Conversión de AFNs a AFDs

Matemáticas Computacionales (TC2020)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx

Tecnológico de Monterrey

Tabla de contenidos

¿Por qué convertir?
AFNs versus AFDs

Una máquina no determinista hace que el **diseño** sea más sencillo.

Una máquina determinista hace que la **implementación** sea más sencilla.

La realidad es que un lenguaje es aceptado por una máquina determinista **si y solo si** es aceptado por una máquina no determinista.

¿Por qué convertir?

AFNs versus AFDs

Una máquina no determinista hace que el **diseño** sea más sencillo.

Una máquina determinista hace que la **implementación** sea más sencilla.

La realidad es que un lenguaje es aceptado por una máquina determinista **si y solo si** es aceptado por una máquina no determinista.

¿Por qué convertir?

AFNs versus AFDs

Una máquina no determinista hace que el **diseño** sea más sencillo.

Una máquina determinista hace que la **implementación** sea más sencilla.

La realidad es que un lenguaje es aceptado por una máquina determinista **si y solo si** es aceptado por una máquina no determinista.

Equivalencia

AFNs versus AFDs

Equivalencia de AFDs y AFNs

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ un autómata no determinista. Existe un autómata determinista M tal que $L(M) = L(N)$.

El estado en el que se encuentra M después de haber leído la parte inicial de una palabra corresponde exactamente al **conjunto de todos los estados** que N puede alcanzar tras haber leído la misma parte de la palabra.

Equivalencia de AFDs y AFNs

Sea $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ un autómata no determinista. Existe un autómata determinista M tal que $L(M) = L(N)$.

El estado en el que se encuentra M después de haber leído la parte inicial de una palabra corresponde exactamente al **conjunto de todos los estados** que N puede alcanzar tras haber leído la misma parte de la palabra.

Equivalencia

AFNs versus AFDs

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$$

$$M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$$

¿Cómo pasamos de un AFN a un AFD?

Equivalencia
AFNs versus AFDs

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$$

$$M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$$

¿Cómo pasamos de un AFN a un AFD?

Equivalencia
AFNs versus AFDs

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$$

$$M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$$

¿Cómo pasamos de un AFN a un AFD?

Estados de estados

Conversión de AFN a AFD

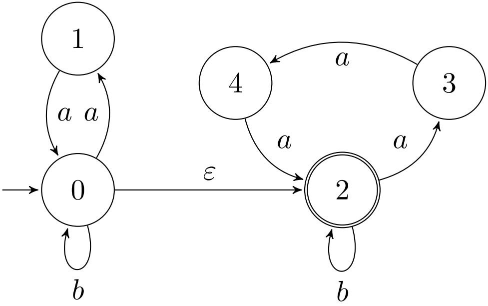
El AFN **acepta** una palabra si existe al menos un estado final dentro del conjunto de estados donde la secuencia termina.

La palabra aa termina en $\{0, 2, 4\}$.
Podemos pensar entonces que $\{0, 2, 4\}$ tendría que ser un **estado final** en el AFD equivalente.

Estados de estados

Conversión de AFN a AFD

El AFN **acepta** una palabra si existe al menos un estado final dentro del conjunto de estados donde la secuencia termina.

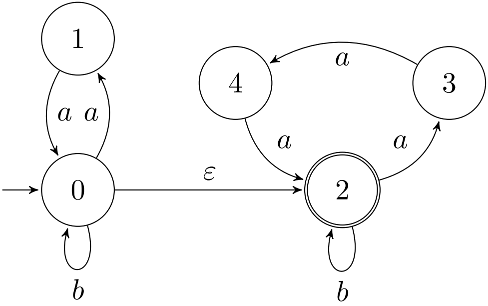


La palabra aa termina en $\{0, 2, 4\}$.
Podemos pensar entonces que $\{0, 2, 4\}$ tendría que ser un **estado final** en el AFD equivalente.

Estados de estados

Conversión de AFN a AFD

El AFN **acepta** una palabra si existe al menos un estado final dentro del conjunto de estados donde la secuencia termina.



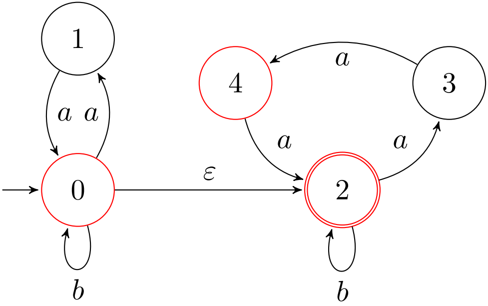
La palabra aa termina en $\{0, 2, 4\}$.

