Comparando y asociando: relaciones y funciones

Matemáticas Discretas
(TC1003)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx

Outline

Tuplas

Relaciones

Una tupla es una estructura matemática **de tamaño definido** y donde **el orden importa**.

Ejemplo de tupla

$$(1,2),(2,3),(3,5)$$

¿Cuál es el conjunto de celdas de un tablero de *Battleship* si las casillas van de la $A-J$ y del $1-10$?

Tuplas

Relaciones

Una tupla es una estructura matemática **de tamaño definido** y donde **el orden importa**.

Ejemplo de tupla

$$(1, 2), (2, 3), (3, 5)$$

¿Cuál es el conjunto de celdas de un tablero de *Battleship* si las casillas van de la $A - J$ y del $1 - 10$?

Tuplas

Relaciones

Una tupla es una estructura matemática **de tamaño definido** y donde **el orden importa**.

Ejemplo de tupla

$$(1, 2), (2, 3), (3, 5)$$

¿Cuál es el conjunto de celdas de un tablero de *Battleship* si las casillas van de la $A - J$ y del $1 - 10$?

Producto Cartesiano

Relaciones

El producto Cartesiano es el **conjunto** de todos los posibles valores que se pueden formar a partir de la combinación de dos conjuntos, de la siguiente manera:

Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

El conjunto de las casillas de un tablero de *Battleship* es claramente el producto Cartesiano del conjunto de sus renglones y sus columnas.

Producto Cartesiano

Relaciones

El producto Cartesiano es el **conjunto** de todos los posibles valores que se pueden formar a partir de la combinación de dos conjuntos, de la siguiente manera:

Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

El conjunto de las casillas de un tablero de *Battleship* es claramente el producto Cartesiano del conjunto de sus renglones y sus columnas.

Producto Cartesiano

Relaciones

El producto Cartesiano es el **conjunto** de todos los posibles valores que se pueden formar a partir de la combinación de dos conjuntos, de la siguiente manera:

Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

El conjunto de las casillas de un tablero de *Battleship* es claramente el producto Cartesiano del conjunto de sus renglones y sus columnas.

Definición de Relación

Relaciones

Una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B?

Una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B?

Definición de Relación

Relaciones

Una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B?

Definición de Relación

Una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B?

Definición de Relación

Una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B?

Una relación entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B?

Claramente, las relaciones aplican *para algunos Skywalker* y no para todos. Sin embargo, también tenemos relaciones que podrían aplicar *a todos*.

Cuantificadores

- $\forall$ que significa *para todos*
- $\exists$ que significa *existe*
- $\exists!$ que significa *existe un único*

Puedes agregarle negación frente a cada uno para cambiar el significado a lo contrario. ¿Qué significa la negación de cada uno de ellos?

Claramente, las relaciones aplican *para algunos Skywalker* y no para todos. Sin embargo, también tenemos relaciones que podrían aplicar *a todos*.

Cuantificadores

- $\forall$ que significa *para todos*
- $\exists$ que significa *existe*
- $\exists!$ que significa *existe un único*

Puedes agregarle negación frente a cada uno para cambiar el significado a lo contrario. ¿Qué significa la negación de cada uno de ellos?

Claramente, las relaciones aplican *para algunos Skywalker* y no para todos. Sin embargo, también tenemos relaciones que podrían aplicar *a todos*.

Cuantificadores

- $\forall$ que significa *para todos*
- $\exists$ que significa *existe*
- $\exists!$ que significa *existe un único*

Puedes agregarle negación frente a cada uno para cambiar el significado a lo contrario. ¿Qué significa la negación de cada uno de ellos?

Claramente, las relaciones aplican *para algunos Skywalker* y no para todos. Sin embargo, también tenemos relaciones que podrían aplicar *a todos*.

Cuantificadores

- $\forall$ que significa *para todos*
- $\exists$ que significa *existe*
- $\exists!$ que significa *existe un único*

Puedes agregarle negación frente a cada uno para cambiar el significado a lo contrario. ¿Qué significa la negación de cada uno de ellos?

Relaciones inversas

Relaciones

La inversa R^-1 de una relación R es … R al revés.

Relación inversa

Una relación inversa es cualquier relación R^{-1} tal que

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

- Piensa en A como el conjunto de *Los Skywalker*
- ¿Puedes hacer una relación de parentezco R sobre A^2?
- ¿Cuál sería la relación inversa?

