

La prueba matemática

Matemáticas Discretas (TC1003)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx



Outline

- 1 Introducción y vocabulario
- 2 Técnicas y Recomendaciones Generales
- 3 Recursión

La prueba matemática

Introducción y Vocabulario

En matemáticas, un **teorema** es una oración que es **verdadera**.

Una **prueba matemática** (**prueba**, de ahora en adelante bajo este contexto) es una **secuencia** de oraciones que forman un argumento para **demostrar** que un **teorema** es cierto.

Las oraciones en una prueba incluyen **axiomas**, **hipótesis** del teorema que queremos demostrar, y teoremas previamente probados.

La prueba matemática

Introducción y Vocabulario

En matemáticas, un **teorema** es una oración que es **verdadera**.

Una **prueba matemática** (**prueba**, de ahora en adelante bajo este contexto) es una **secuencia** de oraciones que forman un argumento para **demostrar** que un **teorema** es cierto.

Las oraciones en una prueba incluyen **axiomas**, **hipótesis** del teorema que queremos demostrar, y teoremas previamente probados.

La prueba matemática

Introducción y Vocabulario

En matemáticas, un **teorema** es una oración que es **verdadera**.

Una **prueba matemática** (**prueba**, de ahora en adelante bajo este contexto) es una **secuencia** de oraciones que forman un argumento para **demostrar** que un **teorema** es cierto.

Las oraciones en una prueba incluyen **axiomas**, **hipótesis** del teorema que queremos demostrar, y teoremas previamente probados.

Probamos a partir de la verdad

Introducción y Vocabulario

Para poder **decidir** si una oración es **verdadera** necesitamos un marco de referencia sobre lo que está permitido hacer, y sobre lo que **ya sabemos que es verdad**, como los axiomas.

Para eso existen los **sistemas de prueba o deducción**. Por ejemplo, el sistema de pruebas Hilbert H, utiliza *Modus Ponens* como regla de inferencia, y sus axiomas son específicamente:

- $\vdash (A \implies (B \implies A))$
- $\vdash (A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$
- $\vdash (\neg B \implies \neg A) \implies (A \implies B)$

Todas aquellas fórmulas válidas son resultado de una deducción formal usando estas reglas, y por eso se dice que es un sistema de deducción **completo**.

De manera contraria se tiene que **solamente** aquellas fórmulas válidas son deducibles usando estas reglas, y por eso se dice que es un sistema de deducción **sólido**.

Probamos a partir de la verdad

Introducción y Vocabulario

Para poder **decidir** si una oración es **verdadera** necesitamos un marco de referencia sobre lo que está permitido hacer, y sobre lo que **ya sabemos que es verdad**, como los axiomas.

Para eso existen los **sistemas de prueba o deducción**. Por ejemplo, el sistema de pruebas Hilbert H, utiliza *Modus Ponens* como regla de inferencia, y sus axiomas son específicamente:

- $\vdash (A \implies (B \implies A))$
- $\vdash (A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$
- $\vdash (\neg B \implies \neg A) \implies (A \implies B)$

Todas aquellas fórmulas válidas son resultado de una deducción formal usando estas reglas, y por eso se dice que es un sistema de deducción **completo**.

De manera contraria se tiene que **solamente** aquellas fórmulas válidas son deducibles usando estas reglas, y por eso se dice que es un sistema de deducción **sólido**.

Probamos a partir de la verdad

Introducción y Vocabulario

Para poder **decidir** si una oración es **verdadera** necesitamos un marco de referencia sobre lo que está permitido hacer, y sobre lo que **ya sabemos que es verdad**, como los axiomas.

Para eso existen los **sistemas de prueba o deducción**. Por ejemplo, el sistema de pruebas Hilbert H, utiliza *Modus Ponens* como regla de inferencia, y sus axiomas son específicamente:

- $\vdash (A \implies (B \implies A))$
- $\vdash (A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$
- $\vdash (\neg B \implies \neg A) \implies (A \implies B)$

Todas aquellas fórmulas válidas son resultado de una deducción formal usando estas reglas, y por eso se dice que es un sistema de deducción **completo**.

De manera contraria se tiene que **solamente** aquellas fórmulas válidas son deducibles usando estas reglas, y por eso se dice que es un sistema de deducción **sólido**.

Probamos a partir de la verdad

Introducción y Vocabulario

Para poder **decidir** si una oración es **verdadera** necesitamos un marco de referencia sobre lo que está permitido hacer, y sobre lo que **ya sabemos que es verdad**, como los axiomas.

