

王道考研——数据结构

WWW.CSKAOYAN.COM

第六章 图

本节内容

图

定义
基本术语

知识总览

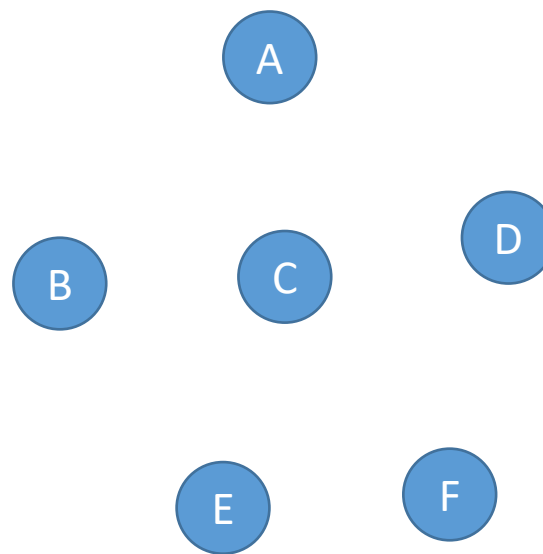
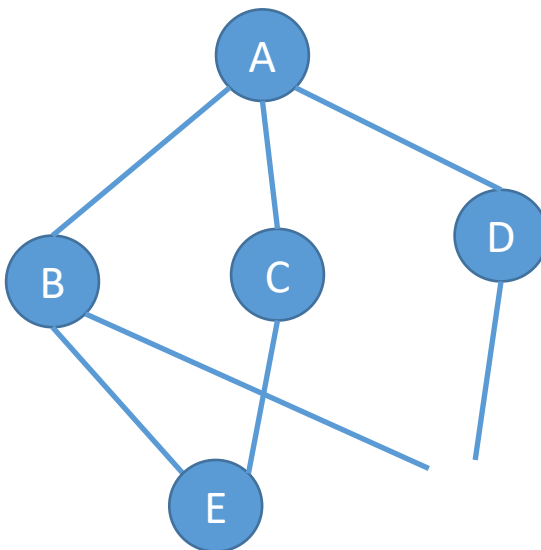
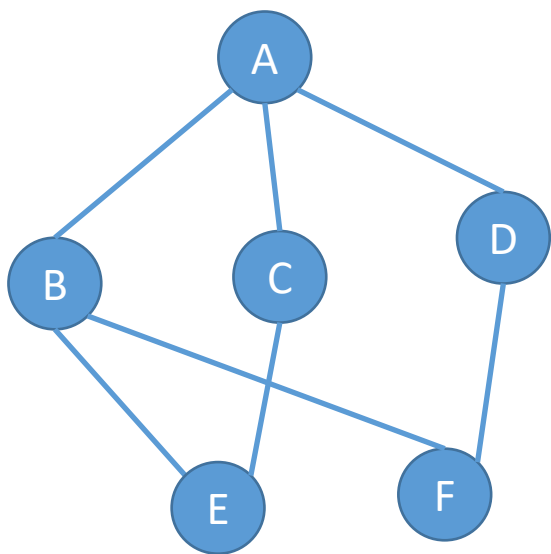


G: Graph
V: Vertex
E: Edge

图的定义

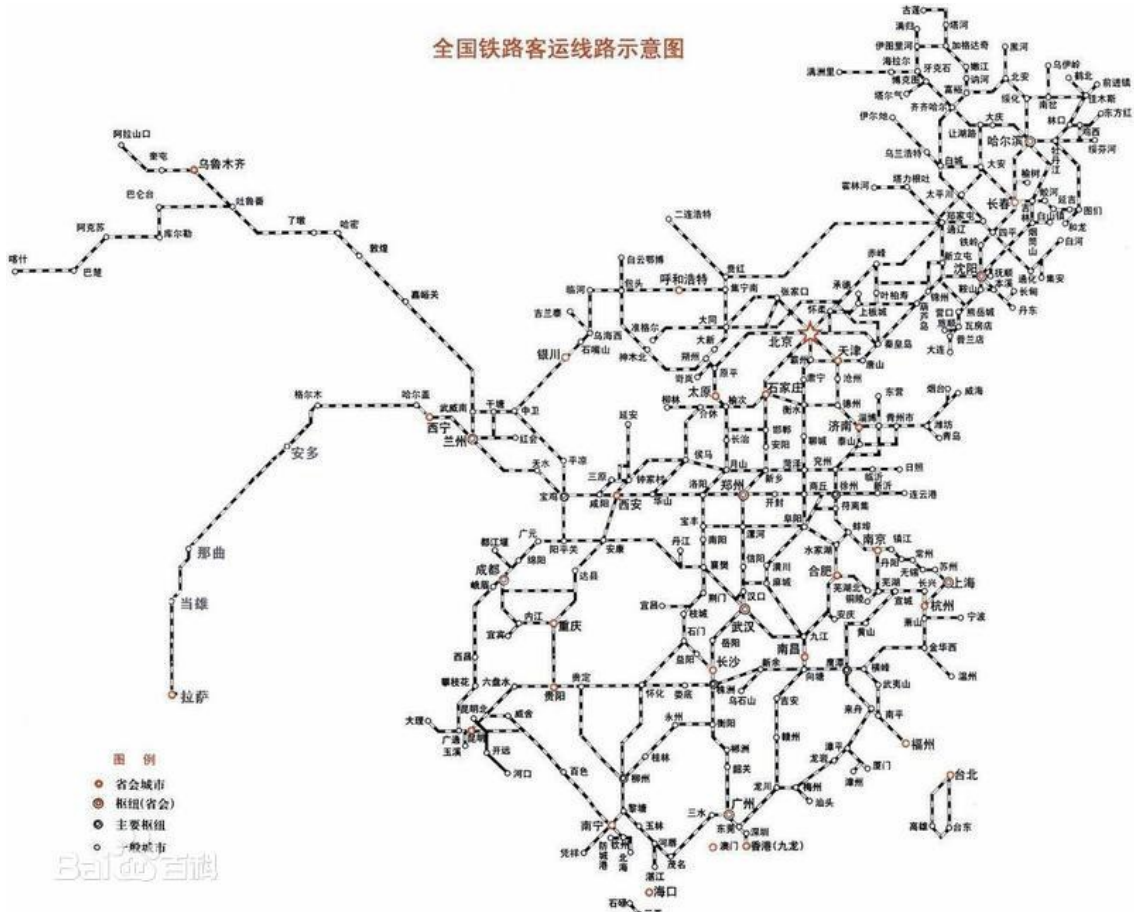
图 G 由顶点集 V 和边集 E 组成，记为 $G = (V, E)$ ，其中 $V(G)$ 表示图 G 中顶点的有限非空集； $E(G)$ 表示图 G 中顶点之间的关系（边）集合。若 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，则用 $|V|$ 表示图 G 中顶点的个数，也称图 G 的阶， $E = \{(u, v) \mid u \in V, v \in V\}$ ，用 $|E|$ 表示图 G 中边的条数。

