Conceptos matemáticos preliminares

Matemáticas Computacionales (TC2020)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
mail@tec.mx

Tecnológico de Monterrey

Tabla de contenidos

1. Conjuntos

2. Relaciones y Funciones

3. Lógica

Definición 1

Un conjunto es una colección de elementos. Usamos letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ para representarlos, y letras minúsculas $a, b, c, \ldots$ para representar sus elementos.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Describiendo un conjunto

Conjuntos

Podemos definirlos por *enumeración* o por *descripción*.

A es el conjunto de todos los números naturales menores que 6.

Enumerando sus elementos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 1, 5, 4\}$

Describiendo sus elementos

$A = \{a \in \mathbb{N} : a < 6\}$

Describiendo un conjunto

Conjuntos

Podemos definirlos por *enumeración* o por *descripción*.

A es el conjunto de todos los números naturales menores que 6.

Enumerando sus elementos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 1, 5, 4\}$

Describiendo sus elementos

$A = \{a \in \mathbb{N} : a < 6\}$

Describiendo un conjunto

Conjuntos

Podemos definirlos por *enumeración* o por *descripción*.

A es el conjunto de todos los números naturales menores que 6.

Enumerando sus elementos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 1, 5, 4\}$

Describiendo sus elementos

$A = \{a \in \mathbb{N} : a < 6\}$

Describiendo un conjunto

Conjuntos

Podemos definirlos por *enumeración* o por *descripción*.

A es el conjunto de todos los números naturales menores que 6.

Enumerando sus elementos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 1, 5, 4\}$

Describiendo sus elementos

$A = \{a \in \mathbb{N} : a < 6\}$

Notación de conjuntos

- **Pertenencia**: $a \in A$, cuando a es un elemento de A.
- **Cardinalidad**: $|A|$ representa el número de elementos en A.
- **Inclusión**: $A \subseteq B$ si todos los elementos de A son elementos de B.
- **Igualdad**: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.
- **Inclusión propia**: $A \subset B$ si todos los elementos de A son elementos de B y $A \neq B$.
- **Conjunto vacío**: $\varnothing$ o $\{\}$ para representar un conjunto sin elementos.

Notación de conjuntos
Conjuntos

- **Pertenencia**: $a \in A$, cuando a es un elemento de A.
- **Cardinalidad**: $|A|$ representa el número de elementos en A.
- **Inclusión**: $A \subseteq B$ si todos los elementos de A son elementos de B.
- **Igualdad**: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.
- **Inclusión propia**: $A \subset B$ si todos los elementos de A son elementos de B y $A \neq B$.
- **Conjunto vacío**: $\varnothing$ o $\{\}$ para representar un conjunto sin elementos.

Notación de conjuntos

- **Pertenencia**: $a \in A$, cuando a es un elemento de A.
- **Cardinalidad**: $|A|$ representa el número de elementos en A.
- **Inclusión**: $A \subseteq B$ si todos los elementos de A son elementos de B.
- **Igualdad**: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.
- **Inclusión propia**: $A \subset B$ si todos los elementos de A son elementos de B y $A \neq B$.
- **Conjunto vacío**: $\varnothing$ o $\{\}$ para representar un conjunto sin elementos.

Notación de conjuntos

Conjuntos

- **Pertenencia**: $a \in A$, cuando a es un elemento de A.
- **Cardinalidad**: $|A|$ representa el número de elementos en A.
- **Inclusión**: $A \subseteq B$ si todos los elementos de A son elementos de B.
- **Igualdad**: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.
- **Inclusión propia**: $A \subset B$ si todos los elementos de A son elementos de B y $A \neq B$.
- **Conjunto vacío**: $\varnothing$ o $\{\}$ para representar un conjunto sin elementos.

Notación de conjuntos

Conjuntos

- **Pertenencia**: $a \in A$, cuando a es un elemento de A.
- **Cardinalidad**: $|A|$ representa el número de elementos en A.
- **Inclusión**: $A \subseteq B$ si todos los elementos de A son elementos de B.
- **Igualdad**: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.
- **Inclusión propia**: $A \subset B$ si todos los elementos de A son elementos de B y $A \neq B$.
- **Conjunto vacío**: $\varnothing$ o $\{\}$ para representar un conjunto sin elementos.

Notación de conjuntos

- **Pertenencia**: $a \in A$, cuando a es un elemento de A.
- **Cardinalidad**: $|A|$ representa el número de elementos en A.
- **Inclusión**: $A \subseteq B$ si todos los elementos de A son elementos de B.
- **Igualdad**: si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$.
- **Inclusión propia**: $A \subset B$ si todos los elementos de A son elementos de B y $A \neq B$.
- **Conjunto vacío**: $\varnothing$ o $\{\}$ para representar un conjunto sin elementos.

