Expansiones a la lógica: Lógica de Primer Orden e Inferencia

Matemáticas Discretas
(TC1003)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
mail@tec.mx

Outline

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
  - **Conjunción**: $\wedge$
  - **Disyunción**: $\vee$
  - **Negación**: $\neg$
  - **Implicación**: $\implies$
  - **Doble implicación**: $\iff$
  - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
  - **Conjunción**: $\wedge$
  - **Disyunción**: $\vee$
  - **Negación**: $\neg$
  - **Implicación**: $\implies$
  - **Doble implicación**: $\iff$
  - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
    - **Conjunción**: $\wedge$
    - **Disyunción**: $\vee$
    - **Negación**: $\neg$
    - **Implicación**: $\implies$
    - **Doble implicación**: $\iff$
    - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
  - **Conjunción**: $\wedge$
  - **Disyunción**: $\vee$
  - **Negación**: $\neg$
  - **Implicación**: $\implies$
  - **Doble implicación**: $\iff$
  - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
    - **Conjunción**: $\wedge$
    - **Disyunción**: $\vee$
    - **Negación**: $\neg$
    - **Implicación**: $\implies$
    - **Doble implicación**: $\iff$
    - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
  - **Conjunción**: $\wedge$
  - **Disyunción**: $\vee$
  - **Negación**: $\neg$
  - **Implicación**: $\implies$
  - **Doble implicación**: $\iff$
  - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
  - **Conjunción**: $\wedge$
  - **Disyunción**: $\vee$
  - **Negación**: $\neg$
  - **Implicación**: $\implies$
  - **Doble implicación**: $\iff$
  - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Lógica proposicional

Recap de Lógica

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
  - **Conjunción**: $\wedge$
  - **Disyunción**: $\vee$
  - **Negación**: $\neg$
  - **Implicación**: $\implies$
  - **Doble implicación**: $\iff$
  - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
  - **Conjunción**: $\wedge$
  - **Disyunción**: $\vee$
  - **Negación**: $\neg$
  - **Implicación**: $\implies$
  - **Doble implicación**: $\iff$
  - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

Lógica proposicional

Recap de Lógica

Previamente, analizamos un poco *la verdad* en algunas oraciones.

- Aprendimos la diferencia entre un **estatuto** y una oración.
- También aprendimos a identificar cuando un estatuto era **atómico**.
- Revisamos la diferencia entre los operadores **binarios** y un operador **unitario**
- Aprendimos también la simbología necesaria:
  - **Conjunción**: $\wedge$
  - **Disyunción**: $\vee$
  - **Negación**: $\neg$
  - **Implicación**: $\implies$
  - **Doble implicación**: $\iff$
  - **Disyunción exclusiva**: $\oplus$

- El sol sale por el este
- Cinco ballenas mueren al día
- Si hay de sirloin, me traes cinco.

¿Qué tienen en común estas proposiciones?

- Todas son proposiciones que hablan de **un solo valor de verdad**.
- La veracidad en ellas es *absoluta* y se presenta de manera *aislada*.

- El sol sale por el este
- Cinco ballenas mueren al día
- Si hay de sirloin, me traes cinco.

¿Qué tienen en común estas proposiciones?

- Todas son proposiciones que hablan de **un solo valor de verdad**.
- La veracidad en ellas es *absoluta* y se presenta de manera *aislada*.

- El sol sale por el este
- Cinco ballenas mueren al día
- Si hay de sirloin, me traes cinco.

¿Qué tienen en común estas proposiciones?

- Todas son proposiciones que hablan de **un solo valor de verdad**.
- La veracidad en ellas es *absoluta* y se presenta de manera *aislada*.

Expresividad

Lógica de Primer Orden

Pensemos en el siguiente ejemplo: *de noche, todos los gatos son pardos*. ¿Cómo la reescribimos? en una forma más fácilmente 'expresable' con lo que hemos visto?

Si es de noche, entonces todos los gatos son pardos, para que quede en la forma $P \implies Q$ donde $P =$ *es de noche* y $Q =$ *todos los gatos son pardos*.

