Graph Theory
(with no Computer)

圖論
(不可使用電腦)

林劭原老師

林劭原 老師

組合數學的一些領域

- graph theory 圖論
- group testing theory 群試理論
- coding theory 編碼理論

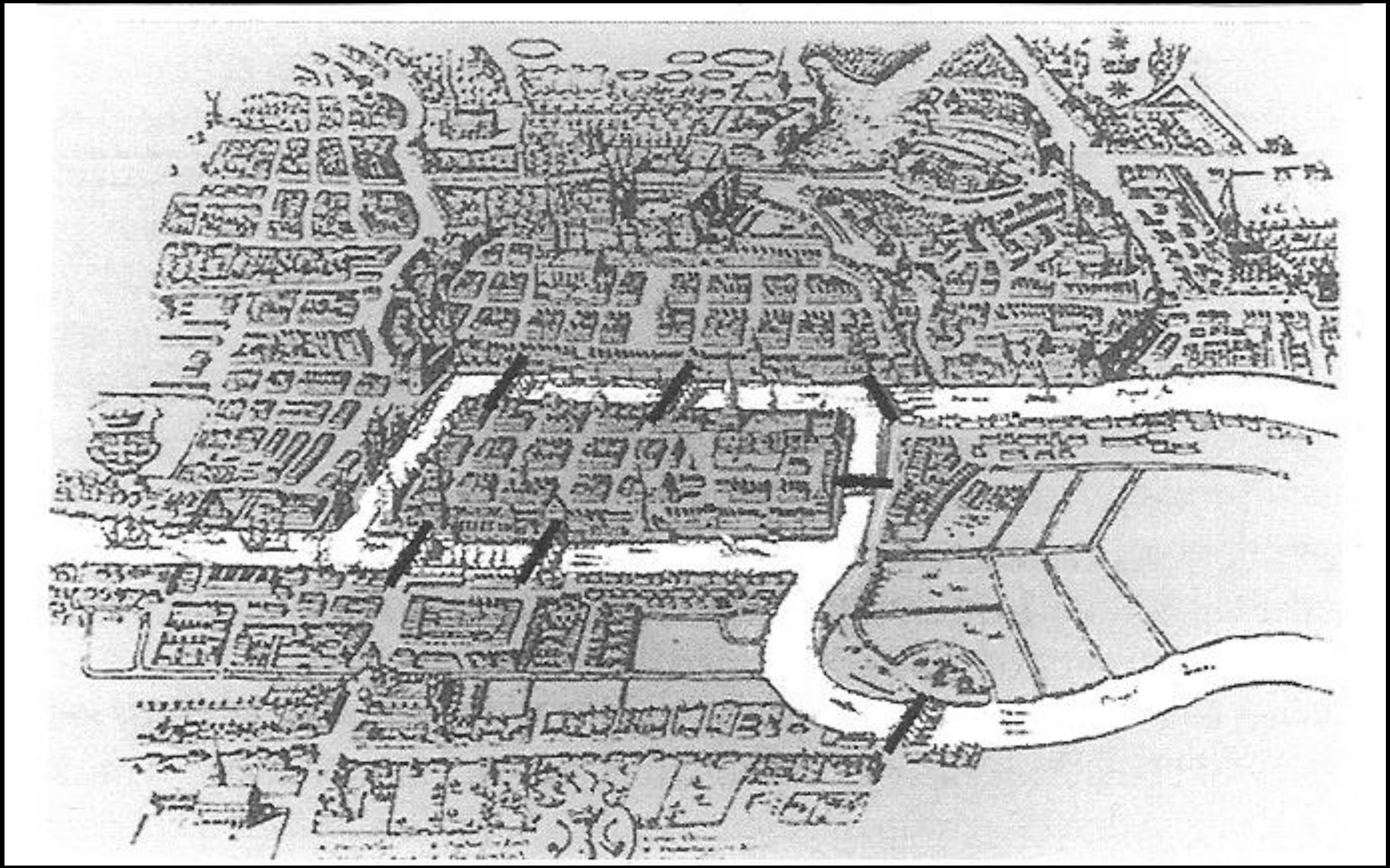
林劭原 老師

Graph Theory 圖論

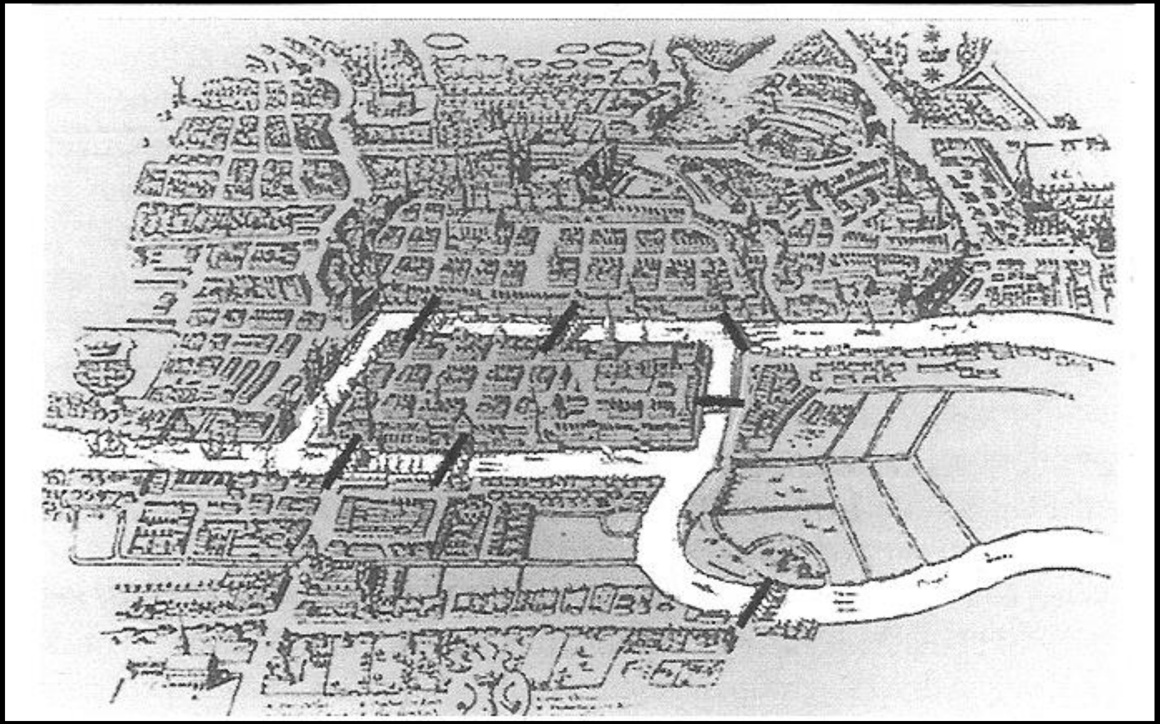
- 圖論是組合數學(離散數學)的一個分支，普遍認為起源於1736年 Euler 所提出的柯尼斯堡七橋問題，其他著名的問題包含
- four color theorem 四色問題
- Hamilton問題
- minimum spanning tree problem 最小生成樹問題
- Chinese Postman Problem 中國郵遞員問題
- Shortest Path Problems 最短路徑問題
- minimum cost flow problem 最小成本流問題
- minimum dominating set 最小的連通控制集
- Ramsey 問題

林劭原 老師

Seven Bridges of Königsberg 柯尼斯堡七橋問題



Seven Bridges of Königsberg 柯尼斯堡七橋問題



圖graph的定義

- 一個圖G包含了兩個集合：點集vertex set V(G)和邊集edge set E(G)，其中E $\subseteq \{uv|u, v \in V(G)\}$，常用$G = (V, E)$來表示一個圖。
- 若 u, v 之間有邊相連，則稱 u, v相鄰(adjacent)，它們互為對方的鄰居(neighbor)。
- $N_G(v) = \{u|u\ is\ neighbor\ of\ v\}$

圖graph的定義

- 若邊是沒有方向性的，則稱為是 an undirected graph or a graph, 並以(u,v) 形式來表示邊。
- 相反的，若邊有方向性，則稱為 a directed graph or a digraph, 並以$< u,v >$ 形式來表示邊。
- 在這門課，沒特別強調時邊都沒有方向性，邊簡寫為uv。

