Teoría de Grafos

Matemáticas Discretas
(TC1003)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx

Tecnológico de Monterrey

Outline

Teoría de Grafos

Introducción

Un grafo es una **estructura matemática** ordenada que, como otras estructuras de datos, son representaciones de algún objeto con características dadas.

Definición formal

Un grafo G es una **tupla** $G = (V, E)$, donde V es un **conjunto** de vértices (o **nodos**) y E es un conjunto de ejes (o **conexiones**).

Un grafo es una **estructura matemática** ordenada que, como otras estructuras de datos, son representaciones de algún objeto con características dadas.

Definición formal

Un grafo G es una **tupla** $G = (V, E)$, donde V es un **conjunto** de vértices (o **nodos**) y E es un conjunto de ejes (o **conexiones**).

Un grafo es una **estructura matemática** ordenada que, como otras estructuras de datos, son representaciones de algún objeto con características dadas.

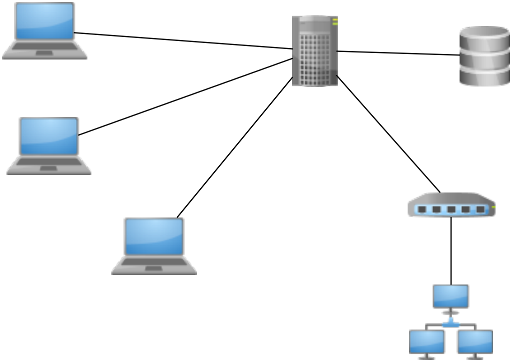
Definición formal

Un grafo G es una **tupla** $G = (V, E)$, donde V es un **conjunto** de vértices (o **nodos**) y E es un conjunto de ejes (o **conexiones**).

Story time:
Los puentes de Konisberg

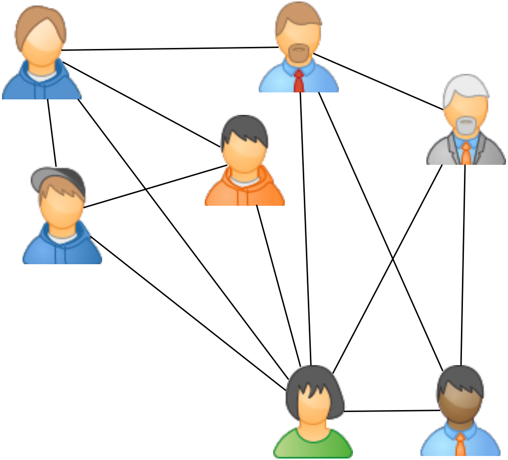
Redes Computacionales

Aplicaciones



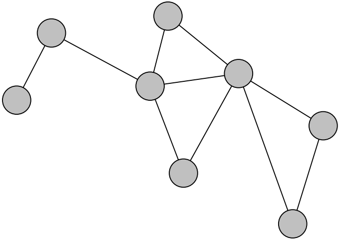
Redes Sociales

Aplicaciones



O sea, relaciones

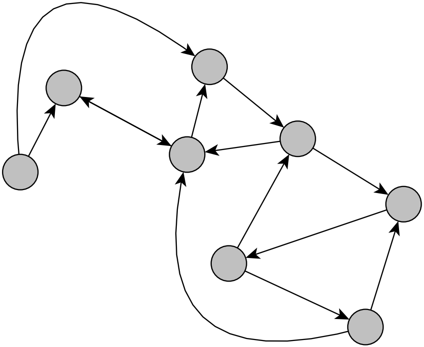
Aplicaciones



- Locaciones
- Personas
- Variables
- Números
- Estados
- Conjuntos

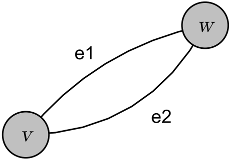
Relaciones no necesariamente bidireccionales

Aplicaciones



Cuando un **grafo** tiene ejes con dirección, se le conoce como grafo direccionado o **digrafo**.

Vocabulario



Extremos y paralelos

- Dos vértices v y w son **extremos** de los ejes e_1 y e_2
- Los ejes e_1 y e_2 son **paralelos** (porque conectan los mismos nodos)

Esto nos sugiere la idea de una función $f : V \to V$ para *generar* el conjunto de **ejes** E.

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

---

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

---

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

---

Casi nada en `alert` **y casi todo en** `textbf` **porque no espero se aprendan todo esto**

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

---

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

---

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

Casi nada en alert y casi todo en textbf porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

---

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Oh god más vocabulario

- Un eje de la forma (v, v) es un **ciclo**
- Se dice que un grafo es **simple** si no tiene **ejes paralelos** o **ciclos**
- Un grafo en el que $E = \emptyset$ es un grafo **vacío**
- Un grafo en el que $E = V = \emptyset$ es un grafo **nulo**
- Un grafo en el que $|V| = 1$ es un grafo **trivial**
- Dos **ejes** son adyacentes si **comparten** un **vértice**
- Dos **vértices** u y v son adyacentes si existe un **eje** (u, v) o (v, u)
- El grado de un vértice v, $deg(v)$, es el número de ejes donde v es un extremo (los ciclos cuentan doble)
- Un vértice v es **pendiente** si $deg(v) = 1$
- Un vértice v está **aislado** si $deg(v) = 0$
- El vecindario de un vértice v es el **conjunto de vértices adyacentes** de v