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión
Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Pertenencia e inclusión

Conjuntos

1. $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$
2. $\{a\} \subseteq \{b, c, \{a\}\}$
3. $a \subseteq \{a, b, c\}$
4. $\{a\} \in \{b, c, \{a\}\}$
5. $a \in \{a, b, c\}$
6. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$
7. $b \in \{b\}$
8. $\{b\} \subseteq \{\{b, c\}\}$
9. $\{b\} \subseteq \{\{a\}, c, \{b\}\}$
10. $\{c\} \subset \{\{a\}, c, \{b\}\}$

Conjunto vacío

Conjuntos

1. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
3. $0 = \varnothing$
4. $\varnothing \subseteq \varnothing$
5. $\varnothing \subset \varnothing$

Conjunto vacío

Conjuntos

1. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
3. $0 = \varnothing$
4. $\varnothing \subseteq \varnothing$
5. $\varnothing \subset \varnothing$

Conjunto vacío

Conjuntos

1. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
3. $0 = \varnothing$
4. $\varnothing \subseteq \varnothing$
5. $\varnothing \subset \varnothing$

Conjunto vacío

Conjuntos

1. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
3. $0 = \varnothing$
4. $\varnothing \subseteq \varnothing$
5. $\varnothing \subset \varnothing$

Conjunto vacío

Conjuntos

1. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
3. $0 = \varnothing$
4. $\varnothing \subseteq \varnothing$
5. $\varnothing \subset \varnothing$

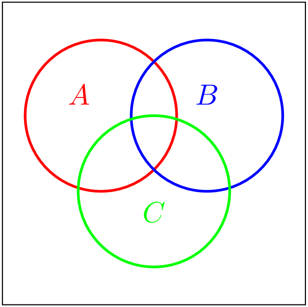
Conjunto vacío

Conjuntos

1. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
2. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
3. $0 = \varnothing$
4. $\varnothing \subseteq \varnothing$
5. $\varnothing \subset \varnothing$

Operaciones de conjuntos

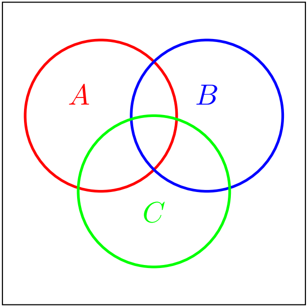
Conjuntos



1. $B \cup C$
2. $C \cup (A \cap B)$
3. $C - (A \cap B)$
4. $A - (B \cup C)$
5. $A^{\complement}$
6. $B - (A \cup C)$
7. $(B - A)^{\complement}$

Operaciones de conjuntos

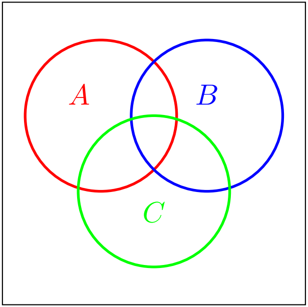
Conjuntos



1. $B \cup C$
2. $C \cup (A \cap B)$
3. $C - (A \cap B)$
4. $A - (B \cup C)$
5. $A^{\complement}$
6. $B - (A \cup C)$
7. $(B - A)^{\complement}$

Operaciones de conjuntos

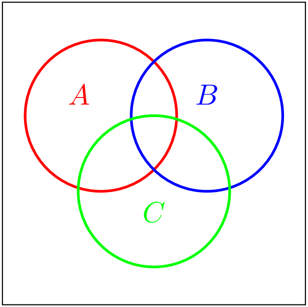
Conjuntos



1. $B \cup C$
2. $C \cup (A \cap B)$
3. $C - (A \cap B)$
4. $A - (B \cup C)$
5. $A^{\complement}$
6. $B - (A \cup C)$
7. $(B - A)^{\complement}$

Operaciones de conjuntos

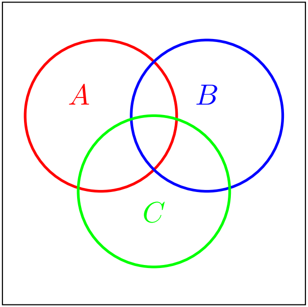
Conjuntos



1. $B \cup C$
2. $C \cup (A \cap B)$
3. $C - (A \cap B)$
4. $A - (B \cup C)$
5. $A^{\complement}$
6. $B - (A \cup C)$
7. $(B - A)^{\complement}$

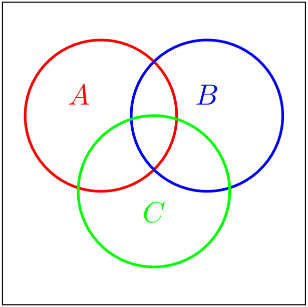
Operaciones de conjuntos

Conjuntos



1. $B \cup C$
2. $C \cup (A \cap B)$
3. $C - (A \cap B)$
4. $A - (B \cup C)$
5. $A^{\complement}$
6. $B - (A \cup C)$
7. $(B - A)^{\complement}$

