

Comparando y asociando: relaciones y funciones

Matemáticas Discretas
(TC1003)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx



Outline

1 Relaciones

- Cuantificadores y operaciones
- Propiedades de las relaciones
- Partición, Órdenes y Cerraduras

Tuplas

Relaciones

Una **tupla** es una estructura matemática **de tamaño definido** y donde el **orden importa**.

Ejemplo de tupla

$(1, 2), (2, 3), (3, 5)$

¿Cuál es el conjunto de celdas de un tablero de *Battleship* si las casillas van de la $A - J$ y del $1 - 10$?

Tuplas

Relaciones

Una **tupla** es una estructura matemática **de tamaño definido** y donde el **orden importa**.

Ejemplo de tupla

$(1, 2), (2, 3), (3, 5)$

¿Cuál es el conjunto de celdas de un tablero de *Battleship* si las casillas van de la $A - J$ y del $1 - 10$?

Tuplas

Relaciones

Una **tupla** es una estructura matemática **de tamaño definido** y donde el **orden importa**.

Ejemplo de tupla

$(1, 2), (2, 3), (3, 5)$

¿Cuál es el conjunto de celdas de un tablero de *Battleship* si las casillas van de la $A - J$ y del $1 - 10$?

Producto Cartesiano

Relaciones

El **producto Cartesiano** es el **conjunto** de todos los posibles valores que se pueden formar a partir de la combinación de dos conjuntos, de la siguiente manera:

Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

El conjunto de las casillas de un tablero de *Battleship* es claramente el producto Cartesiano del conjunto de sus renglones y sus columnas.

Producto Cartesiano

Relaciones

El **producto Cartesiano** es el **conjunto** de todos los posibles valores que se pueden formar a partir de la combinación de dos conjuntos, de la siguiente manera:

Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

El conjunto de las casillas de un tablero de *Battleship* es claramente el producto Cartesiano del conjunto de sus renglones y sus columnas.

Producto Cartesiano

Relaciones

El **producto Cartesiano** es el **conjunto** de todos los posibles valores que se pueden formar a partir de la combinación de dos conjuntos, de la siguiente manera:

Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

El conjunto de las casillas de un tablero de *Battleship* es claramente el producto Cartesiano del conjunto de sus renglones y sus columnas.

Definición de Relación

Relaciones

Una **relación** entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B ?

Definición de Relación

Relaciones

Una **relación** entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B ?

Definición de Relación

Relaciones

Una **relación** entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B ?

Definición de Relación

Relaciones

Una **relación** entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B ?

Definición de Relación

Relaciones

Una **relación** entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B ?

Definición de Relación

Relaciones

Una **relación** entre dos conjuntos A y B es cualquier conjunto R de tal manera que $R \subseteq A \times B$.

- Piensa en el conjunto de alumnos presentes en el salón como A
- Piensa ahora en el conjunto de sillas disponibles en el salón como B
- ¿Cuál es el producto Cartesiano $A \times B$?
- ¿Qué relación R podemos formar sobre A y B ?

Cuantificadores

Cuantificadores y operaciones

Claramente, las relaciones aplican *para algunos Skywalker* y no para todos. Sin embargo, también tenemos relaciones que podrían aplicar *a todos*.

Cuantificadores

- \forall que significa *para todos*
- \exists que significa *existe*
- $\exists!$ que significa *existe un único*

Puedes agregarle negación frente a cada uno para cambiar el significado a lo contrario. ¿Qué significa la negación de cada uno de ellos?

Cuantificadores

Cuantificadores y operaciones

Claramente, las relaciones aplican *para algunos Skywalker* y no para todos. Sin embargo, también tenemos relaciones que podrían aplicar *a todos*.

Cuantificadores

- \forall que significa *para todos*
- \exists que significa *existe*
- $\exists!$ que significa *existe un único*

Puedes agregarle negación frente a cada uno para cambiar el significado a lo contrario. ¿Qué significa la negación de cada uno de ellos?

Cuantificadores

Cuantificadores y operaciones

Claramente, las relaciones aplican *para algunos Skywalker* y no para todos. Sin embargo, también tenemos relaciones que podrían aplicar *a todos*.

Cuantificadores

- \forall que significa *para todos*
- \exists que significa *existe*
- $\exists!$ que significa *existe un único*

Puedes agregarle negación frente a cada uno para cambiar el significado a lo contrario. ¿Qué significa la negación de cada uno de ellos?

Cuantificadores

Cuantificadores y operaciones

Claramente, las relaciones aplican *para algunos Skywalker* y no para todos. Sin embargo, también tenemos relaciones que podrían aplicar *a todos*.

