

Expansiones a la lógica: Lógica de Primer Orden e Inferencia

Matemáticas Discretas
(TC1003)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx



Outline

- 1 El proceso de inferencia
- 2 Reglas de Inferencia
- 3 Haciendo nuevas reglas
- 4 Introducción a la Prueba Matemática

Constructos

Inferencia

Ya sabemos *construir* oraciones lógicas. El siguiente paso ahora es **operar** con estas oraciones usando un vocabulario propio de la inferencia:

- Premisa
- Conclusión
- Teorema
- Prueba
- Axioma
- Sistema de deducción

Constructos

Inferencia

Ya sabemos *construir* oraciones lógicas. El siguiente paso ahora es **operar** con estas oraciones usando un vocabulario propio de la inferencia:

- Premisa
- Conclusión
- Teorema
- Prueba
- Axioma
- Sistema de deducción

Constructos

Inferencia

Ya sabemos *construir* oraciones lógicas. El siguiente paso ahora es **operar** con estas oraciones usando un vocabulario propio de la inferencia:

- Premisa
- Conclusión
- Teorema
- Prueba
- Axioma
- Sistema de deducción

Constructos

Inferencia

Ya sabemos *construir* oraciones lógicas. El siguiente paso ahora es **operar** con estas oraciones usando un vocabulario propio de la inferencia:

- Premisa
- Conclusión
- Teorema
- Prueba
- Axioma
- Sistema de deducción

Constructos

Inferencia

Ya sabemos *construir* oraciones lógicas. El siguiente paso ahora es **operar** con estas oraciones usando un vocabulario propio de la inferencia:

- Premisa
- Conclusión
- Teorema
- Prueba
- Axioma
- Sistema de deducción

Constructos

Inferencia

Ya sabemos *construir* oraciones lógicas. El siguiente paso ahora es **operar** con estas oraciones usando un vocabulario propio de la inferencia:

- Premisa
- Conclusión
- Teorema
- Prueba
- Axioma
- Sistema de deducción

Sistema de deducción

Inferencia

Definición

Un **sistema deductivo** es un conjunto de fórmulas llamados **axiomas** y una serie de **reglas de inferencia**.

- **Axiomas**: fórmulas que se asume que son ciertas desde el principio—hechos. Son la base de todas las demás reglas.
- **Reglas de inferencia**: fórmulas que ayudan a generar nuevas reglas a partir de los axiomas.

Sistema de deducción

Inferencia

Definición

Un **sistema deductivo** es un conjunto de fórmulas llamados **axiomas** y una serie de **reglas de inferencia**.

- **Axiomas**: fórmulas que se asume que son ciertas desde el principio—hechos. Son la base de todas las demás reglas.
- **Reglas de inferencia**: fórmulas que ayudan a generar nuevas reglas a partir de los axiomas.

Sistema de deducción

Inferencia

Definición

Un **sistema deductivo** es un conjunto de fórmulas llamados **axiomas** y una serie de **reglas de inferencia**.

- **Axiomas**: fórmulas que se asume que son ciertas desde el principio—hechos. Son la base de todas las demás reglas.
- **Reglas de inferencia**: fórmulas que ayudan a generar nuevas reglas a partir de los axiomas.

Prueba

Inferencia

Definición

Una **prueba** en un **sistema deductivo** es una secuencia de fórmulas $S = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ de tal modo que cada fórmula A_i es o un **axioma** o puede ser inferida usando fórmulas previas $A_{j_1} \dots, A_{j_k}$ donde $j_1 < \dots < j_k < i$, usando una **regla de inferencia**.

- Para A_n , la última de las fórmulas en la secuencia S , decimos que A_n es un **teorema**.
- La secuencia S es una prueba de A_n .
- A_n es *demostrable*, denotado como $\vdash A_n$.
- Si $\vdash A$, entonces A puede usarse como **axioma** en una prueba subsecuente.

Prueba

Inferencia

Definición

Una **prueba** en un **sistema deductivo** es una secuencia de fórmulas $S = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ de tal modo que cada fórmula A_i es o un **axioma** o puede ser inferida usando fórmulas previas $A_{j_1} \dots, A_{j_k}$ donde $j_1 < \dots < j_k < i$, usando una **regla de inferencia**.

- Para A_n , la última de las fórmulas en la secuencia S , decimos que A_n es un **teorema**.
- La secuencia S es una **prueba** de A_n .
- A_n es *demostrable*, denotado como $\vdash A_n$
- Si $\vdash A$, entonces A puede usarse como **axioma** en una prueba subsecuente.

Prueba

Inferencia

Definición

Una **prueba** en un **sistema deductivo** es una secuencia de fórmulas $S = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ de tal modo que cada fórmula A_i es o un **axioma** o puede ser inferida usando fórmulas previas $A_{j_1} \dots, A_{j_k}$ donde $j_1 < \dots < j_k < i$, usando una **regla de inferencia**.

- Para A_n , la última de las fórmulas en la secuencia S , decimos que A_n es un **teorema**.
- La secuencia S es una **prueba** de A_n .
- A_n es *demostrable*, denotado como $\vdash A_n$
- Si $\vdash A$, entonces A puede usarse como **axioma** en una prueba subsecuente.

Prueba

Inferencia

Definición

Una **prueba** en un **sistema deductivo** es una secuencia de fórmulas $S = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ de tal modo que cada fórmula A_i es o un **axioma** o puede ser inferida usando fórmulas previas $A_{j_1} \dots, A_{j_k}$ donde $j_1 < \dots < j_k < i$, usando una **regla de inferencia**.