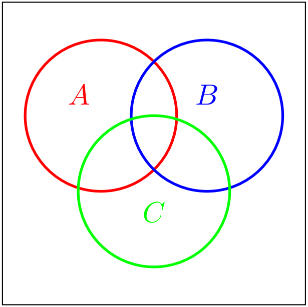
Operaciones de conjuntos



1. $B \cup C$
2. $C \cup (A \cap B)$
3. $C - (A \cap B)$
4. $A - (B \cup C)$
5. $A^{\complement}$
6. $B - (A \cup C)$
7. $(B - A)^{\complement}$

Operaciones de conjuntos

Conjuntos



1. $B \cup C$
2. $C \cup (A \cap B)$
3. $C - (A \cap B)$
4. $A - (B \cup C)$
5. $A^{\complement}$
6. $B - (A \cup C)$
7. $(B - A)^{\complement}$

Producto Cartesiano

Conjuntos

Definición 2

El producto Cartesiano entre A y B se define como:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Producto Cartesiano

Conjuntos

Definición 2

El producto Cartesiano entre A y B se define como:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Producto Cartesiano

Conjuntos

Definición 2

El producto Cartesiano entre A y B se define como:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Producto Cartesiano

Conjuntos

Definición 2

El producto Cartesiano entre A y B se define como:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2\}$$
$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Conjunto potencia

Conjuntos

Definición 3

Sea A cualquier conjunto. El conjunto potencia de A—denotado por $\mathscr{P}(A)$ o $\wp(A)$—consiste en el conjunto de todos (y únicamente) los subconjuntos de A.

$$\mathscr{P}(\{a,b,c\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Conjunto potencia

Definición 3

Sea A cualquier conjunto. El conjunto potencia de A—denotado por $\mathscr{P}(A)$ o $\wp(A)$—consiste en el conjunto de todos (y únicamente) los subconjuntos de A.

$$\mathscr{P}(\{a, b, c\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$$

Conjunto potencia

Conjuntos

Definición 3

Sea A cualquier conjunto. El conjunto potencia de A—denotado por $\mathscr{P}(A)$ o $\wp(A)$—consiste en el conjunto de todos (y únicamente) los subconjuntos de A.

$$\mathscr{P}(\{a,b,c\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$$

La **unión** y la **intersección** son conmutativas.

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Equivalencias

Conjuntos

La **unión** y la **intersección** son conmutativas.

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

La **unión** y la **intersección** son conmutativas.

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Equivalencias

Conjuntos

La **unión** y la **intersección** son asociativas.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

La **unión** y la **intersección** son asociativas.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

La **unión** y la **intersección** son asociativas.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Equivalencias

Conjuntos

La **unión** y la **intersección** son distributivas entre ellas.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

La **unión** y la **intersección** son distributivas entre ellas.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Equivalencias

Conjuntos

La **unión** y la **intersección** son distributivas entre ellas.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Equivalencias

Conjuntos

Leyes de De Morgan:

$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$$

$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$$

Slide de Lógica

Equivalencias

Conjuntos

Leyes de De Morgan:

$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$$

$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$$

▸ Slide de Lógica

Equivalencias

Conjuntos

Leyes de De Morgan:

$$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$$

$$(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$$

▸ Slide de Lógica

Definición 4

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Una relación binaria R *de* A *a* B se define como cualquier subconjunto del producto Cartesiano $A \times B$. Es decir, cualquier conjunto de pares ordenados de la forma (a, b) tal que $a \in A$ y $b \in B$. También se dice que una relación R puede ser *sobre* $A \times B$.

Ejemplo

Menor o igual $(\leq)$ es una **relación** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (2,2), (2,3), \ldots, (3,4), \ldots\}$$

Definición 4

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Una relación binaria R *de* A *a* B se define como cualquier subconjunto del producto Cartesiano $A \times B$. Es decir, cualquier conjunto de pares ordenados de la forma (a, b) tal que $a \in A$ y $b \in B$. También se dice que una relación R puede ser *sobre* $A \times B$.

Ejemplo

Menor o igual $(\leq)$ es una **relación** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(2,2),(2,3),\ldots,(3,4),\ldots\}$$

Definición 5

Sea R una relación binaria. Se dice que es reflexiva sobre un conjunto A si y solo si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.

Ejemplo

Menor o igual $(\leq)$ es una relación **reflexiva** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (1, 2), (1, 3), \ldots, (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (2, 3), \ldots, (3, 4), \ldots\}$$

¿Es la relación *menor que* $(<)$ reflexiva sobre los naturales?

Reflexividad

Definición 5

Sea R una relación binaria. Se dice que es reflexiva sobre un conjunto A si y solo si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.

Ejemplo

Menor o igual $(\leq)$ es una relación **reflexiva** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (1, 2), (1, 3), \ldots, (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (2, 3), \ldots, (3, 4), \ldots\}$$

¿Es la relación *menor que* $(<)$ reflexiva sobre los naturales?

Reflexividad

Relaciones y funciones

Definición 5

Sea R una relación binaria. Se dice que es reflexiva sobre un conjunto A si y solo si $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$.

