

Conceptos matemáticos preliminares

Matemáticas Computacionales
(TC2020)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@itesm.mx



Tabla de contenidos

- 1 Conjuntos
- 2 Relaciones y Funciones
- 3 Lógica

Definición de conjunto

Conjuntos

Definición 1

Un **conjunto** es una colección de elementos. Usamos letras mayúsculas A, B, C, \dots para representarlos, y letras minúsculas a, b, c, \dots para representar sus elementos.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Describiendo un conjunto

Conjuntos

Podemos definirlos por *enumeración* o por *descripción*.

A es el conjunto de todos los números naturales menores que 6.

Enumerando sus elementos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 1, 5, 4\}$$

Describiendo sus elementos

$$A = \{a \in \mathbb{N} : a < 6\}$$

Notación de conjuntos

Conjuntos

- **Pertenencia:** $a \in A$, cuando a es un elemento de A .
- **Cardinalidad:** $|A|$ representa el número de elementos en A .
- **Inclusión:** $A \subseteq B$ si todos los elementos de A son elementos de B .
- **Igualdad:** si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.
- **Inclusión propia:** $A \subset B$ si todos los elementos de A son elementos de B y $A \neq B$.
- **Conjunto vacío:** \emptyset o $\{\}$ para representar un conjunto sin elementos.

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

$$\textcircled{1} \quad \{a\} \subseteq \{\{a\}\}$$

$$\textcircled{2} \quad \{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$$

$$\textcircled{3} \quad a \subseteq \{a, b, c\}$$

$$\textcircled{4} \quad \{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$$

$$\textcircled{5} \quad a \in \{a, b, c\}$$

$$\textcircled{6} \quad \{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$$

$$\textcircled{7} \quad b \in \{b\}$$

$$\textcircled{8} \quad \{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$$

$$\textcircled{9} \quad \{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$$

$$\textcircled{10} \quad \{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$$

Conjunto vacío

Conjuntos

1 $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

2 $\emptyset \in \{\emptyset\}$

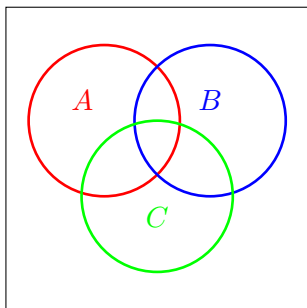
3 $0 = \emptyset$

4 $\emptyset \subseteq \emptyset$

5 $\emptyset \subset \emptyset$

Operaciones de conjuntos

Conjuntos



① $B \cup C$

② $C \cup (A \cap B)$

③ $C - (A \cap B)$

④ $A - (B \cup C)$

⑤ A^c

⑥ $B - (A \cup C)$

⑦ $(B - A)^c$

Producto Cartesiano

Conjuntos

Definición 2

El **producto Cartesiano** entre A y B se define como:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Conjunto potencia

Conjuntos

Definición 3

Sea A cualquier conjunto. El **conjunto potencia** de A —denotado por $\mathcal{P}(A)$ o $\wp(A)$ —consiste en el conjunto de todos (y únicamente) los subconjuntos de A .

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Equivalencias

Conjuntos

La **unión** y la **intersección** son **conmutativas**.

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Equivalencias

Conjuntos

La **unión** y la **intersección** son **asociativas**.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Equivalencias

Conjuntos

La **unión** y la **intersección** son **distributivas** entre ellas.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Equivalencias

Conjuntos

Leyes de De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

► Slide de Lógica

Relaciones

Relaciones y Funciones

Definición 4

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Una **relación binaria** R de A a B se define como cualquier subconjunto del producto Cartesiano $A \times B$. Es decir, cualquier conjunto de pares ordenados de la forma (a, b) tal que $a \in A$ y $b \in B$. También se dice que una relación R puede ser *sobre* $A \times B$.

Ejemplo

Menor o igual (\leq) es una **relación** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 2), (2, 3), \dots, (3, 4), \dots\}$$

Reflexividad

Relaciones y funciones

Definición 5

Sea R una relación binaria. Se dice que es **reflexiva** sobre un conjunto A si y solo si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.

Ejemplo

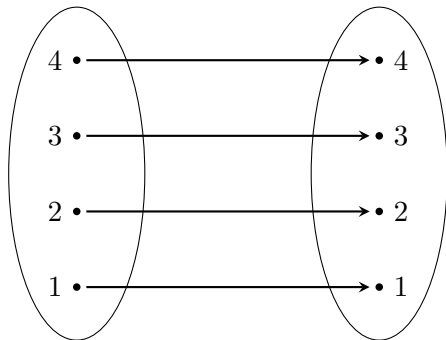
Menor o igual (\leq) es una relación **reflexiva** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (1, 2), (1, 3), \dots, (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (2, 3), \dots, (3, 4), \dots\}$$

¿Es la relación *menor que* ($<$) reflexiva sobre los naturales?