注意：线性表可以是空表，树可以是空树，但图不可以是空，即 V 一定是非空集



$E = \emptyset$

图逻辑结构的应用



V: 车站

E: 铁路

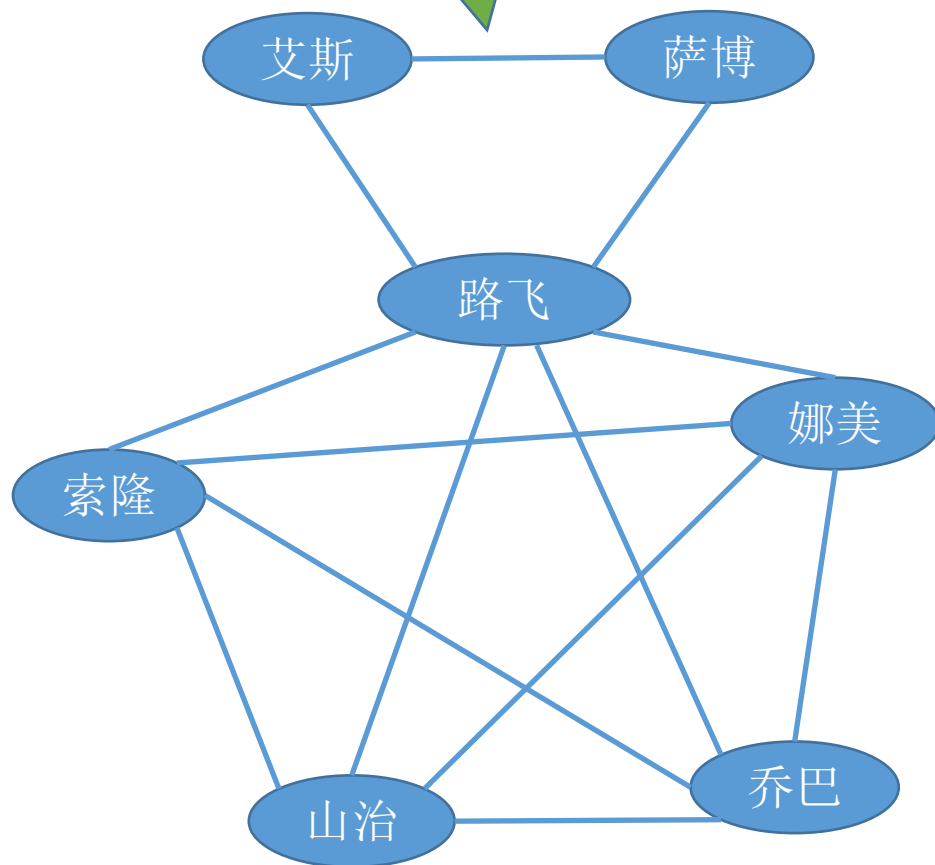


V: 路口

E: 道路

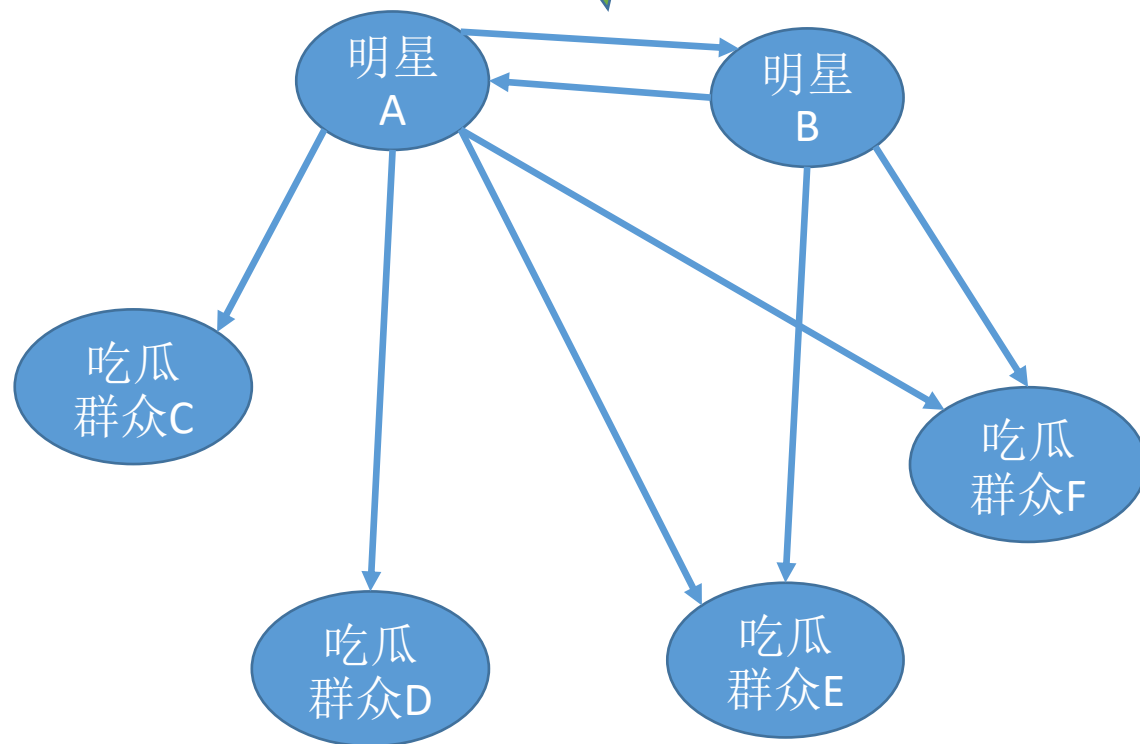
图逻辑结构的应用

边是没有方向的



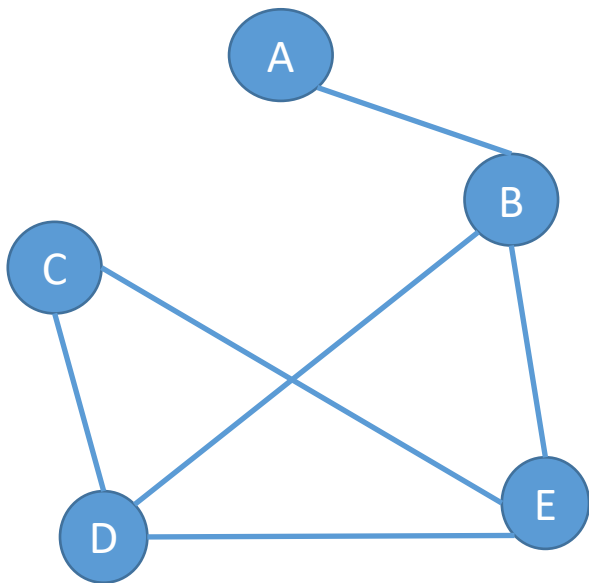
微信好友关系

边是有方向的



微博粉丝关系

无向图、有向图



若 E 是**无向边**（简称**边**）的有限集合时，则图 G 为**无向图**。边是顶点的无序对，记为 (v, w) 或 (w, v) ，因为 $(v, w) = (w, v)$ ，其中 v 、 w 是顶点。可以说顶点 w 和顶点 v 互为邻接点。边 (v, w) 依附于顶点 w 和 v ，或者说边 (v, w) 和顶点 v 、 w 相关联。

$$G_2 = (V_2, E_2)$$

$$V_2 = \{A, B, C, D, E\}$$

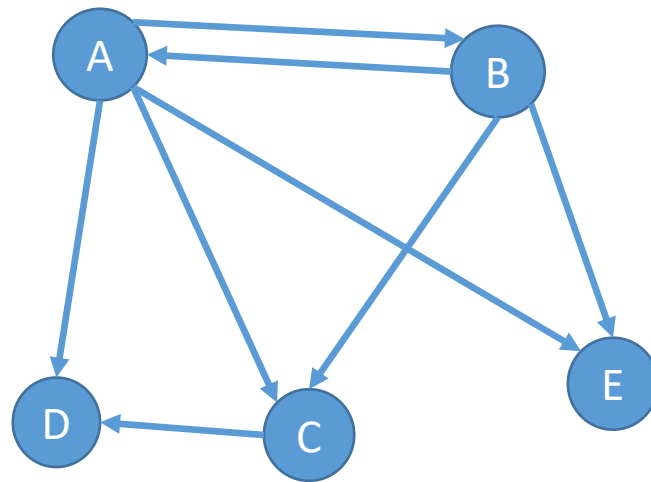
$$E_2 = \{(A, B), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$$

若 E 是**有向边**（也称**弧**）的有限集合时，则图 G 为**有向图**。弧是顶点的有序对，记为 $\langle v, w \rangle$ ，其中 v 、 w 是顶点， v 称为**弧尾**， w 称为**弧头**， $\langle v, w \rangle$ 称为从顶点 v 到顶点 w 的弧，也称 v 邻接到 w ，或 w 邻接自 v 。 $\langle v, w \rangle \neq \langle w, v \rangle$

$$G_1 = (V_1, E_1)$$

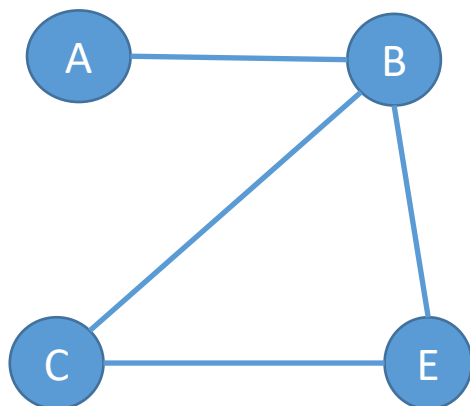
$$V_1 = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E_1 = \{\langle A, B \rangle, \langle A, C \rangle, \langle A, D \rangle, \langle A, E \rangle, \langle B, A \rangle, \langle B, C \rangle, \langle B, E \rangle, \langle C, D \rangle\}$$

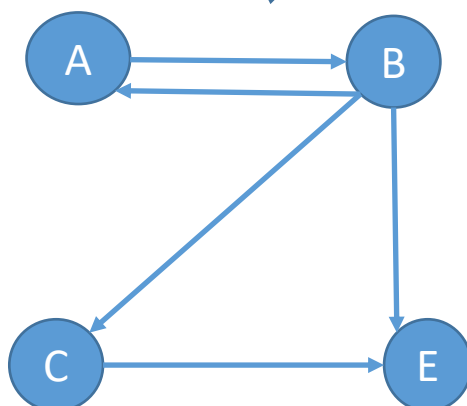


简单图、多重图

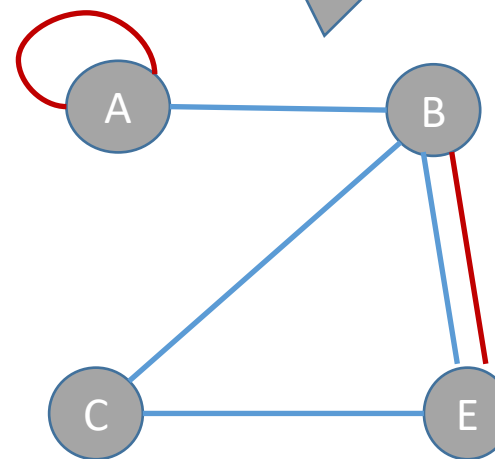
简单无向图



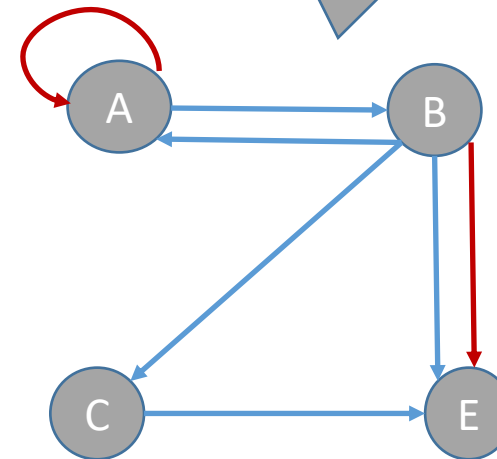
简单有向图



多重无向图



多重有向图



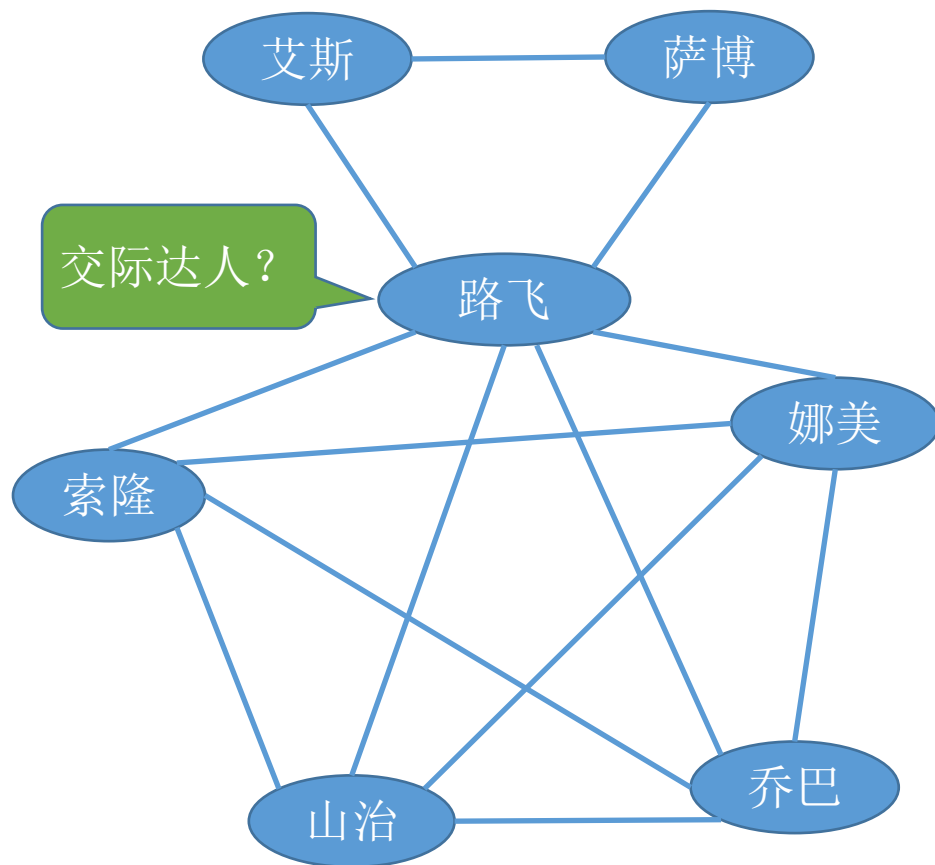
简单图——① 不存在重复边；
② 不存在顶点到自身的边

数据结构课程只探讨“简单图”



