток в течение некоторого временного интервала.

Рассмотрим класс показательных функций запаздывания. Выходной темп потока в этом классе определяется как

$$x(t) = y(t)/D,$$

где $y(t)$ – уровень, определяющий поток в запаздывании в момент времени t; D – длительность запаздывания; $x(t)$ – выходной темп запаздывания в момент времени t.

На рис. 2.3 представлено показательное запаздывание первого порядка. Уровень потока $y(t)$, находящегося в запаздывании, определяется уравнениями (2.1) и (2.2).

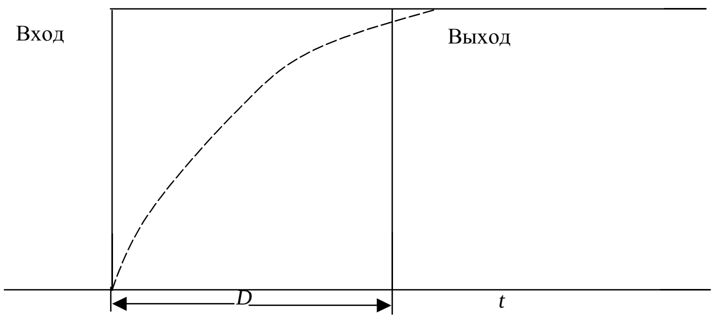


Рис. 2.3. Показательное запаздывание первого порядка

Показательные запаздывания высшего порядка получают путем проведения потока через два и более последовательных запаздывания первого порядка. Они характеризуются той же длительностью D и отличаются величиной выходного темпа потока.

Для упрощения динамической модели исследуемой системы используются следующие способы.

1. При наличии малых и больших по величине запаздываний одного порядка малыми запаздываниями в сетях можно пренебречь, так как их влияние незначительно.

2. Следующие друг за другом запаздывания могут быть учтены как одно запаздывание более высокого порядка.

3. Запаздывания в параллельных ответвлениях могут быть сгруппированы в общем потоке одного запаздывания.

2.1.5. Процесс принятия решения

Решение представляет собой процесс преобразования информации в действия. Порядок принятия решения называют *правилом*. Решение основывается на информации о состоянии исследуемой системы, т.е. на информации о значении темпов и уровней потоков динамической модели.

Значения уровней потоков являются вводами в поток решений. Решения регулируют входные и выходные темпы потоков. В свою очередь изменение значений темпов потоков приводит к изменению значений уровней потоков на соответствующем временном интервале.

2.2. Пример анализа системы методом динамического моделирования

Рассматривается работа цеха, имеющего две конвейерные линии, изготовляющие детали типов *A* и *B* соответственно, и отдел сборки, выпускающий готовое изделие *C* (рис. 2.4). Изделие *C* состоит из определенного количества деталей *A* и *B*. Конвейерные линии получают заготовки со склада с определенным темпом. Ресурсы заготовок на складе ограничены, но возможны дополнительные случайные или неслучайные поступления. Сборочный отдел осуществляет контроль количества поступающих деталей *A* и *B* и регулирует производительность конвейерных линий с целью увеличения выпуска готовых изделий и улучшения ритмичности предприятия в целом. Выпуск готовых изделий будет максимальным в том случае, если в сборочном отделе не произойдет накапливания деталей типа *A* или *B*.

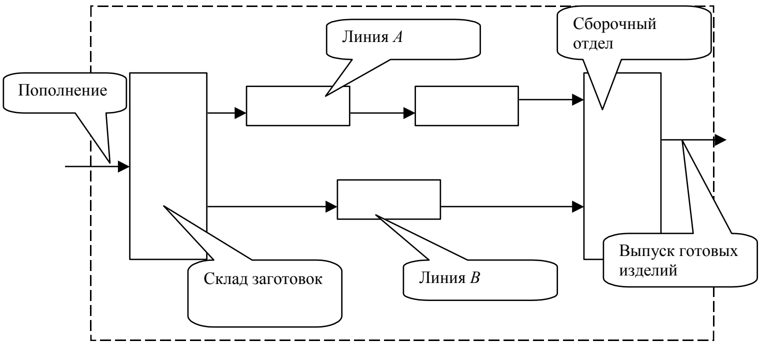


Рис. 2.4. Структура цеха, выпускающего изделие *C*

Методом динамического моделирования можно определить следующие характеристики рассматриваемой системы:

– число изделий, выпущенных за определенный промежуток времени *T*, если ресурс заготовок на складе задан и известен характер их пополнения;

– оптимальный интервал принятия решения Δt, обеспечивающий при заданных ресурсах выпуск максимального количества готовых изделий;

– функцию принятия решения, изменяющую темпы потоков деталей в линиях и оптимизирующую производство по какому-либо критерию (например, для обеспечения постоянного времени выпуска 1-го изделия);

– графики выпуска готовых изделий и динамику изменения ресурсов с учетом пополнения и т. д.

Схема динамической модели исследуемой системы приведена на рис. 2.5.