Relaciones inversas

Relaciones

La inversa R^-1 de una relación R es … R al revés.

Relación inversa

Una relación inversa es cualquier relación R^{-1} tal que

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

- Piensa en A como el conjunto de *Los Skywalker*
- ¿Puedes hacer una relación de parentezco R sobre A^2?
- ¿Cuál sería la relación inversa?

La inversa R^-1 de una relación R es ... R al revés.

Relación inversa

Una relación inversa es cualquier relación R^{-1} tal que

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

- Piensa en A como el conjunto de *Los Skywalker*
- ¿Puedes hacer una relación de parentezco R sobre A^2?
- ¿Cuál sería la relación inversa?

Relaciones inversas

Relaciones

La inversa R^-1 de una relación R es ... R al revés.

Relación inversa

Una relación inversa es cualquier relación R^{-1} tal que

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

- Piensa en A como el conjunto de *Los Skywalker*
- ¿Puedes hacer una relación de parentezco R sobre A^2?
- ¿Cuál sería la relación inversa?

La imagen de una relación R (usualmente denotada por I) es el conjunto de todos aquellos elementos b, es decir...

Imagen

$$I(R) = \{b : (a, b) \in R\}$$

¿Cuál es la imagen en la relación $Padre$ en *Los Skywalker*?

La imagen de una relación R (usualmente denotada por I) es el conjunto de todos aquellos elementos b, es decir...

Imagen

$$I(R) = \{b : (a, b) \in R\}$$

¿Cuál es la imagen en la relación $Padre$ en *Los Skywalker*?

Imagen de una relación

Operaciones

La imagen de una relación R (usualmente denotada por I) es el conjunto de todos aquellos elementos b, es decir...

Imagen

$$I(R) = \{b : (a,b) \in R\}$$

¿Cuál es la imagen en la relación $Padre$ en *Los Skywalker*?

Reflexividad

Propiedades de las relaciones

Reflexividad

R es reflexiva si y sólo si $\forall a \in A\, (\exists (a, a) \in R)$

- Piensa en un ejemplo de una relación reflexiva *(Hint: piensa en números)*
- Lo opuesto a la reflexividad es la **irreflexividad**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni reflexiva ni irreflexiva

Reflexividad

Propiedades de las relaciones

Reflexividad

R es reflexiva si y sólo si $\forall a \in A\,(\exists (a,a) \in R)$

- Piensa en un ejemplo de una relación reflexiva *(Hint: piensa en números)*
- Lo opuesto a la reflexividad es la **irreflexividad**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni reflexiva ni irreflexiva

Transitividad

Propiedades de las relaciones

Transitividad

R es transitiva si y sólo si

$$\forall (a,b) \in R\,((a,b) \in R \land (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

- Piensa en un ejemplo de relación transitiva
- Lo opuesto a la transitividad es la **intransitividad**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni transitiva ni intransitiva

Transitividad

Propiedades de las relaciones

Transitividad

R es transitiva si y sólo si

$$\forall(a,b) \in R\,((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

- Piensa en un ejemplo de relación transitiva
- Lo opuesto a la transitividad es la **intransitividad**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni transitiva ni intransitiva

Simetría

R es simétrica si y solo si

$$\forall (a,b) \in R\,((a,b) \in R \implies (b,a) \in R)$$

- Piensa en un ejemplo de relación simétrica
- Lo opuesto a la simetría es la **asimetría**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni simétrica ni asimétrica

Simetría

Propiedades de las relaciones

Simetría

R es simétrica si y solo si

$$\forall (a,b) \in R\, ((a,b) \in R \implies (b,a) \in R)$$

- Piensa en un ejemplo de relación simétrica
- Lo opuesto a la simetría es la **asimetría**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni simétrica ni asimétrica

Relaciones de equivalencia

Propiedades de las relaciones

Equivalencia

Una relación R es equivalente si es **reflexiva**, **transitiva** y **simétrica**.

¿Habías pensado que el $=$ es un operador que relaciona dos números de manera *equivalente*?

Equivalencia

Una relación R es equivalente si es **reflexiva**, **transitiva** y **simétrica**.

¿Habías pensado que el $=$ es un operador que relaciona dos números de manera *equivalente*?