Ejemplo

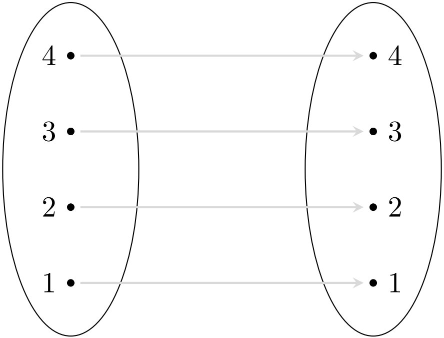
Menor o igual $(\leq)$ es una relación **reflexiva** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (1, 2), (1, 3), \ldots, (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (2, 3), \ldots, (3, 4), \ldots\}$$

¿Es la relación *menor que* $(<)$ reflexiva sobre los naturales?

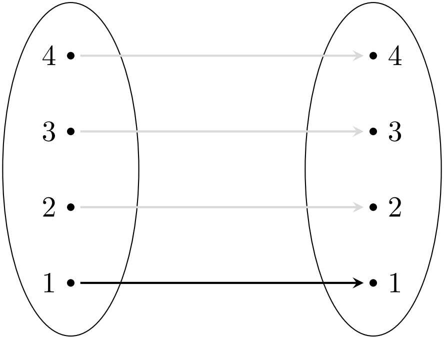
Reflexividad

Relaciones y funciones



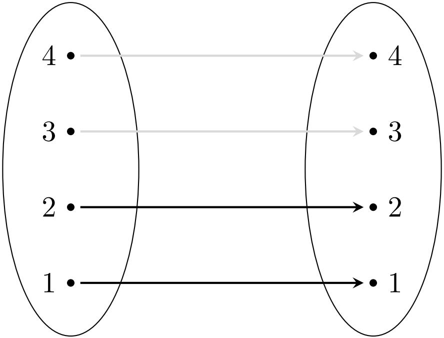
Reflexividad

Relaciones y funciones



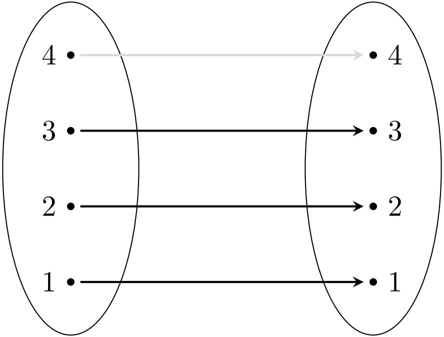
Reflexividad

Relaciones y funciones



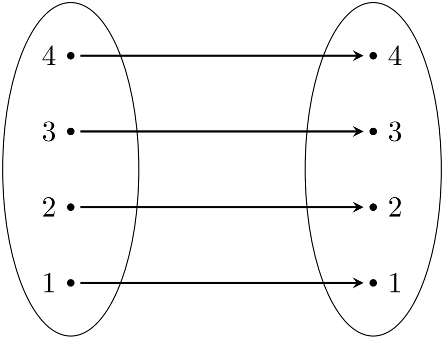
Reflexividad

Relaciones y funciones



Reflexividad

Relaciones y funciones



Definición 6

Decimos que R es transitiva si y sólo si cuando $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$.

Ejemplo

Menor o igual $(\leq)$ es una relación **transitiva** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(1,1), (\mathbf{1},\mathbf{2}), (\mathbf{1},\mathbf{3}), \ldots, (2,2), (\mathbf{2},\mathbf{3}), \ldots, (3,4), \ldots\}$$

¿Es la relación *menor que* $(<)$ transitiva sobre los naturales?

Transitividad

Relaciones y funciones

Definición 6

Decimos que R es transitiva si y sólo si cuando $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

Ejemplo

Menor o igual $(\leq)$ es una relación **transitiva** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(1,1), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{3}), \ldots, (2,2), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), \ldots, (3,4), \ldots\}$$

¿Es la relación *menor que* $(<)$ transitiva sobre los naturales?

Transitividad

Definición 6

Decimos que R es transitiva si y sólo si cuando $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

Ejemplo

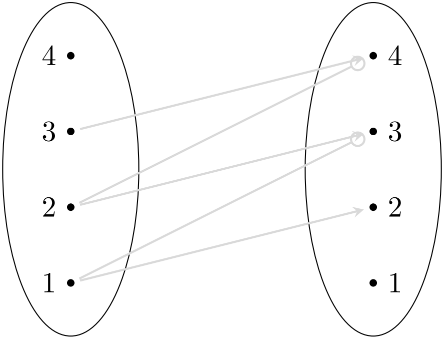
Menor o igual $(\leq)$ es una relación **transitiva** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\leq = \{(1,1), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{3}), \ldots, (2,2), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), \ldots, (3,4), \ldots\}$$

¿Es la relación *menor que* $(<)$ transitiva sobre los naturales?