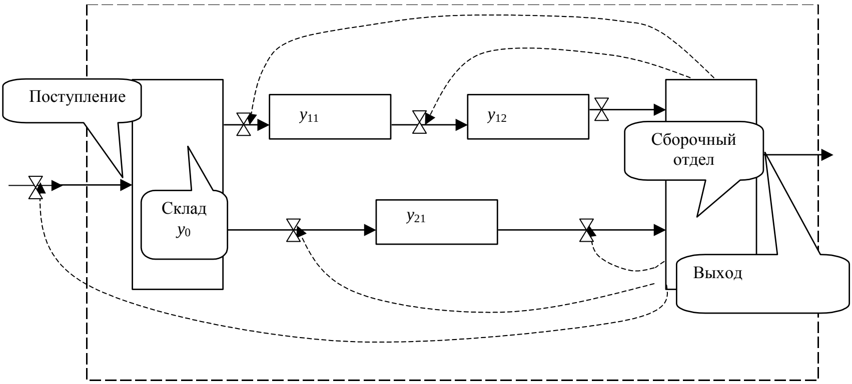


Рис. 2.5. Схема динамической модели

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в сборочном отделе имеется $y_{\text{сб}\,a}$ деталей типа *A* и $y_{\text{сб}\,в}$ деталей типа *B*. Введем некоторый коэффициент μ, характеризующий величину уровней деталей типа *A* и *B* в сборочном отделе, следующим образом:

$$\mu_A = \frac{y_{\text{сб}\,a}(t)}{\Pi(A)}, \qquad \mu_B = \frac{y_{\text{сб}\,в}(t)}{\Pi(B)}, \qquad (2.3)$$

где $y_{\text{сб}\,a}\,(t)$, $y_{\text{сб}\,в}\,(t)$ – уровень деталей типов A и B в момент времени t в сборочном отделе; П(A), П(B) – комплектность изделия, т. е. количество деталей типа A и B, необходимых для изготовления готового изделия.

Очевидно, что коэффициенты μ_A изменяются от 0 до 1. Если оба коэффициента больше или равны 1, то сборочный отдел выдает готовое изделие. Будем считать, что определение величины μ ведется только в конце интервала Δt, т. е. в момент принятия решения. Коэффициенты μ_A и μ_B сравниваются, и если $\Delta\mu = (\mu_A - \mu_B) > \Delta\mu_{\text{доп}}$, то в силу вступает обратная связь, регулирующая задержку на той или иной линии.

Допустим, что $\mu_A > \mu_B$ и $\Delta\mu > \Delta\mu_{\text{доп}}$, тогда темпы в линии A должны быть уменьшены за счет увеличения задержек, а в линии B – наоборот.

Темп потока в i-й линии (i = 1, 2) на выходе j-го звена (j = 1, 2) X_{ij}, в некоторый момент времени $t + k\Delta t$ (k = 0, 1, 2,...) определяется отношением уровня y_{ij} $(t + k\Delta t)$ к величине задержки изделий в этом звене D_{ij}, т. е.

$$X_{ij}(t+k\Delta t) = \frac{y_{ij}(t+k\Delta t)}{D_{ij}(t+k\Delta t)}. \tag{2.4}$$

Введение переменной задержки деталей в j-м звене позволяет не только представить динамику процесса выпуска изделий, но и вести управление темпами X_{ij}. Это осуществляется путем обратного воздействия сборки на величину задержки и соответственно на величину ij-го темпа.

Минимальная и максимальная величины темпов выпуска деталей устанавливается за счет введения определенных границ $D_{\min}$ и $D_{\max}$, в пределах которых может изменяться задержка. Величина задержки в j-м звене в момент времени $t + k\Delta t$ может быть найдена из уравнения

$$D_{ij}(t+k\Delta t) = D_{\min} + D_{\text{ср}}\frac{Y_{ij}(t+k\Delta t)}{D_{ij}(t+(k-1)\Delta t)} \pm \alpha D_{\max}, \tag{2.5}$$

где α – коэффициент, характеризующий величину управляющего воздействия (функцию решения). Величина α может быть постоянной или определяться из некоторого уравнения, связывающего постоянные и переменные параметры системы, что позволяет уменьшить колебания ритма всей системы. На практике величину α при заданных конкретных условиях и критериях оценки можно найти путем динамического моделирования, варьируя исходные данные и параметры исследуемой системы.

В выражения (2.3)–(2.5) входят переменные уровней деталей в момент времени $t + k\Delta t$, которые должны быть вычислены в первую очередь по формуле

$$y_{ij}(t+k\,\Delta \mathrm{t}) = y_{ij}\,[(t+(k-1)\,\Delta t)] + \\ + \Delta t\,[X_{ij-1}\,[t+(\,k-1)\,\Delta t] - X_{ij}\,[t+(k-1]\,t], \qquad (2.6)$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Интервал времени Δt может быть выбран таким образом (при определенной величине $\Delta\mu_{\text{доп}}$), что обратная связь включается в момент окончания интервала Δt не каждый раз.