圖的例子

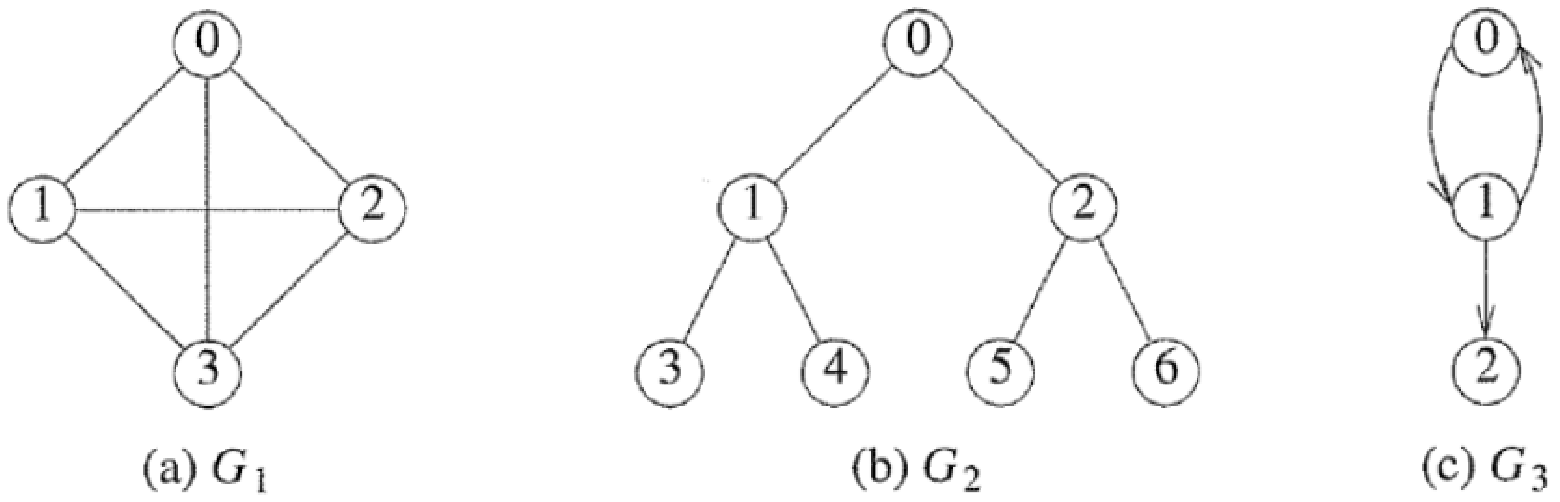


Figure 6.2: Three sample graphs

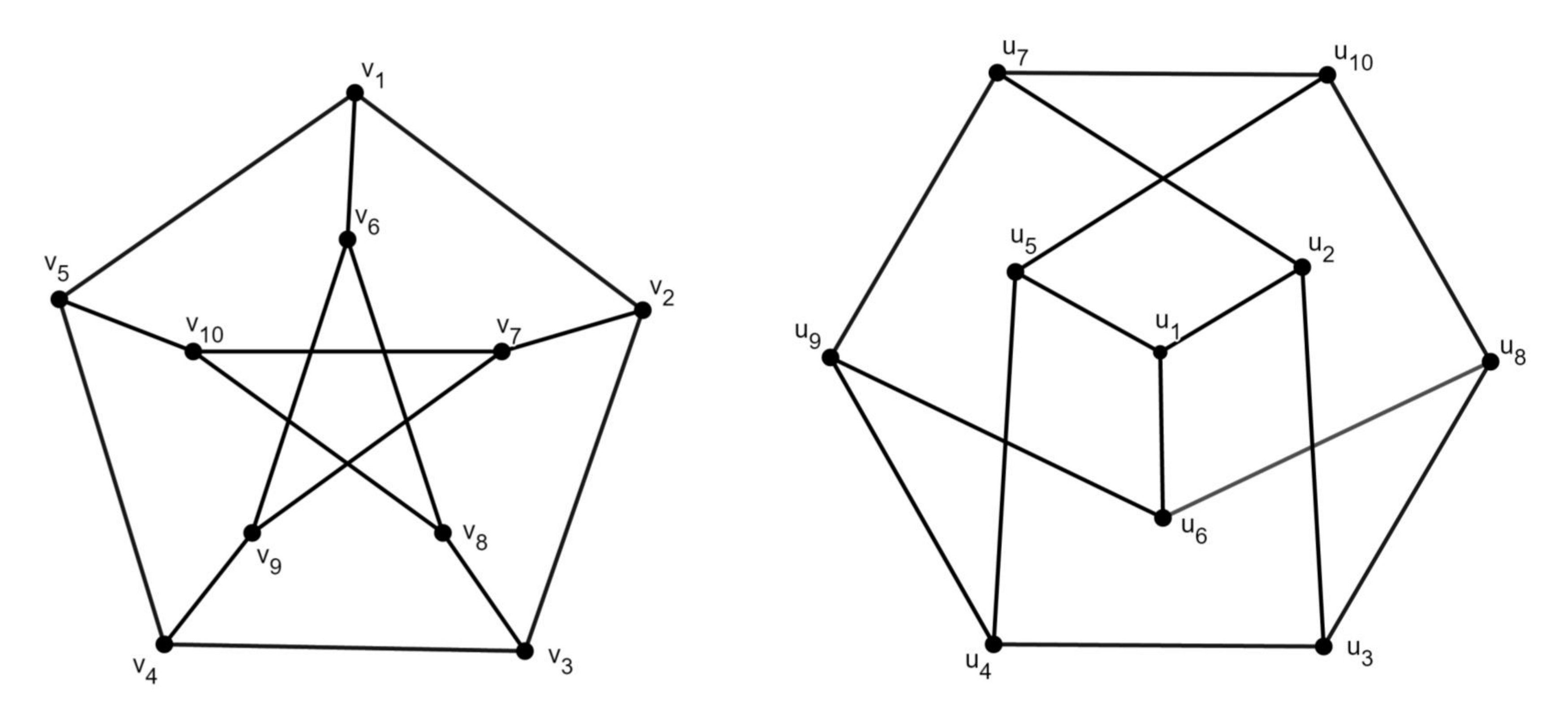
The set representation of each of these graphs is