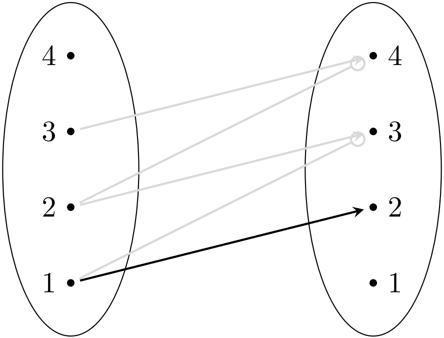
Transitividad

Relaciones y funciones



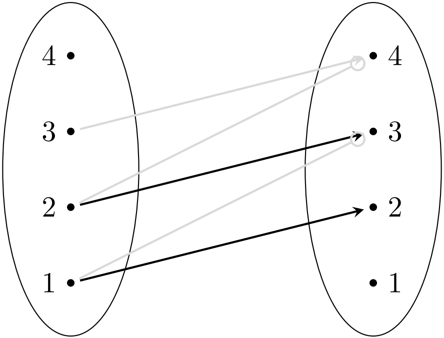
Transitividad

Relaciones y funciones



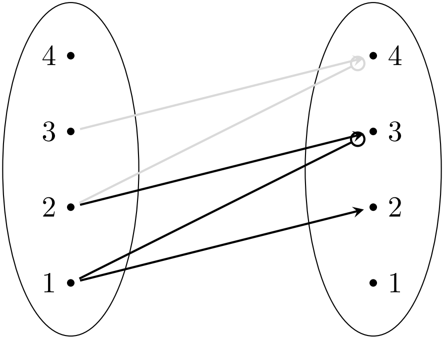
Transitividad

Relaciones y funciones



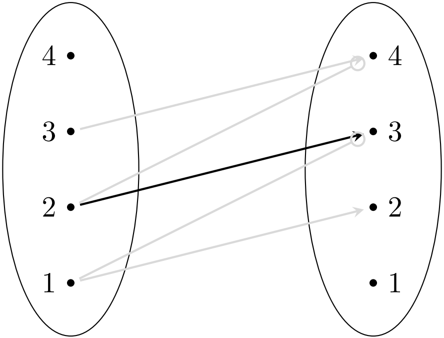
Transitividad

Relaciones y funciones



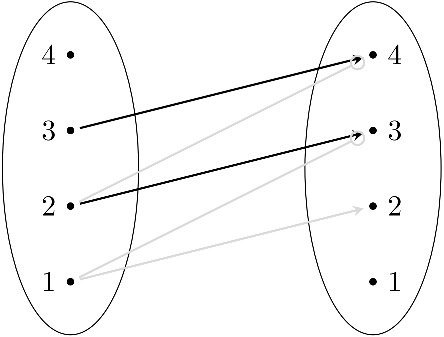
Transitividad

Relaciones y funciones



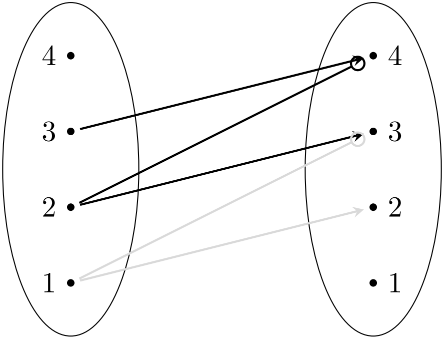
Transitividad

Relaciones y funciones



Transitividad

Relaciones y funciones



Definición 7

Una relación R es simétrica si y sólo si cuando $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.

Ejemplo 1

La relación de *igualdad* $(=)$ es una relación **simétrica**: si $a = b$, entonces $b = a$.

Ejemplo 2

La relación de *hermandad* es **simétrica**: si $Juan$ es hermano de $Pedro$, entonces $Pedro$ es hermano de $Juan$.

Simetría

Relaciones y funciones

Definición 7

Una relación R es simétrica si y sólo si cuando $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.

Ejemplo 1

La relación de *igualdad* $(=)$ es una relación **simétrica**: si $a = b$, entonces $b = a$.

Ejemplo 2

La relación de *hermandad* es **simétrica**: si $Juan$ es hermano de $Pedro$, entonces $Pedro$ es hermano de $Juan$.

Simetría

Relaciones y funciones

Definición 7

Una relación R es simétrica si y sólo si cuando $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.

Ejemplo 1

La relación de *igualdad* $(=)$ es una relación **simétrica**: si $a = b$, entonces $b = a$.

Ejemplo 2

La relación de *hermandad* es **simétrica**: si $Juan$ es hermano de $Pedro$, entonces $Pedro$ es hermano de $Juan$.

Mapeo o Función

Relaciones y Funciones

¿Cualquier relación es una función?

¿Cualquier función es una relación?

Mapeo o Función

Relaciones y Funciones

¿Cualquier relación es una función?

¿Cualquier función es una relación?

Definición 8

Una función *unitaria* de un conjunto A en un conjunto B es cualquier relación binaria R de A a B que satisfaga la condición de que *para todo* $a \in A$ existe *exactamente un* $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

Podemos describir una función f de A en B como $f : A \to B$.