Обратная связь, открывающая «клапан» $D_{\text{поступ}}$, включается только при выполнении условия $y_0\,(t + k\Delta t) \le 0,1$ от исходного $y_0 / _{t=0}$, причем поступление можно считать мгновенным или с определенным темпом

$$X_{\text{пост}}(t+k\Delta t) = \frac{y_0(t+k\Delta t)}{D_{\text{пост}}(t+k\Delta t)}.$$

Варианты заданий

Варианты заданий даны в приложении.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Описание исследуемой системы (вариант задания).
3. Показатели эффективности функционирования системы.
4. Система уравнений динамической модели.
5. Концептуальная модель (моделирующий алгоритм).
6. Результаты моделирования и их анализ. Выводы.
7. Программы.

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте особенности каждого из основных этапов разработки динамической модели (здесь и далее на примере системы, исследуемой в данной лабораторной работе).

2. Опишите основные элементы динамической модели.

3. Определите порядок расчета уравнений в динамической модели.

4. Приведите характеристики запаздываний, включенных в динамическую модель. Приведите способы упрощения (усложнения) построенной динамической модели.

5. В чем заключается принцип моделирования Δt? Для анализа каких реальных систем целесообразно использовать этот принцип моделирования?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ *Q*-схем

Цель работы – изучение имитационного подхода в моделировании на примере типовых математических схем систем массового обслуживания (*Q*-схем).

3.1. Основные теоретические положения

Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые являются процессами обслуживания [1, 2].

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например, потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочный конвейер цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удаленных терминалов и т. д.

В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие: ожидание обслуживания и собственно обслуживание.

Процессы, протекающие в *Q*-схеме, можно представить в виде некоторого 1-го прибора обслуживания $П_i$ (рис. 3.1), состоящего из накопителя заявок $Н_i$, в котором может одновременно находиться $L_i = 0,\ L_i^{н}$

заявок, где $L_i^{\text{н}}$ – емкость i-го накопителя. На каждый элемент канала обслуживания Π_i поступают потоки событий: в накопитель Н_i – поток заявок w_i на канал К_i – поток обслуживания.

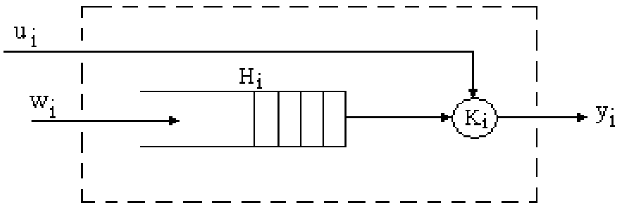


Рис. 3.1. Прибор обслуживания заявок

Потоком событий называется *последовательность событий*, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Характер потока может быть разнообразным. Различают потоки однородных и неоднородных событий. Поток заявок называется потоком однородных событий, если все заявки совершенно равноправны с точки зрения обслуживания. Потоки однородных событий можно представить как последовательность точек t_1, t_2, …, t_k на числовой оси, соответствующих моментам появления событий (рис. 3.2)

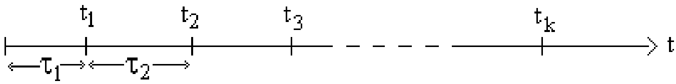


Рис. 3.2. Числовая ось

$$t_1 = 0 + \tau_1 = \tau_1,$$

$$t_2 = t_1 + \tau_2,$$

где τ_k – величина интервала между k – 1 и k-м событиями в однородном потоке. Так как момент прихода заявки определяется в виде суммы интервалов, то поток событий будет полностью задан, если известны законы распределения длин интервалов.

Потоком неоднородных событий называется последовательность событий

$$\{t_n,\ f_n\}, \tag{3.1}$$

где t_n – момент возникновения событий; f_n – набор признаков события.

Наиболее распространенным потоком является *простейший*. Такой поток имеет следующие основные свойства: ординарность, ограниченное последействие, стационарность.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность того, что на малый интервал времени Δt, примыкающий к моменту времени t, попадает больше одного события $P_{>1}(t, \Delta t)$, пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью того, что на этот же интервал времени Δt попадает ровно одно событие $P_1(t, \Delta t)$, т. е.

$$P_1(t, \Delta t) >> P_{>i}(t, \Delta t). \qquad (3.2)$$

Поток событий называется потоком с *ограниченным последействием*, если события в нем разделены интервалами времени, которые являются случайными величинами.

Стационарным потоком событий называется поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени τ зависит лишь от длины этого участка и не зависит от того, где на оси времени $(0, t)$ взят этот участок.

Простейший поток событий характеризуется тем, что количество событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, распределено по закону Пуассона

$$P(m, \Delta t) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \qquad (3.3)$$

где $a = \lambda_{\Delta\tau}$ – математическое ожидание количества событий на интервале Δt с интенсивностью λ, m – число событий на интервале t.