$$V(G_1) = \{0,1,2,3\}; \quad E(G_1) = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$$
$$V(G_2) = \{0,1,2,3,4,5,6\}; \quad E(G_2) = \{(0,1),(0,2),(1,3),(1,4),(2,5),(2,6)\}$$
$$V(G_3) = \{0,1,2\}; \quad E(G_3) = \{<0,1>,<1,0>,<1,2>\}.$$

一些特殊的圖

- (n-)complete graph K_n 完全圖
- bipartite graph 二分圖
- complete bipartite graph $K_{m,n}$完全二分圖
- (n-)cycle 圈
- (n-)path 路徑

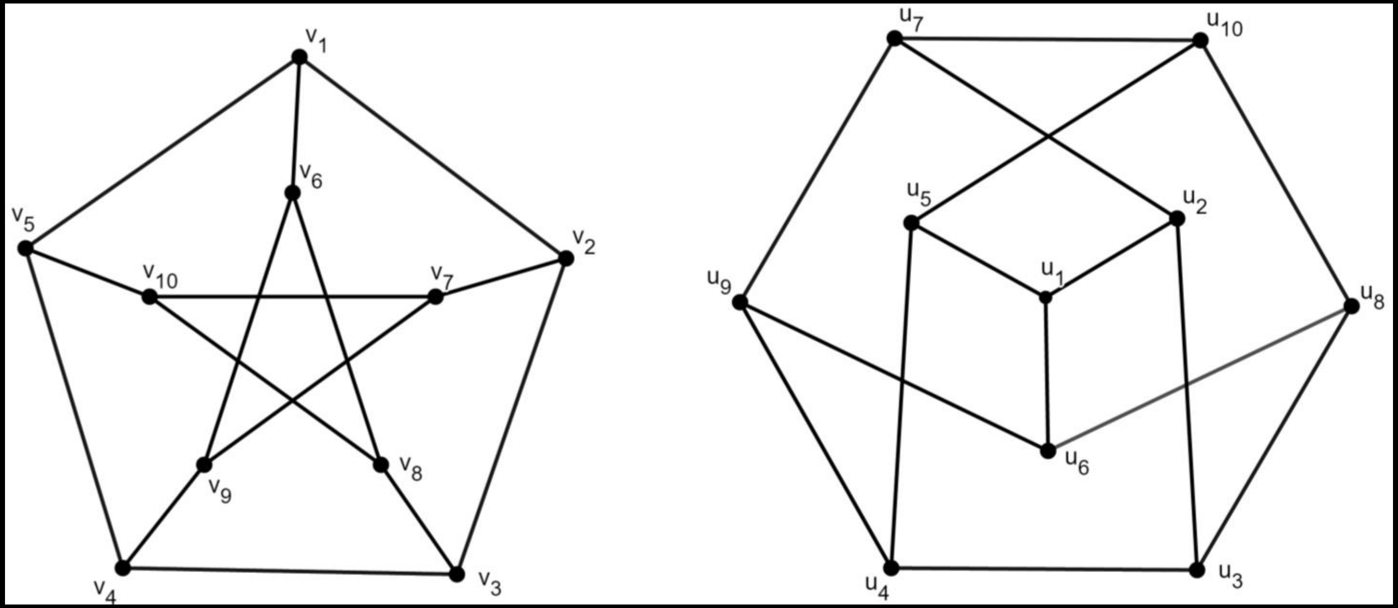
圖的性質：圖只在意點和邊的連結性，不在意怎麼畫。



- 以上兩圖皆為 Petersen graph，此時稱他們同構 isomorphic。

Isomorphism 同構

- An isomorphism from a graph G to a graph H is a bijection $f\colon V(G) \to V(H)$ such that $uv \in E(G)$ if and only if $f(u)f(v) \in E(H)$. We say “G is isomorphic to H”, written $G \cong H$, if there is an isomorphism from G to H.



圖graph的定義

- Let $G=(V,E)$, v 的度數 degree 是指與這個點相連的邊數，記作 $\deg_G(v)$ or $\mathrm{d}_G(v)$。
- If $\deg_G(v)$ is odd(even), called odd(even) vertex.
- If $\deg_G(v)$ is 0, called isolated vertex 孤立點.
- If $\deg_G(v)$ is 1, called leaf 葉子.
- $\Delta(\mathrm{G})=$ the maximum degree
- $\delta(\mathrm{G})=$ the minimum degree

subgraph 子圖

- If $V(H) \subseteq V(G)$ and $E(H) \subseteq E(G)$, we call H is a subgraph of G, then we write $H \subseteq G$ and say that “G contains H”.

complement 補圖

- The complement $\bar{G}$ of a graph G is the graph with vertex set V(G) defined by $uv \in E(\bar{G})$ if and only if $uv \notin E(G)$.

Handshaking Lemma (Euler)

- Let $G = (V, E)$, we have $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.
- idea:two-way counting 雙邊計數

- proposition 任意圖的奇點數目一定是偶數

walk 道路, trail 行跡, path 路徑

- A walk is a list $v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$ of vertices and edges such that, for $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{k}$, the edge e_i has endpoints v_{i-1} and v_i.
- A trail is a walk with no repeated edge.
- A path is a walk with no repeated vertex.
- The length of a walk, trail, path, or cycle is its number of edges. A walk or trails closed if its endpoints are the same, open otherwise.
- 但在演算法的書裡，用 path 表示 walk，用 simple path 表示 path 或 cycle。

Euler trail

- 如果一條行跡包含了圖的所有邊，而且圖的每一條邊在行跡中恰好出現一次，則叫它是一條Euler行跡(Euler trail)。
  (就是大家以前可能玩過的一筆畫畫完)

- proposition 如果一個圖有一條Euler trail，則必為全部偶點或是恰2個奇點.
- proof

Connected 連通

- A graph G is connected if it has a uv-path whenever $u, v \in V(G)$ (otherwise, G is disconnected).

walk and path

- Lemma. For two vertices u, v of G, there is a u, v-path if and only if there is a u, v-walk.
- Idea:the shortest walk

Well-ordering Principle 良序原理

- Every nonempty set of positive integers has a least element.
- 註:well-ordering principle 是 mathematical induction的等價形式