Tendríamos que pensar en *todos los gatos* como **un solo objeto** para que esto funcione con la lógica que conocemos.

Pongámosle números, en donde nuestro universo contempla los 3 gatos que—esperamos aún—viven en el Campus. ¿Cómo hacemos para describir que al menos dos son pardos durante la noche?

Pensemos en el siguiente ejemplo: *de noche, todos los gatos son pardos*. ¿Cómo la reescribimos? en una forma más fácilmente 'expresable' con lo que hemos visto?

Si es de noche, entonces todos los gatos son pardos, para que quede en la forma $P \implies Q$ donde $P =$ *es de noche* y $Q =$ *todos los gatos son pardos*.

Tendríamos que pensar en *todos los gatos* como **un solo objeto** para que esto funcione con la lógica que conocemos.

Pongámosle números, en donde nuestro universo contempla los 3 gatos que—esperamos aún—viven en el Campus. ¿Cómo hacemos para describir que al menos dos son pardos durante la noche?

Pensemos en el siguiente ejemplo: *de noche, todos los gatos son pardos*. ¿Cómo la reescribimos? en una forma más fácilmente 'expresable' con lo que hemos visto?

Si es de noche, entonces todos los gatos son pardos, para que quede en la forma $P \implies Q$ donde $P =$ *es de noche* y $Q =$ *todos los gatos son pardos*.

Tendríamos que pensar en *todos los gatos* como **un solo objeto** para que esto funcione con la lógica que conocemos.

Pongámosle números, en donde nuestro universo contempla los 3 gatos que—esperamos aún—viven en el Campus. ¿Cómo hacemos para describir que al menos dos son pardos durante la noche?

Expresividad

Lógica de Primer Orden

Pensemos en el siguiente ejemplo: *de noche, todos los gatos son pardos*. ¿Cómo la reescribimos? en una forma más fácilmente 'expresable' con lo que hemos visto?

Si es de noche, entonces todos los gatos son pardos, para que quede en la forma $P \implies Q$ donde $P =$ *es de noche* y $Q =$ *todos los gatos son pardos*.

Tendríamos que pensar en *todos los gatos* como **un solo objeto** para que esto funcione con la lógica que conocemos.

Pongámosle números, en donde nuestro universo contempla los 3 gatos que—esperamos aún—viven en el Campus. ¿Cómo hacemos para describir que al menos dos son pardos durante la noche?

Si es de noche, entonces al menos dos de los tres gatos que viven en el Campus son pardos.

$$P \implies Q$$

donde P es lo mismo: *es de noche*, y Q cambió: *al menos dos de los tres gatos que viven en el Campus son pardos*.

Claramente, si queremos expresar algo con cantidades o condiciones adicionales, alguna de las fórmulas atómicas debe *absorber* esta información. Significa que van a haber cosas que **no podremos expresar** de esta manera general.
A esta capacidad (o incapacidad) de expresar se le conoce como **poder expresivo** o expresividad. La lógica proposicional es de expresividad limitada. Sin embargo, podemos *expandirla* para poder expresar otro tipo de cosas.

Si es de noche, entonces al menos dos de los tres gatos que viven en el Campus son pardos.

$$P \implies Q$$

donde P es lo mismo: *es de noche*, y Q cambió: *al menos dos de los tres gatos que viven en el Campus son pardos*.

Claramente, si queremos expresar algo con cantidades o condiciones adicionales, alguna de las fórmulas atómicas debe *absorber* esta información. Significa que van a haber cosas que **no podremos expresar** de esta manera general.

A esta capacidad (o incapacidad) de expresar se le conoce como **poder expresivo** o expresividad. La lógica proposicional es de expresividad limitada. Sin embargo, podemos *expandirla* para poder expresar otro tipo de cosas.

Si es de noche, entonces al menos dos de los tres gatos que viven en el Campus son pardos.

$$P \implies Q$$

donde P es lo mismo: *es de noche*, y Q cambió: *al menos dos de los tres gatos que viven en el Campus son pardos*.