Para eso existen los **sistemas de prueba o deducción**. Por ejemplo, el sistema de pruebas Hilbert H, utiliza *Modus Ponens* como regla de inferencia, y sus axiomas son específicamente:

- $\vdash (A \implies (B \implies A))$
- $\vdash (A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$
- $\vdash (\neg B \implies \neg A) \implies (A \implies B)$

Todas aquellas fórmulas válidas son resultado de una deducción formal usando estas reglas, y por eso se dice que es un sistema de deducción **completo**.

De manera contraria se tiene que **solamente** aquellas fórmulas válidas son deducibles usando estas reglas, y por eso se dice que es un sistema de deducción **sólido**.

Para demostrar...

Recomendaciones generales

- Es importante leer y entender completamente la oración que queremos probar (quizá sea lo más difícil en algunas ocasiones)
- Puede haber teoremas compuestos que podemos partir en teoremas más pequeños
- Intenta revisar rápidamente algunos casos simples del teorema para comprobar si es cierto o no
- **Escribe** la prueba—sólo si la hacemos por escrito podemos demostrar su **solidez**

Para demostrar...

Recomendaciones generales

- Es importante leer y entender completamente la oración que queremos probar (quizá sea lo más difícil en algunas ocasiones)
- Puede haber teoremas compuestos que podemos partir en teoremas más pequeños
- Intenta revisar rápidamente algunos casos simples del teorema para comprobar si es cierto o no
- **Escribe** la prueba—sólo si la hacemos por escrito podemos demostrar su **solidez**

Para demostrar...

Recomendaciones generales

- Es importante leer y entender completamente la oración que queremos probar (quizá sea lo más difícil en algunas ocasiones)
- Puede haber teoremas compuestos que podemos partir en teoremas más pequeños
- Intenta revisar rápidamente algunos casos simples del teorema para comprobar si es cierto o no
- **Escribe la prueba**—sólo si la hacemos por escrito podemos demostrar su **solidez**

Para demostrar...

Recomendaciones generales

- Es importante leer y entender completamente la oración que queremos probar (quizá sea lo más difícil en algunas ocasiones)
- Puede haber teoremas compuestos que podemos partir en teoremas más pequeños
- Intenta revisar rápidamente algunos casos simples del teorema para comprobar si es cierto o no
- **Escribe** la prueba—sólo si la hacemos por escrito podemos demostrar su **solidez**

Prueba directa

Técnicas de prueba

Son aquellas pruebas donde la aplicación del teorema tal cual nos da el *camino* que buscamos.

Teorema 1

0 es un número par.

Demostración.

La definición de un número par es aquél que puede ser dividido entre 2, obteniendo un resultado entero y un residuo de 0.

Al dividir $\frac{0}{2} = 0$, tenemos un resultado entero (0) y un residuo de 0, y por tanto es un número par. □

Prueba directa

Técnicas de prueba

Son aquellas pruebas donde la aplicación del teorema tal cual nos da el *camino* que buscamos.

Teorema 1

0 es un número par.

Demostración.

La definición de un número par es aquél que puede ser dividido entre 2, obteniendo un resultado entero y un residuo de 0.

Al dividir $\frac{0}{2} = 0$, tenemos un resultado entero (0) y un residuo de 0, y por tanto es un número par. □

Prueba directa

Técnicas de Prueba

Teorema 2

Si n es un entero positivo impar, entonces n^2 es también impar.

Demostración.

Podemos describir cualquier entero positivo impar como $n = 2k + 1$ para cualquier número entero $k \geq 0$. Entonces,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Como $2(2k^2 + 2k)$ es par, y cualquier número par más uno nos da un número impar, entonces n^2 es impar. □

Prueba constructiva

Técnicas de Prueba

Son pruebas donde hay que **construir** o **generar** un objeto con *cierta propiedad* para revisar la existencia del mismo.

Teorema 3

Si $X \subseteq A \cap B$, entonces $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$.

Demostración.

Sea x un elemento del conjunto X , de tal modo que $x \in X$. Como sabemos que $x \in X$, y que $X \subseteq A \cap B$, entonces significa que $x \in A \cap B$. Y dado a que $x \in A \cap B$, significa que $x \in A$ y $x \in B$. Y como $x \in X$, entonces $X \subseteq A$, y de igual manera $X \subseteq B$. □

Prueba por contradicción

Técnicas de Prueba

Sea S un estatuto verdadero. Si mostramos que $\neg S \implies \text{falso}$ es cierto, entonces es suficiente para mostrar que S es, como dijimos en un principio, verdadero.