Euler trail 行跡

- proposition G有Euler行跡的必要條件是，兩個非孤立點之間有一條道路。

Euler tour Euler迴路

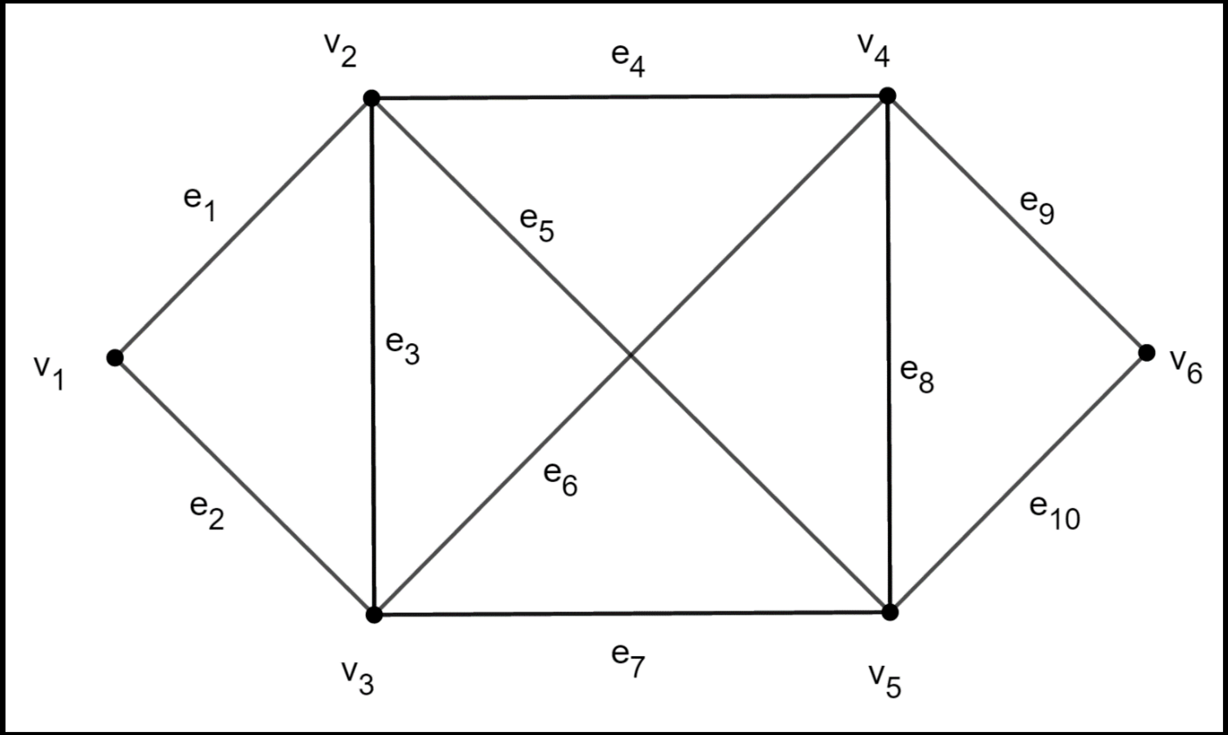
- theorem 一個恰含一點或不含孤立點的圖G存在Euler迴路(起點和終點是同一個點)的充份必要條件是，G是連通的，而且它的所有點都是偶點。