Интервалы между последовательными приходами заявок распределены по показательному закону

$$f(\tau) = \lambda \exp(-\lambda\tau), \qquad (3.4)$$

$$\lambda = 1 / a_t, \qquad (3.5)$$

где τ – случайная величина интервала; a_t – математическое ожидание длины интервала между приходами заявок.

Заявки обслуженные и заявки, покинувшие прибор Π_i и по различным причинам не обслуженные, образуют выходной поток $y_i \in Y$.

Вектор состояний для Π_i имеет следующий вид:

$$Z_i = \left\langle Z_i^{\text{н}}, Z_i^{\text{к}} \right\rangle, \qquad (3.6)$$

где $Z_i^{н}$ – состояние накопителя (количество заявок в накопителе); $Z_i^{к}$ – состояние канала ($Z_i^{к} = 0$ – канал свободен, $Z_i^{к} = 1$ – канал занят).

Для задания *Q*-схем необходимо определить оператор сопряжения *R*, отражающий взаимосвязь каналов и накопителей между собой.

Собственными (внутренними) параметрами *Q*-схемы будут количество каналов, количество фаз в каждой канале и емкость накопителей.

Для задания *Q*-схемы необходимо описать алгоритмы ее функционирования, которые определяют набор правил поведения заявок в системе в различных неоднородных ситуациях. В зависимости от места возникновения таких ситуаций различают алгоритмы (дисциплины) ожидания заявок в накопителе Н и обслуживания каналом. Существуют различные виды приоритетов в обслуживании. Также необходимо задать набор правил, по которым заявки покидают $Н_i$ и $К_i$.

Таким образом, *Q*-схема, описывающая процесс функционирования системы массового обслуживания любой сложности, однозначно задается в виде шестерки характеристик

$$Q = \{W, U, H, Z, R, A\}, \tag{3.7}$$

где *W* – подмножества входных потоков; *U* – подмножество потоков обслуживания; *H* – подмножество собственных параметров; *A* – алгоритмы функционирования; *Z* – вектор состояний; *R* – оператор сопряжения.

В качестве аналитических моделей *Q*-схем используется математический аппарат марковских случайных процессов. Необходимыми и достаточными условиями возможности применения этого подхода являются допущения о пуассоновском характере потока заявок и показательном распределении времени обслуживания заявки.

Однако это весьма ограниченный метод по сравнению с требованиями практики исследования и проектирования систем, формализуемых в виде *Q*-схем. Несравненно большими возможностями обладают имитационные модели, позволяющие исследовать *Q*-схему без ограничений.

При построении имитационной модели *Q*-схемы используется метод статистического моделирования. Сущность метода сводится к созданию для процесса функционирования исследуемой системы некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды E, и реализация этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

Существует два основных принципа построения моделирующих алгоритмов: принцип Δt и принцип «особых состояний».

При построении моделирующего алгоритма Q-схем чаще всего используется второй принцип. В этом случае элементы Q-схемы просматриваются только в моменты особых состояний. К особым состояниям относятся моменты появления заявок в системе или изменения состояний канала обслуживания.

Формирование однородных потоков событий, заданных в общем виде многомерным интегральным законом, сводится к машинной имитации K-мерного вектора. Как правило, эта задача в ряде практических случаев может быть упрощена.

Если поток с ограниченным последействием удовлетворяет условию стационарности, то при $i > 0$ интервалы τ_i распределены одинаково, т. е.

$$f_2(y_2) = f_3(y_3) = \ldots = f_k(y_k). \tag{3.8}$$

Плотность распределения первого интервала $f_1(y_1)$ может быть найдена с использованием соотношения Пальма

$$f_1(y_1) = \lambda\left[1 - \int_0^{y_{1i}} f(y)dy\right], \tag{3.9}$$

где λ – интенсивность потока событий.

Порядок моделирования моментов появления заявок в этом случае следующий:

1) в соответствии с (3.9) формируется первый интервал y_i;

2) момент наступления первого события определяются как

$$t_1 = t_0 + y_1; \tag{3.10}$$

3) следующие моменты появления событий определяются как

$$\begin{gathered} t_2 = t_1 + y_2 \\ \ldots \\ t_k = t_{k-1} + y_k, \end{gathered} \tag{3.11}$$

где y_k – случайная величина с плотностью $f(y)$.

Моделирующий алгоритм (концептуальная модель) должен адекватно отражать процесс функционирования системы и в то же время не создавать трудностей для программной реализации модели и отвечать следующим основным требованиям:

– обладать универсальностью относительно структуры алгоритмов функционирования и параметров системы;

– обеспечивать одновременную (в один и тот же момент системного времени) и независимую работу необходимого числа элементов системы;

– создавать возможность построения модульной структуры алгоритма;

– выполнять рекуррентное правило – событие, происходящее в момент времени t_k, может моделироваться только после того, как промоделированы все события, произошедшие в момент времени $t_{k-1} < t_k$.