Reflexividad

Relaciones y funciones



Transitividad

Relaciones y funciones

Definición 6

Decimos que R es **transitiva** si y sólo si cuando $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

Ejemplo

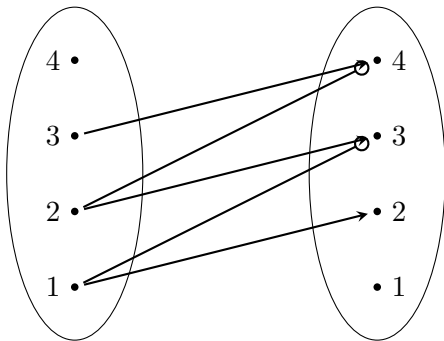
Menor o igual (\leq) es una relación **transitiva** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(1, 1), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{3}), \dots, (2, 2), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), \dots, (3, 4), \dots\}$$

¿Es la relación *menor que* ($<$) transitiva sobre los naturales?

Transitividad

Relaciones y funciones



Simetría

Relaciones y funciones

Definición 7

Una relación R es **simétrica** si y sólo si cuando $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.

Ejemplo 1

La relación de *igualdad* ($=$) es una relación **simétrica**: si $a = b$, entonces $b = a$.

Ejemplo 2

La relación de *hermandad* es **simétrica**: si *Juan* es hermano de *Pedro*, entonces *Pedro* es hermano de *Juan*.

Mapeo o Función

Relaciones y Funciones

¿Cualquier relación es una función?

¿Cualquier función es una relación?

Mapeo o Función

Relaciones y Funciones

Definición 8

Una **función** *unitaria* de un conjunto A en un conjunto B es cualquier relación binaria R de A a B que satisfaga la condición de que *para todo* $a \in A$ existe *exactamente un* $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

Podemos describir una función f de A en B como $f : A \rightarrow B$.

Ejemplo

La relación *sucesor* es una **función** de los naturales en los naturales
 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{suc}(n) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \dots\}$$

Dominio

Funciones y Relaciones

Definición 9

El **dominio** de una función f puede definirse como

$$\text{dom}(f) = \{a \in A : \exists b \in B, f(a) = b\}$$

En una función de forma $f : A \rightarrow B$, el **dominio** es simplemente A .

Codominio o Rango

Funciones y Relaciones

Definición 10

El **codominio** (también conocido como **rango**) de una función f puede definirse como

$$\text{codom}(f) = \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\}$$

En una función de forma $f : A \rightarrow B$, el **codominio** es simplemente B .

Funciones totales y parciales

Relaciones y Funciones

Definición 11

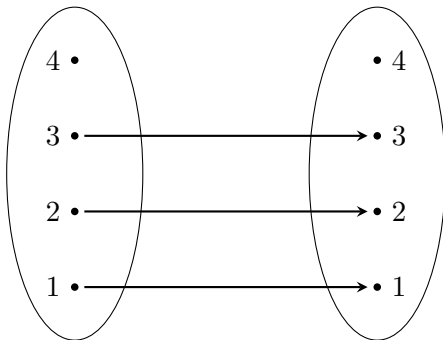
Una **función parcial** de un conjunto A a un conjunto B es una relación binaria R de A a B tal que para toda $a \in A$, hay *a lo mucho* un $b \in B$ con $(a, b) \in R$.

Es decir que puede haber elementos en A que no tengan la relación R a ningún elemento de B ; o en otras palabras, que no se *usen*.

A las funciones donde se utilizan **todos** los elementos de A les llamamos **funciones totales**, y son usualmente a las que nos referimos al simplemente decir “funciones”.

Funciones Parciales

Relaciones y funciones



Imagen

Relaciones y Funciones

Definición 12

Sean $f : A \rightarrow B$ y $X \subseteq A$. La **imagen** bajo f de $X \subseteq A$ es el conjunto $\{b \in B : \exists a \in X, b = f(a)\}$, o bien $\{f(a) : a \in X\}$.

En otras palabras, la **imagen** de una función es el conjunto de todos los *valores* de B que *utiliza*. Puede haber elementos de B fuera de la función.

Todo B es el **codominio** de la función, y sólo aquellos $b \in B$ que son usados representan la **imagen** de la función.

Funciones inyectivas

Relaciones y Funciones

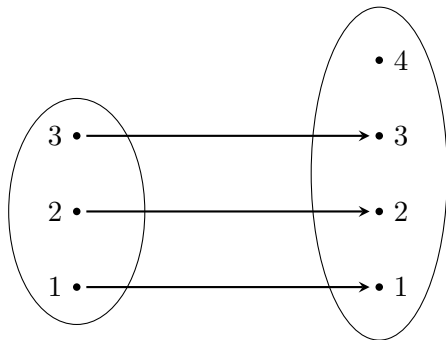
Definición 13

Sea $f : A \rightarrow B$. Se dice que f es **inyectiva** (o **uno a uno**) si y sólo si cuando $a \neq a'$, entonces $f(a) \neq f(a')$.