多重图——图 G 中某两个结点之间的边数多于一条，又允许顶点通过同一条边和自己关联，则 G 为多重图

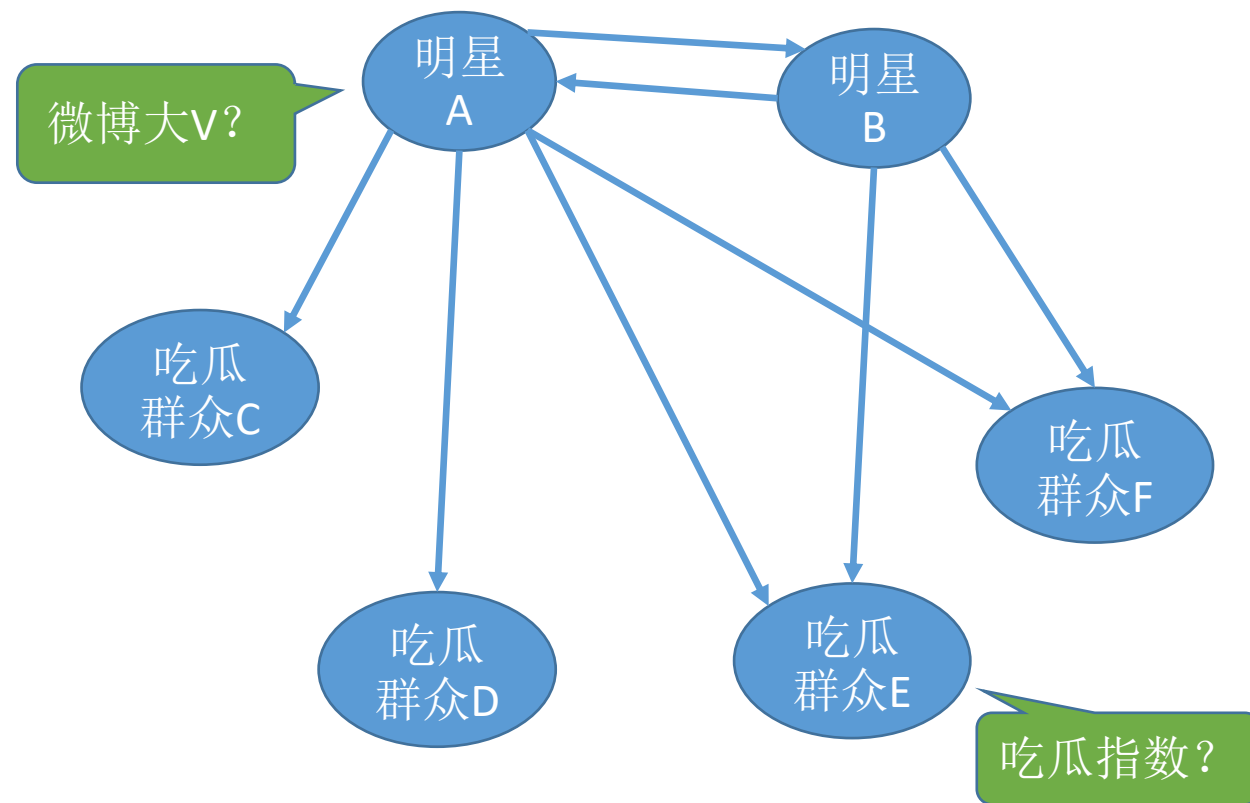
图逻辑结构的应用



交际达人?



微信好友关系



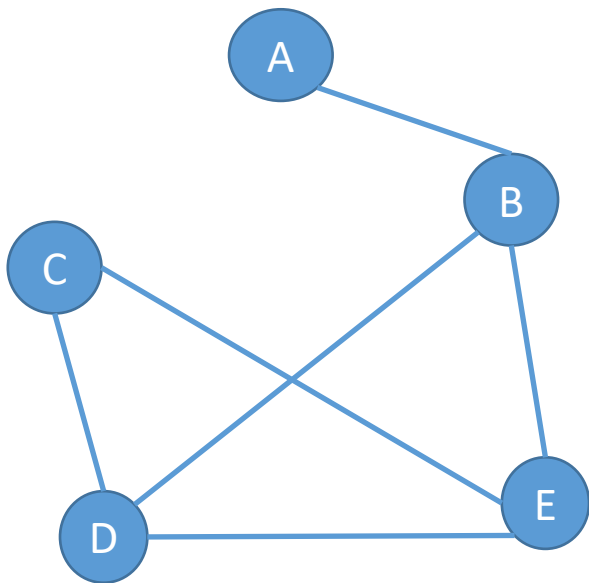
微博大V?

吃瓜指数?



微博粉丝关系

顶点的度、入度、出度



对于无向图：顶点 v 的度是指依附于该顶点的边的条数，记为 $TD(v)$ 。

在具有 n 个顶点、 e 条边的无向图中，
$$\sum_{i=1}^n TD(v_i) = 2e$$

即无向图的全部顶点的度的和等于边数的2倍

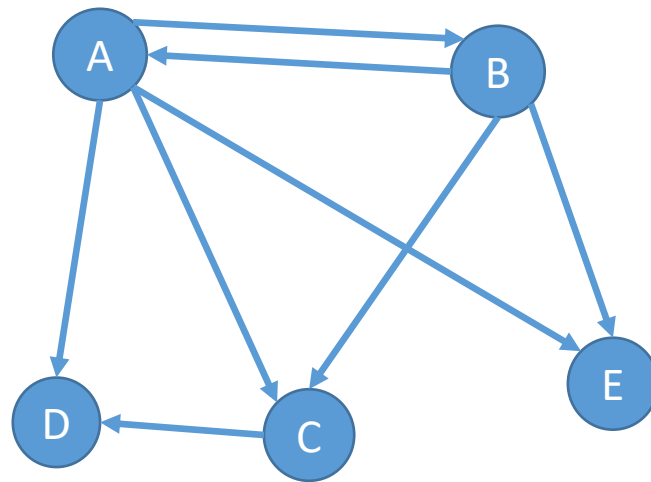
对于有向图：

入度是以顶点 v 为终点的有向边的数目，记为 $ID(v)$ ；

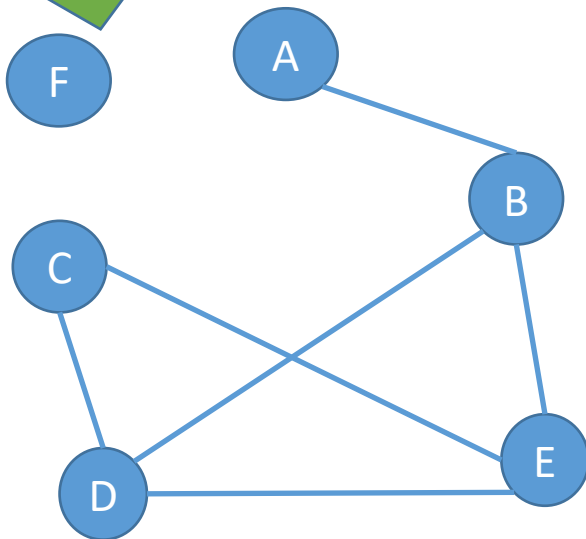
出度是以顶点 v 为起点的有向边的数目，记为 $OD(v)$ 。

顶点 v 的度等于其入度和出度之和，即 $TD(v) = ID(v) + OD(v)$ 。

在具有 n 个顶点、 e 条边的有向图中，
$$\sum_{i=1}^n ID(v_i) = \sum_{i=1}^n OD(v_i) = e$$

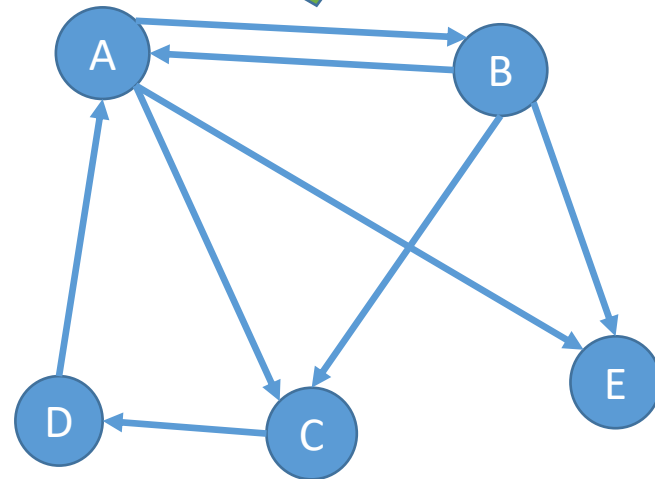


顶点之间有可能不存在路径



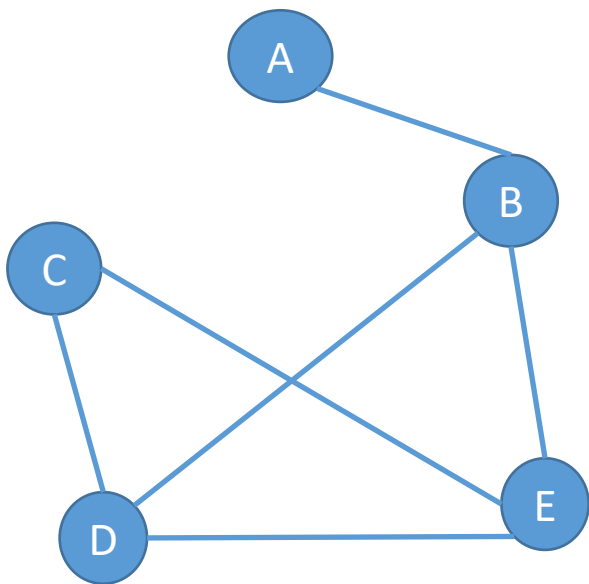
顶点-顶点的关系描述

有向图的路径也是有向的



- **路径**——顶点 v_p 到顶点 v_q 之间的一条路径是指顶点序列， $v_p, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}, v_q$
- **回路**——第一个顶点和最后一个顶点相同的路径称为回路或环
- **简单路径**——在路径序列中，顶点不重复出现的路径称为简单路径。
- **简单回路**——除第一个顶点和最后一个顶点外，其余顶点不重复出现的回路称为简单回路。
- **路径长度**——路径上边的数目
- **点到点的距离**——从顶点 u 出发到顶点 v 的**最短路径**若存在，则**此路径的长度称为从 u 到 v 的距离**。若从 u 到 v 根本**不存在路径**，则**记该距离为无穷（ ∞ ）**。
- **无向图**中，若从顶点 v 到顶点 w 有路径存在，则称 v 和 w 是**连通**的
- **有向图**中，若从顶点 v 到顶点 w 和从顶点 w 到顶点 v 之间都有路径，则称这两个顶点是**强连通**的

连通图、强连通图



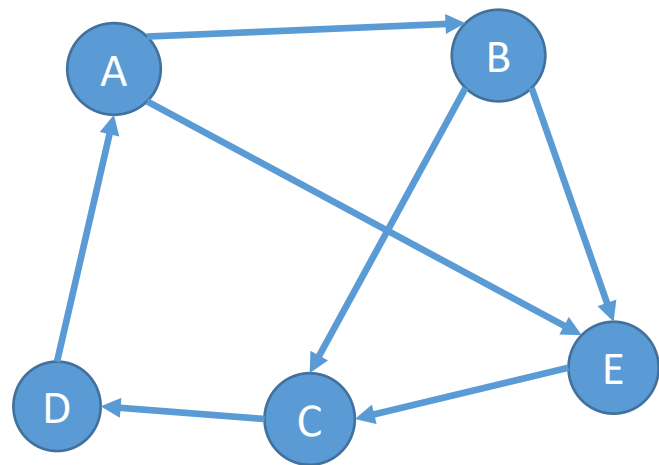
若图 G 中任意两个顶点都是连通的，则称图 G 为**连通图**，否则称为**非连通图**。