Так как при статистическом моделировании приходится иметь дело с вероятностными процессами, то в качестве показателей эффективности используется:

– вероятность наступления событий ($P_{\text{отк}}$, $P_{\text{обс}}$);

– математическое ожидание некоторой случайной величины (математическое ожидание среднего времени обслуживания заявок или простоя канала);

– дисперсия случайной величины;

– закон распределения некоторой случайной величины (закон распределения времени пребывания заявки в системе).

В условиях программной реализации метода статистического моделирования получают оценки соответствующих вероятностных характеристик. Статистическую устойчивость им может гарантировать только неоднократные модельные расчеты.

Если в результате исследования необходимо оценить вероятность наступления некоторого события, то количество реализаций определяется как

$$N^* = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2} t_\alpha^2, \tag{3.12}$$

где ε – точность моделирования; t_α – квантиль нормального распределения, определяемый по заданной доверительной вероятности α; p – оценка вероятности наступления события по N^* реализациям.

Если в результате исследования необходимо оценить дисперсию некоторой случайной величины, то

$$N^* = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} t_\alpha^2, \tag{3.13}$$

где σ^2 – дисперсия оцениваемого параметра по N^* реализациям.

В выражениях (3.12) и (3.13) две неизвестные величины P и N.

Для определения N^* пользуются следующим алгоритмом:

1) задается N реализующий из интервала (50…100);

2) с помощью созданной имитационной модели определяется p;

3) значение p, полученное на предыдущем шаге, подставляется в (3.12) и определяется N^*;

4) сравнивается N_i и N_{i+1}, если $N_{i+1} > N_i$, то переходим к шагу 2 данного алгоритма, если $N_{i+1} < N_i$, то $N^* = N$. На этом поиск N заканчивается.

Варианты заданий

Варианты описания моделируемых объектов представлены в приложении.

Содержание отчета

1. Цель работы
2. Вариант задания
3. Показатели эффективности функционирования системы
4. Представление системы в виде Q-схемы
5. Концептуальная модель (моделирующий алгоритм)
6. Иерархическая структура программных модулей
7. Результаты моделирования
8. Выводы
9. Программная реализация модели

Контрольные вопросы

1. Система массового обслуживания. Канал обслуживания заявок.
2. Q-схема.
3. Потоки событий. Простейший поток.
4. Вектор состояний для Π_i и собственные параметры Q-схемы.
5. Оператор сопряжения и алгоритм функционирования Q-схемы.
6. Основные принципы построения моделирующих алгоритмов.
7. Формирование входных потоков в Q-схемах. Формула Пальма.
8. Концептуальная модель. Основные требования к ней.
9. Выбор необходимого числа реализаций для достижения заданной точности моделирования

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. – М. : Наука, 1978.

2. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов. – М. : Высш. шк., 2007.

3. *Кориков А.М., Павлов С.Н.* Теория систем и системный анализ : учеб. пособие для вузов по специальности 080801 «Прикладная информатика». – Томск : ТУСУР, 2008.

4. *Мартин Ф.* Моделирование на вычислительных машинах. – М.: Сов. радио, 1972.

5. Моделирование систем : учебник / С.И. Дворецкий и др. – М. : Академия, 2009.

6. *Советов Б.Я., Яковлев С.А.* Моделирование систем : учебник для вузов по направлениям подготовки дипломированных специалистов «Информатика и вычислительная техника» и «Информационные системы». – М. : Высш. шк., 2005.

7. *Советов Б.Я., Яковлев С.А.* Моделирование систем. Практикум : учебник для вузов по направлениям подготовки дипломированных специалистов «Информатика и вычислительная техника» и «Информационные системы». – М.: Высш. шк., 2007.

Приложение

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1. Производственная поточная линия

Описание объекта	Принцип моделирования	Рассчитываемые показатели эффективности	Стратегия управления	Входной поток заявок	Поток обслуживания	Правило обслуживания очереди
На поточной линии предприятия выполняются две операции (соответственно имеется два рабочих места), осуществляемые в строгой последовательности. На одной поточной линии могут одновременно находиться только восемь изделий, включая обрабатываемые. Перед первым рабочим местом выделяется пространство, достаточное для размещения четырех изделий, а между рабочими местами – для двух изделий	По принципу Δt	Загрузка рабочих мест (в минутах и в %) Время обработки изделия на поточной линии Общее число поступивших изделий Число обработанных изделий Динамика изменения числа изделий в буфере	Обработка изделия, которое не может разместиться в пределах линии из-за недостатка свободного пространства, откладывается	Темп поступления заявок – $X_{ij} = 2$	Время обработки – для первого рабочего места в 1,25 единицы времени, а на втором – 0,5 единицы времени	Если очередь ко второму рабочему месту заполнена до конца, то происходит блокировка первого рабочего места. На заблокированное рабочее место не может поступать для обработки другое изделие
	По особым состояниям	Средняя загрузка рабочих мест в минутах и в % от общего времени работы Среднее время обработки изделия на поточной линии Вероятность обработки изделия Среднее число обработанных деталей		Интервалы времени между запросами на обработку изделий распределены экспоненциально с математическим ожиданием, равным 0,4	Время обработки – экспоненциальное, для первого рабочего места в среднем 1,25 единицы времени, а на втором 0,5 единицы времени	