Claramente, si queremos expresar algo con cantidades o condiciones adicionales, alguna de las fórmulas atómicas debe *absorber* esta información. Significa que van a haber cosas que **no podremos expresar** de esta manera general.

A esta capacidad (o incapacidad) de expresar se le conoce como **poder expresivo** o expresividad. La lógica proposicional es de expresividad limitada. Sin embargo, podemos *expandirla* para poder expresar otro tipo de cosas.

Si es de noche, entonces al menos dos de los tres gatos que viven en el Campus son pardos.

$$P \implies Q$$

donde P es lo mismo: *es de noche*, y Q cambió: *al menos dos de los tres gatos que viven en el Campus son pardos*.

Claramente, si queremos expresar algo con cantidades o condiciones adicionales, alguna de las fórmulas atómicas debe *absorber* esta información. Significa que van a haber cosas que **no podremos expresar** de esta manera general.
A esta capacidad (o incapacidad) de expresar se le conoce como **poder expresivo** o expresividad. La lógica proposicional es de expresividad limitada. Sin embargo, podemos *expandirla* para poder expresar otro tipo de cosas.

Cuantificadores

Lógica de Primer Orden

Recordemos ahora los cuantificadores que vimos al hablar del tema de relaciones y funciones:

- Cuantificador universal: $\forall$ que significa *para todos*
- Cuantificador existencial: $\exists$ que significa *existe* (o sea, para al menos uno)
- Cuantificador de unicidad: $\exists!$ que significa *existe únicamente uno* (o sea, para solamente uno) y es un caso especial del cuantificador existencial

Con esto podemos acercarnos un poco más al ejemplo de los gatos que necesitamos:

Para todo x, si x es un gato, y es de noche, entonces x es pardo.

$$\forall x(Gx \implies Px) \quad \text{o bien } \forall x(G(x) \implies P(x))$$

¿Qué son G y P?

Cuantificadores

Lógica de Primer Orden

Recordemos ahora los cuantificadores que vimos al hablar del tema de relaciones y funciones:

- Cuantificador universal: $\forall$ que significa *para todos*
- Cuantificador existencial: $\exists$ que significa *existe* (o sea, para al menos uno)
- Cuantificador de unicidad: $\exists!$ que significa *existe únicamente uno* (o sea, para solamente uno) y es un caso especial del cuantificador existencial

Con esto podemos acercarnos un poco más al ejemplo de los gatos que necesitamos:

Para todo x, si x es un gato, y es de noche, entonces x es pardo.

$$\forall x(Gx \implies Px) \quad \text{o bien } \forall x(G(x) \implies P(x))$$

¿Qué son G y P?

Cuantificadores

Lógica de Primer Orden

Recordemos ahora los cuantificadores que vimos al hablar del tema de relaciones y funciones:

- Cuantificador universal: $\forall$ que significa *para todos*
- Cuantificador existencial: $\exists$ que significa *existe* (o sea, para al menos uno)
- Cuantificador de unicidad: $\exists!$ que significa *existe únicamente uno* (o sea, para solamente uno) y es un caso especial del cuantificador existencial

Con esto podemos acercarnos un poco más al ejemplo de los gatos que necesitamos:

Para todo x, si x es un gato, y es de noche, entonces x es pardo.

$$\forall x(Gx \implies Px) \quad \text{o bien } \forall x(G(x) \implies P(x))$$

¿Qué son G y P?

Cuantificadores

Lógica de Primer Orden

Recordemos ahora los cuantificadores que vimos al hablar del tema de relaciones y funciones:

- Cuantificador universal: $\forall$ que significa *para todos*
- Cuantificador existencial: $\exists$ que significa *existe* (o sea, para al menos uno)
- Cuantificador de unicidad: $\exists!$ que significa *existe únicamente uno* (o sea, para solamente uno) y es un caso especial del cuantificador existencial

Con esto podemos acercarnos un poco más al ejemplo de los gatos que necesitamos:

Para todo x, si x es un gato, y es de noche, entonces x es pardo.

$$\forall x(Gx \implies Px) \quad \text{o bien } \forall x(G(x) \implies P(x))$$

¿Qué son G y P?