Ejemplo

La relación *sucesor* es una **función** de los naturales en los naturales $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{suc}(n) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \dots\}$$

Definición 8

Una función *unitaria* de un conjunto A en un conjunto B es cualquier relación binaria R de A a B que satisfaga la condición de que *para todo* $a \in A$ existe *exactamente un* $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

Podemos describir una función f de A en B como $f : A \to B$.

Ejemplo

La relación *sucesor* es una **función** de los naturales en los naturales $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{suc}(n) = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),\dots\}$$

Mapeo o Función

Definición 8

Una función *unitaria* de un conjunto A en un conjunto B es cualquier relación binaria R de A a B que satisfaga la condición de que *para todo* $a \in A$ existe *exactamente un* $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$.

Podemos describir una función f de A en B como $f : A \to B$.

Ejemplo

La relación *sucesor* es una **función** de los naturales en los naturales
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathtt{suc}(n) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \dots\}$$

Dominio

Funciones y Relaciones

Definición 9

El dominio de una función f puede definirse como

$$\mathtt{dom}(f) = \{a \in A : \exists b \in B, f(a) = b\}$$

En una función de forma $f : A \to B$, el **dominio** es simplemente A.

Dominio

Funciones y Relaciones

Definición 9

El dominio de una función f puede definirse como

$$\mathtt{dom}(f) = \{a \in A : \exists b \in B, f(a) = b\}$$

En una función de forma $f : A \to B$, el **dominio** es simplemente A.

Codominio o Rango

Definición 10

El codominio (también conocido como rango) de una función f puede definirse como

$$\texttt{codom}(f) = \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\}$$

En una función de forma $f : A \to B$, el **codominio** es simplemente B.

Codominio o Rango

Definición 10

El codominio (también conocido como rango) de una función f puede definirse como

$$\texttt{codom}(f) = \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\}$$

En una función de forma $f : A \to B$, el **codominio** es simplemente B.

Definición 11

Una función parcial de un conjunto A a un conjunto B es una relación binaria R de A a B tal que para toda $a \in A$, hay *a lo mucho* un $b \in B$ con $(a, b) \in R$.

Es decir que puede haber elementos en A que no tengan la relación R a ningún elemento de B; o en otras palabras, que no se *usen*.

A las funciones donde se utilizan **todos** los elementos de A les llamamos funciones totales, y son usualmente a las que nos referimos al simplemente decir "funciones".

Funciones totales y parciales

Definición 11

Una función parcial de un conjunto A a un conjunto B es una relación binaria R de A a B tal que para toda $a \in A$, hay *a lo mucho* un $b \in B$ con $(a, b) \in R$.

Es decir que puede haber elementos en A que no tengan la relación R a ningún elemento de B; o en otras palabras, que no se *usen*.

A las funciones donde se utilizan **todos** los elementos de A les llamamos funciones totales, y son usualmente a las que nos referimos al simplemente decir "funciones".

Funciones totales y parciales

Definición 11

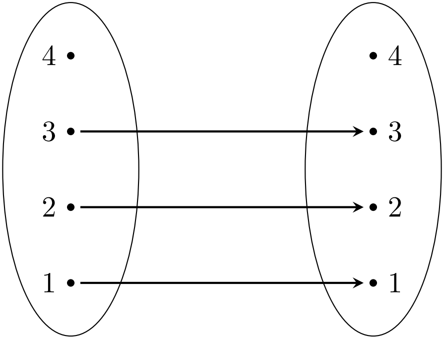
Una función parcial de un conjunto A a un conjunto B es una relación binaria R de A a B tal que para toda $a \in A$, hay *a lo mucho* un $b \in B$ con $(a, b) \in R$.

Es decir que puede haber elementos en A que no tengan la relación R a ningún elemento de B; o en otras palabras, que no se *usen*.

A las funciones donde se utilizan **todos** los elementos de A les llamamos funciones totales, y son usualmente a las que nos referimos al simplemente decir "funciones".

Funciones Parciales

Relaciones y funciones



Definición 12

Sean $f : A \to B$ y $X \subseteq A$. La imagen *bajo* f de $X \subseteq A$ es el conjunto $\{b \in B : \exists a \in X, b = f(a)\}$, o bien $\{f(a) : a \in A\}$.

En otras palabras, la **imagen** de una función es el conjunto de todos los *valores* de B que *utiliza*. Puede haber elementos de B fuera de la función.

Todo B es el **codominio** de la función, y sólo aquellos $b \in B$ que son usados representan la **imagen** de la función.

Definición 12

Sean $f : A \to B$ y $X \subseteq A$. La imagen *bajo* f de $X \subseteq A$ es el conjunto $\{b \in B : \exists a \in X, b = f(a)\}$, o bien $\{f(a) : a \in A\}$.

En otras palabras, la **imagen** de una función es el conjunto de todos los *valores* de B que *utiliza*. Puede haber elementos de B fuera de la función.