Cuantificadores

- \forall que significa *para todos*
- \exists que significa *existe*
- $\exists!$ que significa *existe un único*

Puedes agregarle negación frente a cada uno para cambiar el significado a lo contrario. ¿Qué significa la negación de cada uno de ellos?

Relaciones inversas

Relaciones

La **inversa** R^{-1} de una relación R es ... R al revés.

Relación inversa

Una relación inversa es cualquier relación R^{-1} tal que

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

- Piensa en A como el conjunto de *Los Skywalker*
- ¿Puedes hacer una relación de parentesco R sobre A^2 ?
- ¿Cuál sería la relación inversa?

Relaciones inversas

Relaciones

La **inversa** R^{-1} de una relación R es ... R al revés.

Relación inversa

Una relación inversa es cualquier relación R^{-1} tal que

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

- Piensa en A como el conjunto de *Los Skywalker*
- ¿Puedes hacer una relación de parentesco R sobre A^2 ?
- ¿Cuál sería la relación inversa?

Relaciones inversas

Relaciones

La **inversa** R^{-1} de una relación R es ... R al revés.

Relación inversa

Una relación inversa es cualquier relación R^{-1} tal que

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

- Piensa en A como el conjunto de *Los Skywalker*
- ¿Puedes hacer una relación de parentesco R sobre A^2 ?
- ¿Cuál sería la relación inversa?

Relaciones inversas

Relaciones

La **inversa** R^{-1} de una relación R es ... R al revés.

Relación inversa

Una relación inversa es cualquier relación R^{-1} tal que

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

- Piensa en A como el conjunto de *Los Skywalker*
- ¿Puedes hacer una relación de parentesco R sobre A^2 ?
- ¿Cuál sería la relación inversa?

Imagen de una relación

Operaciones

La **imagen** de una relación R (usualmente denotada por I) es el conjunto de todos aquellos elementos b , es decir. . .

Imagen

$$I(R) = \{b : (a, b) \in R\}$$

¿Cuál es la imagen en la relación *Padre* en *Los Skywalker*?

Imagen de una relación

Operaciones

La **imagen** de una relación R (usualmente denotada por I) es el conjunto de todos aquellos elementos b , es decir. . .

Imagen

$$I(R) = \{b : (a, b) \in R\}$$

¿Cuál es la imagen en la relación *Padre* en *Los Skywalker*?

Imagen de una relación

Operaciones

La **imagen** de una relación R (usualmente denotada por I) es el conjunto de todos aquellos elementos b , es decir. . .

Imagen

$$I(R) = \{b : (a, b) \in R\}$$

¿Cuál es la imagen en la relación *Padre* en *Los Skywalker*?

Reflexividad

Propiedades de las relaciones

Reflexividad

R es **reflexiva** si y sólo si $\forall a \in A (\exists (a, a) \in R)$

- Piensa en un ejemplo de una relación reflexiva (*Hint: piensa en números*)
- Lo opuesto a la reflexividad es la **irreflexividad**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni reflexiva ni irreflexiva

Reflexividad

Propiedades de las relaciones

Reflexividad

R es **reflexiva** si y sólo si $\forall a \in A (\exists (a, a) \in R)$

- Piensa en un ejemplo de una relación reflexiva (*Hint: piensa en números*)
- Lo opuesto a la reflexividad es la **irreflexividad**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni reflexiva ni irreflexiva

Transitividad

Propiedades de las relaciones

Transitividad

R es **transitiva** si y sólo si

$$\forall (a, b) \in R ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R)$$

- Piensa en un ejemplo de relación transitiva
- Lo opuesto a la transitividad es la **intransitividad**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni transitiva ni intransitiva

Transitividad

Propiedades de las relaciones

Transitividad

R es **transitiva** si y sólo si

$$\forall (a, b) \in R ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R)$$

- Piensa en un ejemplo de relación transitiva
- Lo opuesto a la transitividad es la **intransitividad**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni transitiva ni intransitiva

Simetría

Propiedades de las relaciones

Simetría

R es **simétrica** si y solo si

$$\forall (a, b) \in R ((a, b) \in R \implies (b, a) \in R)$$

- Piensa en un ejemplo de relación simétrica
- Lo opuesto a la simetría es la **asimetría**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni simétrica ni asimétrica

Simetría

Propiedades de las relaciones

Simetría

R es **simétrica** si y solo si

$$\forall (a, b) \in R ((a, b) \in R \implies (b, a) \in R)$$

- Piensa en un ejemplo de relación simétrica
- Lo opuesto a la simetría es la **asimetría**: si para todos NO se cumple la condición
- Una relación puede no ser ni simétrica ni asimétrica

Relaciones de equivalencia

Propiedades de las relaciones

Equivalencia

Una relación R es **equivalente** si es **reflexiva**, **transitiva** y **simétrica**.