Partición

Una partición de A es cualquier conjunto $B_{i \in I}$ de subconjuntos de A que:

- No están vacíos
- Son disjuntos entre sí
- La unión generalizada de ellos cubre totalmente a A

Una *repartición* de dulces a un conjunto de bolsas es justamente una partición del conjunto de dulces.

Una partición de A es cualquier conjunto $B_{i \in I}$ de subconjuntos de A que:

- No están vacíos
- Son disjuntos entre sí
- La unión generalizada de ellos cubre totalmente a A

Una *repartición* de dulces a un conjunto de bolsas es justamente una partición del conjunto de dulces.

Antisimetría

Antisimetría

Una relación es antisimétrica si y solo si

$$\forall (a,b) \in R\,((a,b) \in R \implies (b,a) \notin R)$$

A una relación que es **reflexiva**, **transitiva** y **antisimétrica** se le conoce como orden parcial, o *poset*.

Antisimetría

Una relación es antisimétrica si y solo si

$$\forall (a,b) \in R\,((a,b) \in R \implies (b,a) \notin R)$$

A una relación que es **reflexiva**, **transitiva** y **antisimétrica** se le conoce como orden parcial, o *poset*.

Completez en una reflexión

Una relación **reflexiva** es completa si y solo si

$$\forall (a,b) \in A\,((a,b) \in R \vee (b,a) \in R)$$

Cuando un *poset* es completo (o lineal), se le conoce como orden total.

$$\leq \quad \text{vs} \quad <$$

Orden total

Completez en una reflexión

Una relación **reflexiva** es completa si y solo si

$$\forall (a,b) \in A\,((a,b) \in R \vee (b,a) \in R)$$

Cuando un *poset* es completo (o lineal), se le conoce como orden total.

$\leq$ vs $<$

Orden total

Partición, Órdenes y Cerraduras

Completez en una reflexión

Una relación **reflexiva** es completa si y solo si

$$\forall (a, b) \in A\,((a, b) \in R \vee (b, a) \in R)$$

Cuando un *poset* es completo (o lineal), se le conoce como orden total.

$$\leq \text{ vs } <$$

La cerradura (*closure* en inglés) de A bajo la relación R (denotada por $R[A]$) es un **conjunto** del tamaño mínimo necesario para cumplir con la aplicación de R a cada elemento de A, y tal que $A \subseteq R[A]$ ...

Ejemplo de cerradura

- **Q**: ¿Cuál es la **cerradura transitiva** de $A = \{(2,3),(3,4),(1,2),(3,1),(1,7),(7,8)\}$?
- **A**:

$$A = \{(2,3),(3,4),(1,2),(3,1),(1,7),(7,8),\\ (2,4),(1,3),(3,2),(1,8),(1,4),(1,1),(3,3)\}$$

La cerradura (*closure* en inglés) de A bajo la relación R (denotada por $R[A]$) es un **conjunto** del tamaño mínimo necesario para cumplir con la aplicación de R a cada elemento de A, y tal que $A \subseteq R[A]$ ...

Ejemplo de cerradura

- **Q**: ¿Cuál es la **cerradura transitiva** de $A = \{(2,3),(3,4),(1,2),(3,1),(1,7),(7,8)\}$?
- **A**:

$$\begin{aligned} A = \{&(2,3),(3,4),(1,2),(3,1),(1,7),(7,8),\\ &(2,4),(1,3),(3,2),(1,8),(1,4),(1,1),(3,3)\} \end{aligned}$$

Unión e intersección generalizada

Cerraduras

¿Cómo hacemos la cerradura transitiva de una relación R si empezamos desde A?

Unión generalizada

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$$

Intersección generalizada

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_0 \cap A_1 \cap \ldots A_n$$

Story time: intro a recursión

Unión e intersección generalizada

Cerraduras

¿Cómo hacemos la cerradura transitiva de una relación R si empezamos desde A?

Unión generalizada

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$$

Intersección generalizada

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_0 \cap A_1 \cap \ldots A_n$$

Story time: intro a recursión

Unión e intersección generalizada

Cerraduras

¿Cómo hacemos la cerradura transitiva de una relación R si empezamos desde A?