常见考点：

对于 n 个顶点的无向图 G ，

若 G 是**连通图**，则**最少**有 $n-1$ 条边

若 G 是**非连通图**，则**最多**可能有 C_{n-1}^2 条边



若图中任何一对顶点都是强连通的，则称此图为**强连通图**。

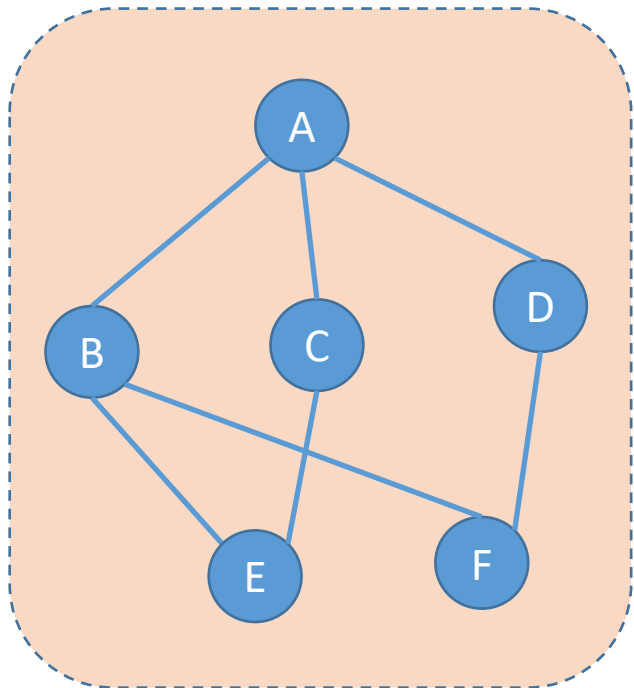
常见考点：

对于 n 个顶点的有向图 G ，

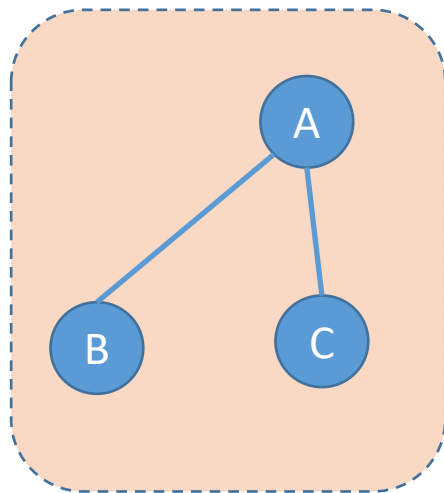
若 G 是**强连通图**，则**最少**有 n 条边（形成回路）

研究图的局部——子图

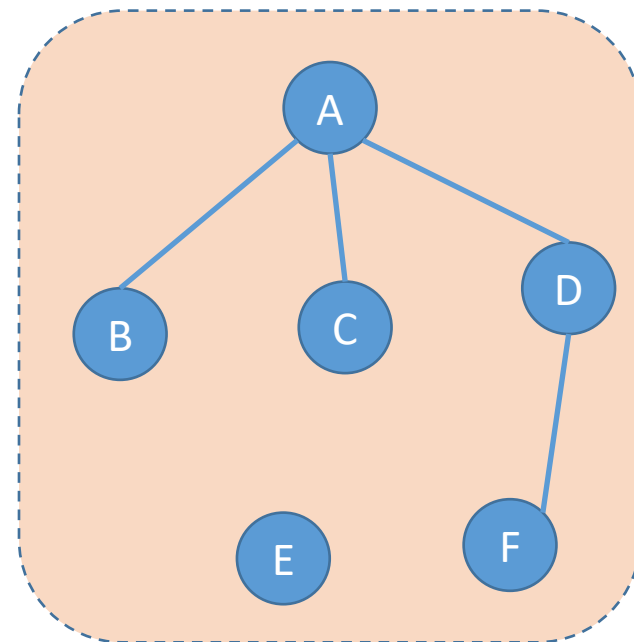
无向图G



子图



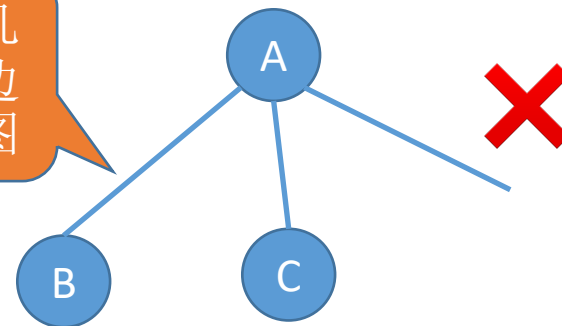
生成子图



设有两个图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$ ，若 V' 是 V 的子集，且 E' 是 E 的子集，则称 G' 是 G 的**子图**。

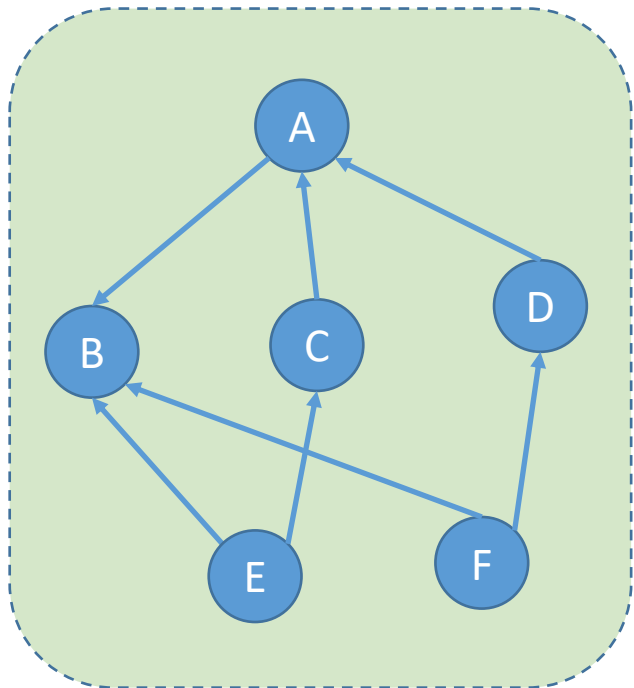
若有满足 $V(G') = V(G)$ 的子图 G' ，则称其为 G 的**生成子图**

并非任意挑几个点、几条边都能构成子图

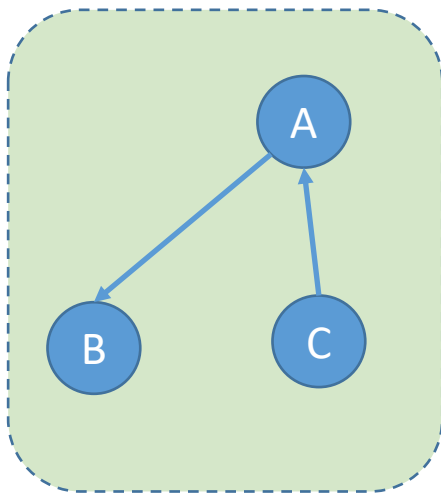


研究图的局部——子图

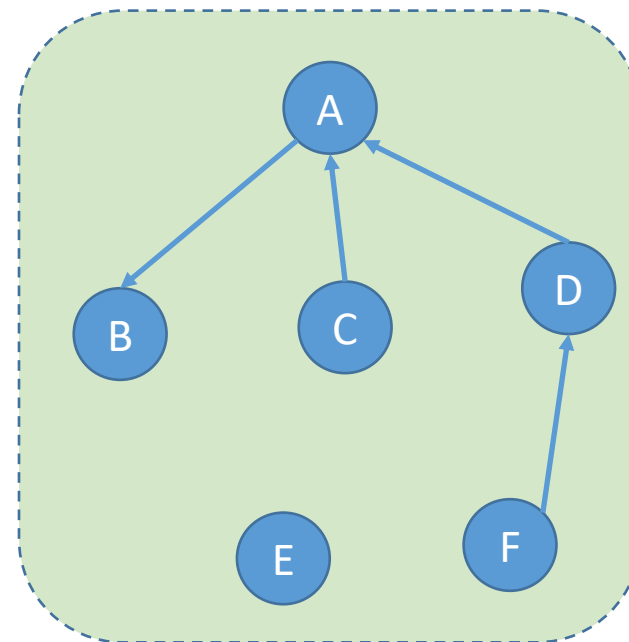
有向图G



子图



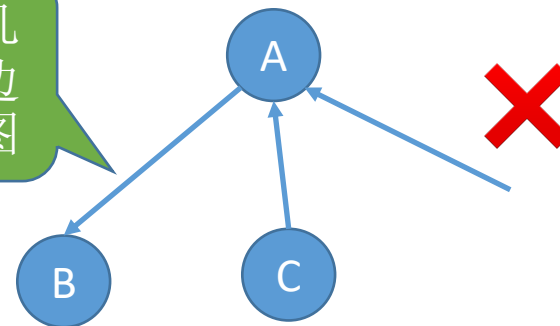
生成子图



设有两个图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$, 若 V' 是 V 的子集, 且 E' 是 E 的子集, 则称 G' 是 G 的 **子图**。

若有满足 $V(G') = V(G)$ 的子图 G' , 则称其为 G 的 **生成子图**

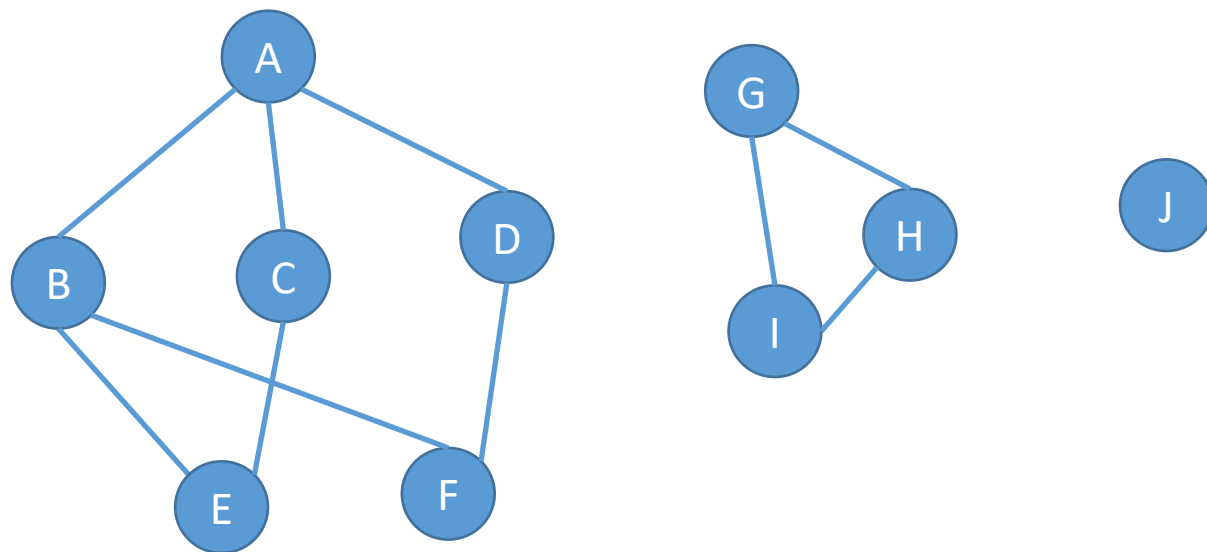
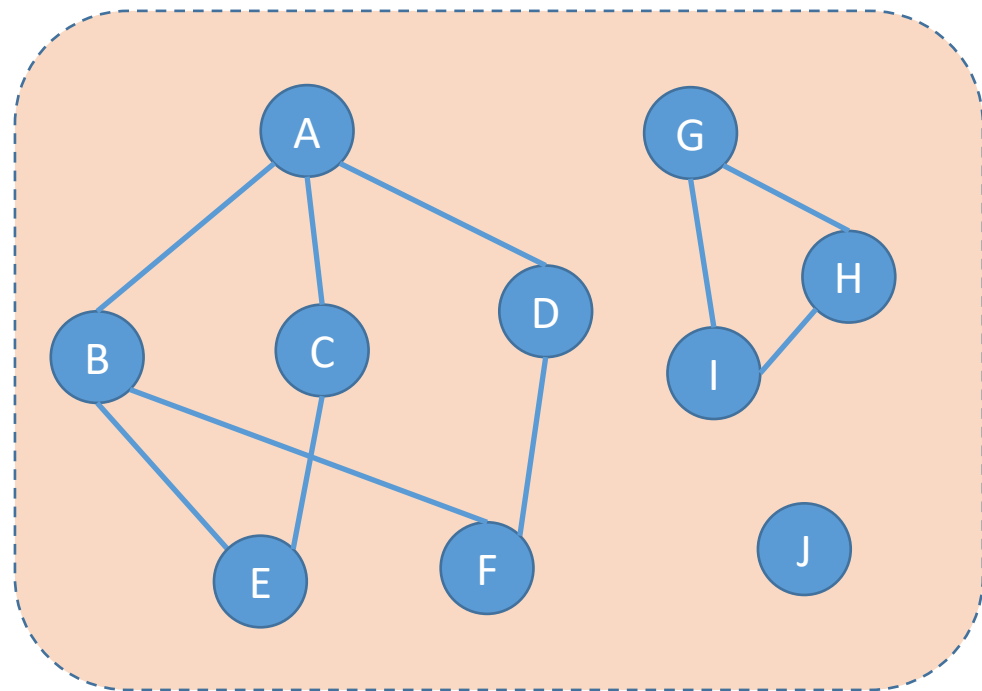
并非任意挑几个点、几条边都能构成子图