Podemos pensar entonces que $\{0, 2, 4\}$ tendría que ser un **estado final** en el AFD equivalente.

Estados de estados

Conversión de AFN a AFD

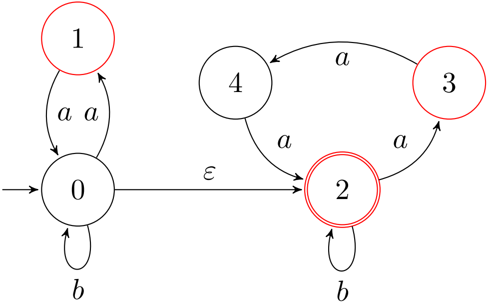
El AFN **acepta** una palabra si existe al menos un estado final dentro del conjunto de estados donde la secuencia termina.



La palabra aa termina en $\{0, 2, 4\}$.
Podemos pensar entonces que $\{0, 2, 4\}$ tendría que ser un **estado final** en el AFD equivalente.

Estados de estados

Conversión de AFN a AFD

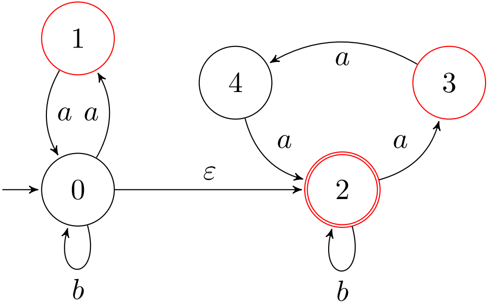


La palabra $abbaa$ termina en $\{1, 2, 3\}$.

Podemos pensar entonces que $\{1, 2, 3\}$ también tendría que ser un **estado final** en el AFD equivalente.

Estados de estados

Conversión de AFN a AFD



La palabra $abbaa$ termina en $\{1, 2, 3\}$.
Podemos pensar entonces que $\{1, 2, 3\}$ también tendría que ser un **estado final** en el AFD equivalente.

Conjunto de estados

Conversión de AFN a AFD

Significa que el AFD equivalente, M, tiene que tener **estados finales** de conjuntos de estados donde se acepte la palabra en el AFN.

Por tanto, $Q' = \wp(Q)$: el conjunto de estados de M es igual al conjunto potencia del conjunto de estados de N.

Conjunto de estados

Conversión de AFN a AFD

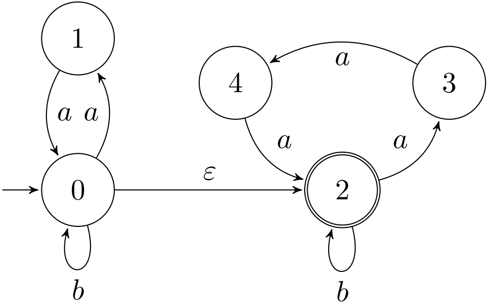
Significa que el AFD equivalente, M, tiene que tener **estados finales** de conjuntos de estados donde se acepte la palabra en el AFN.

Por tanto, $Q' = \wp(Q)$: el conjunto de estados de M es igual al conjunto potencia del conjunto de estados de N.

Cerradura de vacío (ε)

Conversión de AFN a AFD

Dado a que existe una transición ε entre 0 y 2 en N, claramente el estado inicial en M debe considerar $\{0, 2\}$.

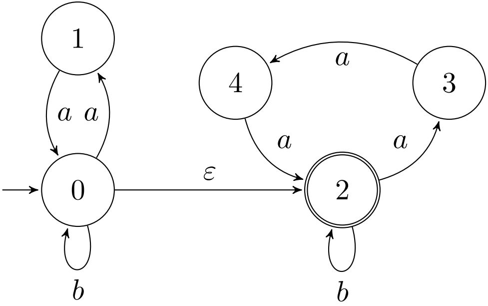


Para eso, hay que enfocarnos en la cerradura-ε, $C_{\varepsilon}(r)$, donde r es cualquier estado del AFN N.

Cerradura de vacío (ε)

Conversión de AFN a AFD

Dado a que existe una transición ε entre 0 y 2 en N, claramente el estado inicial en M debe considerar $\{0, 2\}$.



Para eso, hay que enfocarnos en la cerradura-ε, $C_\varepsilon(r)$, donde r es cualquier estado del AFN N.

Cerradura de vacío (ε)

Conversión de AFN a AFD

Definición

Para cada estado r del AFN N, la cerradura de vacío, representada con $C_\varepsilon(r)$, se define como el conjunto de todos los estados de N que pueden alcanzarse desde r, haciendo cero o más transiciones ε.