Cuantificadores

Lógica de Primer Orden

Recordemos ahora los cuantificadores que vimos al hablar del tema de relaciones y funciones:

- Cuantificador universal: $\forall$ que significa *para todos*
- Cuantificador existencial: $\exists$ que significa *existe* (o sea, para al menos uno)
- Cuantificador de unicidad: $\exists!$ que significa *existe únicamente uno* (o sea, para solamente uno) y es un caso especial del cuantificador existencial

Con esto podemos acercarnos un poco más al ejemplo de los gatos que necesitamos:

Para todo x, si x es un gato, y es de noche, entonces x es pardo.

$$\forall x(Gx \implies Px) \quad \text{o bien } \forall x(G(x) \implies P(x))$$

¿Qué son G y P?

Cuantificadores

Lógica de Primer Orden

Recordemos ahora los cuantificadores que vimos al hablar del tema de relaciones y funciones:

- Cuantificador universal: $\forall$ que significa *para todos*
- Cuantificador existencial: $\exists$ que significa *existe* (o sea, para al menos uno)
- Cuantificador de unicidad: $\exists!$ que significa *existe únicamente uno* (o sea, para solamente uno) y es un caso especial del cuantificador existencial

Con esto podemos acercarnos un poco más al ejemplo de los gatos que necesitamos:

Para todo x, si x es un gato, y es de noche, entonces x es pardo.

$$\forall x(Gx \implies Px) \quad \text{o bien } \forall x(G(x) \implies P(x))$$

¿Qué son G y P?

Cuantificadores

Lógica de Primer Orden

Recordemos ahora los cuantificadores que vimos al hablar del tema de relaciones y funciones:

- Cuantificador universal: $\forall$ que significa *para todos*
- Cuantificador existencial: $\exists$ que significa *existe* (o sea, para al menos uno)
- Cuantificador de unicidad: $\exists!$ que significa *existe únicamente uno* (o sea, para solamente uno) y es un caso especial del cuantificador existencial

Con esto podemos acercarnos un poco más al ejemplo de los gatos que necesitamos:

Para todo x, si x es un gato, y es de noche, entonces x es pardo.

$$\forall x(Gx \implies Px) \quad \text{o bien } \forall x(G(x) \implies P(x))$$

¿Qué son G y P?

Cuantificadores

Lógica de Primer Orden

Recordemos ahora los cuantificadores que vimos al hablar del tema de relaciones y funciones:

- Cuantificador universal: $\forall$ que significa *para todos*
- Cuantificador existencial: $\exists$ que significa *existe* (o sea, para al menos uno)
- Cuantificador de unicidad: $\exists!$ que significa *existe únicamente uno* (o sea, para solamente uno) y es un caso especial del cuantificador existencial

Con esto podemos acercarnos un poco más al ejemplo de los gatos que necesitamos:

Para todo x, si x es un gato, y es de noche, entonces x es pardo.

$$\forall x(Gx \implies Px) \quad \text{o bien } \forall x(G(x) \implies P(x))$$

¿Qué son G y P?

La lógica de primer orden (LPO o FOL por sus siglas en inglés) trabaja con **cuantificadores** y **relaciones y funciones** para tener un mayor poder expresivo.

Podemos pensar en el predicado $G(x)$ o Gx como una función unitaria de la forma $G\colon \mathscr{V} \to \mathscr{T}$ donde $\mathscr{V}$ es el conjunto de posibles *variables* en nuestra fórmula, y $\mathscr{T}$ son los posibles valores de verdad de cada una de ellas—cierto, o falso. Bajo ese concepto, entonces $G(x)$ puede pensarse como la función x *es un gato* que puede ser verdadero o falso.
Px significa entonces que x es pardo.