Teorema 4

Sea n un entero positivo. Si n^2 es par, entonces n es par.

Demostración.

Por contradicción, asumimos que n^2 es par pero que n es impar. Como n es impar, sabemos del Teorema 2 que n^2 debe ser impar. Sin embargo, esto genera una contradicción, porque asumimos que n^2 es par. □

Prueba por contradicción

Técnicas de Prueba

Sea S un estatuto verdadero. Si mostramos que $\neg S \implies \text{falso}$ es cierto, entonces es suficiente para mostrar que S es, como dijimos en un principio, verdadero.

Teorema 4

Sea n un entero positivo. Si n^2 es par, entonces n es par.

Demostración.

Por contradicción, asumimos que n^2 es par pero que n es impar. Como n es impar, sabemos del Teorema 2 que n^2 debe ser impar. Sin embargo, esto genera una contradicción, porque asumimos que n^2 es par. □

Contraejemplo

Técnicas de Prueba

Si nos dicen que algo es verdad, y encontramos algún caso en el que no lo sea, entonces es falso (que es básicamente lo mismo que hacemos en contradicción).

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} (a^2 = b^2 \implies a = b)$$

Demostración.

Sean $a = 1$ y $b = -1$. Entonces, $a^2 = 1$ y también $b^2 = 1$, sin embargo $a \neq b$. Por tanto, el estatuto inicial es falso. □

Contraejemplo

Técnicas de Prueba

Si nos dicen que algo es verdad, y encontramos algún caso en el que no lo sea, entonces es falso (que es básicamente lo mismo que hacemos en contradicción).

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} (a^2 = b^2 \implies a = b)$$

Demostración.

Sean $a = 1$ y $b = -1$. Entonces, $a^2 = 1$ y también $b^2 = 1$, sin embargo $a \neq b$. Por tanto, el estatuto inicial es falso. □

Contraejemplo

Técnicas de Prueba

Si nos dicen que algo es verdad, y encontramos algún caso en el que no lo sea, entonces es falso (que es básicamente lo mismo que hacemos en contradicción).

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} (a^2 = b^2 \implies a = b)$$

Demostración.

Sean $a = 1$ y $b = -1$. Entonces, $a^2 = 1$ y también $b^2 = 1$, sin embargo $a \neq b$. Por tanto, el estatuto inicial es falso. □

Inducción matemática I

Técnicas de Prueba

Para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ un estatuto matemático que depende de n . Queremos probar que $P(n)$ es cierto para cualquier entero positivo n . Una prueba por **inducción** se lleva a cabo entonces de la siguiente forma:

- 1 Probamos que $P(1)$ es verdadero.
- 2 Probamos ahora que para todo $n > 1$, si $P(n)$ es cierto, entonces $P(n + 1)$ es también cierto

El primer paso se conoce como el **caso base**, mientras que al paso dos se le llama **paso de inducción**. En el paso de inducción, escogemos un valor arbitrario para n , y asumimos que $P(n)$ es verdad (como nos sugieren). A esto se le llama **la hipótesis de inducción**.

Inducción matemática I

Técnicas de Prueba

Para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ un estatuto matemático que depende de n . Queremos probar que $P(n)$ es cierto para cualquier entero positivo n . Una prueba por **inducción** se lleva a cabo entonces de la siguiente forma:

- 1 Probamos que $P(1)$ es verdadero.
- 2 Probamos ahora que para todo $n > 1$, si $P(n)$ es cierto, entonces $P(n + 1)$ es también cierto

El primer paso se conoce como el **caso base**, mientras que al paso dos se le llama **paso de inducción**. En el paso de inducción, escogemos un valor arbitrario para n , y asumimos que $P(n)$ es verdad (como nos sugieren). A esto se le llama **la hipótesis de inducción**.

Inducción matemática I

Técnicas de Prueba

Para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ un estatuto matemático que depende de n . Queremos probar que $P(n)$ es cierto para cualquier entero positivo n . Una prueba por **inducción** se lleva a cabo entonces de la siguiente forma:

- 1 Probamos que $P(1)$ es verdadero.
- 2 Probamos ahora que para todo $n > 1$, si $P(n)$ es cierto, entonces $P(n + 1)$ es también cierto

El primer paso se conoce como el **caso base**, mientras que al paso dos se le llama **paso de inducción**. En el paso de inducción, escogemos un valor arbitrario para n , y asumimos que $P(n)$ es verdad (como nos sugieren). A esto se le llama **la hipótesis de inducción**.

