

Gramáticas Regulares

Matemáticas Computacionales (TC2020)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@itesm.mx



Tabla de contenidos

- 1 Gramáticas como representaciones de lenguajes
- 2 Reglas y derivación
- 3 Definición y diseño de gramáticas formales

Definición

Gramáticas como representaciones de lenguajes

Definición

Según la Real Academia Española, la **gramática** es una parte de la lingüística que estudia los elementos de una lengua, así como **la forma** en que estos se organizan y se combinan.

Es decir, la **gramática** estudia la **forma** en que las palabras se organizan y combinan.

Tenemos gramáticas *naturales* como las que usamos en español, en inglés, en francés, ... Pero también existen gramáticas *artificiales* como las que usamos en Python, C#, Java, ...

¿Qué las hace naturales o artificiales?

Ejemplo: gramática es-MX

Gramáticas como representaciones de lenguajes

Una **oración** suele tener **sujeto** y **predicado**.

<frase> → <sujeto><predicado>

El **sujeto** suele ser un **sustantivo**.

<sujeto> → <sustantivo>

Juan, María y Gustavo (el perro) son todos **sustantivos**.

<sustantivo> → Gustavo

<sustantivo> → Juan

<sustantivo> → María

El **predicado** suele llevar un **verbo** y a veces un **objeto**. Y un **objeto** es algún **conectivo** y un **sustantivo**, y ...

<predicado> → <verbo intransitivo>

<predicado> → <verbo transitivo><objeto>

<objeto> → a <sustantivo>

Ejemplo: gramática es-MX

Gramáticas como representaciones de lenguajes

$\langle \text{frase} \rangle \rightarrow \langle \text{sujeto} \rangle \langle \text{predicado} \rangle$
 $\langle \text{sujeto} \rangle \rightarrow \langle \text{sustantivo} \rangle$
 $\langle \text{sustantivo} \rangle \rightarrow \text{Gustavo}$
 $\langle \text{sustantivo} \rangle \rightarrow \text{Juan}$
 $\langle \text{sustantivo} \rangle \rightarrow \text{María}$
 $\langle \text{predicado} \rangle \rightarrow \langle \text{verbo intransitivo} \rangle$
 $\langle \text{predicado} \rangle \rightarrow \langle \text{verbo transitivo} \rangle \langle \text{objeto} \rangle$
 $\langle \text{verbo intransitivo} \rangle \rightarrow \text{patina}$
 $\langle \text{verbo transitivo} \rangle \rightarrow \text{abraza}$
 $\langle \text{objeto} \rangle \rightarrow \text{a } \langle \text{sustantivo} \rangle$

Conjunto de reglas con $\langle \text{variables} \rangle$ y $\text{símbolos terminales}$.

La gramática como un conjunto de reglas

Reglas y derivación

Cada línea del ejemplo anterior es una **regla**:

$\langle \text{objeto} \rangle \rightarrow \langle \text{sustantivo} \rangle$

¿Qué **forma** tienen las reglas?

$$\alpha \rightarrow \beta$$

Tanto α como β son símbolos—algunos son terminales, otros no.

Aplicación de reglas

Reglas y derivación

Las reglas se aplican recursivamente:

$\langle \text{frase} \rangle \rightarrow \langle \text{sujeto} \rangle \langle \text{predicado} \rangle$

$\langle \text{sujeto} \rangle \rightarrow \langle \text{sustantivo} \rangle$

$\langle \text{sustantivo} \rangle \rightarrow \text{María}$

$\langle \text{predicado} \rangle \rightarrow \langle \text{verbo transitivo} \rangle \langle \text{objeto} \rangle$

$\langle \text{verbo transitivo} \rangle \rightarrow \text{abrazar}$

$\langle \text{objeto} \rangle \rightarrow \text{a} \langle \text{sustantivo} \rangle$

$\langle \text{sustantivo} \rangle \rightarrow \text{Gustavo}$

María abraza a Gustavo

Derivación de reglas

Reglas y derivación

Al aplicar una regla de forma $\alpha \rightarrow \beta$ a la expresión $u\alpha v$ da como resultado la expresión $u\beta v$.