La lógica de primer orden (LPO o FOL por sus siglas en inglés) trabaja con **cuantificadores** y **relaciones y funciones** para tener un mayor poder expresivo.

Podemos pensar en el predicado $G(x)$ o Gx como una función unitaria de la forma $G\colon \mathscr{V} \to \mathscr{T}$ donde $\mathscr{V}$ es el conjunto de posibles *variables* en nuestra fórmula, y $\mathscr{T}$ son los posibles valores de verdad de cada una de ellas—cierto, o falso. Bajo ese concepto, entonces $G(x)$ puede pensarse como la función x *es un gato* que puede ser verdadero o falso.
Px significa entonces que x es pardo.

La lógica de primer orden (LPO o FOL por sus siglas en inglés) trabaja con **cuantificadores** y **relaciones y funciones** para tener un mayor poder expresivo.

Podemos pensar en el predicado $G(x)$ o Gx como una función unitaria de la forma $G\colon \mathscr{V} \to \mathscr{T}$ donde $\mathscr{V}$ es el conjunto de posibles *variables* en nuestra fórmula, y $\mathscr{T}$ son los posibles valores de verdad de cada una de ellas—cierto, o falso. Bajo ese concepto, entonces $G(x)$ puede pensarse como la función x *es un gato* que puede ser verdadero o falso.
Px significa entonces que x es pardo.

Pensemos en otro ejemplo felino: *los $Leones$ y los $Tigres$ son $Peligrosos$*. ¿Cómo expresamos esto en lógica de primer orden?

$\forall x((Lx \vee Tx) \implies Px)$ o bien $\forall x(Lx \implies Px) \wedge \forall x(Tx \implies Px)$ que podemos leer literalmente como

- Para todo x, si x es un león o un tigre, entonces x es peligroso
- Para todo x, si x es un león entonces es peligroso. Y además, para todo x, si x es un tigre entonces es peligroso.

No podríamos agrupar $\forall x(Lx \wedge Tx)$ porque esto significaría que x es un tigre y también un león, y lo que estaríamos diciendo tendría que ser verdad para todos aquellos x que son tigres-leones.

Implicaciones para prácticamente todo

Lógica de Primer Orden

Pensemos en otro ejemplo felino: *los $Leones$ y los $Tigres$ son $Peligrosos$*. ¿Cómo expresamos esto en lógica de primer orden?
$\forall x((Lx \vee Tx) \implies Px)$ o bien $\forall x(Lx \implies Px) \wedge \forall x(Tx \implies Px)$ que podemos leer literalmente como

- Para todo x, si x es un león o un tigre, entonces x es peligroso
- Para todo x, si x es un león entonces es peligroso. Y además, para todo x, si x es un tigre entonces es peligroso.

No podríamos agrupar $\forall x(Lx \wedge Tx)$ porque esto significaría que x es un tigre y también un león, y lo que estaríamos diciendo tendría que ser verdad para todos aquellos x que son tigres-leones.

Pensemos en otro ejemplo felino: *los $Leones$ y los $Tigres$ son $Peligrosos$*. ¿Cómo expresamos esto en lógica de primer orden?
$\forall x((Lx \vee Tx) \implies Px)$ o bien $\forall x(Lx \implies Px) \wedge \forall x(Tx \implies Px)$ que podemos leer literalmente como

- Para todo x, si x es un león o un tigre, entonces x es peligroso
- Para todo x, si x es un león entonces es peligroso. Y además, para todo x, si x es un tigre entonces es peligroso.

No podríamos agrupar $\forall x(Lx \wedge Tx)$ porque esto significaría que x es un tigre y también un león, y lo que estaríamos diciendo tendría que ser verdad para todos aquellos x que son tigres-leones.

Más ejemplos

Lógica de Primer Orden

- *Algunos compositores son poetas* $\Rightarrow \exists x(Cx \land Px)$
- *Todos aman a alguien* $\Rightarrow \forall x \exists y(Lxy)$
- *Existe un número primo menor a 7* $\Rightarrow \exists x(Px \land (x < 7))$

¿Cómo expresaríamos lo siguiente?