Todo B es el **codominio** de la función, y sólo aquellos $b \in B$ que son usados representan la **imagen** de la función.

Definición 13

Sea $f : A \to B$. Se dice que f es inyectiva (o uno a uno) si y sólo si cuando $a \neq a'$, entonces $f(a) \neq f(a')$.

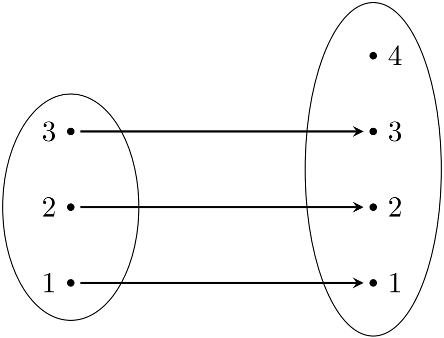
En otras palabras, si y sólo si para cada $b \in B$, hay a lo mucho un $a \in A$ con $f(a) = b$. Es decir, sólo si distintos *inputs* generan *outputs* diferentes.

Definición 13

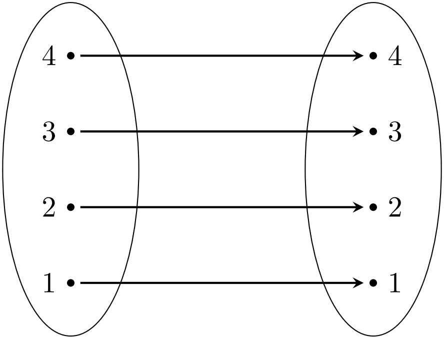
Sea $f : A \to B$. Se dice que f es inyectiva (o uno a uno) si y sólo si cuando $a \neq a'$, entonces $f(a) \neq f(a')$.

En otras palabras, si y sólo si para cada $b \in B$, hay a lo mucho un $a \in A$ con $f(a) = b$. Es decir, sólo si distintos *inputs* generan *outputs* diferentes.

Funciones inyectivas



Funciones inyectivas



Funciones sobreyectivas

Definición 14

Sea $f : A \to B$. Decimos que f es una función sobre B (o sobreyectiva con respecto a B) si y sólo si para todo $b \in B$ hay algún $a \in A$ con $f(a) = b$.

Una manera mucho más sencilla de verlo: si y sólo si $\texttt{imagen}(f) = B$.

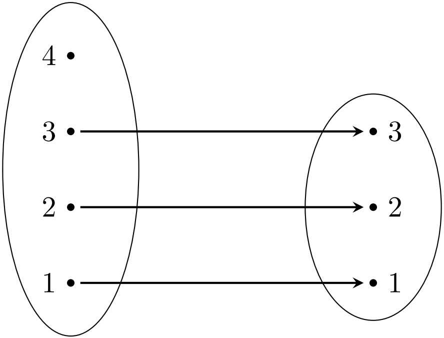
Definición 14

Sea $f : A \to B$. Decimos que f es una función sobre B (o sobreyectiva con respecto a B) si y sólo si para todo $b \in B$ hay algún $a \in A$ con $f(a) = b$.

Una manera mucho más sencilla de verlo: si y sólo si $\mathtt{imagen}(f) = B$.

Funciones sobreyectivas

Relaciones y Funciones

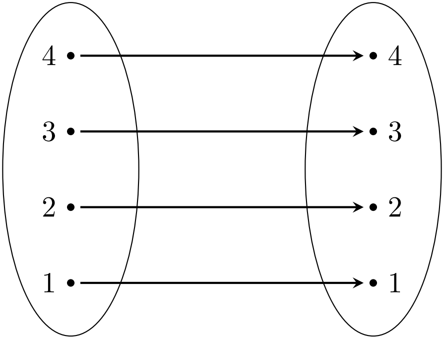


Funciones biyectivas

Definición 15

Se dice que una función es biyectiva si y sólo si es **inyectiva** y **sobre**.

Funciones biyectivas



Conjuntos infinitos

- Los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ son infinitos. Algunos autores consideran que $0 \in \mathbb{N}$, otros no. $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito **contable**.
- Los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$ son también **infinitos contables** porque existe una **biyección** que los empareja uno a uno con cada $n \in \mathbb{N}$.
- Los números irracionales $\mathbb{Q}'$ y los reales $\mathbb{R}$ en cambio, **son infinitos no contables** porque no existe biyección que empareje uno a uno sus elementos con todo $n \in \mathbb{N}$.
- $|\mathscr{P}(A)| \gg |A|$—no existe biyección que pueda emparejar uno a uno los elementos de ambos conjuntos, por lo que $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| \gg |\mathbb{N}|$. El conjunto potencia de los naturales es **infinito no contable**.

Conjuntos infinitos

Relaciones y Funciones

- Los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ son infinitos. Algunos autores consideran que $0 \in \mathbb{N}$, otros no. $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito **contable**.

- Los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$ son también **infinitos contables** porque existe una **biyección** que los empareja uno a uno con cada $n \in \mathbb{N}$.