- Para A_n , la última de las fórmulas en la secuencia S , decimos que A_n es un **teorema**.
- La secuencia S es una **prueba** de A_n .
- A_n es *demostrable*, denotado como $\vdash A_n$
- Si $\vdash A$, entonces A puede usarse como **axioma** en una prueba subsecuente.

Prueba

Inferencia

Definición

Una **prueba** en un **sistema deductivo** es una secuencia de fórmulas $S = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ de tal modo que cada fórmula A_i es o un **axioma** o puede ser inferida usando fórmulas previas $A_{j_1} \dots, A_{j_k}$ donde $j_1 < \dots < j_k < i$, usando una **regla de inferencia**.

- Para A_n , la última de las fórmulas en la secuencia S , decimos que A_n es un **teorema**.
- La secuencia S es una **prueba** de A_n .
- A_n es *demostrable*, denotado como $\vdash A_n$
- Si $\vdash A$, entonces A puede usarse como **axioma** en una prueba subsecuente.

El proceso de inferencia

Inferencia

Usando ciertas **fórmulas** de nuestro sistema de deducción, podemos llegar a alguna **conclusión**.

Estas fórmulas que usamos para llegar a la conclusión son conocidas como **premisas**, y a la *verdad* a la que llegamos se le llama conclusión.

Podemos decir prácticamente que lo que concluimos es la conclusión, pero suena un poco redundante. . .

El proceso de inferencia

Inferencia

Usando ciertas **fórmulas** de nuestro sistema de deducción, podemos llegar a alguna **conclusión**.

Estas fórmulas que usamos para llegar a la conclusión son conocidas como **premisas**, y a la *verdad* a la que llegamos se le llama conclusión.

Podemos decir prácticamente que lo que concluimos es la conclusión, pero suena un poco redundante. . .

Modus Ponens

Reglas de Inferencia

Ejemplo

Díjole Esther a Edith: Si comes tus verduras, entonces puedes comerte una galleta de postre. Acto seguido, Edith se comió sus verduras sin pensarlo dos veces.

- Sabemos que **Si** Edith se come sus verduras, **entonces** puede comer una galleta de postre
- Sabemos que Edith se comió sus verduras.

Podemos entonces **deducir** que Edith puede comerse una galleta de postre.

Definición de Modus Ponens

$$\text{MP: } \frac{P \implies Q \quad P}{Q}$$

Modus Tollens

Reglas de Inferencia

Mismo ejemplo

- Sabemos que **Si** Edith se come sus verduras, **entonces** puede comer una galleta de postre
- Sabemos que Edith **NO** tuvo autorización de comerse una galleta de postre

Podemos entonces deducir que Edith no se comió sus verduras.

Definición de Modus Tollens

$$\frac{P \implies Q \quad \neg Q}{\neg P}$$

Resolución

Reglas de inferencia

Ejemplo

Sospecho que Pedro o Gabriel se comieron el Gansito que dejé en el refri. Sin embargo, Pedro estaba en CDMX cuando el Gansito desapareció. Alfredo abrió el refri un par de veces el día que desapareció el Gansito.

- Sabemos que Pedro o Gabriel pudieron haberse comido el Gansito.
- Pedro no fue.
- Alfredo pudo haber sido.
- Pedro no fue o bien fue Alfredo.

Puedo deducir entonces que Gabriel o Alfredo pudieron haberse comido el Gansito.

Definición de Resolución

$$\text{Re: } \frac{\frac{P \vee Q}{\neg P \vee R}}{Q \vee R}$$

Recogiendo Fresas

Haciendo nuevas Reglas

Lo que sabemos:

Si está soleado y cálido, entonces disfruto. Si está cálido y agradable, entonces recojo fresas. Si está lloviendo, no recojo fresas. Si está lloviendo, entonces me mojo. Está cálido. Está lloviendo. Está soleado.

Lo que queremos probar:

- *No voy a recoger fresas*
- *Voy a disfrutar*
- *Me voy a mojar*

¿Qué proceso debemos seguir?

Recogiendo Fresas

Haciendo nuevas Reglas

Lo que sabemos:

Si está soleado y cálido, entonces disfruto. Si está cálido y agradable, entonces recojo fresas. Si está lloviendo, no recojo fresas. Si está lloviendo, entonces me mojo. Está cálido. Está lloviendo. Está soleado.

Lo que queremos probar:

- *No voy a recoger fresas*
- *Voy a disfrutar*
- *Me voy a mojar*

¿Qué proceso debemos seguir?

Recogiendo Fresas

Haciendo nuevas Reglas

Lo que sabemos:

Si está soleado y cálido, entonces disfruto. Si está cálido y agradable, entonces recojo fresas. Si está lloviendo, no recojo fresas. Si está lloviendo, entonces me mojo. Está cálido. Está lloviendo. Está soleado.

Lo que queremos probar:

- *No voy a recoger fresas*
- *Voy a disfrutar*
- *Me voy a mojar*

¿Qué proceso debemos seguir?

Recogiendo Fresas II

Haciendo nuevas reglas

- 1 Establecer vocabulario
- 2 Convertir todo a ORs y ANDs (**Forma Normal Conjuntiva**)
- 3 Negar la conclusión e incluirla en la base de conocimiento
- 4 Usando resolución, intentar llegar a una fórmula vacía.

Algunos métodos de prueba

Introducción a la prueba matemática

- Contradicción: lo contrario a lo que quiero probar me lleva a una fórmula no factible.
- Tablas de verdad: si dos columnas son iguales, son equivalentes.
- Inferencia/Deducción: si llego al final usando reglas de inferencia válidas.
- Sustitución: si llego de una fórmula a otra equivalente usando equivalencias.