Equivalencia en AFDs

Para cada estado R del AFD M (es decir, $R \subseteq Q$):

$$C_\varepsilon(R) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(r)$$

Cerradura de vacío (ε)

Definición

Para cada estado r del AFN N, la cerradura de vacío, representada con $C_\varepsilon(r)$, se define como el conjunto de todos los estados de N que pueden alcanzarse desde r, haciendo cero o más transiciones ε.

Equivalencia en AFDs

Para cada estado R del AFD M (es decir, $R \subseteq Q$):

$$C_\varepsilon(R) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(r)$$

El estado inicial

Conversión de AFN a AFD

El estado inicial q' en un AFD M, antes de leer cualquier símbolo 'real' de Σ, hace cero o más transiciones ε.

Al momento de que N lee el primer símbolo de Σ, puede estar en cualquier estado de $C_\varepsilon(q)$. Por tanto:

$$q' = C_\varepsilon(q) = C_\varepsilon(\{q\})$$

El estado inicial

Conversión de AFN a AFD

El estado inicial q' en un AFD M, antes de leer cualquier símbolo 'real' de Σ, hace cero o más transiciones ε.

Al momento de que N lee el primer símbolo de Σ, puede estar en cualquier estado de $C_\varepsilon(q)$. Por tanto:

$$q' = C_\varepsilon(q) = C_\varepsilon(\{q\})$$

El conjunto de estados finales

Conversión de AFN a AFD

El conjunto de estados finales F' del AFD M, es igual al conjunto de **todos** los elementos R de Q' que tienen la propiedad de que R contiene al menos un estado final del AFN N, es decir:

$$F' = \{R \in Q' : R \cap F \neq \varnothing\}$$

El conjunto de estados finales

Conversión de AFN a AFD

El conjunto de estados finales F' del AFD M, es igual al conjunto de **todos** los elementos R de Q' que tienen la propiedad de que R contiene al menos un estado final del AFN N, es decir:

$$F' = \{R \in Q' : R \cap F \neq \varnothing\}$$

Pensemos que el AFD M está en el estado R y que recibe el símbolo a. En este momento, el AFN N habría estado en **cualquier** estado r que esté en R.

Al leer el símbolo a, la máquina N puede cambiar hacia **cualquier** estado de $\delta(r, a)$, y luego hacer cero o más transiciones-ε. Por lo que, para cada $R \in Q'$, y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

La función de transición

Conversión de AFN a AFD

Pensemos que el AFD M está en el estado R y que recibe el símbolo a. En este momento, el AFN N habría estado en **cualquier** estado r que esté en R.

Al leer el símbolo a, la máquina N puede cambiar hacia **cualquier** estado de $\delta(r, a)$, y luego hacer cero o más transiciones-ε. Por lo que, para cada $R \in Q'$, y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

La función de transición

Conversión de AFN a AFD

Pensemos que el AFD M está en el estado R y que recibe el símbolo a. En este momento, el AFN N habría estado en **cualquier** estado r que esté en R.

Al leer el símbolo a, la máquina N puede cambiar hacia **cualquier** estado de $\delta(r, a)$, y luego hacer cero o más transiciones-ε. Por lo que, para cada $R \in Q'$, y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

Resumen

Conversión de AFN a AFD

Un autómata **finito no determinista** $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ es convertido al autómata **finito determinista** $M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$, donde:

- $Q' = \wp(Q)$,
- $q' = C_\varepsilon(\{q\})$
- $F' = \{R \in Q; : R \cap F \neq \varnothing\}$
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, donde para cada $R \in Q'$ y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

¿Qué hace falta?
Hay que eliminar transiciones de varios símbolos, partiendo en una secuencia de estados.

Resumen

Conversión de AFN a AFD

Un autómata **finito no determinista** $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ es convertido al autómata **finito determinista** $M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$, donde:

- $Q' = \wp(Q)$,
- $q' = C_\varepsilon(\{q\})$
- $F' = \{R \in Q; : R \cap F \neq \varnothing\}$
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, donde para cada $R \in Q'$ y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

¿Qué hace falta?
Hay que eliminar transiciones de varios símbolos, partiendo en una secuencia de estados.

Resumen

Conversión de AFN a AFD

Un autómata **finito no determinista** $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ es convertido al autómata **finito determinista** $M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$, donde:

- $Q' = \wp(Q)$,
- $q' = C_\varepsilon(\{q\})$
- $F' = \{R \in Q; : R \cap F \neq \varnothing\}$
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, donde para cada $R \in Q'$ y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

¿Qué hace falta?

Hay que eliminar transiciones de varios símbolos, partiendo en una secuencia de estados.