En otras palabras, si y sólo si para cada $b \in B$, hay a lo mucho un $a \in A$ con $f(a) = b$. Es decir, sólo si distintos *inputs* generan *outputs* diferentes.

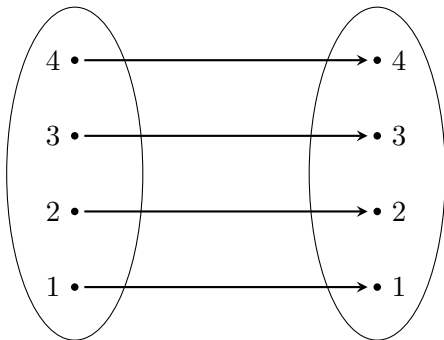
Funciones inyectivas

Relaciones y Funciones



Funciones inyectivas

Relaciones y Funciones



Funciones sobreyectivas

Relaciones y Funciones

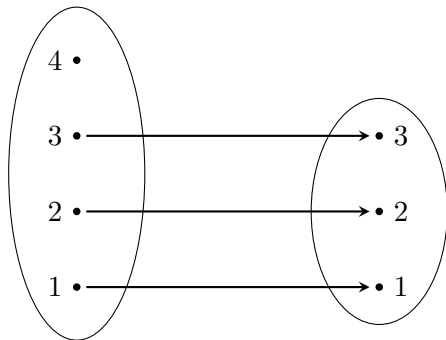
Definición 14

Sea $f : A \rightarrow B$. Decimos que f es una función **sobre** B (o **sobreyectiva** con respecto a B) si y sólo si para todo $b \in B$ hay algún $a \in A$ con $f(a) = b$.

Una manera mucho más sencilla de verlo: si y sólo si $\text{imagen}(f) = B$.

Funciones sobreyectivas

Relaciones y Funciones



Funciones biyectivas

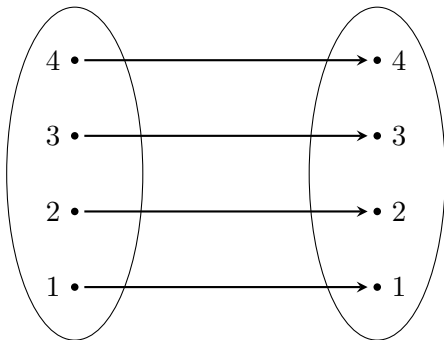
Relaciones y Funciones

Definición 15

Se dice que una función es **biyectiva** si y sólo si es **inyectiva** y **sobre**.

Funciones biyectivas

Relaciones y Funciones



Conjuntos infinitos

Relaciones y Funciones

- Los números **naturales** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ son infinitos. Algunos autores consideran que $0 \in \mathbb{N}$, otros no. \mathbb{N} es un conjunto infinito **contable**.
- Los números **enteros** \mathbb{Z} y los números **racionales** \mathbb{Q} son también **infinitos contables** porque existe una **biyección** que los empareja uno a uno con cada $n \in \mathbb{N}$.
- Los números **irracionales** \mathbb{Q}' y los **reales** \mathbb{R} en cambio, **son infinitos no contables** porque no existe biyección que empareje uno a uno sus elementos con todo $n \in \mathbb{N}$.
- $|\mathcal{P}(A)| \gg |A|$ —no existe biyección que pueda emparejar uno a uno los elementos de ambos conjuntos, por lo que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \gg |\mathbb{N}|$. El conjunto potencia de los naturales es **infinito no contable**.

Conectivos lógicos

Lógica

- La **disyunción** (\vee) funciona de manera similar a la **unión** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica OR.
- La **conjunción** (\wedge) funciona de manera similar a la **intersección** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica AND.
- La **negación** (\neg) funciona de manera similar al **complemento**. Su compuerta lógica es el NOT.

¿Puedes describir la **implicación** y la **doble implicación**? ¿Cuáles de las leyes de conjuntos aplican también para lógica?

► Slide de Equivalencias

Equivalencias

Lógica

La **conjunción** y la **disyunción** son **conmutativas**.

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge q = q \wedge p$$

Equivalencias

Lógica

La **conjunción** y la **disyunción** son **asociativas**.

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$

Equivalencias

Lógica

La **conjunción** y la **disyunción** son **distributivas** entre ellas.

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Equivalencias

Lógica

Leyes de De Morgan:

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$