2. Работа порта*

Описание объекта	Принцип моделирования	Рассчитываемые показатели эффективности	Стратегия управления	Входной поток заявок	Поток обслуживания	Правило обслуживания очереди
В порту *А* танкеры загружаются сырой нефтью, которую морским путем доставляют по назначению. Мощности порта позволяют загружать не более трех танкеров одновременно. Судовладелец предлагает заключить контракт с дирекцией порта *В*. При этом обеспечить перевозку нефти с помощью пяти танкеров особого, После погрузки танкер отчаливает и следует в пункт А, там загружается и снова возвращается в пункт В для погрузки	По принципу Δt	Загрузка порта в часах и в % от общего времени работы Число загруженных танкеров Среднее время ожидания танкером погрузки в порту Динамика числа танкеров, ожидающих очереди на погрузку	Перед принятием окончательного решения дирекция порта решила определить влияние, которое окажут пять дополнительных танкеров на время пребывания в порту остальных судов. Выводы решено сделать по результатам имитации работы порта в течение 1 года (8640 ч)	Танкеры прибывают в порт через каждые 7 ч, время цикла обращения танкера четвертого типа, включая время разгрузки, составляет 230 ч	Время погрузки танкеров различного типа соответственно 19, 25, 37, 22 ч	Танкеры обслуживаются по мере прибытия в порт. Факторам, осложняющим перевозку нефти, являются штормы, которым подвергается порт. Интервал времени между штормами распределен экспоненциально с математическим ожиданием 48 час., причем шторм продолжается [4±2] ч. Во время шторма танкеры не причаливают
	По особым состояниям	Средняя загрузка порта в часах и в % от общего времени работы Среднее число загруженных танкеров Среднее время загрузки танкеров Среднее время ожидания танкером погрузки в порту		Танкеры прибывают каждые [1±7] ч. Время цикла обращения танкера четвертого типа, включая время разгрузки, [240 ± ± 24] ч. Частота появления танкеров различных видов [0,25; 0,55; 0,20]	Время погрузки танкеров различного типа соответственно [18 ± 2], [24 ± 3], [35 ± 4], [21 ± 3] ч	

* Все величины, заданные интервалом, распределены равномерно.

3. Имитация работы оптового магазина*

Описание объекта	Принцип моделирования	Рассчитываемые показатели эффективности	Стратегия управления	Входной поток заявок	Поток обслуживания	Правило обслуживания очереди
В оптовом магазине используется новая процедура обслуживания клиентов. Клиенты, попадая в магазин, определяют по каталогу наименование товаров, которые они хотели бы приобрести. После этого клерк со склада приносит необходимый заказ. В магазине работают три клерка	По принципу Δt	Общее количество выполненных заказов Загрузка клерков в часах и в % от общего времени работы Число заявок, выполняемых за один выход в склад Время ожидания клиентом выполнения заказа Динамика числа клиентов, ожидающих очереди на выполнение заказа	Обеспечение равномерной загрузки клерков и минимального времени ожидания клиентов выполнения заказов	Интервалы между моментами поступления заявок на товары 2 мин	Время на путь к складу 1 мин. Время поиска товаров $t = 3 \cdot$ Число_заказов. Время возвращения со склада 1 мин. Время расчета 2 мин	Каждый из клерков может обслуживать одновременно не более шести клиентов. Заказы выполняются по мере поступления
	По особым состояниям	Общее количество выполненных заказов Средняя загрузка клерков в часах и в % от общего времени работы Среднее число заявок, выполняемых за один выход в склад Среднее время ожидания клиентом выполнения заказа		Интервалы между моментами поступления заявок на товары распределены экспоненциально с математическим ожиданием, равным 2 мин	Время на путь к складу распределено равномерно с [1 ± 0,5] мин. Время поиска товаров зависит от объема заказов. Это время распределено нормально с $m = 3 \cdot$ Число_заказов и $\delta = 0{,}2m$. Время возвращения со склада [1±0,5] мин. Время расчета [2±1] мин	

* Все величины, заданные интервалом, распределены равномерно.