Unión generalizada

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$$

Intersección generalizada

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_0 \cap A_1 \cap \ldots A_n$$

Story time: intro a recursión

Definición de función

Funciones

Función

Una función f de A a B (la podemos denotar como $f : A \to B$ es una **relación** sobre $A \times B$ de tal manera que

$$\forall a \in A (\exists! b \in B)$$

Llamamos dominio al conjunto A de donde salen los *inputs*, y rango al conjunto B de donde salen los *outputs*.

Definición de función

Funciones

Función

Una función f de A a B (la podemos denotar como $f : A \to B$ es una **relación** sobre $A \times B$ de tal manera que

$$\forall a \in A(\exists! b \in B)$$

Llamamos dominio al conjunto A de donde salen los *inputs*, y rango al conjunto B de donde salen los *outputs*.

Definición de función

Funciones

Las funciones también suelen ser conocidas como *mapeos*, y la idea es *asociar* una cosa con la otra.

- ¿Qué ejemplos de funciones se te ocurren?
- Piensa en A como *Los Skywalker* y B como los *lightsabers* de cada uno.
- ¿Puedes hacer una asociación entre ellos?
- ¿Es esto una función?

Cuando una función utiliza **todos** los elementos de su rango, entonces se dice que es una función completa. Si no lo hace, entonces es una función parcial.

Definición de función

Funciones

Las funciones también suelen ser conocidas como *mapeos*, y la idea es *asociar* una cosa con la otra.

- ¿Qué ejemplos de funciones se te ocurren?
- Piensa en A como *Los Skywalker* y B como los *lightsabers* de cada uno.
- ¿Puedes hacer una asociación entre ellos?
- ¿Es esto una función?

Cuando una función utiliza **todos** los elementos de su rango, entonces se dice que es una función completa. Si no lo hace, entonces es una función parcial.

Definición de función

Funciones

Las funciones también suelen ser conocidas como *mapeos*, y la idea es *asociar* una cosa con la otra.

- ¿Qué ejemplos de funciones se te ocurren?
- Piensa en A como *Los Skywalker* y B como los *lightsabers* de cada uno.
- ¿Puedes hacer una asociación entre ellos?
- ¿Es esto una función?

Cuando una función utiliza **todos** los elementos de su rango, entonces se dice que es una función completa. Si no lo hace, entonces es una función parcial.

Definición de función

Funciones

Las funciones también suelen ser conocidas como *mapeos*, y la idea es *asociar* una cosa con la otra.

- ¿Qué ejemplos de funciones se te ocurren?
- Piensa en A como *Los Skywalker* y B como los *lightsabers* de cada uno.
- ¿Puedes hacer una asociación entre ellos?
- ¿Es esto una función?

Cuando una función utiliza **todos** los elementos de su rango, entonces se dice que es una función completa. Si no lo hace, entonces es una función parcial.

Definición de función

Funciones

Las funciones también suelen ser conocidas como *mapeos*, y la idea es *asociar* una cosa con la otra.

- ¿Qué ejemplos de funciones se te ocurren?
- Piensa en A como *Los Skywalker* y B como los *lightsabers* de cada uno.
- ¿Puedes hacer una asociación entre ellos?
- ¿Es esto una función?

Cuando una función utiliza **todos** los elementos de su rango, entonces se dice que es una función completa. Si no lo hace, entonces es una función parcial.

Definición de función

Funciones

Las funciones también suelen ser conocidas como *mapeos*, y la idea es *asociar* una cosa con la otra.

- ¿Qué ejemplos de funciones se te ocurren?
- Piensa en A como *Los Skywalker* y B como los *lightsabers* de cada uno.
- ¿Puedes hacer una asociación entre ellos?
- ¿Es esto una función?

Cuando una función utiliza **todos** los elementos de su rango, entonces se dice que es una función completa. Si no lo hace, entonces es una función parcial.

Composición
Operaciones

Composición

Sean f y g dos funciones sobre X, donde $x \in X$. La composición de funciones se denota

$$f \circ g$$

que significa que f *compone a* g, y es un sinónimo de

$$f(g(x))$$

Story time: S-expressions

Funciones Inyectivas

Propiedades de las funciones

NotImplemented

Funciones Sobreyectivas

Propiedades de las funciones

NotImplemented

Funciones Biyectivas

Propiedades de las funciones

NotImplemented

Equipotencia

Funciones

NotImplemented

El principio del palomar

Funciones

NotImplemented