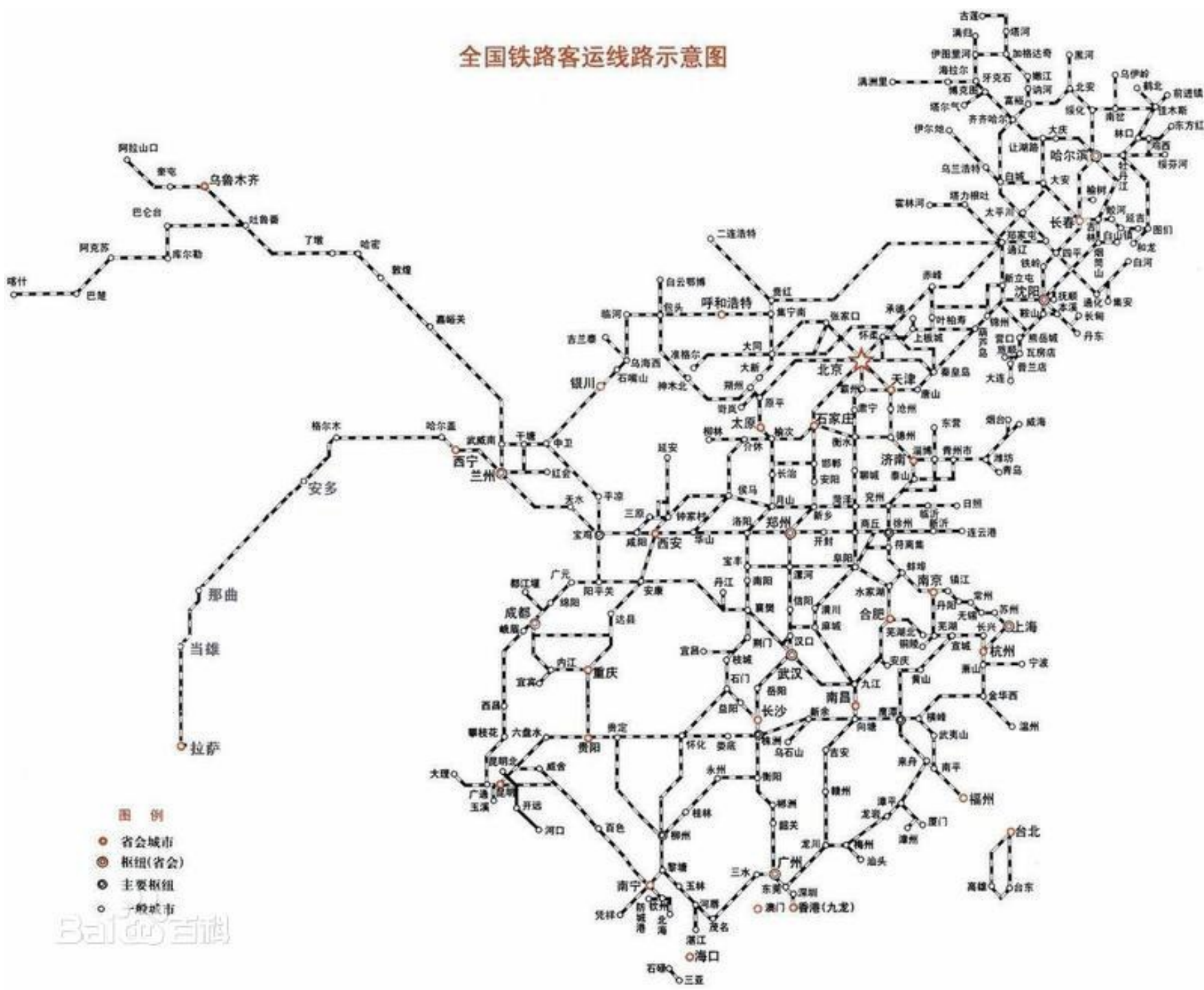
连通分量

子图必须连通，且包含尽可能多的顶点和边

无向图中的极大连通子图称为连通分量。



全国铁路客运线路示意图



中国铁路客运线路图:

大陆铁路网——连通分量1

海南岛铁路网——连通分量2

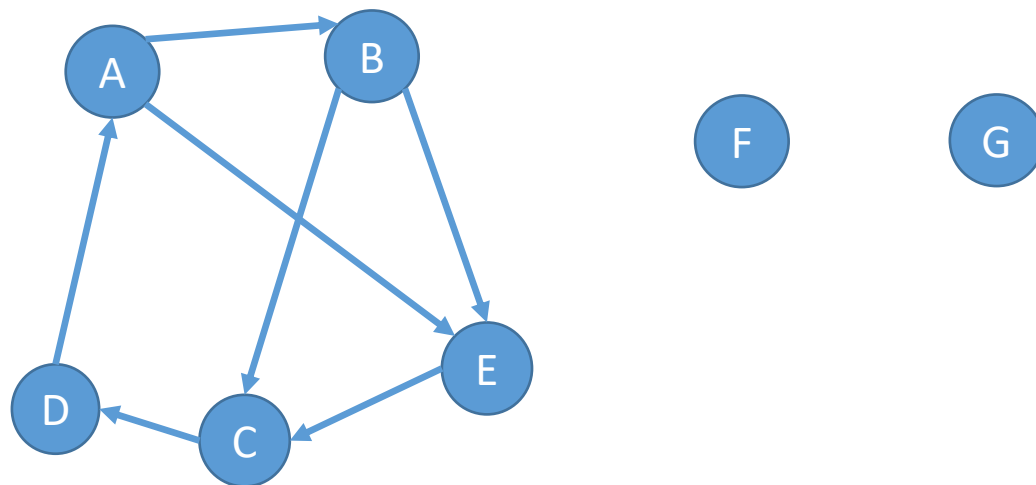
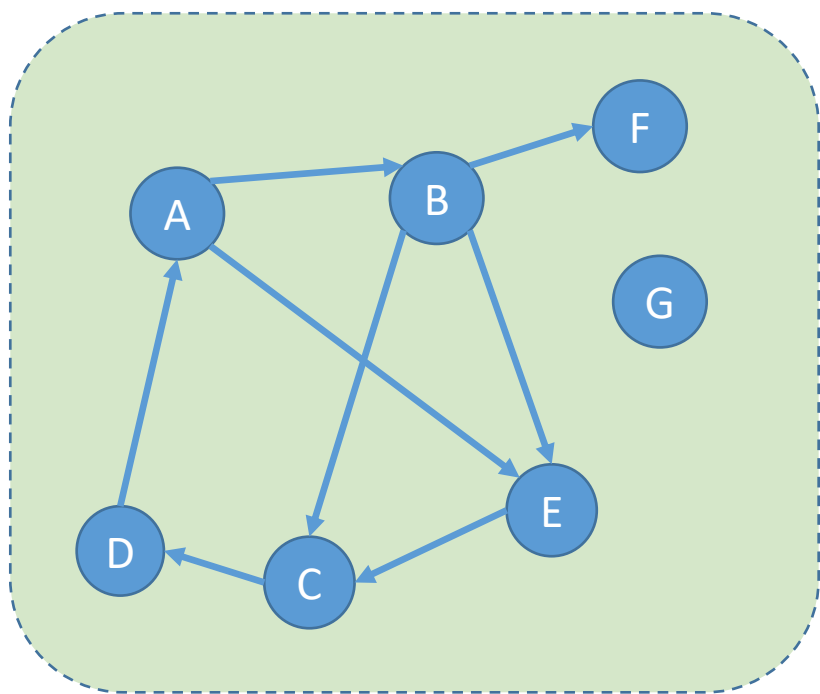
台湾岛铁路网——连通分量3

子图必须强连通，同时
保留尽可能多的边

强连通分量

有向图中的极大强连通子图称为有向图的强连通分量

有向图G



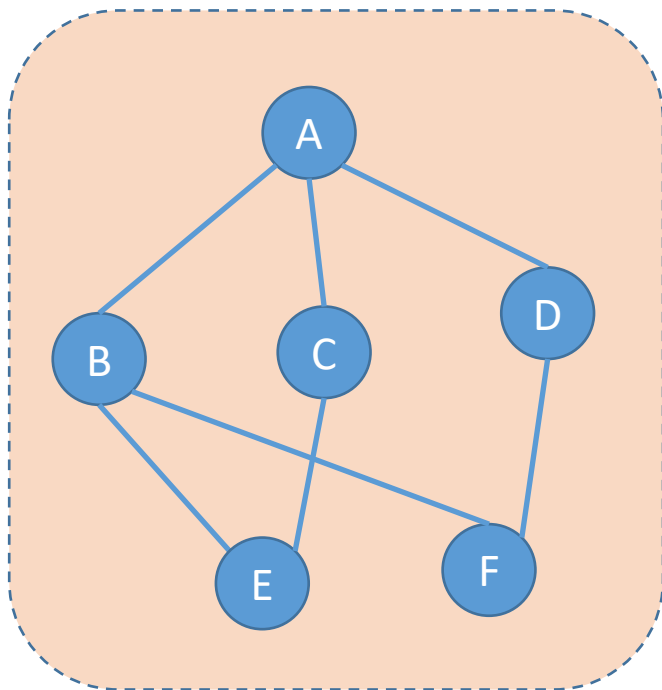
G的三个强连通分量

生成树

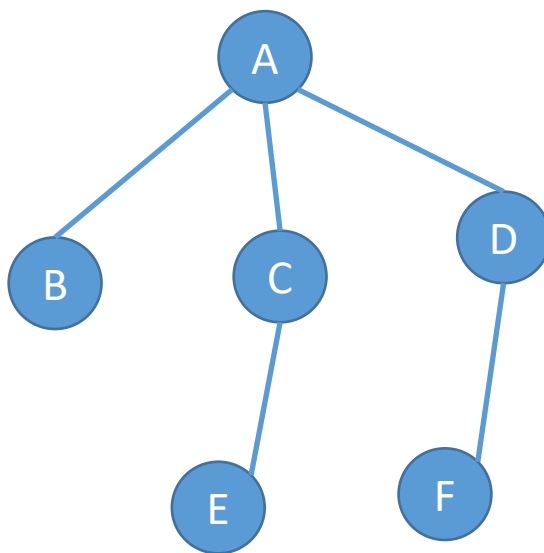
边尽可能的少，
但要保持连通

连通图的生成树是包含图中全部顶点的一个极小连通子图。

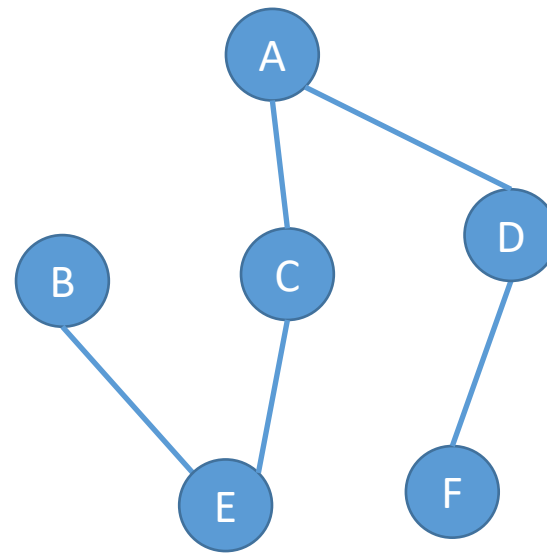
若图中顶点数为 n ，则它的生成树含有 $n-1$ 条边。对生成树而言，若砍去它的一条边，则会变成非连通图，若加上一条边则会形成一个回路。