A este proceso le llamamos **derivación**, donde pasamos de una expresión a otra:

$$u\alpha v \Longrightarrow u\beta v$$

Por ejemplo: María abraza $\langle \text{objeto} \rangle \Longrightarrow$ María abraza a $\langle \text{sustantivo} \rangle$.

Usualmente representamos una derivación *completa* en una gramática como si fuera una **Kleene Star**:

$$S \Longrightarrow^* w$$

Definición de una gramática formal

Definición y diseño de gramáticas formales

Definición

Formalmente, una **gramática** es un cuádruplo $G = (V, \Sigma, R, S)$, donde

- 1 V es un conjunto finito de **variables**,
- 2 Σ es un conjunto finito de **terminales**,
- 3 R es un conjunto finito de **reglas** de la forma $A \rightarrow w$, tal que $A \in V$ y $w \in (V \cup \Sigma)^*$
- 4 $S \in V$ es la **variable inicial**.

Lenguaje L generado por G

$$L = \{w \in \Sigma^* : S \Longrightarrow^* w\}$$

Ejemplo: gramática formal

Definición y diseño de gramáticas formales

$\langle \text{frase} \rangle \rightarrow \langle \text{sujeto} \rangle \langle \text{predicado} \rangle$

$\langle \text{sujeto} \rangle \rightarrow \langle \text{sustantivo} \rangle$

$\langle \text{sustantivo} \rangle \rightarrow \text{Gustavo}$

$\langle \text{sustantivo} \rangle \rightarrow \text{Juan}$

$\langle \text{sustantivo} \rangle \rightarrow \text{María}$

$\langle \text{predicado} \rangle \rightarrow \langle \text{verbo intransitivo} \rangle$

$\langle \text{predicado} \rangle \rightarrow \langle \text{verbo transitivo} \rangle \langle \text{objeto} \rangle$

$\langle \text{verbo intransitivo} \rangle \rightarrow \text{patina}$

$\langle \text{verbo transitivo} \rangle \rightarrow \text{abrazo}$

$\langle \text{objeto} \rangle \rightarrow a \langle \text{sustantivo} \rangle$

¿Cuál es la definición formal de esta gramática?

Ejemplo: diseño de gramática formal

Definición y diseño de gramáticas formales

Crear una Gramática Regular que genere el lenguaje de palabras sobre $\{a, b\}$ de longitud par y terminadas en a .

Necesitamos **tres** variables:

- ➊ S para recordar que no hemos recibido nada. Si agregamos un símbolo, entonces se hace impar.
- ➋ I para recordar que llevamos una palabra de longitud impar. Si agregamos un símbolo, entonces se hace par.
- ➌ P para recordar que llevamos una palabra de longitud par. Si agregamos un símbolo, entonces se hace impar.

S nos lleva a I que nos lleva a P que nos lleva a I ...

Ejemplo: diseño de gramática formal

Definición y diseño de gramáticas formales

Cada variable tiene distintas reglas:

I para recordar que llevamos una palabra de longitud impar: P para recordar que llevamos una palabra de longitud par: Completamos las reglas que hagan falta:

- 1 $S \rightarrow aI$ si lo primero que recibimos es a
- 2 $S \rightarrow bI$ si lo primero que recibimos es b
- 3 $I \rightarrow aP$ si lo siguiente que recibimos es a
- 4 $I \rightarrow bP$ si lo siguiente que recibimos es b
- 5 $P \rightarrow aI$ si lo siguiente que recibimos es a
- 6 $P \rightarrow bI$ si lo siguiente que recibimos es b
- 7 $I \rightarrow a$ para terminar con una a y con una longitud par.