4. Моделирование работы карьера*

Описание объекта	Принцип моделирования	Рассчитываемые показатели эффективности	Стратегия управления	Входной поток заявок	Поток обслуживания	Правило обслуживания очереди
В карьере самосвалы доставляют руду от трех экскаваторов. Используются самосвалы грузоподъемностью 20 и 50 т. К каждому экскаватору приписаны два 20-тонных и один 50-тонный самосвал	По принципу Δt	Объем перевезенной руды Загрузка самосвалов/экскаваторов в часах и в % от общего времени работы Среднее время ожидания загрузки/разгрузки самосвалами Динамика числа самосвалов, ожидающих очереди на погрузку/разгрузку	Обеспечение равномерной загрузки техники и минимального времени простоя	Время переезда до обогатительной фабрики постоянно и равно 27 мин	Для 20-тонных самосвалов время погрузки и разгрузки постоянно – 5 и 2 мин соответственно, для 50-тонных самосвалов m = 10 и m = 5 мин соответственно	Самосвалы загружаются/разгружаются по мере прибытия к месту погрузки/разгрузки
	По особым состояниям	Средний объем перевезенной руды Средняя загрузка самосвалов/экскаваторов в часах и в % от общего времени работы Среднее время ожидания загрузки/разгрузки самосвалами		Время переезда до обогатительной фабрики – [20± 5] мин	Для 20-тонных самосвалов время погрузки и разгрузки распределено экспоненциально с m = 5 и m = 2 мин. соответственно, для 50-тонных самосвалов – m = 10 и m = 5 мин соответственно	

* Все величины, заданные интервалом, распределены равномерно.

5. Конвейерная система*

Описание объекта	Принцип моделирования	Рассчитываемые показатели эффективности	Стратегия управления	Входной поток заявок	Поток обслуживания	Правило обслуживания очереди
Конвейерная линия состоит из 5 обслуживающих устройств, расположенных вдоль конвейера. Свободного места перед каждым устройством нет, поэтому устройство может снять деталь с конвейера, только если находится в состоянии «СВОБОДЕН». Деталь на обработку поступает к свободному устройству и по окончании обработки покидает систему. Интервал следования детали между устройствами 1 мин	По принципу Δt	Число деталей, поступивших на обработку Число обработанных деталей Загрузка обслуживающих устройств в часах и в % от общего времени работы Динамика загрузки обслуживающих устройств Насколько улучшится работа конвейера, если перед каждым устройством будет буфер для одной детали	Обеспечение максимальной производительности конвейера	Детали поступают на обработку через 5 мин с интенсивностью 4 детали в минуту	Время обслуживания на каждом устройстве 1 мин	Детали обрабатываются по мере поступления
	По особым состояниям	Среднее число деталей, поступивших на обработку Среднее число обработанных деталей Средняя загрузка обслуживающих устройств в часах и в % от общего времени работы Насколько улучшится работа конвейера, если перед каждым устройством будет буфер для одной детали		Детали поступают на обработку в соответствии с равномерным законом распределения [5±2] мин с интенсивностью 4 детали в минуту	Время обслуживания на каждом устройстве распределено по экспоненциальному закону с $m = 1$ мин	

* Все величины, заданные интервалом, распределены равномерно.

6. Моделирование станка с поломками*

Описание объекта	Принцип моделирования	Рассчитываемые показатели эффективности	Стратегия управления	Входной поток заявок	Поток обслуживания	Правило обслуживания очереди
Перед обработкой каждой детали производится наладка станка, время которой распределено равномерно на интервале [0,2±0,3] ч. Детали, обработанные на станке, направляются в другие отделы цеха и считаются покинувшими рассматриваемую систему. Процесс устранения неисправности станка состоит из трех фаз. Продолжительность каждой фазы описывается экспоненциальным законом с m = 0,75 ч	По принципу Δt	Число деталей, поступивших на обработку Число обработанных деталей Загрузка станка в часах и в % от общего времени работы Динамика выпуска деталей	Обеспечение максимальной производительности станка при равномерной его загрузке по времени	Детали на станок поступают один раз в час	Время обработки детали на станке – 0,5 ч. Станок подвергается поломкам, при которых он не может продолжать выполнение задания, с вероятностью 0,3	Детали обрабатываются в порядке их поступления. При поломке станка обрабатываемая деталь удаляется со станка и помещается в начало очереди деталей на обработку
	По особым состояниям	Среднее число деталей, поступивших на обработку Среднее число обработанных деталей Средняя загрузка станка в часах и в % от общего времени работы		Детали поступают на обработку в соответствии с равномерным законом распределения [1±0,2] час	Время обработки детали нормально распределено с m = 0,5 и δ = 0,1 ч. Станок подвергается поломкам, при которых он не может продолжать выполнение задания, с вероятностью 0,3	

* Все величины, заданные интервалом, распределены равномерно.