¿Habías pensado que el $=$ es un operador que relaciona dos números de manera *equivalente*?

Relaciones de equivalencia

Propiedades de las relaciones

Equivalencia

Una relación R es **equivalente** si es **reflexiva**, **transitiva** y **simétrica**.

¿Habías pensado que el $=$ es un operador que relaciona dos números de manera *equivalente*?

Partición

Partición, Órdenes y Cerraduras

Una **partición** de A es cualquier conjunto $B_{i \in I}$ de subconjuntos de A que:

- No están vacíos
- Son disjuntos entre sí
- La unión generalizada de ellos cubre totalmente a A

Una *repartición* de dulces a un conjunto de bolsas es justamente una partición del conjunto de dulces.

Partición

Partición, Órdenes y Cerraduras

Una **partición** de A es cualquier conjunto $B_{i \in I}$ de subconjuntos de A que:

- No están vacíos
- Son disjuntos entre sí
- La unión generalizada de ellos cubre totalmente a A

Una *repartición* de dulces a un conjunto de bolsas es justamente una partición del conjunto de dulces.

Antisimetría

Partición, Órdenes y Cerraduras

Antisimetría

Una relación es **antisimétrica** si y solo si

$$\forall (a, b) \in R ((a, b) \in R \implies (b, a) \notin R)$$

A una relación que es **reflexiva**, **transitiva** y **antisimétrica** se le conoce como **orden parcial**, o *poset*.

Antisimetría

Partición, Órdenes y Cerraduras

Antisimetría

Una relación es **antisimétrica** si y solo si

$$\forall (a, b) \in R ((a, b) \in R \implies (b, a) \notin R)$$

A una relación que es **reflexiva**, **transitiva** y **antisimétrica** se le conoce como **orden parcial**, o *poset*.

Orden total

Partición, Órdenes y Cerraduras

Completez en una reflexión

Una relación **reflexiva** es **completa** si y solo si

$$\forall (a, b) \in A ((a, b) \in R \vee (b, a) \in R)$$

Cuando un *poset* es completo (o lineal), se le conoce como **orden total**.

\leq vs $<$

Orden total

Partición, Órdenes y Cerraduras

Completez en una reflexión

Una relación **reflexiva** es **completa** si y solo si

$$\forall (a, b) \in A ((a, b) \in R \vee (b, a) \in R)$$

Cuando un *poset* es completo (o lineal), se le conoce como **orden total**.

\leq vs $<$

Orden total

Partición, Órdenes y Cerraduras

Completez en una reflexión

Una relación **reflexiva** es **completa** si y solo si

$$\forall (a, b) \in A ((a, b) \in R \vee (b, a) \in R)$$

Cuando un *poset* es completo (o lineal), se le conoce como **orden total**.

$$\leq \quad \text{vs} \quad <$$

Cerraduras

Partición, Órdenes y Cerraduras

La **cerradura** (*closure* en inglés) de A bajo la relación R (denotada por $R[A]$) es un **conjunto** del tamaño mínimo necesario para cumplir con la aplicación de R a cada elemento de A , y tal que $A \subseteq R[A] \dots$

Ejemplo de cerradura

- Q: ¿Cuál es la **cerradura transitiva** de $A = \{(2, 3), (3, 4), (1, 2), (3, 1), (1, 7), (7, 8)\}$?
- A:

$$A = \{(2, 3), (3, 4), (1, 2), (3, 1), (1, 7), (7, 8), \\ (2, 4), (1, 3), (3, 2), (1, 8), (1, 4), (1, 1), (3, 3)\}$$

Cerraduras

Partición, Órdenes y Cerraduras

La **cerradura** (*closure* en inglés) de A bajo la relación R (denotada por $R[A]$) es un **conjunto** del tamaño mínimo necesario para cumplir con la aplicación de R a cada elemento de A , y tal que $A \subseteq R[A] \dots$

Ejemplo de cerradura

- **Q:** ¿Cuál es la **cerradura transitiva** de $A = \{(2, 3), (3, 4), (1, 2), (3, 1), (1, 7), (7, 8)\}$?
- **A:**

$$A = \{(2, 3), (3, 4), (1, 2), (3, 1), (1, 7), (7, 8), \\ (2, 4), (1, 3), (3, 2), (1, 8), (1, 4), (1, 1), (3, 3)\}$$