- *Todos los hombres hablan más que Charles Chaplin*
- *Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces no es equilátero*

Más ejemplos

Lógica de Primer Orden

- *Algunos compositores son poetas* $\Rightarrow \exists x(Cx \wedge Px)$
- *Todos aman a alguien* $\Rightarrow \forall x \exists y(Lxy)$
- *Existe un número primo menor a 7* $\Rightarrow \exists x(Px \wedge (x < 7))$

¿Cómo expresaríamos lo siguiente?

- *Todos los hombres hablan más que Charles Chaplin*
- *Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces no es equilátero*

Más ejemplos

Lógica de Primer Orden

- *Algunos compositores son poetas* $\Rightarrow \exists x(Cx \wedge Px)$
- *Todos aman a alguien* $\Rightarrow \forall x \exists y(Lxy)$
- *Existe un número primo menor a 7* $\Rightarrow \exists x(Px \wedge (x < 7))$

¿Cómo expresaríamos lo siguiente?

- *Todos los hombres hablan más que Charles Chaplin*
- *Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces no es equilátero*

Más ejemplos

Lógica de Primer Orden

- *Algunos compositores son poetas* $\Rightarrow \exists x(Cx \wedge Px)$
- *Todos aman a alguien* $\Rightarrow \forall x \exists y(Lxy)$
- *Existe un número primo menor a 7* $\Rightarrow \exists x(Px \wedge (x < 7))$

¿Cómo expresaríamos lo siguiente?

- *Todos los hombres hablan más que Charles Chaplin*
- *Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces no es equilátero*

Más ejemplos
Lógica de Primer Orden

- *Algunos compositores son poetas* $\Rightarrow \exists x(Cx \wedge Px)$
- *Todos aman a alguien* $\Rightarrow \forall x \exists y(Lxy)$
- *Existe un número primo menor a 7* $\Rightarrow \exists x(Px \wedge (x < 7))$

¿Cómo expresaríamos lo siguiente?

- *Todos los hombres hablan más que Charles Chaplin*
- *Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces no es equilátero*

Más ejemplos
Lógica de Primer Orden

- *Algunos compositores son poetas* $\Rightarrow \exists x(Cx \wedge Px)$
- *Todos aman a alguien* $\Rightarrow \forall x \exists y(Lxy)$
- *Existe un número primo menor a 7* $\Rightarrow \exists x(Px \wedge (x < 7))$

¿Cómo expresaríamos lo siguiente?

- *Todos los hombres hablan más que Charles Chaplin*
- *Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces no es equilátero*

Más ejemplos

Lógica de Primer Orden

- *Algunos compositores son poetas* $\Rightarrow \exists x(Cx \wedge Px)$
- *Todos aman a alguien* $\Rightarrow \forall x \exists y(Lxy)$
- *Existe un número primo menor a 7* $\Rightarrow \exists x(Px \wedge (x < 7))$

¿Cómo expresaríamos lo siguiente?

- *Todos los hombres hablan más que Charles Chaplin*
- *Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces no es equilátero*

Dualidad de los cuantificadores

Formalización de la lógica

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \land \forall y(\alpha \implies x = y)]$
si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo ...

$$\forall x \neg[\alpha \land \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

...lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \lor \exists y(\neg\alpha)]$$

Dualidad de los cuantificadores

Formalización de la lógica

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$ si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo ...

$$\forall x \neg[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

...lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \vee \exists y(\neg\alpha)]$$

Dualidad de los cuantificadores

Formalización de la lógica

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$ si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo ...

$$\forall x \neg[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

...lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \vee \exists y(\neg\alpha)]$$

Dualidad de los cuantificadores

Formalización de la lógica

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$ si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo . . .

$$\forall x \neg[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

. . . lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \vee \exists y(\neg\alpha)]$$

Dualidad de los cuantificadores

Formalización de la lógica

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \land \forall y(\alpha \implies x = y)]$
si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo ...

$$\forall x \neg[\alpha \land \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

...lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \lor \exists y(\neg\alpha)]$$

Dualidad de los cuantificadores

Formalización de la lógica

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$ si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo ...

$$\forall x \neg[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

...lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \vee \exists y(\neg\alpha)]$$

Dualidad de los cuantificadores

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$
si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo ...

$$\forall x \neg[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

...lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \vee \exists y(\neg\alpha)]$$

Dualidad de los cuantificadores

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$
si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo ...

$$\forall x \neg[\alpha \wedge \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

...lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \vee \exists y(\neg\alpha)]$$

Dualidad de los cuantificadores

Formalización de la lógica

Como el Ying Yang, existe cierta dualidad de los **cuantificadores**

- $\neg\forall x(\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$
- $\neg\exists x(\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$
- $\forall x(\alpha) \equiv \neg\exists x(\neg\alpha)$
- $\exists x(\alpha) \equiv \neg\forall x(\neg\alpha)$

El caso especial $\exists! x(\alpha)$ hace referencia a $\exists x[\alpha \land \forall y(\alpha \implies x = y)]$
si no existe algo que cumpla, significa que para todos no se cumple algo ...

$$\forall x \neg[\alpha \land \forall y(\alpha \implies x = y)]$$

...lo que implica que usando DeMorgan y las reglas de arriba, logramos

$$\forall x[\neg\alpha \lor \exists y(\neg\alpha)]$$

En lógica de primer orden hablamos de fórmulas. Una fórmula A tiene distintos predicados (como Gx) y distintas constantes (como Charles Chaplin). Una interpretación $\mathscr{I}_A$ de A es una tripleta $(D, \{R_1, \ldots, R_m\}, \{d_1, \ldots, d_k\})$ donde

- D es un dominio *no-vacío*
- R_i es una relación n_i-aria sobre D que se asigna al n_i-ario predicado de la fórmula A
- $d_i \in D$ es asignado a la constante a_i.

Por ejemplo, para la fórmula $A = \forall x p(a, x)$, tres de sus posibles interpretaciones pueden ser

$$\mathscr{I}_1 = (\mathbb{N}, \{\leq\}, \{0\}) \quad \mathscr{I}_2 = (\mathbb{N}, \{\geq\}, \{5\}) \quad \mathscr{I}_3 = (\mathbb{Z}, \{\leq\}, \{0\})$$

En lógica de primer orden hablamos de fórmulas. Una fórmula A tiene distintos predicados (como Gx) y distintas constantes (como Charles Chaplin). Una interpretación $\mathscr{I}_A$ de A es una tripleta $(D, \{R_1, \ldots, R_m\}, \{d_1, \ldots, d_k\})$ donde

- D es un dominio *no-vacío*
- R_i es una relación n_i-aria sobre D que se asigna al n_i-ario predicado de la fórmula A
- $d_i \in D$ es asignado a la constante a_i.

Por ejemplo, para la fórmula $A = \forall x p(a, x)$, tres de sus posibles interpretaciones pueden ser

$$\mathscr{I}_1 = (\mathbb{N}, \{\leq\}, \{0\}) \quad \mathscr{I}_2 = (\mathbb{N}, \{\geq\}, \{5\}) \quad \mathscr{I}_3 = (\mathbb{Z}, \{\leq\}, \{0\})$$

En lógica de primer orden hablamos de fórmulas. Una fórmula A tiene distintos predicados (como Gx) y distintas constantes (como Charles Chaplin). Una interpretación $\mathscr{I}_A$ de A es una tripleta $(D, \{R_1, \ldots, R_m\}, \{d_1, \ldots, d_k\})$ donde

- D es un dominio *no-vacío*
- R_i es una relación n_i-aria sobre D que se asigna al n_i-ario predicado de la fórmula A
- $d_i \in D$ es asignado a la constante a_i.