无向图G



G的生成树1

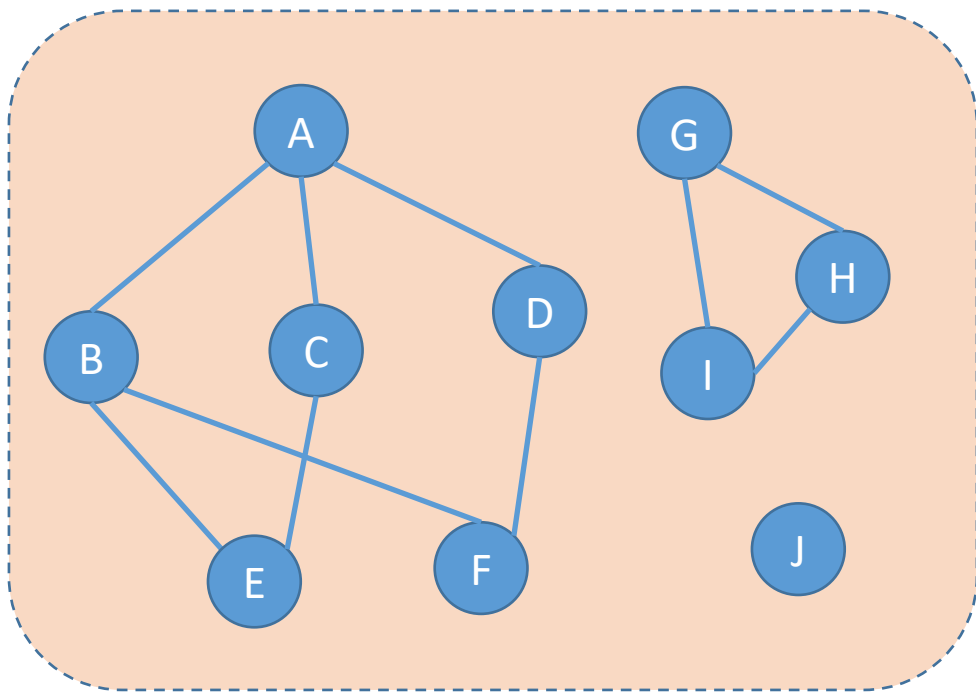


G的生成树2

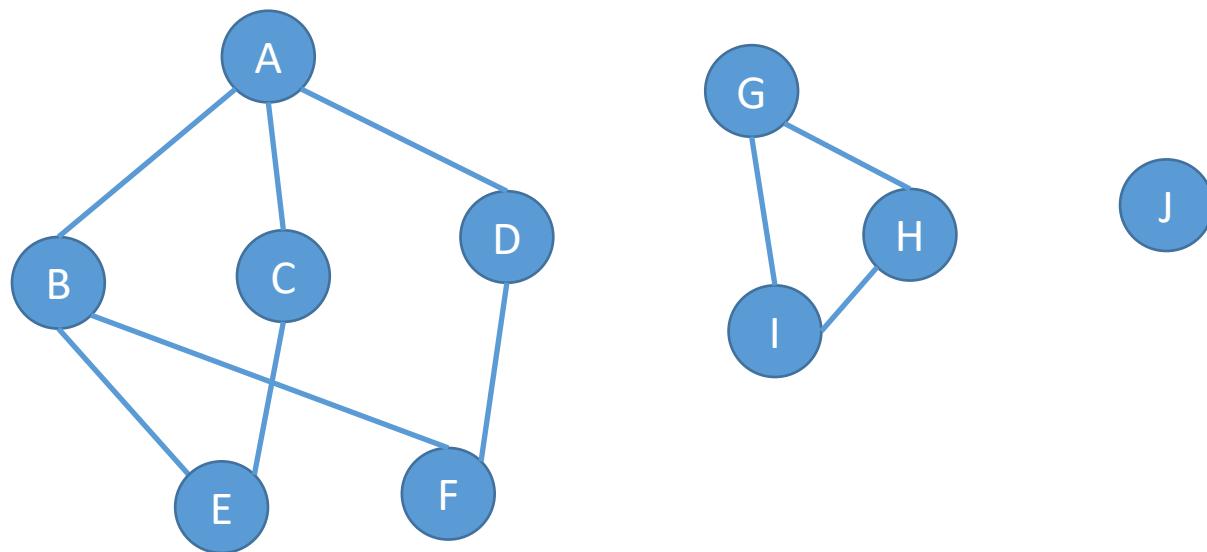
.....