- idea:對G的邊數m做強數學歸納法

- Remark 起點(終點)可以任選

Euler trail Euler行跡

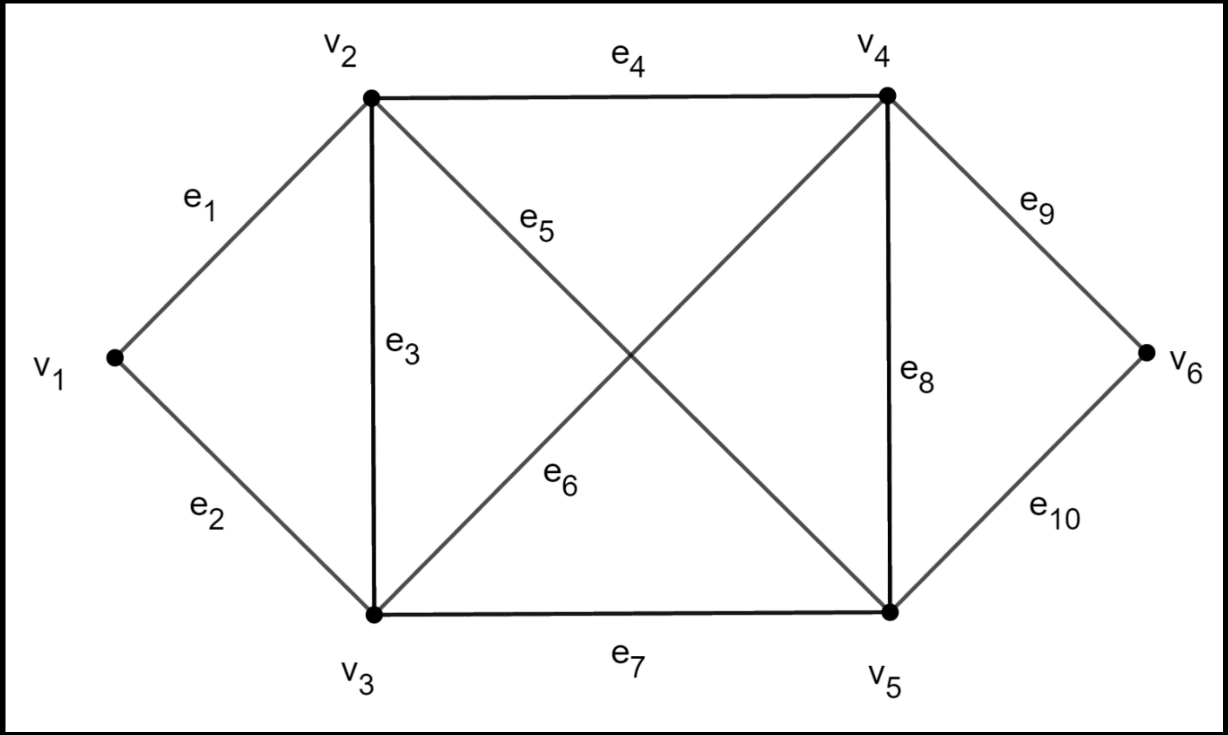
- theorem 一個不含孤立點的圖G存在Euler行跡的充份必要條件是，G是連通的，而且它恰好只有兩個奇點。
- idea:將G中兩個奇點連起來

