

# TC1003 – Matemáticas Discretas

## Examen Final

Nombre: \_\_\_\_\_

Matrícula: \_\_\_\_\_

*Lee cuidadosamente y contesta lo que se te pide. Este examen está pensado para resolverse de manera individual y tienes cerca de cinco días para resolverlo.*

*Al momento de contestar, intenta ser lo más explícito posible: se calificará con base en lo que esté escrito, y se considerará el proceso aún cuando la respuesta final esté errada. Recuerda que puedes revisar material de la clase, el libro de texto o tus notas. Buena suerte.*

### 1 Grafos I: propiedades (25% +2)

Considera el siguiente grafo  $G = (V, E)$  no direccionado, que representa las regiones de *Tirn's End* y *Haewark Hamlet* en el segundo cuadrante del Atlas en *Path of Exile: Delirium*, donde

$V = \{\text{Wharf, Strand, Alleyways, Laboratory, Desert, CursedCrypt, Bazaar, Leyline, VaalPyramid, Museum, Temple, PrimordialPool, Waterways, Colonnade, Phantasmagoria, Academy, Conservatory, CastleRuins, Chateau}\}$

y

$E = \{(\text{Wharf, Alleyways}), (\text{Wharf, Laboratory}), (\text{Wharf, Strand}),$   
 $(\text{Strand, PrimordialPool}), (\text{Strand, Temple}),$   
 $(\text{Alleyways, Desert}),$   
 $(\text{Laboratory, Museum}), (\text{Laboratory, VaalPyramid}), (\text{Laboratory, CursedCrypt}),$   
 $(\text{Desert, CursedCrypt}), (\text{Desert, Bazaar}),$   
 $(\text{CursedCrypt, Leyline}),$   
 $(\text{Bazaar, Leyline}),$   
 $(\text{Leyline, Conservatory}),$   
 $(\text{VaalPyramid, Conservatory}), (\text{VaalPyramid, Academy}), (\text{VaalPyramid, Museum}),$   
 $(\text{Museum, Academy}), (\text{Museum, Temple}),$   
 $(\text{Temple, Academy}), (\text{Temple, Phantasmagoria}),$   
 $(\text{PrimordialPool, Phantasmagoria}), (\text{PrimordialPool, Waterways}),$   
 $(\text{Waterways, Colonnade}),$   
 $(\text{Colonnade, Chateau}),$   
 $(\text{Phantasmagoria, Colonnade}), (\text{Phantasmagoria, Academy}),$   
 $(\text{Academy, CastleRuins}),$   
 $(\text{Conservatory, CastleRuins}),$   
 $(\text{CastleRuins, Chateau})\}$

## 1.1 Información básica (12 %)

Considerando que  $v \in V$ , llena la información básica del grafo. Si existe más de un caso para algún inciso, escribe la respuesta como un conjunto.

- a)  $|V| =$
- b)  $|E| =$
- c)  $\max \deg(v) =$
- d)  $\min \deg(v) =$
- e)  $\operatorname{argmax} \deg(v) =$
- f)  $\operatorname{argmin} \deg(v) =$

## 1.2 Representación visual (13 %)

Genera la representación visual del grafo. Se recomienda ampliamente que utilices algún software para ello, pues te ayudará a contestar más fácilmente el resto del examen. Considera la siguiente información adicional que puede serte de ayuda:

- Cada vértice representa un mapa.
- Cada mapa tiene un nivel (de ahora en adelante *Tier*):
  - $T_1 = \{Wharf\}$
  - $T_2 = \{Strand, Alleways, Laboratory, CursedCrypt, Desert\}$
  - $T_3 = \{Waterways, PrimordialPool, Temple, Museum, VaalPyramid, Leyline, Bazaar\}$
  - $T_4 = \{Colonnade, Phantasmagoria, Academy, Conservatory\}$
  - $T_5 = \{Chateau, CastleRuins\}$
- Un mapa sólo puede estar conectado a otros que sean de su mismo *Tier*, o uno más, o uno menos.
- No existen mapas aislados.
- El grafo es *planar*, lo que significa que existe alguna manera de dibujarlo sin que sus ejes se crucen. Si puedes, plásmalo como tal (+2)

## 2 Grafos II: Relaciones y lógica (55 %)

### 2.1 Completando el Atlas (40 %)

El Atlas es un compendio de mapas, y funciona de manera similar a un álbum de estampas coleccionables. Un mapa, al igual que una estampita, tiene dos posibles estados: completo (ya lo tengo) o incompleto (no lo tengo). Por defecto, un mapa empieza incompleto y se completa cuando el mapa ya ha sido explorado. Aquellos mapas que han sido explorados, entran a un conjunto  $C$ , donde se almacenan **todos** los mapas completados. Cuando te encuentras en un mapa  $i$ , existe un conjunto  $D_i$  donde se guardan los mapas que puedes obtener al estar en dicho vértice. Considerando que  $T(i)$  es una función que devuelve el nivel de un mapa, y  $F_i$  es la frontera del mismo, sabemos que un mapa  $d \in D_i$  al cumplirse **cualquiera** de las siguientes reglas:

1.  $d \in C \wedge T(d) \leq T(i) + 2 \implies d \in D_i$

2.  $d \in F_i$

Con esta información, realiza lo siguiente:

- Define por extensión el conjunto  $D_{Temple}$  si has completado todos los mapas de *Tier* 1, 2 y 3 (10 %)
- Considerando que no lo has completado, demuestra o refuta que *Phantasmagoria* es un mapa obtenible estando en *Museum* (10 %)
- Sabiendo que has completado todo el Atlas, demuestra o refuta que  $D_{Conservatory} = D_{PrimordialPool}$  (10 %)
- Si usaras un color para marcar los mapas explorados y otro color para marcar los mapas inexplorados, ¿Es posible colorear el grafo sin que dos mapas adyacentes tengan el mismo color? ¿Por qué? (10 %)

## 2.2 Obteniendo mapas repetidos (7 %)

La obtención de un mapa se da siempre de manera aleatoria, y para fines prácticos, asumimos que la distribución es uniforme: todo mapa  $d \in D_i$  tiene la misma probabilidad de ser obtenido al estar presente en el mapa  $i$ .

Para esto, se generan dos eventos en el siguiente orden:

- Tier roll*: se escoge el *Tier* del mapa que te tocará, considerando los *Tiers* disponibles en el conjunto de mapas obtenibles  $D_i$
- Map roll*: se escoge el mapa específico que te tocará, considerando de los mapas disponibles en  $D_i$  sólo aquellos que sean del *Tier* que se definió en el evento anterior.

Con lo que sabes hasta el momento, y considerando que ya completaste todo el grafo  $G$ , ¿cuál es el mapa que ofrece la mayor probabilidad de obtener algún mapa de *Tier* 2? (*Hint: Puedes calcular la probabilidad de obtener un mapa Tier 2 con la división  $\frac{m}{n}$  donde  $m = |\{x : x \in D_i, T(x) = 2\}|$ , y  $n = |D_i|$ .*)

*Hint 2: Puedes ignorar el Tier roll dado a que ya completaste todo el Atlas* (7 %)

## 2.3 Borrando el progreso del Atlas (8 %)

Existen maneras de *borrar* el progreso del Atlas, de tal modo que algunos mapas dejan de estar completos y vuelven a marcarse como incompletos. Esto tiene repercusiones sobre el conjunto de mapas completados  $C$ , y por tanto sobre el conjunto de mapas obtenibles  $D_i$  para cada mapa  $i$ . Es en casos como estos en donde el *Tier roll* entra en efecto: primero se selecciona un *Tier* de los disponibles en  $D_i$ , y luego un mapa de dicho *Tier* de los disponibles en  $D_i$ .

Conociendo esta información, y considerando que tienes el Atlas completo, ¿qué mapas deberías borrar para obtener **mayor probabilidad** de conseguir un *Alleyways* si estoy en *Alleyways*? (8 %)

### 3 Grafos III: Caminatas, Caminos y Ciclos (20 % )

#### 3.1 Conqueror Influence (20 %)

De vez en cuando, un *Conqueror* puede ejercer cierta influencia sobre el Atlas, agregando tropas para defender su territorio. Para ello, hay que explorar tres mapas adyacentes distintos, sin repetir el mapa pasado. Esto significa que

*Phantasmagoria, Temple, Academy*

es una secuencia válida, pero

*Wharf, Strand, Wharf*

no lo es.

Una vez que el *Conqueror* ejerce influencia sobre el Atlas, podemos explorar cinco mapas adyacentes distintos, sin repetir el mapa pasado, para enfrentarlo y quitarle dicho territorio. Esto significa que

*Colonnade, Phantasmagoria, PrimordialPool, Waterways, Colonnade*

es una secuencia válida, pero

*Strand, PrimordialPool, Phantasmagoria, PrimordialPool, Strand*

no lo es.

- a) Propón otras dos secuencias válidas para atraer la influencia de un *Conqueror*, considerando que borraste todos los mapas de *Tiers* 3, 4 y 5 (10 %)
- b) Considerando el caso de que hayas borrado todos los mapas de *Tier* 1, 2 y 5, propón otras dos secuencias válidas para enfrentar al *Conqueror* y quitarle el territorio.

De acuerdo con el Código de Ética del Tecnológico de Monterrey, mi desempeño en esta actividad estará guiado por la integridad académica.