生成森林

在非连通图中，连通分量的生成树构成了非连通图的生成森林。



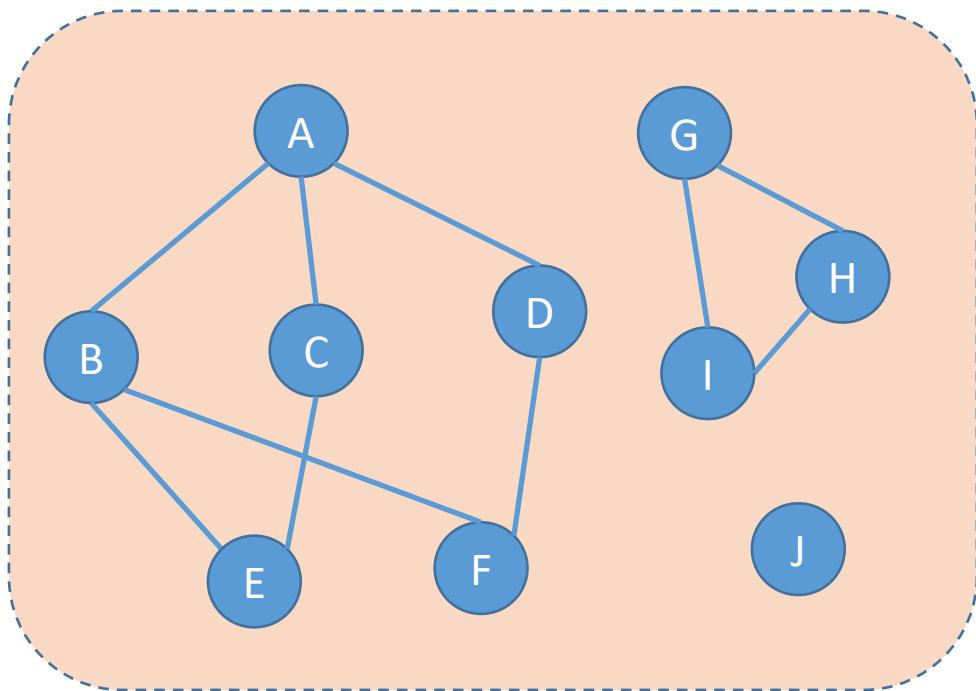
非连通无向图G



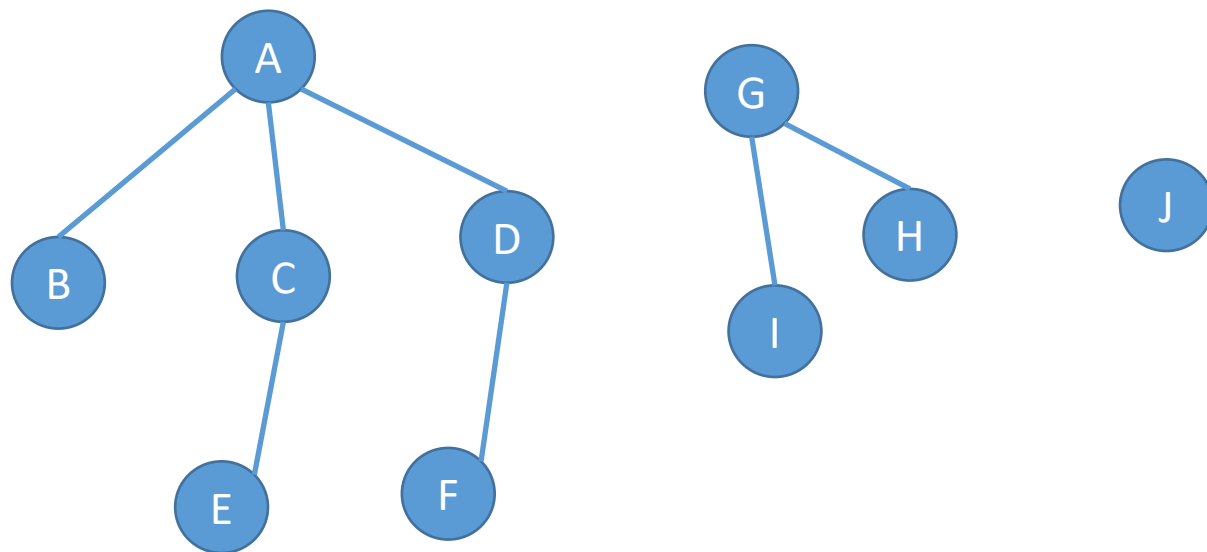
G的连通分量 \rightarrow G的生成森林

生成森林

在非连通图中，连通分量的生成树构成了非连通图的生成森林。

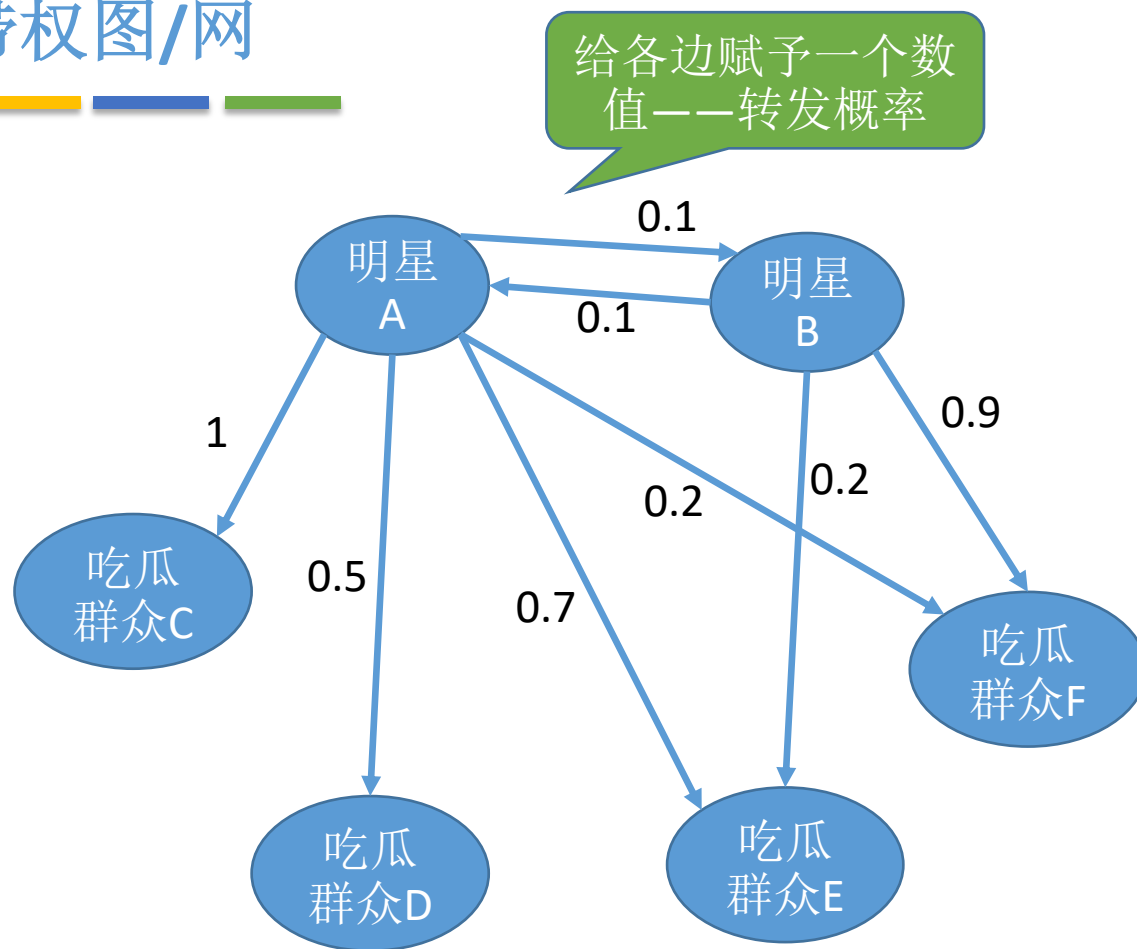
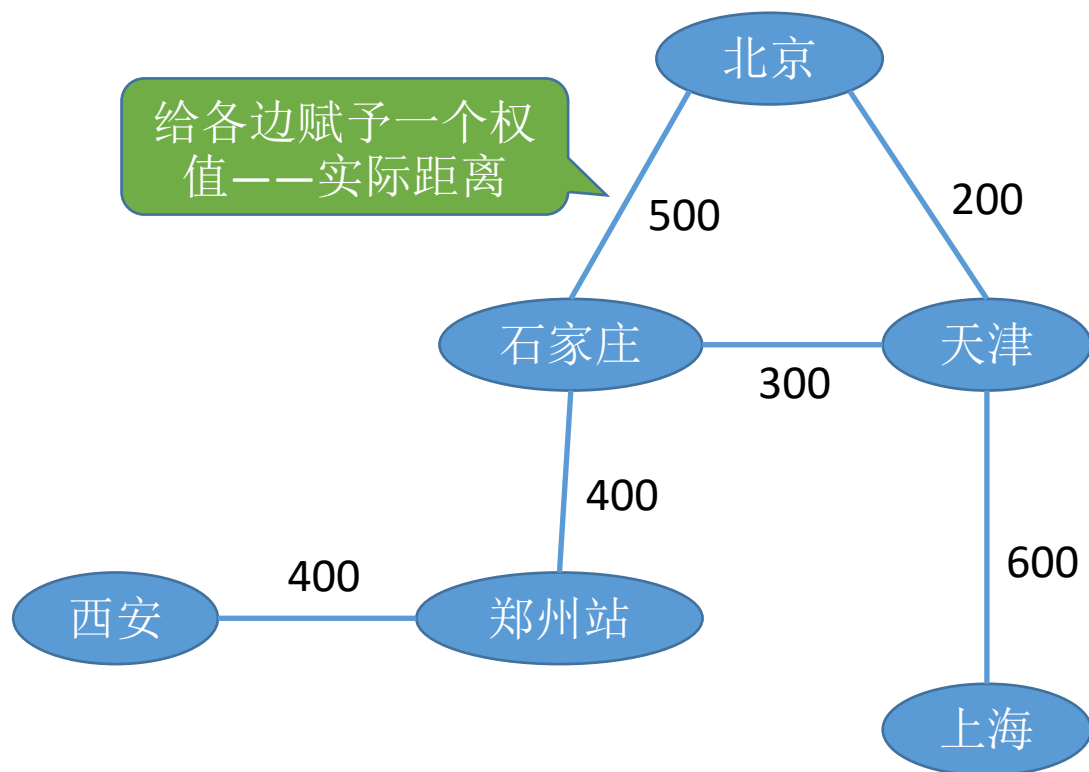


非连通无向图G



G的连通分量 \rightarrow G的生成森林

边的权、带权图/网

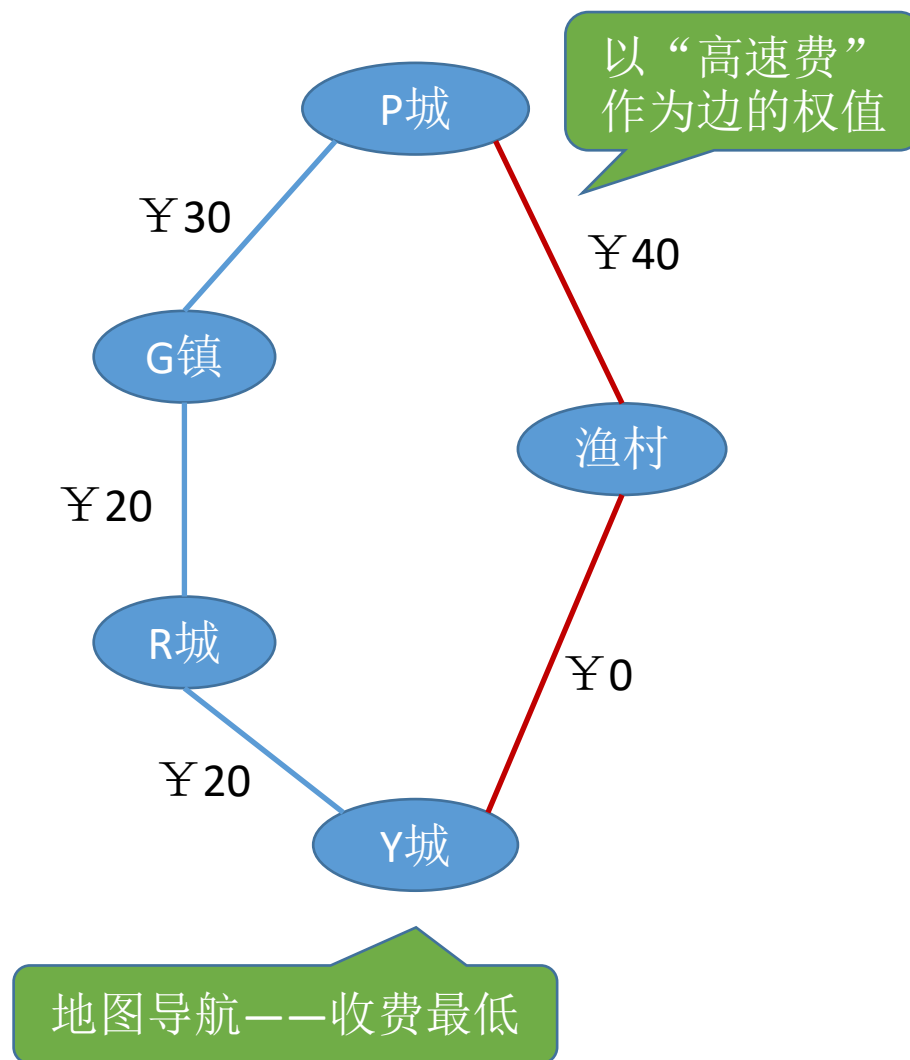
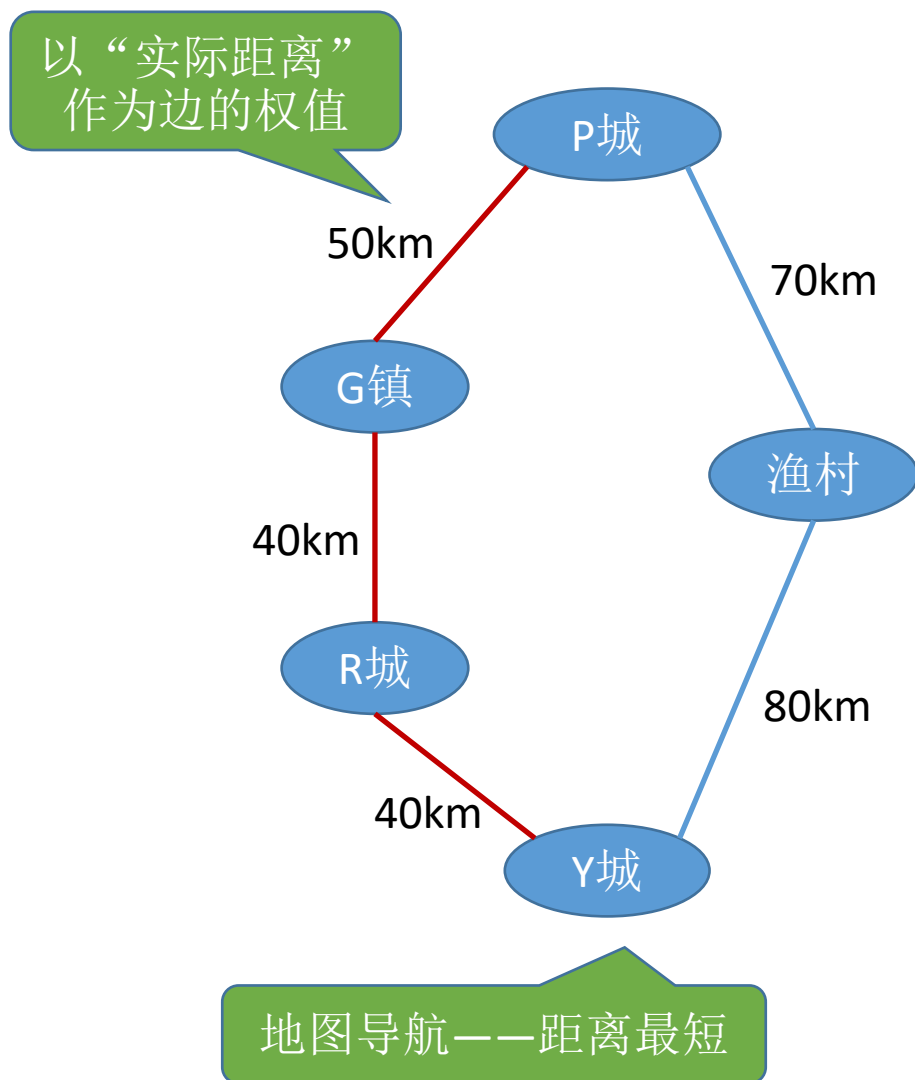