---

Casi nada en `alert` y casi todo en `textbf` porque no espero se aprendan todo esto

Walks, Trails, Paths, Circuits, Components...
pls stop

- Una caminata (*walk*) es una secuencia de nodos y ejes alternados: saliendo de un nodo **inicial** v_{i_0} y llegando a un nodo **final** v_{i_k}
- Dos **vértices** están conectados si existe una caminata entre ellos
- Una **caminata** es **abierta** si $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, o **cerrada** si $v_{i_0} = v_{i_k}$
- Un **sendero** (*trail*) es una caminata en donde cada eje visitado se recorre una sola vez.
- Un **sendero** es un **camino** (*path*) si cualquier vértice es visitado a una sola vez, a excepción del inicial y el final.
- Un **camino** cerrado es un circuito (o ciclo[1])
- Un grafo es completo si todos los vértices están conectados al resto. También se le conoce como **grafo conectado**

[1] Total BS, yo sé. Lo siento; así es esto.

Walks, Trails, Paths, Circuits, Components...

pls stop

- Una caminata (*walk*) es una secuencia de nodos y ejes alternados: saliendo de un nodo **inicial** v_{i_0} y llegando a un nodo **final** v_{i_k}
- Dos **vértices** están conectados si existe una caminata entre ellos
- Una **caminata** es **abierta** si $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, o **cerrada** si $v_{i_0} = v_{i_k}$
- Un **sendero** (*trail*) es una caminata en donde cada eje visitado se recorre una sola vez.
- Un **sendero** es un **camino** (*path*) si cualquier vértice es visitado a una sola vez, a excepción del inicial y el final.
- Un **camino** cerrado es un circuito (o ciclo[1])
- Un grafo es completo si todos los vértices están conectados al resto. También se le conoce como **grafo conectado**

[1] Total BS, yo sé. Lo siento; así es esto.

Walks, Trails, Paths, Circuits, Components. . .

pls stop

- Una caminata (*walk*) es una secuencia de nodos y ejes alternados: saliendo de un nodo **inicial** v_{i_0} y llegando a un nodo **final** v_{i_k}
- Dos **vértices** están conectados si existe una caminata entre ellos
- Una **caminata** es **abierta** si $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, o **cerrada** si $v_{i_0} = v_{i_k}$
- Un **sendero** (*trail*) es una caminata en donde cada eje visitado se recorre una sola vez.
- Un **sendero** es un **camino** (*path*) si cualquier vértice es visitado a una sola vez, a excepción del inicial y el final.
- Un **camino** cerrado es un circuito (o ciclo[1])
- Un grafo es completo si todos los vértices están conectados al resto. También se le conoce como **grafo conectado**

[1] Total BS, yo sé. Lo siento; así es esto.

Walks, Trails, Paths, Circuits, Components...

pls stop

- Una caminata (*walk*) es una secuencia de nodos y ejes alternados: saliendo de un nodo **inicial** v_{i_0} y llegando a un nodo **final** v_{i_k}
- Dos **vértices** están conectados si existe una caminata entre ellos
- Una **caminata** es **abierta** si $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, o **cerrada** si $v_{i_0} = v_{i_k}$
- Un **sendero** (*trail*) es una caminata en donde cada eje visitado se recorre una sola vez.
- Un **sendero** es un **camino** (*path*) si cualquier vértice es visitado a una sola vez, a excepción del inicial y el final.
- Un **camino** cerrado es un circuito (o ciclo[1])
- Un grafo es completo si todos los vértices están conectados al resto. También se le conoce como **grafo conectado**

[1] Total BS, yo sé. Lo siento; así es esto.

Walks, Trails, Paths, Circuits, Components...

pls stop

- Una caminata (*walk*) es una secuencia de nodos y ejes alternados: saliendo de un nodo **inicial** v_{i_0} y llegando a un nodo **final** v_{i_k}
- Dos **vértices** están conectados si existe una caminata entre ellos
- Una **caminata** es **abierta** si $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, o **cerrada** si $v_{i_0} = v_{i_k}$
- Un **sendero** (*trail*) es una caminata en donde cada eje visitado se recorre una sola vez.
- Un **sendero** es un **camino** (*path*) si cualquier vértice es visitado a una sola vez, a excepción del inicial y el final.
- Un **camino** cerrado es un circuito (o ciclo[1])
- Un grafo es completo si todos los vértices están conectados al resto. También se le conoce como **grafo conectado**

[1] Total BS, yo sé. Lo siento; así es esto.