如何找出 Euler迴路？



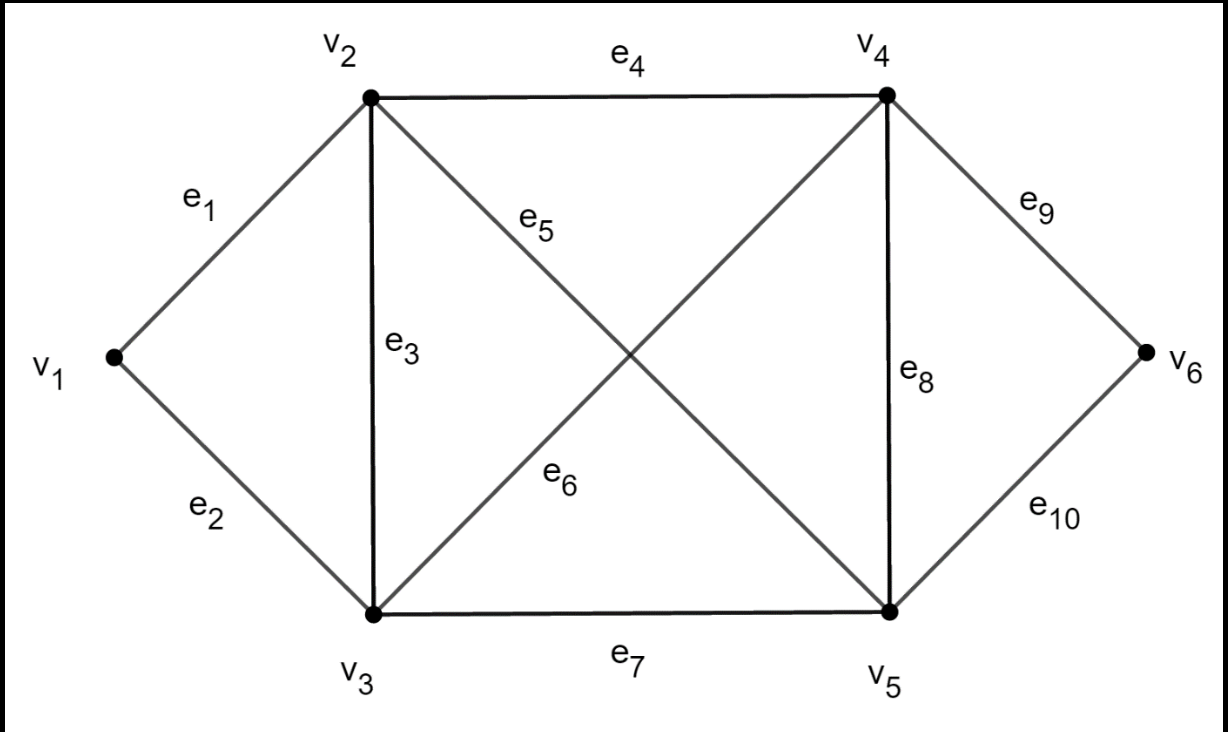
- 利用證明的想法：可行，但太慢！例如：從v_1出發，盡量「能走就走」，最後回到出發點，這時如果已經把所有邊都走過了，那就找到了Euler迴路，但也許偏偏走了捷徑，例如 $v_1e_1v_2e_3v_3e_2v_1$ ，這樣一來還要把那些邊扣除，用新的圖遞迴繼續找，非常花時間。

如何找出 Euler迴路?