7. Исследование участка дороги с односторонним движением*

<table>
<tr><th>Описание объекта</th><th>Принцип моделирования</th><th>Рассчитываемые показатели эффективности</th><th>Стратегия управления</th><th>Входной поток заявок</th><th>Поток обслуживания</th><th>Правило обслуживания очереди</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Моделируемая система представляет собой поток транспорта в двух направлениях по дороге с двусторонним движением, одна сторона которой закрыта в связи с ремонтом на протяжении 500 м. Движением управляют светофоры, размещенные на обоих концах одностороннего участка.
Светофоры открывают движение на участке в одном из направлений в течение заданного промежутка времени.
Красный свет горит в обоих направлениях в течение 55 с</td><td>По принципу Δt</td><td>Число проехавших через перекресток автомобилей в каждом направлении
Среднее время ожидания проезда перед перекрестком в каждом направлении
Среднее время проезда аварийного участка дороги в обоих направлениях
Динамика числа автомобилей перед перекрестком в обоих направлениях</td><td rowspan="2">Обеспечение минимального времени простоя автомобилей на перекрестке</td><td>Автомобили подъезжают к светофорам с интервалом 12 с для первого направления и 10 с для второго направления</td><td>Когда загорается зеленый свет, автомобили следуют по участку с интервалом 2 с</td><td rowspan="2">Автомобили проезжают аварийный участок дороги по мере прибытия</td></tr>
<tr><td>По особым состояниям</td><td>Число проехавших через перекресток автомобилей в каждом направлении
Среднее время ожидания проезда перед перекрестком в каждом направлении
Среднее время проезда аварийного участка дороги в обоих направлениях</td><td>Автомобили подъезжают к светофорам через интервалы времени, распределенные экспоненциально с $m = 12$ с для первого направления и $m = 10$ с для второго направления</td><td>Когда загорается зеленый свет, автомобили следуют по участку с интервалом 2 с</td></tr>
</table>

* Все величины, заданные интервалом, распределены равномерно.

8. Моделирование палаты больницы*

Описание объекта	Принцип моделирования	Рассчитываемые показатели эффективности	Стратегия управления	Входной поток заявок	Поток обслуживания	Правило обслуживания очереди
Всего в палате 25 мест. Когда в палате нет свободных мест, больные с оценкой выше 41 балла на лечение не принимаются. Первоначально в палате находятся 18 больных с оценками состояния здоровья от 30 до 40 баллов	По принципу Δt	Число поступивших в палату больных Среднее время пребывания больного в палате Динамика числа больных в палате Средняя загрузка палаты	Обеспечение минимального времени пребывания больных в палате	За день в палату поступают двое больных с оценкой здоровья в 20 баллов	Оценка состояния больного меняется в течение суток на 2 балла. Больной выписывается из палаты, когда оценка его здоровья становится выше 49 баллов	Когда потенциальный больной поступает в палату, в которой нет свободных мест, из нее выписывается больной, оценка состояния здоровья которого равна или выше 47 баллов
	По особым состояниям	Число поступивших в палату больных Среднее время пребывания больного в палате Средняя загрузка палаты		В среднем за день в палату поступают двое больных. Каждый поступивший в палату больной проходит тест, результаты которого распределены равномерно на интервале [0±44] баллов	Оценка состояния больного меняется в течение суток на величину, равномерно распределенную на интервале от 0,2 до 1,2 балла. Больной выписывается из палаты, когда оценка его здоровья становится выше 49 баллов	

* Все величины, заданные интервалом, распределены равномерно.

9. Моделирование системы управления технологическим процессом*

Описание объекта	Принцип моделирования	Рассчитываемые показатели эффективности	Стратегия управления	Входной поток заявок	Поток обслуживания	Правило обслуживания очереди
Для обеспечения надежности в АСУ ТП используются два ПК. Основной ПК выполняет обработку данных о технологическом процессе и выработку управляющих сигналов, а второй находится в горячем резерве. После обработки данных основным ПК посылается управляющий сигнал, поддерживающий заданный темп процесса. Если к моменту посылки следующего набора данных не получен управляющий сигнал, то интенсивность технологического процесса падает вдвое	По принципу Δt	Время функционирования технологического процесса с пониженной эффективностью Суммарный объем пропущенных из-за отказа данных Время работы основного и резервного ПК Динамика роста объема пропущенных данных в течение 1 ч	Обеспечение минимального объема потерянных данных	Данные к основному ПК поступают через 1 с. После падения интенсивности технологического процесса данные поступают через 22 с	Данные в ПК обрабатываются 3 с. Подключение резервного ПК занимает 5 с	Основной ПК каждые 30 с посылает резервному ПК сигнал о работоспособности. Отсутствие сигнала означает необходимость включения резервного ПК вместо основного. Отказы ПК происходят с интервалом [300±304] с. Восстановление занимает 100 с
	По особым состояниям	Время функционирования технологического процесса с пониженной эффективностью Суммарный объем пропущенных из-за отказа данных Вероятность работы основного и резервного ПК		Данные к основному ПК поступают в интервале [0±2] с. После падения интенсивности технологического процесса данные поступают через [20±4] с	Данные в ПК обрабатываются 3 сек. Подключение резервного ПК занимает 5 сек.	

* Все величины, заданные интервалом, распределены равномерно.

СОДЕРЖАНИЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Методические указания

Редактор *Н.В. Городник*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Компьютерная верстка *В.Ф. Ноздрева*

Подписано в печать 09.09.2010. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 2,55. Печ. л. 2,75. Изд. № 99. Заказ № . Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20