Walks, Trails, Paths, Circuits, Components...

pls stop

- Una caminata (*walk*) es una secuencia de nodos y ejes alternados: saliendo de un nodo **inicial** v_{i_0} y llegando a un nodo **final** v_{i_k}
- Dos **vértices** están conectados si existe una caminata entre ellos
- Una **caminata** es **abierta** si $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, o **cerrada** si $v_{i_0} = v_{i_k}$
- Un **sendero** (*trail*) es una caminata en donde cada eje visitado se recorre una sola vez.
- Un **sendero** es un **camino** (*path*) si cualquier vértice es visitado a una sola vez, a excepción del inicial y el final.
- Un **camino** cerrado es un circuito (o ciclo[1])
- Un grafo es completo si todos los vértices están conectados al resto. También se le conoce como **grafo conectado**

[1] Total BS, yo sé. Lo siento; así es esto.

Walks, Trails, Paths, Circuits, Components...

pls stop

- Una caminata (*walk*) es una secuencia de nodos y ejes alternados: saliendo de un nodo **inicial** v_{i_0} y llegando a un nodo **final** v_{i_k}
- Dos **vértices** están conectados si existe una caminata entre ellos
- Una **caminata** es **abierta** si $v_{i_0} \neq v_{i_k}$, o **cerrada** si $v_{i_0} = v_{i_k}$
- Un **sendero** (*trail*) es una caminata en donde cada eje visitado se recorre una sola vez.
- Un **sendero** es un **camino** (*path*) si cualquier vértice es visitado a una sola vez, a excepción del inicial y el final.
- Un **camino** cerrado es un circuito (o ciclo[1])
- Un grafo es completo si todos los vértices están conectados al resto. También se le conoce como **grafo conectado**

[1] Total BS, yo sé. Lo siento; así es esto.

Lo siento, en serio

- Un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo inducido de $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ y si E' es el conjunto de ejes que conectan a V'.
- Un subgrafo G' es un componente de G si G' es un **grafo conectado** y G' es un **subgrafo inducido** por aquellos ejes de G que tengan uno de sus extremos en G'.
- $\sum_i^n deg(v_i) = 2|E|$ (La suma de todos los grados de un grafo es el doble del número de ejes)
- $\sum_i^n deg(v_i) \mod 2 = 0$ (Por lo mismo, la suma de todos los grados de un grafo es un número par)
- $|\{v : deg(v) \mod 2 = 1\}| \mod 2 = 0$ (El número de vértices de un grafo que tienen grado impar, es un número par)

Lo siento, en serio

- Un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo inducido de $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ y si E' es el conjunto de ejes que conectan a V'.
- Un subgrafo G' es un componente de G si G' es un **grafo conectado** y G' es un **subgrafo inducido** por aquellos ejes de G que tengan uno de sus extremos en G'.
- $\sum_i^n deg(v_i) = 2|E|$ (La suma de todos los grados de un grafo es el doble del número de ejes)
- $\sum_i^n deg(v_i) \mod 2 = 0$ (Por lo mismo, la suma de todos los grados de un grafo es un número par)
- $|\{v : deg(v) \mod 2 = 1\}| \mod 2 = 0$ (El número de vértices de un grafo que tienen grado impar, es un número par)

Lo siento, en serio

- Un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo inducido de $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ y si E' es el conjunto de ejes que conectan a V'.
- Un subgrafo G' es un componente de G si G' es un **grafo conectado** y G' es un **subgrafo inducido** por aquellos ejes de G que tengan uno de sus extremos en G'.
- $\sum_i^n deg(v_i) = 2|E|$ (La suma de todos los grados de un grafo es el doble del número de ejes)
- $\sum_i^n deg(v_i) \mod 2 = 0$ (Por lo mismo, la suma de todos los grados de un grafo es un número par)
- $|\{v : deg(v) \mod 2 = 1\}| \mod 2 = 0$ (El número de vértices de un grafo que tienen grado impar, es un número par)

Lo siento, en serio

- Un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo inducido de $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ y si E' es el conjunto de ejes que conectan a V'.
- Un subgrafo G' es un componente de G si G' es un **grafo conectado** y G' es un **subgrafo inducido** por aquellos ejes de G que tengan uno de sus extremos en G'.
- $\sum_i^n deg(v_i) = 2|E|$ (La suma de todos los grados de un grafo es el doble del número de ejes)
- $\sum_i^n deg(v_i) \mod 2 = 0$ (Por lo mismo, la suma de todos los grados de un grafo es un número par)
- $|\{v : deg(v) \mod 2 = 1\}| \mod 2 = 0$ (El número de vértices de un grafo que tienen grado impar, es un número par)

Lo siento, en serio

- Un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo inducido de $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ y si E' es el conjunto de ejes que conectan a V'.
- Un subgrafo G' es un componente de G si G' es un **grafo conectado** y G' es un **subgrafo inducido** por aquellos ejes de G que tengan uno de sus extremos en G'.
- $\sum_i^n deg(v_i) = 2|E|$ (La suma de todos los grados de un grafo es el doble del número de ejes)
- $\sum_i^n deg(v_i) \mod 2 = 0$ (Por lo mismo, la suma de todos los grados de un grafo es un número par)
- $|\{v : deg(v) \mod 2 = 1\}| \mod 2 = 0$ (El número de vértices de un grafo que tienen grado impar, es un número par)

Operaciones y problemas con grafos los vemos la próxima semana