Resumen

Conversión de AFN a AFD

Un autómata **finito no determinista** $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ es convertido al autómata **finito determinista** $M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$, donde:

- $Q' = \wp(Q)$,
- $q' = C_\varepsilon(\{q\})$
- $F' = \{R \in Q; : R \cap F \neq \varnothing\}$
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, donde para cada $R \in Q'$ y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

¿Qué hace falta?

Hay que eliminar transiciones de varios símbolos, partiendo en una secuencia de estados.

Resumen

Conversión de AFN a AFD

Un autómata **finito no determinista** $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ es convertido al autómata **finito determinista** $M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$, donde:

- $Q' = \wp(Q)$,
- $q' = C_\varepsilon(\{q\})$
- $F' = \{R \in Q;: R \cap F \neq \varnothing\}$
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, donde para cada $R \in Q'$ y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

¿Qué hace falta?
Hay que eliminar transiciones de varios símbolos, partiendo en una secuencia de estados.

Resumen

Conversión de AFN a AFD

Un autómata **finito no determinista** $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ es convertido al autómata **finito determinista** $M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$, donde:

- $Q' = \wp(Q)$,
- $q' = C_\varepsilon(\{q\})$
- $F' = \{R \in Q; : R \cap F \neq \varnothing\}$
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, donde para cada $R \in Q'$ y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

¿Qué hace falta?

Hay que eliminar transiciones de varios símbolos, partiendo en una secuencia de estados.

Resumen

Conversión de AFN a AFD

Un autómata **finito no determinista** $N = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ es convertido al autómata **finito determinista** $M = (Q', \Sigma, \delta', q', F')$, donde:

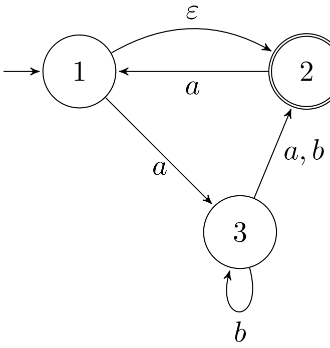
- $Q' = \wp(Q)$,
- $q' = C_\varepsilon(\{q\})$
- $F' = \{R \in Q; : R \cap F \neq \varnothing\}$
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, donde para cada $R \in Q'$ y para cada $a \in \Sigma$,

$$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} C_\varepsilon(\delta(r, a))$$

¿Qué hace falta?
Hay que eliminar transiciones de varios símbolos, partiendo en una secuencia de estados.

Ejemplo

Conversión de AFN a AFD



Ejemplo: complemento

Conversión de AFN a AFD

Si tenemos que hacer un AF que acepte las palabras en $\{a, b\}$ que **no contienen** ni abb ni aab...

Se puede hacer primero un AFN que acepte las que contienen abb o bien aab.

Luego se convierte a AFD.

Y luego se encuentra la máquina complemento.

Ejemplo: complemento

Conversión de AFN a AFD

Si tenemos que hacer un AF que acepte las palabras en $\{a, b\}$ que **no contienen** ni abb ni aab...

Se puede hacer primero un AFN que acepte las que contienen abb o bien aab.

Luego se convierte a AFD.

Y luego se encuentra la máquina complemento.

Ejemplo: complemento

Conversión de AFN a AFD

Si tenemos que hacer un AF que acepte las palabras en $\{a, b\}$ que **no contienen** ni abb ni aab...

Se puede hacer primero un AFN que acepte las que contienen abb o bien aab.

Luego se convierte a AFD.

Y luego se encuentra la máquina complemento.

Ejemplo: complemento

Conversión de AFN a AFD

Si tenemos que hacer un AF que acepte las palabras en $\{a, b\}$ que **no contienen** ni abb ni aab...

Se puede hacer primero un AFN que acepte las que contienen abb o bien aab.

Luego se convierte a AFD.

Y luego se encuentra la máquina complemento.

Ejemplo: intersección

Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement}$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.

Ejemplo: intersección

Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement}$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.

Ejemplo: intersección

Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement}$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.

Ejemplo: intersección

Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^\complement \cup B^\complement)^\complement$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.

Ejemplo: intersección
Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement}$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.

Ejemplo: intersección

Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement}$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.

Ejemplo: intersección
Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement}$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.

Ejemplo: intersección

Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^\complement \cup B^\complement)^\complement$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.

Ejemplo: intersección

Conversión de AFN a AFD

Buscamos ahora un AFN que acepte palabras en $\{a, b\}$ con número impar de bs y que contiene aab...

¿Cuál es la solución? $A \cap B = (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement}$

- Hacer los AFN de los componentes.
- Convertirlos a AFDs.
- Complementarlos.
- Hacer la unión.
- Convertir el nuevo AFN a un AFD.
- Encontrar la máquina complemento.