Vectores y Matrices

Solución de Problemas con Programación (TC1017)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
mail@tec.mx

Outline

Definición 1

Un vector n-dimensional es una lista de n números donde:

- La adición vectorial es conmutativa.
- La adición vectorial es asociativa.
- Existe la identidad aditiva.
- Existe la adición inversa.
- La multiplicación escalar es asociativa.
- La adición escalar es distributiva.
- La adición vectorial es distributiva.
- Existe la identidad multiplicativa.

La adición vectorial es conmutativa

Vectores

Es decir que no importa el orden al sumar dos vectores:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

Ejemplo práctico: Si te mueves dos cuadras hacia el sur y una hacia el oriente. llegas al mismo lugar que moviéndote una cuadra hacia el oriente y luego dos hacia el sur.

La adición vectorial es asociativa

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Ejemplo Práctico: Si te avientas un viaje de acá a la esquina, descansas, y luego a la farmacia y al parque de un jalón, llegas al mismo lugar que si te avientas un viaje de acá a la esquina y a la farmacia de un jalón, descansas, y luego vas al parque.

Existe la identidad aditiva

Vectores

$$\mathbf{x} + 0 = 0 + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Ejemplo Práctico: Si vas al parque, y te quedas ahí, llegas al mismo lugar que si vas al parque (duh).

Existe la adición inversa

Vectores

$$\forall \mathbf{x}, \exists -\mathbf{x} \text{ tal que } \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$$

Ejemplo práctico: Para cada ruta que existe para llegar a algún lugar, existe otra ruta (la misma, de regreso) que si la sigues, llegas al mismo punto de donde saliste.

La multiplicación escalar es asociativa

$$r(s\mathbf{x}) = (rs)\mathbf{x}$$

Ejemplo práctico: Estás a 5 metros de mí en cierta dirección. Si te mueves el doble de distancia, y luego el triple, estarás en el mismo punto que si te mueves seis veces en esa dirección desde tu posición original.

La adición escalar es distributiva

Vectores

$$(r + s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x}$$

Ejemplo práctico: Estás a 5 metros de mí en cierta dirección. Si te mueves 7 veces esa distancia, hacia allá, estarás a 35 metros de mí. El lugar al que llegarías, sería el mismo lugar al que llegarías si te mueves 20 metros para allá, y luego 15 metros más en la misma dirección.

La adición vectorial es distributiva

$$r(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = r\mathbf{x} + r\mathbf{y}$$

Ejemplo práctico: Si vamos 2 cuadras al sur y dos al oriente llegamos a la farmacia, que está a 100 metros de la iglesia desde la que salimos. Si me muevo el doble de esa distancia, alejándome de la iglesia, llego a la escuela, que está en el mismo lugar al que llegaría si me moviera 4 cuadras al sur y luego cuatro cuadras al oriente.

Existe la identidad multiplicativa

Vectores

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Ejemplo práctico: Si me muevo de la escuela a la iglesia, llegaría al mismo lugar que si recorriera una vez esa distancia, en esa dirección desde mi punto de salida (duh)

Definición 2

Una matriz es una manera conveniente de guardar una **transformación lineal**.

Definición 3

Una transformación lineal es una función de la forma $T : V \to W$ de tal manera que siempre se cumple lo siguiente:

- $T(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = T(\mathbf{v_1}) + T(\mathbf{v_2})$ (Adición de vectores)
- $T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$ (Multiplicación escalar)

considerando que $\mathbf{v} \in V$, o sea, $\mathbf{v}$ es un vector.

En otras palabras, una manera sencilla de guardar **qué hacer** a **cada uno de los componentes** de un vector.

Mi transformación: *el doble del primero y triple del segundo*

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{influencia de } x \text{ sobre } x & \text{influencia de } x \text{ sobre } y \\ \text{influencia de } y \text{ sobre } x & \text{influencia de } y \text{ sobre } y \end{bmatrix}$$

... Algo así.

Adición de vectores II

Matrices y transformaciones lineales

$$T(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) = T(\mathbf{v_1}) + T(\mathbf{v_2})$$

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix}2,0\\0,3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}2,0\\0,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10\\9\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix}2,0\\0,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2,0\\0,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10\\9\end{bmatrix}$$

Multiplicación escalar

Matrices y transformaciones lineales

Misma transformación: *el doble del primero y triple del segundo*

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$$

$$T\left(1.5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

$$1.5T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= 1.5 \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 1.5 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

Matrices de rotación

Ejemplo

El actuador de un robot está en la siguiente posición (coordenadas en el espacio en x, y, z):

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

El cual debe rotar 90 grados en el eje x. Si $\theta = 90°$, entonces podemos representar su posición nueva 'transformando' su vieja posición con una matriz de rotación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\sin 90 \\ 0 & \sin 90 & \cos 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$