Por ejemplo, para la fórmula $A = \forall x p(a, x)$, tres de sus posibles interpretaciones pueden ser

$$\mathscr{I}_1 = (\mathbb{N}, \{\leq\}, \{0\}) \quad \mathscr{I}_2 = (\mathbb{N}, \{\geq\}, \{5\}) \quad \mathscr{I}_3 = (\mathbb{Z}, \{\leq\}, \{0\})$$

Teniendo una interpretación $\mathscr{I}_A$, podemos tener una asignación $\sigma_{\mathscr{I}_a} : \mathscr{V} \to D$ que mapea toda variable libre $v \in \mathscr{V}$ a un elemento $d \in D$.

Esta asignación tiene distintos valores de verdad, dependiendo de qué variables se utilicen. Este valor de verdad se denota como

$$v_{\sigma_{\mathscr{I}_A}}(A)$$

y se lee como *el valor de verdad de la fórmula A bajo la interpretación $\mathscr{I}_A$ y la asignación $\sigma_{\mathscr{I}_A}$*.

¿Cuántos posibles valores tiene $v_{\sigma_{\mathscr{I}_A}}(A)$?

Teniendo una interpretación $\mathscr{I}_A$, podemos tener una asignación $\sigma_{\mathscr{I}_a} : \mathscr{V} \to D$ que mapea toda variable libre $v \in \mathscr{V}$ a un elemento $d \in D$.
Esta asignación tiene distintos valores de verdad, dependiendo de qué variables se utilicen. Este valor de verdad se denota como

$$v_{\sigma_{\mathscr{I}_A}}(A)$$

y se lee como *el valor de verdad de la fórmula A bajo la interpretación $\mathscr{I}_A$ y la asignación $\sigma_{\mathscr{I}_A}$.*
¿Cuántos posibles valores tiene $v_{\sigma_{\mathscr{I}_A}}(A)$?

Asignaciones y valores de verdad

Formalización de la lógica

Teniendo una interpretación $\mathscr{I}_A$, podemos tener una asignación $\sigma_{\mathscr{I}_a} : \mathscr{V} \to D$ que mapea toda variable libre $v \in \mathscr{V}$ a un elemento $d \in D$.
Esta asignación tiene distintos valores de verdad, dependiendo de qué variables se utilicen. Este valor de verdad se denota como

$$v_{\sigma_{\mathscr{I}_A}}(A)$$

y se lee como *el valor de verdad de la fórmula A bajo la interpretación $\mathscr{I}_A$ y la asignación $\sigma_{\mathscr{I}_A}$*.
¿Cuántos posibles valores tiene $v_{\sigma_{\mathscr{I}_A}}(A)$?

Asignaciones y valores de verdad

Teniendo una interpretación $\mathscr{I}_A$, podemos tener una asignación $\sigma_{\mathscr{I}_a} : \mathscr{V} \to D$ que mapea toda variable libre $v \in \mathscr{V}$ a un elemento $d \in D$.
Esta asignación tiene distintos valores de verdad, dependiendo de qué variables se utilicen. Este valor de verdad se denota como

$$v_{\sigma_{\mathscr{I}_A}}(A)$$

y se lee como *el valor de verdad de la fórmula A bajo la interpretación $\mathscr{I}_A$ y la asignación $\sigma_{\mathscr{I}_A}$*.
¿Cuántos posibles valores tiene $v_{\sigma_{\mathscr{I}_A}}(A)$?

Validez y Factibilidad

Formalización de la lógica

Toda esta información nos da las herramientas necesarias para poder entender la *validez* de una fórmula A de lógica de primer orden:

- A es verdad en $\mathscr{I}$ (o $\mathscr{I}$ es un modelo para A) si y solo si $v_{\mathscr{I}}(A) = T$. La notación que usaremos es $\mathscr{I} \models A$
- A es válida is **para toda** interpretación $\mathscr{I}$, $\mathscr{I} \models A$. La notación que usaremos es $\models A$.
- A es factible (*satisfiable*) si para alguna interpretación $\mathscr{I}$, $\mathscr{I} \models A$.
- A es no factible (*unsatisfiable*) si no es factible (duh) .
- A es falsificable (*falsifiable*) si no es válida.