- Los números irracionales $\mathbb{Q}'$ y los reales $\mathbb{R}$ en cambio, **son infinitos no contables** porque no existe biyección que empareje uno a uno sus elementos con todo $n \in \mathbb{N}$.

- $|\mathscr{P}(A)| \gg |A|$—no existe biyección que pueda emparejar uno a uno los elementos de ambos conjuntos, por lo que $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| \gg |\mathbb{N}|$. El conjunto potencia de los naturales es **infinito no contable**.

Conjuntos infinitos

- Los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ son infinitos. Algunos autores consideran que $0 \in \mathbb{N}$, otros no. $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito **contable**.
- Los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$ son también **infinitos contables** porque existe una **biyección** que los empareja uno a uno con cada $n \in \mathbb{N}$.
- Los números irracionales $\mathbb{Q}'$ y los reales $\mathbb{R}$ en cambio, **son infinitos no contables** porque no existe biyección que empareje uno a uno sus elementos con todo $n \in \mathbb{N}$.
- $|\mathscr{P}(A)| \gg |A|$—no existe biyección que pueda emparejar uno a uno los elementos de ambos conjuntos, por lo que $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| \gg |\mathbb{N}|$. El conjunto potencia de los naturales es **infinito no contable**.

Conjuntos infinitos

- Los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ son infinitos. Algunos autores consideran que $0 \in \mathbb{N}$, otros no. $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito **contable**.
- Los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$ son también **infinitos contables** porque existe una **biyección** que los empareja uno a uno con cada $n \in \mathbb{N}$.
- Los números irracionales $\mathbb{Q}'$ y los reales $\mathbb{R}$ en cambio, **son infinitos no contables** porque no existe biyección que empareje uno a uno sus elementos con todo $n \in \mathbb{N}$.
- $|\mathscr{P}(A)| \gg |A|$—no existe biyección que pueda emparejar uno a uno los elementos de ambos conjuntos, por lo que $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| \gg |\mathbb{N}|$. El conjunto potencia de los naturales es **infinito no contable**.

Conectivos lógicos

Lógica

- La disyunción ($\vee$) funciona de manera similar a la **unión** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica `OR`.

- La conjunción ($\wedge$) funciona de manera similar a la **intersección** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica `AND`.

- La negación ($\neg$) funciona de manera similar al **complemento**. Su compuerta lógica es el `NOT`.

¿Puedes describir la implicación y la doble implicación? ¿Cuáles de las leyes de conjuntos aplican también para lógica? Slide de Equivalencias

Conectivos lógicos

- La disyunción ($\vee$) funciona de manera similar a la **unión** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica `OR`.
- La conjunción ($\wedge$) funciona de manera similar a la **intersección** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica `AND`.
- La negación ($\neg$) funciona de manera similar al **complemento**. Su compuerta lógica es el `NOT`.

¿Puedes describir la implicación y la doble implicación? ¿Cuáles de las leyes de conjuntos aplican también para lógica? Slide de Equivalencias

Conectivos lógicos

- La disyunción ($\vee$) funciona de manera similar a la **unión** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica `OR`.
- La conjunción ($\wedge$) funciona de manera similar a la **intersección** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica `AND`.
- La negación ($\neg$) funciona de manera similar al **complemento**. Su compuerta lógica es el `NOT`.

¿Puedes describir la implicación y la doble implicación? ¿Cuáles de las leyes de conjuntos aplican también para lógica? Slide de Equivalencias

Conectivos lógicos

- La disyunción ($\vee$) funciona de manera similar a la **unión** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica `OR`.
- La conjunción ($\wedge$) funciona de manera similar a la **intersección** en los conjuntos. Le corresponde la compuerta lógica `AND`.
- La negación ($\neg$) funciona de manera similar al **complemento**. Su compuerta lógica es el `NOT`.

¿Puedes describir la implicación y la doble implicación? ¿Cuáles de las leyes de conjuntos aplican también para lógica? Slide de Equivalencias

La **conjunción** y la **disyunción** son conmutativas.

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge q = q \wedge p$$

Equivalencias
Lógica

La **conjunción** y la **disyunción** son conmutativas.

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge q = q \wedge p$$

La **conjunción** y la **disyunción** son conmutativas.

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge q = q \wedge p$$

Equivalencias
Lógica

La **conjunción** y la **disyunción** son asociativas.

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$

La **conjunción** y la **disyunción** son asociativas.

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$

La **conjunción** y la **disyunción** son asociativas.

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$

La **conjunción** y la **disyunción** son distributivas entre ellas.

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Equivalencias

Lógica

La **conjunción** y la **disyunción** son distributivas entre ellas.

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Equivalencias
Lógica

La **conjunción** y la **disyunción** son distributivas entre ellas.

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Equivalencias

Lógica

Leyes de De Morgan:

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

Equivalencias
Lógica

Leyes de De Morgan:

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

Leyes de De Morgan:

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$