Inducción matemática I

Técnicas de Prueba

Para cada entero positivo $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ un estatuto matemático que depende de n . Queremos probar que $P(n)$ es cierto para cualquier entero positivo n . Una prueba por **inducción** se lleva a cabo entonces de la siguiente forma:

- 1 Probamos que $P(1)$ es verdadero.
- 2 Probamos ahora que para todo $n > 1$, si $P(n)$ es cierto, entonces $P(n + 1)$ es también cierto

El primer paso se conoce como el **caso base**, mientras que al paso dos se le llama **paso de inducción**. En el paso de inducción, escogemos un valor arbitrario para n , y asumimos que $P(n)$ es verdad (como nos sugieren). A esto se le llama **la hipótesis de inducción**.

Inducción matemática II

Técnicas de Prueba

Teorema 5

Para todos los enteros positivos n , $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Comenzamos con $n = 1$. Si $n = 1$ entonces tenemos $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, lo cual es correcto.

Para el paso de inducción, sea $n \geq 1$, y asumamos que el teorema es cierto para n . Si es cierto para n , entonces debe ser cierto para $n + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Dado que el lado azul del igual mantiene la propiedad, entonces podemos reemplazarlo por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Inducción matemática II (cont.)

Técnicas de Prueba

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

Si reemplazamos lo azul por la propiedad de $\frac{n(n+1)}{2}$, entonces

$$\frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{n^2 + n}{2} + (n + 1)$$

y con esto podemos expandir a

$$\frac{n^2 + 3 + 2}{2}$$

para luego factorizar como

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

que es la propiedad que estamos buscando \square

¿Por qué funciona la inducción matemática?

Técnicas de Prueba

La inducción matemática *sólo funciona* en los números naturales.

Esto se debe a que \mathbb{N} tiene una **estructura ordenada** que puede ser simplificada en los dos pasos de la inducción:

- Existe un caso base (el 1)
- El siguiente número es *obtenible* como el número *actual* + 1 (sucesor)

Y esto da como resultado que se le pueda aplicar **recursión**.

¿Por qué funciona la inducción matemática?

Técnicas de Prueba

La inducción matemática *sólo funciona* en los números naturales.

Esto se debe a que \mathbb{N} tiene una **estructura ordenada** que puede ser simplificada en los dos pasos de la inducción:

- Existe un caso base (el 1)
- El siguiente número es *obtenible* como el número *actual* + 1 (sucesor)

Y esto da como resultado que se le pueda aplicar **recursión**.

¿Por qué funciona la inducción matemática?

Técnicas de Prueba

La inducción matemática *sólo funciona* en los números naturales.

Esto se debe a que \mathbb{N} tiene una **estructura ordenada** que puede ser simplificada en los dos pasos de la inducción:

- Existe un caso base (el 1)
- El siguiente número es *obtenible* como el número *actual* + 1 (sucesor)

Y esto da como resultado que se le pueda aplicar **recursión**.

¿Por qué funciona la inducción matemática?

Técnicas de Prueba

La inducción matemática *sólo funciona* en los números naturales.

Esto se debe a que \mathbb{N} tiene una **estructura ordenada** que puede ser simplificada en los dos pasos de la inducción:

- Existe un caso base (el 1)
- El siguiente número es *obtenible* como el número *actual* + 1 (sucesor)

Y esto da como resultado que se le pueda aplicar **recursión**.

¿Por qué funciona la inducción matemática?

Técnicas de Prueba

La inducción matemática *sólo funciona* en los números naturales.

Esto se debe a que \mathbb{N} tiene una **estructura ordenada** que puede ser simplificada en los dos pasos de la inducción:

- Existe un caso base (el 1)
- El siguiente número es *obtenible* como el número *actual* + 1 (sucesor)

Y esto da como resultado que se le pueda aplicar **recursión**.

Recursión

La **recursión** es una propiedad de *algunas estructuras matemáticas* las cuales pueden ser expresadas en la forma que revisamos (caso base + regla general).

¿Qué funciones se te vienen a la mente que puedan ser expresadas en este formato?

Recursión

La **recursión** es una propiedad de *algunas* **estructuras matemáticas** las cuales pueden ser expresadas en la forma que revisamos (caso base + regla general).

¿Qué funciones se te vienen a la mente que puedan ser expresadas en este formato?