边的权——在一个图中，每条边都可以标上具有某种含义的数值，该数值称为该边的**权值**。

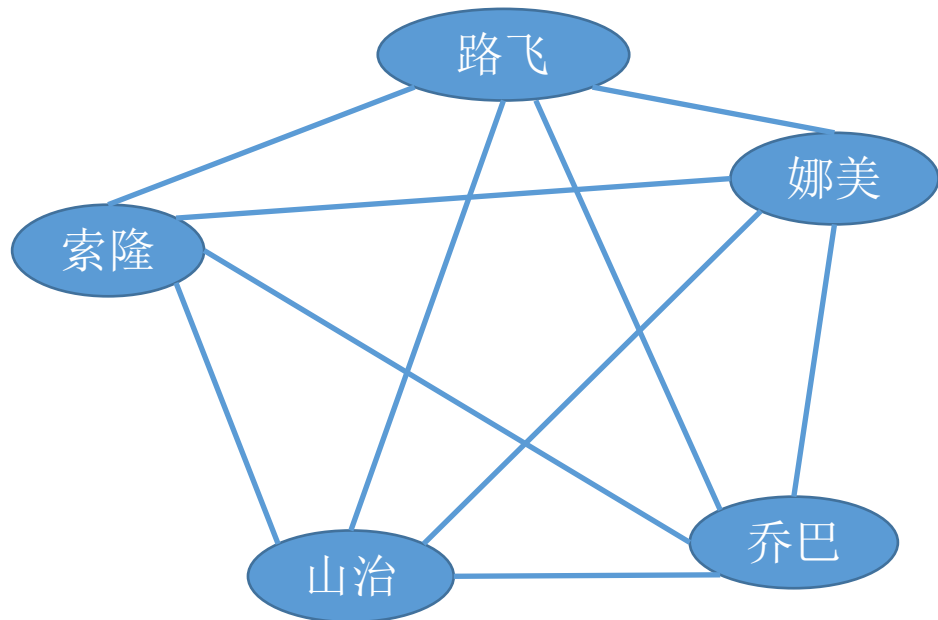
带权图/网——边上带有权值的图称为**带权图**，也称**网**。

带权路径长度——当图是带权图时，一条**路径上所有边的权值之和**，称为该路径的带权路径长度

带权图的应用举例

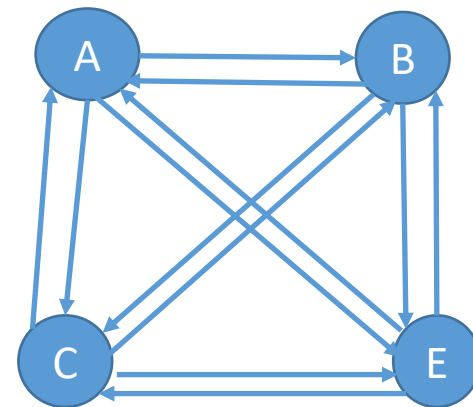


几种特殊形态的图



无向完全图——无向图中任意两个顶点之间都存在边

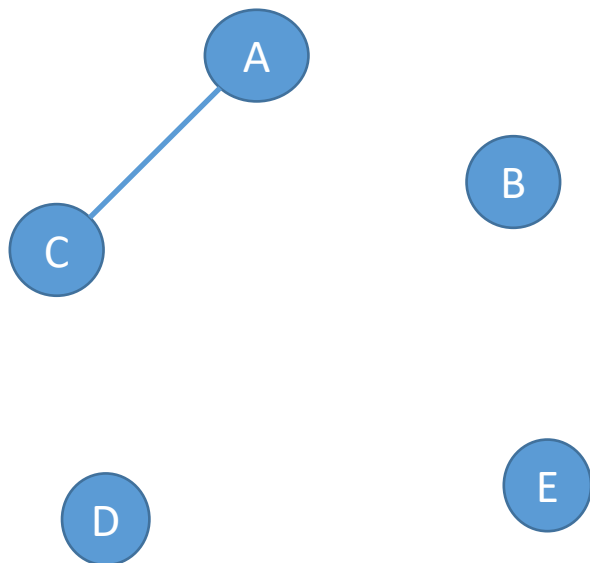
若无向图的顶点数 $|V|=n$ ，则
 $|E| \in [0, C_n^2] = [0, n(n-1)/2]$



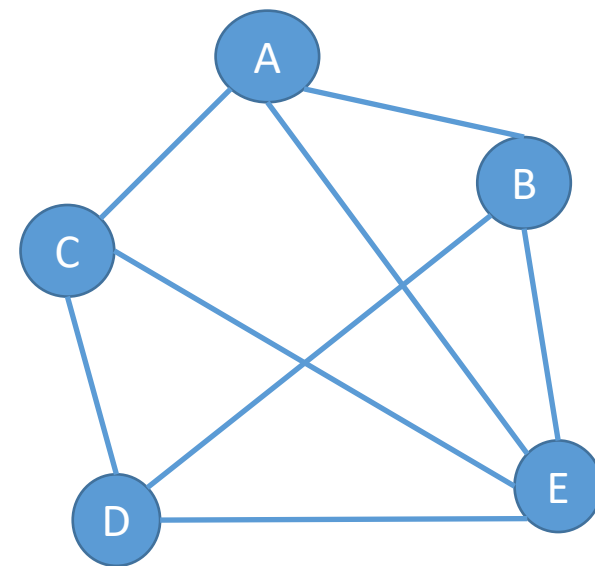
有向完全图——有向图中任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧

若有向图的顶点数 $|V|=n$ ，则
 $|E| \in [0, 2C_n^2] = [0, n(n-1)]$

几种特殊形态的图



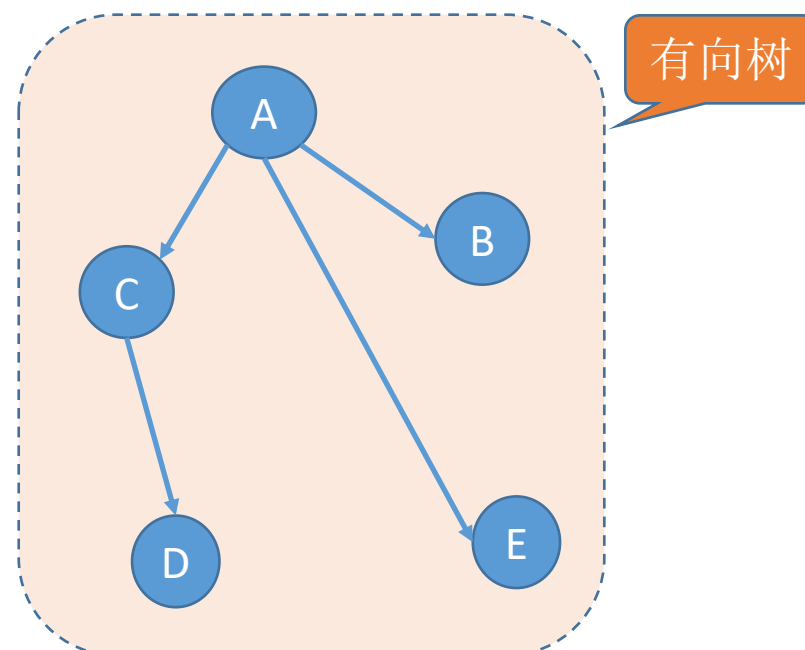
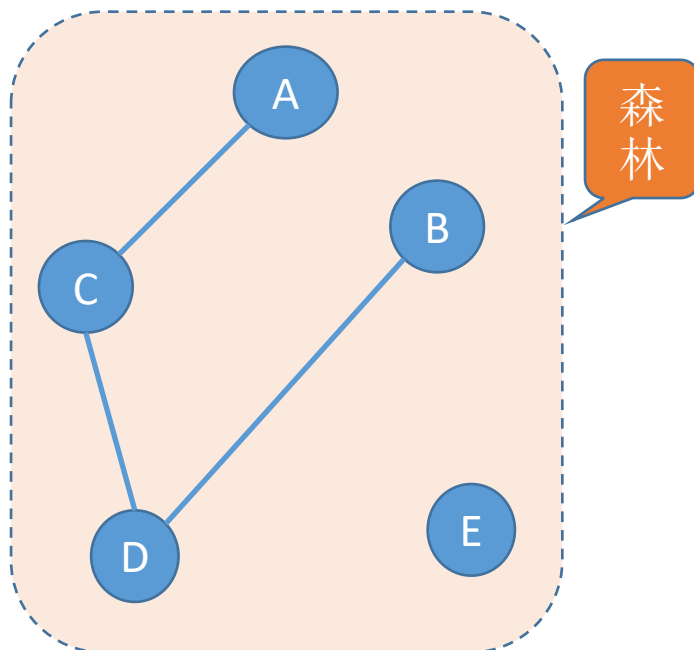
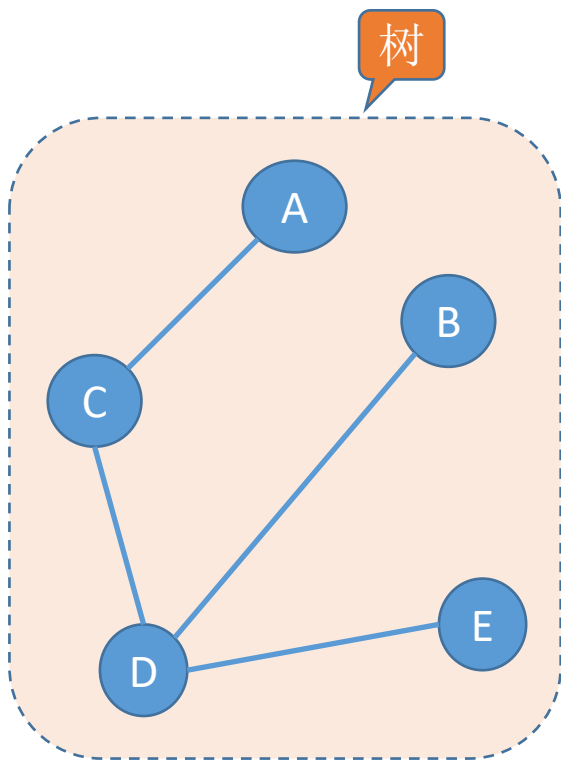
边数很少的图称为**稀疏图**



反之称为**稠密图**

没有绝对的界限，一般来说 $|E| < |V|\log|V|$ 时，可以将 G 视为稀疏图

几种特殊形态的图



树——不存在回路，且连通的无向图

有向树——一个顶点的入度为0、其余顶点的入度均为1的有向图，称为有向树。

n 个顶点的树，必有 $n-1$ 条边。

常见考点： n 个顶点的图，若 $|E| > n-1$ ，则一定有回路

知识回顾与重要考点

图的基本概念

定义: $G=(V, E)$, 顶点集 V , 边集 E

无向图 (无向边/边)、有向图 (有向边/弧)

顶点的度、出度、入度 (无向图? 有向图?)

边的权、带权图/网

点到点的关系

路径、回路、简单路径、简单回路

路径长度

点到点的距离 (最短路径)

无向图顶点的连通性、连通图

有向图顶点的强连通性、强连通图

图的局部

子图

连通分量——极大连通子图

强连通分量——极大强连通子图

连通无向图的生成树——包含全部顶点的极小连通子图

非连通无向图的生成森林——各连通分量的生成树

几种特殊形态的图

完全图

稠密图、稀疏图

树、森林、有向树

常见考点:

对于 n 个顶点的无向图 G ,

- 所有顶点的度之和 $= 2|E|$
- 若 G 是连通图, 则最少有 $n-1$ 条边 (树), 若 $|E| > n-1$, 则一定有回路
- 若 G 是非连通图, 则最多可能有 C_{n-1}^2 条边
- 无向完全图共有 C_n^2 条边

对于 n 个顶点的有向图 G ,

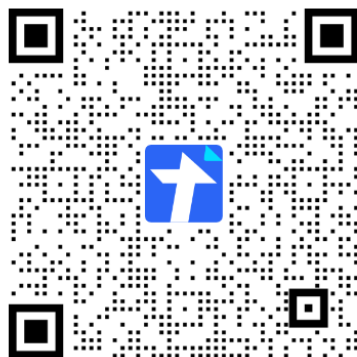
- 所有顶点的出度之和 $=$ 入度之和 $= |E|$
- 所有顶点的度之和 $= 2|E|$
- 若 G 是强连通图, 则最少有 n 条边 (形成回路)
- 有向完全图共有 $2C_n^2$ 条边

欢迎大家对本节视频进行评价~



学员评分：6.1.1 图的基本概念

扫一扫二维码打开或分享给好友



— 腾讯文档 —

可多人实时在线编辑，权限安全可控



公众号：王道在线



b站：王道计算机教育



抖音：王道计算机考研