- Fleury演算法：在找下一條邊時，找一條還沒走過的邊使得G-{所有走過的邊}是連通的。此時可以證明這樣選的確可以走過G的所有邊，但確認圖是否連通也是麻煩的，而且每走一步就要驗證一次，也不是一個有效率的方法。

如何找出 Euler迴路?



- 改良的演算法：盡量能走就走，不能走就回頭找前一個點，從未走過的邊走完之後再插入。
- 舉例：一開始仍然走$v_1e_1v_2e_3v_3e_2v_1$

作業6:圖論理論作業

- 以下有7道習題，是我挑選大家應該有機會做出來的題目，每題20分。
- 這些題目都是理論題目，因此不可使用電腦窮舉(尤其是第一題)。
- 作答方式：可使用 word 打字，再依格式更改檔名後放進雲端硬碟。也可以手寫後拍照或掃描，再依格式更改檔名後放進雲端硬碟。唯拍照請注意畫面的清晰度，我如果看不清楚會沒有分數。

習題1

- 證明假設把8*8的西洋棋盤上位於同一條對角線上的兩個頂點格子去掉(於是只剩下一個只有62格的棋盤)，則這個棋盤沒辦法分割成若干個1*2的長方形。

習題2

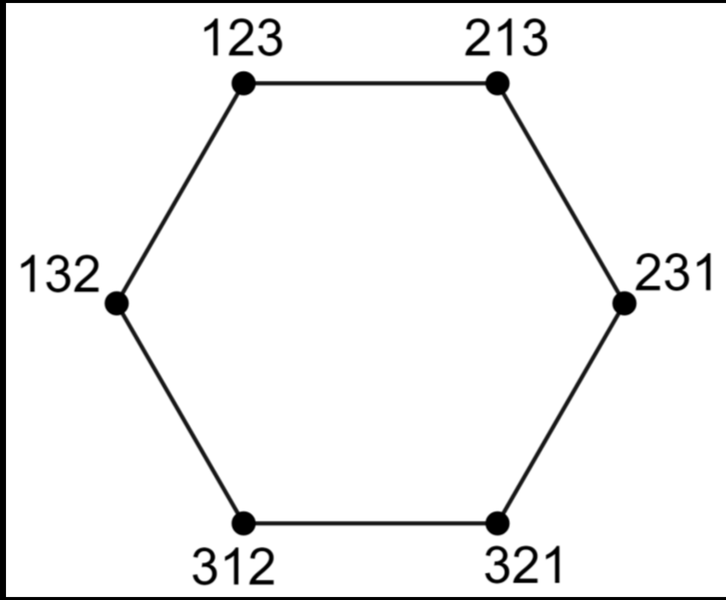
- 當 $n \geq 2$ 的時候，假設 $2n$ 個人當中每個人至少與其他 n 個人認識。證明其中至少有四個人，使得這四個人能夠圍著圓桌而坐，讓每個人兩旁的人都是他認識的人。

習題3

- 平面上有 n 個相異點，已知任意兩個點的距離最少是1。證明最多只有 $3n$ 對點的距離恰好是1。
- 提示：把這些點當中，所有距離是1的點對連邊。在所給的條件下，每個點的度數最多是多少？

習題4

- 令圖 G_n 的點集是所有 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的排序。兩個排序 $a_1a_2\ldots a_n$ 與 $b_1b_2\ldots b_n$ 相鄰若且唯若兩者可以在交換一對相鄰元素之後變成對方，如下圖 G_3。證明 G_n 是連通的。



習題5

- 若圖G有 n 個點與 m 條邊使得 $m > \binom{n-1}{2}$，證明G是連通的。當 $n \geq 2$ 的時候，找出一條非連通圖使得 $m = \binom{n-1}{2}$。

習題6

- 證明圖G和它的補圖$\bar{G}$中至少有一個是連通的。

習題7

- 證明連通圖G的任兩條最長路徑(點不重覆的walk)P與Q最少有一個公共點。